

Entropía de Entrelazamiento e Irreversibilidad en Teoría de Campos

Santiago Ansaldo

Director: David Blanco



Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

8 de septiembre de 2023

Resumen

En este trabajo se estudia la entropía de entrelazamiento en el contexto de la teoría cuántica de campos. Específicamente, su aplicación para el estudio de la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización. Para esto, primero se estudia la idea general del grupo de renormalización y la primera demostración (no entrópica) de su irreversibilidad en $d = 1 + 1$: el denominado *teorema c*, comentando sobre sus intentos de generalización a dimensiones mayores. Luego, se revisa una prueba alternativa de este teorema basada en la propiedad de la subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento del vacío, la cual se ha logrado generalizar a $d = 2 + 1$. Por último, para $d = 3 + 1$, además de la subaditividad fuerte, se necesita otra propiedad clave, denominada propiedad de Markov del vacío. En esta tesis se hace también una revisión de dichos trabajos que han permitido culminar con una demostración unificada para dos, tres y cuatro dimensiones.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que fueron fundamentales en la realización de este trabajo. Primero, agradecer a mi director David por acompañarme durante todo este año, por todo el tiempo que dedicó y por enseñarme tanto sobre esta área tan interesante de la física. También quiero agradecer a mi familia por apoyarme a lo largo de todos estos años de la carrera. Por último, agradecer a mis amigos y compañeros de la carrera por todo lo compartido en este tiempo.

Índice

1. Introducción	5
2. Entropía en Teoría de Campos	8
2.1. Entropía de Entrelazamiento	8
2.1.1. Entropía de Von Neumann	8
2.1.2. Entropía de Entrelazamiento	10
2.1.3. Subaditividad Fuerte de la Entropía	11
2.2. Entropía en Teoría de Campos	14
2.2.1. Teoría de Campos en la Red	14
2.2.2. Subsistemas y Causalidad	18
2.2.3. Cálculos de Entropía en Teoría de Campos	20
3. Irreversibilidad en Teoría de Campos	24
3.1. El Grupo de Renormalización	24
3.2. Teorema c (1+1)	26
3.3. Teorema a (3+1)	29
3.4. Teorema c en Más Dimensiones	30
4. Demostraciones Entrópicas de Irreversibilidad	32
4.1. Teorema c (1+1)	32
4.2. Teorema F (2+1)	36
4.3. Teorema a (3+1)	41
5. Conclusiones	44

1 Introducción

La entropía de entrelazamiento tiene diversas aplicaciones dentro de las distintas ramas de la Física Teórica. En un principio, se intentó explicar el origen estadístico de la entropía de los agujeros negros, la cual es proporcional al área del horizonte, como entropía de entrelazamiento [1]. También, se utiliza para distinguir nuevas fases topológicas y puntos críticos en materia condensada [2] y para el estudio de ciertas aplicaciones en el marco de la correspondencia AdS/CFT [3, 4, 5]. En el contexto de teorías cuánticas de campos (QFT), la entropía de entrelazamiento es una cantidad fundamental que contiene mucha información sobre la teoría misma. En este trabajo, estudiamos su aplicación a la estructura del flujo del grupo de renormalización (RGF) para QFTs.

La idea central del grupo de renormalización es que un cambio de escala de energía se puede asimilar a un cambio en los parámetros que describen la teoría. Esto determina un flujo en el espacio de teorías de campos a medida que uno explora de las altas energías (ultravioleta UV) a las bajas energías (infrarrojo IR). A este se lo denomina el flujo del grupo de renormalización (RGF). En los extremos del espectro energético, tanto en el UV como en el IR, las teorías son invariantes conforme (CFT), lo que las establece como puntos fijos en el espacio de teorías. Nos interesa estudiar las trayectorias a lo largo del flujo que unen a estos puntos fijos, en específico, su aparente propiedad de ser irreversibles en el sentido de que cuando se va del UV al IR se pierden grados de libertad (por esta razón se lo conoce como flujo).

Zamolodchikov dio una primera demostración de la irreversibilidad del RGF para campos en dimensión $1 + 1$, conocido como el *teorema c* [6]. Este teorema prueba que existe una función monótona c que interpola entre las cargas centrales de las CFTs en los puntos fijos de los extremos del RGF. De esta manera, siguiendo el flujo, solo nos

podemos encontrar con modelos del IR con carga central menor a la del punto fijo del UV. Zamolodchikov utiliza funciones de correlación del tensor de energía momento y cierta positividad de las mismas para encontrar la función c (es una prueba que no utiliza la entropía).

La generalización del teorema c a dimensiones mayores no es inmediata. Cardy conjeturó que lo que juega el rol análogo a la carga central para la irreversibilidad para toda dimensión par es la anomalía de traza [7]. Efectivamente, se demostró para el caso de $3 + 1$ dimensiones por Komargodski y Schwimmer un teorema análogo al teorema c pero donde el rol de c lo juega a , y es conocida consecuentemente como el *teorema a* [8]. Por otro lado, para el caso de dimensión impar el problema se vuelve mas complejo debido a la inexistencia de la anomalía de traza. Se cree que la cantidad relevante es el coeficiente constante de la energía libre F de una CFT calculada sobre una esfera euclídea: *teorema F* [9, 10], pero debido a que es una cantidad no local y no aparece en las funciones de correlación, se dificulta la extensión del teorema c . Mientras tanto, en [11] se observó que la parte universal finita o el coeficiente del término logarítmico de la entropía de entrelazamiento de una esfera tiene las propiedades necesarias para los teoremas c en teorías con dual holográfico en cualquier dimensión. Estas cantidades juegan el rol del coeficiente de la energía libre de una esfera euclídea y al coeficiente de la anomalía de traza respectivamente [12].

Este resultado incentiva el estudio del término universal de la entropía de entrelazamiento de una esfera para el vacío de una CFT (el término constante para dimensión impar y coeficiente que acompaña al término logarítmico en dimensión par) como candidato para demostrar la irreversibilidad del RGF para cualquier dimensión. Basándose en propiedades de la entropía de entrelazamiento, Casini y Huerta obtuvieron el teorema c [13] ($1 + 1$ dimensiones). La propiedad clave fue la subaditividad fuerte (SSA) de la EE. Al igual que en el caso de la prueba de Zamolodchikov, la generalización a dimensiones mayores no es inmediata. De todas formas, resolvien-

do cuidadosamente los problemas debido a divergencias geométricas que aparecen en la EE, lograron generalizar a $2 + 1$ dimensiones [14] dando con la única prueba del teorema F que se hizo hasta el momento. En el caso de $3 + 1$ dimensiones es necesario utilizar una propiedad extra [15]: la propiedad de Markov del vacío en una CFT. Combinando las propiedades de SSA y de Markov, dieron una demostración unificada de los teoremas c , F y a [16].

La tesis está organizada de la siguiente manera. En la Sección 2 se introduce la entropía de entrelazamiento, con énfasis en la propiedad de subaditividad fuerte que es crucial para las pruebas entrópicas de irreversibilidad. En la Sección 3 se introduce el grupo de renormalización, así como la primera demostración de irreversibilidad en teoría de campos. Por último, en la Sección 4 se estudia los distintos teoremas de irreversibilidad entrópicos y se discute su unificación para dimensiones 2, 3 y 4.

2 Entropía en Teoría de Campos

En esta sección, se busca explicar cómo se calcula la entropía de entrelazamiento en la teoría de campos mediante algunos ejemplos. En primer lugar, en la sección 2.1, se define qué es la entropía de entrelazamiento y se mencionan un par de propiedades importantes que serán relevantes para este trabajo. Después, en la sección 2.2, nos restringimos a modelos de teorías de campos y estudiamos la entropía en este contexto, ilustrando un par de métodos de cálculo de la misma.

2.1 Entropía de Entrelazamiento

2.1.1. Entropía de Von Neumann

En mecánica cuántica, el estado de un sistema se describe mediante un operador $\hat{\rho}$ denominado matriz densidad. A cualquier estado de un espacio de Hilbert de dimensión finita le corresponde una única matriz de densidad $\hat{\rho}$, tal que reproduce los valores de expectación mediante $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho})$, para todo observable \hat{O} del sistema. La matriz de densidad puede pensarse como un ensamble de estados puros $|\psi_i\rangle$ normalizados

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^k p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1)$$

donde los números p_i son las probabilidades ($p_i \geq 0$ y por la condición de normalización $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, resulta además $\sum p_i = 1$). En el caso de que algún $p_i = 1$ se tiene que $\hat{\rho} = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ representa a un estado puro. Notar que $\hat{\rho} = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ es equivalente a que $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ (esta es otra forma de caracterizar un estado puro). Si esto no sucede se dice que el estado es mixto.

Una forma de cuantificar la pureza de un estado es utilizando la entropía de Von

Neumann

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^k \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (2)$$

donde λ_i son los autovalores de la matriz densidad. Es fácil ver que $S(\hat{\rho}) \geq 0$, y la igualdad sólo se cumple si $\hat{\rho}$ es puro. Si el espacio de Hilbert \mathcal{H} es de dimensión finita, el estado que maximiza la entropía es $\hat{\rho} = \hat{I}/\text{dim}(\mathcal{H})$ y resulta $S(\hat{I}/\text{dim}(\mathcal{H})) = \log(\text{dim}(\mathcal{H}))$. A este estado se lo denomina maximalmente mixto.

Para el caso de un sistema de dos niveles (q-bit con base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$), esto se puede visualizar utilizando la esfera de Bloch. Esta es una representación geométrica que mapea todos los estados posibles en una esfera de radio uno, como se ve en la Figura 1a. La representación se obtiene escribiendo a la matriz densidad como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3)$$

donde σ_i son las matrices de Pauli y \vec{p} es un vector tal que $|\vec{p}| \leq 1$. Los vectores \vec{p} son los que definen la esfera de Bloch.

Notar que $|\vec{p}|^2 = 1$ es equivalente a $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, por lo que todos los estados puros posibles se ven representados en el contorno de la esfera por los vectores de modulo uno. Por esto, todos los estados que se encuentran en el contorno de la esfera, $|\vec{p}| = 1$, tienen entropía de Von Neumann nula. Se puede ver un ejemplo de estado puro en la Figura 1b, donde se tomo $\vec{p} = \vec{e}_z$ obteniendo $\hat{\rho} = |+\rangle \langle +|$.

Por otro lado, cualquier estado con $|\vec{p}| < 1$ es un estado mixto. Es interesante el caso $\vec{p} = 0$ (ver Figura 1c), para el cual se obtiene el estado maximalmente mixto $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) = \frac{1}{2} \mathbf{I}$.

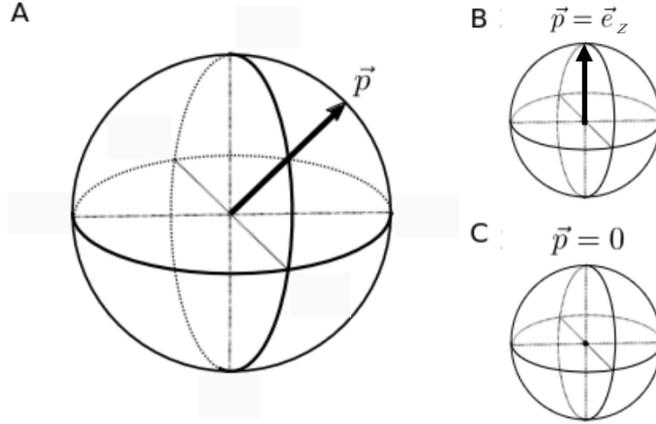


Figura 1: Representación de los estados utilizando la esfera de Bloch. En A se ve un estado genérico, mientras que en B y C se ven un ejemplo de estado puro y el estado maximalmente mixto respectivamente.

2.1.2. Entropía de Entrelazamiento

Para describir estados de un sistema compuesto por dos subsistemas se utiliza el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada uno de ellos $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. En este trabajo nos restringimos a los casos en los que el estado del sistema global es puro. Para estos casos se puede cuantificar el entrelazamiento entre dos subsistemas utilizando lo que se define como entropía de entrelazamiento. Esta se obtiene calculando la entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida a uno de los subsistemas

$$S_A \equiv S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A). \quad (4)$$

Como el estado global es puro se tiene que $S_A = S_B$. Esto sale usando la descomposición de Schmidt [17] que nos permite escribir $|\psi\rangle = \sum \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle$, donde $\{|i_A\rangle\}$ y $\{|i_B\rangle\}$ son conjuntos linealmente independientes de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , y λ_i son números reales no negativos que satisfacen $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ conocidos como los coeficientes de Schmidt.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de entropía de entrelazamiento. Pensemos

en el caso de dos q-bits con base $B_A = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ y $B_B = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, utilizando la notación de $|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$. Como primer ejemplo, tomamos el estado global $|\psi\rangle = |+-\rangle$. La matriz densidad que representa a este estado es $\hat{\rho} = |+-\rangle\langle+-|$ y tomando la traza parcial para obtener la matriz densidad reducida al subsistema A se obtiene

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = |+\rangle\langle+|. \quad (5)$$

Si se calcula la entropía de Von Neumann de esta matriz el resultado es $S(\hat{\rho}_A) = 0$, ya que el único autovalor no nulo de $\hat{\rho}_A$ es 1. Todo estado global de la forma $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ tendrá $S_A = 0$. Se dice que son estados globales no entrelazados (o separables). Los subsistemas asociados a un estado global puro no entrelazado son estados puros.

Consideremos por otro lado el estado global $|\psi\rangle = (|+-\rangle - |-+\rangle) / \sqrt{2}$ con $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. La matriz densidad reducida al subsistema A es

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|). \quad (6)$$

Para este caso se tiene que $S(\hat{\rho}_A) = -\frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}) = \log(2) = \log(\dim\mathcal{H}_A)$. Esto es el máximo valor que puede tomar entropía de Von Neumann de $\hat{\rho}_A$. En este caso, se dice que $|\psi\rangle$ es un estado maximalmente entrelazado. Los estados globales con entrelazamiento máximo, son aquellos para los cuales sus subsistemas están en estados maximalmente mixtos. Mas en general, un estado puro $|\psi\rangle$ está entrelazado si y sólo si $\hat{\rho}_A$ es mixto.

2.1.3. Subaditividad Fuerte de la Entropía

Ya hemos mencionado algunas propiedades de la entropía de Von Neumann, como por ejemplo $S(\hat{\rho}) \geq 0$ y $S(\hat{\rho}) \leq \ln(\dim(\mathcal{H}))$. Otra propiedad particularmente relevante

es la denominada subaditividad fuerte de la entropía (o SSA por sus siglas en ingles).

Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB}) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_{BC}) \geq \mathcal{S}(\hat{\rho}_{ABC}) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_B). \quad (7)$$

De esta propiedad se puede ver que la entropía de las partes de un sistema puede ser mayor a la entropía de todo el sistema. La demostración de esta desigualdad se basa en un resultado matemático conocido como el teorema de Lieb (ver por ejemplo [18]).

Si bien la demostración de la SSA es algo compleja, es relativamente sencillo probar su validez numéricamente. Para esto, generamos una matriz rectangular X de dimensión $d \times d_{aux}$ de forma aleatoria, y a partir de ella construimos una matriz densidad del estado global

$$\hat{\rho} = \frac{XX^\dagger}{\text{Tr}(XX^\dagger)}. \quad (8)$$

Esto da un matriz densidad razonable, con dimensión $d \times d$ y autovalores reales.

Para probar la SSA, queremos que el estado global que generemos este compuesto por tres subsistemas $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$. Por esta razón, al elegir d se tiene que considerar que se pueda escribir como el producto de las dimensiones de los subsistemas $d = d_A \cdot d_B \cdot d_C$. En este caso elegimos $d = 8$ donde los tres subsistemas tienen $d_i = 2$.

A partir del estado global $\hat{\rho} \equiv \hat{\rho}_{ABC}$ generado, se calcularon las trazas parciales necesarias para obtener las matrices densidad $\hat{\rho}_{AB}$, $\hat{\rho}_{BC}$ y $\hat{\rho}_B$ de la siguiente manera

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{c=1}^{dim_C} [\mathbf{I}^{(dim_A)} \otimes \mathbf{I}^{(dim_B)} \otimes e_c^{(dim_C)}]^T \cdot \hat{\rho}_{ABC} \cdot [\mathbf{I}^{(dim_A)} \otimes \mathbf{I}^{(dim_B)} \otimes e_c^{(dim_C)}], \quad (9)$$

donde $\mathbf{I}^{(dim)}$ es la matriz identidad de dimensión $dim \times dim$, y $e_i^{(dim)}$ es el vector de dimensión dim , con $e_i^{(dim)} \cdot \hat{i} = 1$ y $e_i^{(dim)} \cdot \hat{j} = 0$ para todo $j \neq i$. La construcción de $\hat{\rho}_{BC}$ y $\hat{\rho}_B$ es análoga.

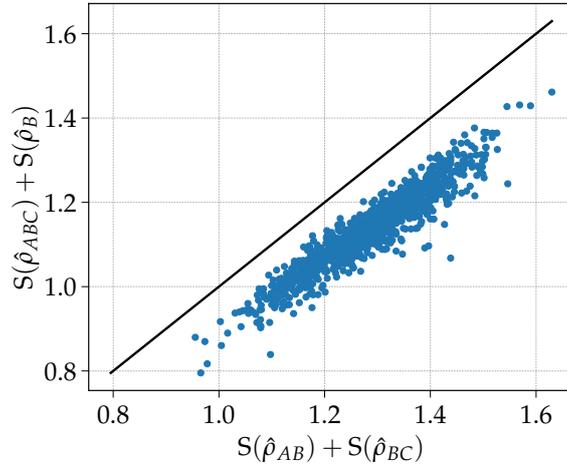


Figura 2: Se generó una matriz densidad de un estado global $\hat{\rho}_{ABC}$ de manera aleatoria y se pusieron en comparación los términos de la derecha con los de la izquierda de la Ecuación (7). Se gráfico la recta de pendiente uno como muestra de donde satura la desigualdad.

Por último, se calcularon los autovalores de todas las matrices de densidad para obtener las entropías de entrelazamiento necesarias para generar la Figura 2. También se graficó la línea donde se satura la desigualdad ($S(\hat{\rho}_{AB}) + S(\hat{\rho}_{BC}) = S(\hat{\rho}_{ABC}) + S(\hat{\rho}_B)$) para poder ver claramente que la desigualdad se cumple para todos los 1000 casos distintos en los que se la evaluó.

La SSA tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, como prueba de consistencia para la fórmula de Ryu-Takayanagi [19, 20] y en temas de la teoría cuántica de la información [17]. También por su relación con la entropía relativa, donde la SSA se traduce en la monotonía de la entropía relativa y se puede utilizar para derivar desigualdades de la energía en QFT [21]. En este caso, nos interesa por su aplicación para demostrar la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización [13, 14, 16].

2.2 Entropía en Teoría de Campos

2.2.1. Teoría de Campos en la Red

En teoría cuántica de campos, los grados de libertad de un sistema están descritos por operadores asociados a los puntos del espacio-tiempo, por lo que el número de grados de libertad es un continuo infinito. Para ganar intuición de lo que es un subsistema en teoría cuántica de campos, se puede pensar en el espacio discretizado a tiempo constante (ver Figura 3), que vamos a llamar red, y luego tomar el límite al continuo. La discretización se puede generar de distintas maneras pero sólo se obtienen resultados significativos para la teoría continua si estos no dependen de la forma en que se discretiza. Se dice que estos resultados que no dependen de cómo se discretiza son cantidades *universales* de la teoría de campos.

Para ilustrar un cálculo de entropía en QFT, y cómo a partir de ella pueden extraerse cantidades universales, consideramos el caso del campo escalar real sin masa en $2 + 1$ dimensiones. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} (\pi^2(x) - (\nabla \phi(x))^2). \quad (10)$$

Haciendo una discretización espacial como la de la Figura 3 el lagrangiano queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\pi_{ij}^2 - \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{\epsilon} \right)^2 - \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{ij}}{\epsilon} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi_{ij}^2 - \frac{1}{\epsilon} (2\phi_{ij}^2 - \phi_{i+1,j}^2 - \phi_{i,j+1}^2 + 2\phi_{i+1,j}\phi_{ij} + 2\phi_{ij}\phi_{i,j+1}) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

donde ϵ es el tamaño de la distancia entre dos puntos vecinos de la red (o *cutoff*). En la Ecuación (11) se ve que al discretizar la QFT obtenemos una red de osciladores armónicos acoplados. Un subsistema de la QFT en la red será un grupo de estos

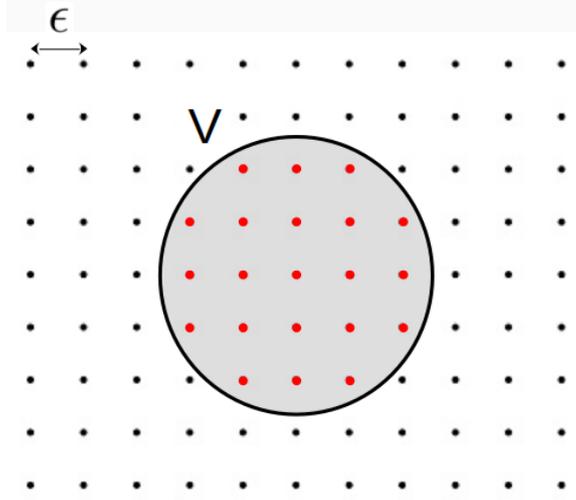


Figura 3: Espacio discretizado (a $t = cte$) utilizando una red cuadrada de cutoff ϵ para el modelo del campo escalar libre en $2 + 1$. Los grados de libertad de un modelo libre definido sobre el espacio son osciladores armónicos acoplados localizados en cada punto de la red. Un subsistema en el continuo ($\epsilon \rightarrow 0$) es el conjunto de osciladores que quedan dentro de V . Por este motivo, en QFT, los subsistemas están asociados a regiones del espacio.

osciladores como se ve en Figura 3. Al volver al continuo, esto es equivalente a tomar la región del espacio que encierra a dicho osciladores.

Vamos a calcular la entropía de entrelazamiento de una región esférica en vacío para el campo escalar libre sin masa en $3 + 1$. A estos efectos, resulta mas conveniente elegir una discretización radial para aprovechar la simetría esférica. El hamiltoniano del campo es

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2), \quad (12)$$

donde $[\hat{\phi}(t, \bar{x}), \hat{\pi}(t, \bar{y})] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{y})$. Expandimos el campo y el momento,

$$\phi_{lm}(r) = r \int d\Omega \phi(x) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (13)$$

$$\pi_{lm}(r) = r \int d\Omega \pi(x) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (14)$$

en los términos armónicos esféricos $Y_{lm}((\theta, \varphi))$. Debido a la simetría esférica el problema se descompone para cada l, m obteniendo

$$[\phi_{lm}(r), \pi_{l'm'}(r')] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(r - r'), \quad (15)$$

$$H = \sum_{lm} H_{lm}, \quad (16)$$

$$H_{lm} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \left(\pi_{lm}^2(r) + r^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_{lm}(r)}{r} \right) \right]^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi_{lm}^2(r) \right). \quad (17)$$

Luego se discretizó la variable radial en números enteros y se puso al sistema en una caja esférica para hacerlo finito. El radio puede tomar los valores $0, 1, \dots, M$, donde M es el tamaño de la caja. Reescribiendo el hamiltoniano con las variables discretas

$$[\phi_{lm,j}, \pi_{l'm',j'}] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{jj'}, \quad (18)$$

$$H_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left(\pi_{lm,j}^2 + (j+1/2)^2 \left(\frac{\phi_{lm,j}}{j} - \frac{\phi_{lm,j+1}}{j+1} \right)^2 + \frac{l(l+1)}{j^2} \phi_{lm,j}^2 \right), \quad (19)$$

donde $\phi_{lm,M+1} = 0$. Se puede notar que este hamiltoniano es cuadrático llevándolo a la forma $H = \frac{1}{2} \sum \pi_{lm,i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_{lm,i} K_{(l)}^{ij} \phi_{lm,j}$, de manera que el estado fundamental es un estado Gaussiano. Para este tipo de estados, el cálculo de la entropía se simplifica. Siguiendo el trabajo [22], primero se definen los correladores $X_{(l)} = 1/2K_{(l)}^{-1/2}$ y $P_{(l)} = 1/2K_{(l)}^{1/2}$, luego se reducen a la región V dada por una esfera de radio $R = n+1/2$ tomando los primeros bloques $n \times n$ obteniendo $X_{(l)}^V$ y $P_{(l)}^V$. Definiendo

$$C_{(l)}^V = \sqrt{X_{(l)}^V P_{(l)}^V}, \quad (20)$$

se llega a que

$$S(R) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) S_{n,l}, \quad (21)$$

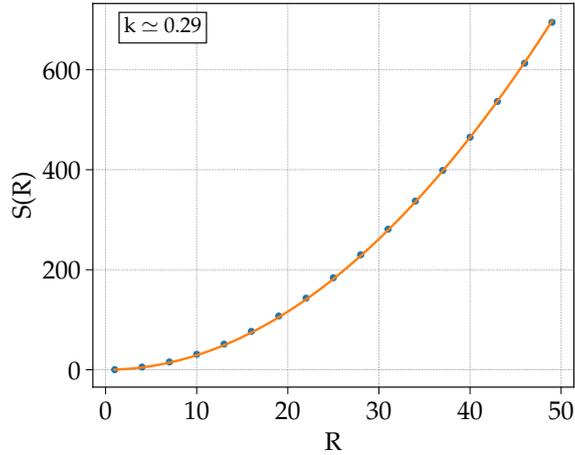


Figura 4: Entropía de entrelazamiento de una esfera para un campo libre no masivo en función de su radio. Se ajustó la función $S(R) \simeq kR^2$. Trabajando con mayor precisión se puede encontrar también una contribución subdominante logarítmica en R .

con

$$S_{n,l} = \text{Tr} \left((C_{(l)}^V + 1/2) \log(C_{(l)}^V + 1/2) - (C_{(l)}^V - 1/2) \log(C_{(l)}^V - 1/2) \right). \quad (22)$$

Para obtener un resultado numérico no hace falta sumar para un número infinito de l ya que $(2l+1)S_{n,l}$ va como $l^{-3} \log(l)$ para l grande. Por lo tanto, tomando $M = 100$, $R \in (1, 50)$ y $l_{max} = 500$ se obtuvo los resultados que se ven en la Figura 4 (que son insensibles a variaciones que involucren l mayores). Con este grado de precisión, se obtuvo una dependencia en la entropía proporcional al área de la esfera $S(R) \simeq kR^2$. Al ajustar la función cuadrática se obtuvo que el parámetro $k \sim 0,29$. Este valor concuerda con el calculado en [23]. k sin embargo no es un término universal, pues variando la forma en la que se discretiza k cambia.

Hay que tener en cuenta que al discretizar se tomo un *cutoff* $\epsilon = 1$, pero el resultado de la entropía depende de este valor. Por análisis dimensional el término de área en $S(R)$ viene como $k(R/\epsilon)^2$. Si aumentamos la precisión numérica, se ve que

aparece también un término logarítmico, por lo que

$$S(R) = k \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^2 + a \log \left(\frac{R}{\epsilon} \right) + \text{const.} \quad (23)$$

La constante $a = -1/90$ es proporcional a la anomalía de traza [24]. Y, a diferencia de k , es una cantidad universal de la teoría.

Si se toma el límite de ϵ tendiendo a cero para volver al continuo, la entropía diverge. Esto se debe a las contribuciones ultra violetas acumuladas en los bordes de la región. Aunque el resultado diverja, se observó que se pueden obtener cantidades universales como la anomalía a que son propias de la teoría de campos considerada.

2.2.2. Subsistemas y Causalidad

Hasta el momento, pensamos en subsistemas como regiones espaciales definidas a tiempo constante. Ahora vamos a ver que un subsistema no solo está asociado a una región espacial sino a su dominio causal. Para esto, primero necesitamos hacer algunas definiciones. El dominio causal $D(S)$ de una región espacio-temporal S es el conjunto de puntos p tal que cualquier curva causal que pase por p intersecta a S . Un conjunto S es acausal si no existe ningún par de puntos en el conjunto que estén causalmente relacionados. Una superficie de Cauchy Σ es un conjunto acausal cuyo dominio causal es todo el espacio-tiempo M , es decir $D(\Sigma) = M$. En el espacio de Minkowski se tiene que cualquier hiper-superficie acausal que se extienda en todas las direcciones espaciales es una superficie de Cauchy. Se pueden ver ejemplos de superficies de Cauchy en la Figura 5

Utilizando las ecuaciones de movimiento de Heisenberg se puede evolucionar cualquier observable de una superficie de Cauchy a otra. De esta manera se puede dar una descripción completa utilizando los observables en Σ . Esto sugiere que cualquier superficie de Cauchy puede jugar el rol equivalente a la variedad espacial en la sección

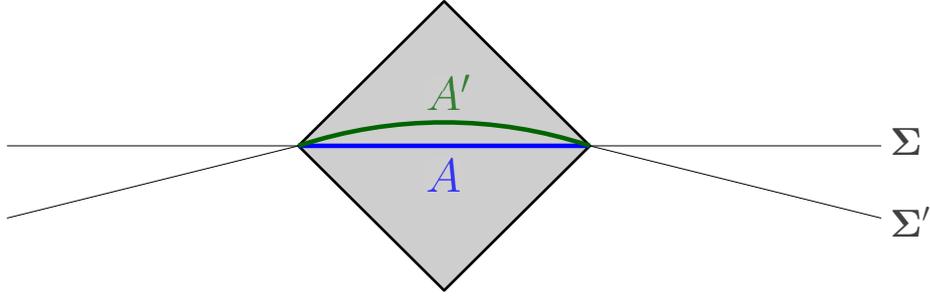


Figura 5: Una region A de una superficie de Cauchy Σ y una region A' de otra superficie de Cauchy Σ' con el mismo dominio causal (en gris), $D(A') = D(A)$.

2.2.1, y podemos definir a un subsistema como una región A de la superficie como muestra la Figura 5.

Con el mismo argumento, es posible dar un paso adicional. Para una región A de Σ , cualquier observable dentro de su dominio causal $D(A)$ se puede escribir en términos de los observables en A . Esto implica que hay que asociar a \mathcal{H}_A y ρ_A no con A mismo, sino con $D(A)$. Para decirlo de otro modo, si se tiene una región A' de otra superficie de Cauchy Σ' distinta con $D(A') = D(A)$ (ver Figura 5), se tiene que $\mathcal{H}_{A'} = \mathcal{H}_A$, $\rho_{A'} = \rho_A$ y por lo tanto

$$S(A') = S(A) \quad \text{si} \quad D(A') = D(A). \quad (24)$$

Como ya se dijo, podemos concluir que los subsistemas están asociados a dominios causales.

El resultado de la Ecuación (24) nos dice que se respeta causalidad. Esto quiere decir que la información no puede viajar mas rápido que la velocidad de la luz. Por ejemplo, se puede ver una demostración para el caso del campo de Dirac en [25].

2.2.3. Cálculos de Entropía en Teoría de Campos

Se conocen muy pocos resultados exactos de la entropía de entrelazamiento en teoría de campos. En esta subsección comentaremos algunos de los resultados más relevantes obtenidos en el último tiempo.

Los métodos mas utilizados para calcular entropías analíticamente son el método de réplicas y el de la resolvente. El primero permite obtener la entropía de renyi S_n a partir del cálculo de la función de partición del modelo en cierto espacio replicado. La entropía de entrelazamiento se obtiene luego realizando una extensión analítica para S_n y tomando que $n \rightarrow 1$ [26]. En el método de la resolvente se expresa S en función de la resolvente R de una función de correlación de la teoría para ciertos modelos y estados. Así, el cálculo de R permite hallar S .

Un Ejemplo

Como ejemplo, revisamos el cálculo de la entropía de entrelazamiento de un conjunto A de n intervalos separados espacialmente para el caso de un campo libre de Dirac en 2 dimensiones sin masa en vacío. Esta cuenta se hizo en [25]. La región A se puede ver en la Figura 6, donde $A = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n$. Para calcular la entropía se utilizó el método de la resolvente. Primero recordamos la relación entre la entropía y el correlador del campo [22]

$$S(A) = -\text{Tr} [(1 - C)\log(1 - C) + C\log(C)]. \quad (25)$$

La función de correlación de dos puntos x e y a tiempos iguales, para el campo libre de Dirac no masivo en dos dimensiones es

$$C(x, y) = \frac{1}{2}\delta(x - y) - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x - y}. \quad (26)$$

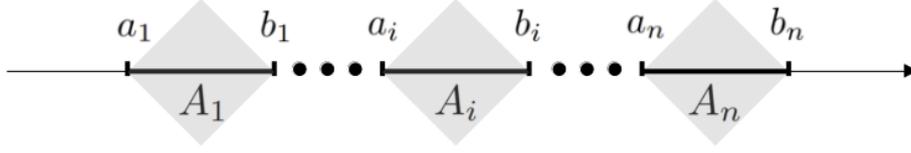


Figura 6: Un número n de intervalos separados. La región de interés es la unión de todos los intervalos $A = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n$.

Como estamos en el caso no masivo, se tiene que el problema se descompone en las dos quiralidades. Se define el operador de quiralidad $\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1$ y el proyector $Q_{\pm} = (1 \pm \gamma^3)/2$. También se introducen las coordenadas nulas $u_{\pm} = t \pm x$. Para el caso no masivo la ecuación de Dirac queda $\partial_{u_{\pm}}\Psi_{\mp} = 0$, donde $\Psi_{\pm} = Q_{\mp}\Psi$ son las componentes del campo con quiralidad bien definida. Entonces se tiene

$$\Psi = \Psi_+(u_+) + \Psi_-(u_-). \quad (27)$$

Estos campos sólo dependen de una de las coordenadas nulas. Al desacoplarse, sólo hace falta resolver el problema para una de las quiralidades con el correlador dado por

$$D(x, y) = \frac{1}{2}\delta(x - y) - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(x - y)}, \quad (28)$$

donde el dominio de x e y son las proyecciones de la región A en los ejes de las nuevas coordenadas u_+ y u_- . Definimos la resolvente de D como

$$R^0(\beta, x - y) = (D - 1/2 + \beta)^{-1} \equiv \left(-\frac{i}{2\pi} \frac{1}{x - y} + \beta\delta(x - y) \right)^{-1}. \quad (29)$$

Para la región de interés $A = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$ (ver Figura 6) formada por n intervalos disjuntos con $a_i < b_i, b_i < a_{i+1}$, se obtiene la siguiente expresión (ver

por ejemplo [27, 28])

$$R^0(\beta, x - y) = (\beta^2 - 1/4)^{-1} \left(\beta \delta(x - y) + \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-\frac{i}{2\pi} \log\left(\frac{\beta-1/2}{\beta+1/2}\right)(z(x)-z(y))}}{x - y} \right), \quad (30)$$

con

$$z(x) = \log \left(-\frac{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}{\prod_{i=1}^n (x - b_i)} \right). \quad (31)$$

Ahora, volvemos a la Ecuación (25) y la escribimos en función de la resolvente

$$S(A) = - \int_{1/2}^{\infty} d\beta \operatorname{Tr} \left[(\beta - 1/2)(R(\beta) - R(-\beta)) - \frac{2\beta}{\beta + 1/2} \right]. \quad (32)$$

De acá se obtiene que cada término de quiralidad definida contribuye a la entropía

con

$$S(A) = -\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\infty} d\beta \int_A dx \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin \left[\frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{\beta-1/2}{\beta+1/2} \right) (z(x) - z(y)) \right]}{(\beta + 1/2)(x - y)}, \quad (33)$$

donde x e y son coordenadas de uno de los ejes de quiralidad. Si se integra primero sobre β queda

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_A dx \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{z(x)-z(y)}{2} \coth((z(x) - z(y))/2) - 1}{(x - y)(z(x) - z(y))} \\ &= \frac{1}{12} \int_A dx \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x - a_i} - \frac{1}{x - b_i} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{i,j} \log|b_i - a_j| - \sum_{i < j} \log|a_i - a_j| - \sum_{i < j} \log|b_i - b_j| - n \log \epsilon \right). \end{aligned} \quad (34)$$

donde para pasar a la última línea introdujimos un cutoff e integramos no sobre A sino sobre $\cup(a_i + \epsilon, b_i - \epsilon)$, para regularizar la integral. Este mismo resultado puede obtenerse usando el método de réplicas (ver por ejemplo [29]). Para el caso de la entropía de entrelazamiento para un único intervalo ($n = 1$ y $A = (a, b)$), teniendo

en cuenta las dos quiralidades es

$$S(A) = \frac{1}{3} \log \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right). \quad (35)$$

Otros Resultados

Este resultado que obtuvimos para el fermión, es un caso particular de la entropía de entrelazamiento de un intervalo para cualquier CFT en vacío, cuya expresión es [30]

$$S(A) = \frac{c}{3} \log \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right). \quad (36)$$

Para el caso del fermión de Dirac se tiene $c = 1$ y recuperamos la Ecuación (35). La carga central c de un modelo conforme esta vinculada con el álgebra de Virasoro asociada a la simetría conforme y, en cierta forma, está asociada con los grados de libertad del sistema. En particular, esta cantidad es relevante al estudiar la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización.

3 Irreversibilidad en Teoría de Campos

En esta sección, se presenta la noción del grupo de renormalización y su conexión con la irreversibilidad en QFT. Primero, en 3.1 se introduce el grupo de renormalización y el porqué uno esperaría que su flujo fuese irreversible. Luego, en 3.2 se presenta una demostración de la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización (RGF) en $1 + 1$ dimensiones propuesta por Zamolodchikov en el año 1986. En 3.3, se da una idea de la demostración en el caso de $3 + 1$ dimensiones. Por último, en 3.4 se da un panorama general de otras pruebas de irreversibilidad.

3.1 El Grupo de Renormalización

La idea central del grupo de renormalización (RG) es que el cambio de escala de energía puede ser descrito por un cambio en los parámetros de un modelo de teoría de campos, como puede ser las masas o las constantes de acoplamiento. Esto determina un flujo o trayectoria en el espacio de teorías de campos a medida que uno explora desde las energías altas (ultravioletas, UV) hasta las energías bajas (infrarrojas, IR).

Esta idea se puede formalizar de la siguiente manera. Se considera la acción de un modelo de campos $S = \int \sigma(g, a, x) dx$, la cual depende de un cutoff a y de un conjunto de parámetros adimensionales $g = (g^1, g^2, \dots)$ conocidos como las constantes de acoplamiento. Se asume que existe un grupo de transformaciones en el espacio Q de las constantes de acoplamiento g que depende de un único parámetro $R_t Q \rightarrow Q$ de manera que un modelo descrito por una acción $S(R_t g, e^{t/2} a)$ es equivalente a un modelo con $s(g, a)$ en el sentido de que las funciones de correlación de ambas

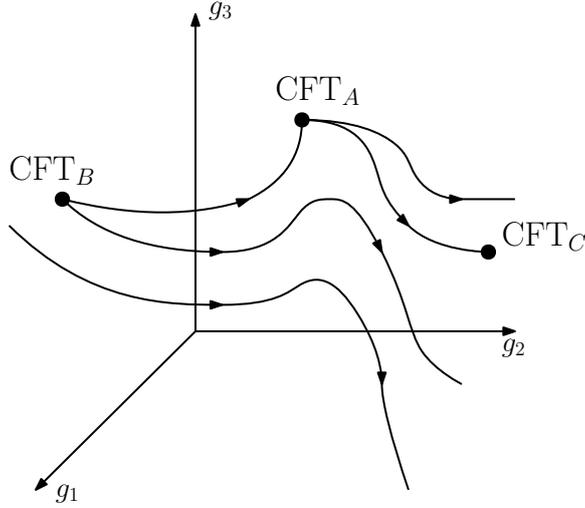


Figura 7: Espacio de las constantes de acoplamiento g_1 , g_2 y g_3 , donde cada punto del espacio describe un modelo de teoría de campos distinto. Un cambio de escala de energía puede ser descrito por una variación de los parámetros g , determinando trayectorias que recorren del UV al IR. En este espacio de modelos de campos se puede tener puntos fijos que equivalen a los modelos con invariancia de escala. A nosotros nos interesan las trayectorias que unen dos puntos fijos del espacio.

concuerdan para escalas $x \gg e^{t/2}a$ ($t > 0$). Estas transformaciones de los parámetros g definen el grupo de renormalización. Para cuantificar esta variación se definen las funciones beta

$$dg^i = \beta^i(g)dt. \quad (37)$$

Este vector β^i define las trayectorias (las curvas tangentes a $\beta^i(g)$ en cada punto g) que se ven en la Figura 7, donde también se marcan tres puntos fijos como ejemplo. En el espacio de modelos de campos con invariancia relativista, hay puntos fijos correspondientes a modelos que son invariantes de escala, los cuales también respetan la simetría conforme (son CFT). Para los puntos fijos, cuyos parámetros vamos a llamar g_* de manera genérica, se tiene que $\beta^i(g_*) = 0$, porque la invariancia de escala implica que ante un reescalamiento de energía (dt) los parámetros de acoplamiento no varían ($dg^i = 0$).

Por otro lado, como $t > 0$, resulta que $e^{t/2}a > a$ y se espera que parte de la información debido al comportamiento ultravioleta se pierda ya que no se pueden examinar correlaciones en distancias menores a la del cutoff. Esta idea permite conjeturar que las trayectorias asociadas al RG que conectan dos puntos fijos tienen una única dirección (del UV al IR). En la siguiente subsección, vamos a ver la primera demostración concreta de esta conjetura.

3.2 Teorema c (1+1)

En el año 1986, Zamolodchikov demostró la irreversibilidad del RGF en 2 dimensiones. Este es conocido como el *teorema c* [6]. Zamolodchikov usa las condiciones de renormalizabilidad, positividad (o "reflection positivity"), y la invariancia de Poincaré para mostrar que existe una función $c(g)$, que en los puntos fijos coincide con la carga central o anomalía de traza c del modelo conforme correspondiente, y que es monótonamente decreciente en la trayectoria del UV al IR, es decir,

$$\frac{d}{dt}c(g) = \beta^i(g)\frac{\partial}{\partial g^i}c(g) \leq 0, \quad (38)$$

Para los distintos puntos fijos se van a tener distintas cargas centrales $\tilde{c}(g_*)$ asociados a distintos modelos de CFT. Si esta función $c(g)$ existe, tenemos que cambiando la escala desde un modelo conforme en el ultravioleta (CFT_{UV}) con carga central $c(g_{UV}) = c_{UV}$, hasta uno en el infrarrojo (CFT_{IR}) con $c(g_{IR}) = c_{IR}$, siguiendo la línea de flujo (como podría ser la trayectoria que une la CFT_B a la CFT_A en la Figura 7)

$$c_{UV} \geq c_{IR}, \quad (39)$$

donde $c(g)$ decrece monótonamente en el intermedio. La irreversibilidad del RGF se puede demostrar si se encuentra una $c(g)$ con estas propiedades. Ahora vamos a

ver como Zamolodchikov la define utilizando funciones de correlaciones del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$.

La simetría de traslación lleva a la existencia del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$ el cual satisface la ecuación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Introduciendo las coordenadas complejas $(z, \bar{z}) = (x^1 + ix^2, x^1 - ix^2)$ se puede definir las cantidades $T \equiv T_{zz}$ y $\Theta \equiv T_{z\bar{z}}$. A partir de la conservación del tensor de energía momento podemos obtener la siguiente relación:

$$\bar{\partial}T + \partial\Theta = 0, \quad (40)$$

donde se utilizó la notación de $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ y $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Además, para cualquier CFT (punto fijo g_*) se tiene que el correlador $\langle TT \rangle$ cumple [31]

$$\langle T(z, \bar{z})T(0, 0) \rangle_{g_*} = \frac{\tilde{c}(g_*)}{2z^4}, \quad (41)$$

Se definen las siguientes funciones adimensionales

$$\begin{aligned} C(z\bar{z}/a^2) &= 2z^4 \langle T(z, \bar{z})T(0, 0) \rangle|_{x^2=x_0^2} \\ H(z\bar{z}/a^2) &= \bar{z}z^3 \langle T(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle|_{x^2=x_0^2} \\ G(z\bar{z}/a^2) &= \bar{z}^2 z^2 \langle \Theta(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle|_{x^2=x_0^2} \end{aligned} \quad (42)$$

donde $x_0 \gg a$ es una escala arbitraria, y a es el cutoff. Como C , H y G son adimensionales y tienen simetría de rotación, van a depender de $x^2/a^2 = z\bar{z}/a^2$. Esto nos da una relación entre las derivadas

$$z\partial f = \bar{z}\bar{\partial}f = -\frac{a}{2}\frac{\partial}{\partial a}f, \quad (43)$$

siendo f una función con estas mismas propiedades. Además, las ecuaciones de Callan-

Symanzik [32] para escalas mucho mayores a la del cutoff ($x_0 \gg a$) nos dice que

$$0 = \frac{d}{dt}f = \left[\beta^i \partial_i + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} \right] f. \quad (44)$$

Usando estas últimas dos ecuaciones se llega a

$$\beta^i \frac{\partial}{\partial g^i} f = z \partial f = \bar{z} \bar{\partial} f \equiv \dot{f}, \quad (45)$$

La idea, es utilizar las funciones de la Ecuación (42) para definir una $c(g)$ que tenga las propiedades que buscamos. Para esto, primero vemos algunas relaciones entre estas funciones que salen de usar la Ecuación (40) y la Ecuación (45)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{C} &= \bar{z} \bar{\partial} [z^4 \langle T(z, \bar{z}) T(0, 0) \rangle] = -\bar{z} z^4 \partial \langle T(z, \bar{z}) \Theta(0, 0) \rangle \\ &= -[z \partial - 3] \bar{z} z^3 \langle T(z, \bar{z}) \Theta(0, 0) \rangle = -\dot{H} + 3H \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \bar{z} \bar{\partial} [\bar{z} z^3 \langle T(z, \bar{z}) \Theta(0, 0) \rangle] = H - \bar{z}^2 z^3 \partial \langle \Theta(z, \bar{z}) \Theta(0, 0) \rangle \\ &= H - [z \partial - 2] \bar{z}^2 z^2 \langle \Theta(z, \bar{z}) \Theta(0, 0) \rangle = H - \dot{G} + 2G \end{aligned} \quad (47)$$

Teniendo en cuenta las relaciones obtenidas para las funciones de correlación y las propiedades que queremos que cumpla $c(g)$, se define

$$c(g) = C - 4H - 6G, \quad (48)$$

una función que cumple

$$\dot{c}(g) = -12G \leq 0. \quad (49)$$

La desigualdad vale porque la condición de positividad [33] nos dice que G es definida positiva. De esta manera, se obtiene la propiedad de que $c(g)$ es una función que decrece monótonamente a lo largo del RGF. Incluso, debido a la relación de la

Ecuación (41), se tiene que toma los valores de la carga central de la CFT en los puntos fijos $c(g_*) = \tilde{c}(g_*)$. Con esto, queda demostrado la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización en 2 dimensiones para toda QFT renormalizable, que respete positividad y sea invariante de Poincaré.

3.3 Teorema a (3+1)

La prueba de Zamoldchikov que vimos recién usa fuertemente que el modelo es de $1 + 1$ dimensiones. Esto hace que su extensión a más dimensiones no sea inmediata. Sin embargo, el teorema de irreversibilidad ha podido probarse para $3+1$ dimensiones. En $3 + 1$ dimensiones la traza del tensor de energía momento es

$$T^\mu_\mu = aE_4 - cW_{\mu\nu\rho\sigma}^2, \quad (50)$$

donde E_4 es la densidad de Euler y $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Weyl. Cardy propuso [7] que la constante a (anomalía de traza) es la constante que juega el rol análogo al de c en $1 + 1$, es decir, que para los puntos fijos UV e IR

$$a_{IR} < a_{UV}. \quad (51)$$

Komargodski y Schwimmer demostraron existe una función $a(g)$ que coincide con la anomalía de traza para CFTs y que es monótona utilizando el truco del dilatón [8], el cual ya había sido utilizado [34] en una prueba alternativa para $d = 2$. A este teorema de irreversibilidad en $3 + 1$ se lo denomina *teorema a*. A continuación esbozamos la idea general de la demostración del teorema a (para más detalle ver [8]).

Primero, provocamos un flujo del RG perturbando una teoría conforme (CFT_{UV}) con un operador \mathcal{O} . La acción perturbada se escribe $S[\phi] = S_{CFT_{UV}} + \int \lambda(\mu)\mathcal{O}$, donde μ representa una escala de energía. Elegimos \mathcal{O} tal que S fluye hacia cierta CFT_{IR}.

Con la perturbación se pierde la simetría conforme. Se puede restaurar la simetría acoplado la teoría con un campo auxiliar τ

$$\int d^4x \lambda(\mu) \mathcal{O}(x) \rightarrow \int d^4x \lambda(\mu e^{\tau(x)}) \mathcal{O}(x). \quad (52)$$

Al campo auxiliar $\tau(x)$ se lo conoce como dilatón. La acción $S[\phi, \tau]$, obtenida del acoplamiento de $S[\phi]$ con τ , es invariante de escala si el campo dilatón transforma como $\tau \rightarrow \tau + s$ cuando la energía es reescalada como μe^{-s} .

En el IR, se tiene que el dilatón se desacopla, ya que S fluye a CFT_{IR} y no existe ninguna escala donde τ pueda acoplarse. Entonces $S_{efectiva}^{IR}[\phi, \tau] = S_{CFT_{IR}} + S_{dilatón}$. Como $S[\phi, \tau]$ es una CFT, se puede obtener una relación entre la anomalía de traza en el UV y el IR de la siguiente manera (esta relación es válida para las dos constantes por separado a y c)

$$a(S[\phi, \tau]) = a(S_{CFT_{UV}}) = a(S_{CFT_{IR}}) + a(S_{dilatón}), \quad (53)$$

o

$$a(S_{dilatón}) = \Delta a = a_{UV} - a_{IR}. \quad (54)$$

Por último, se identifica el término en $S_{dilatón}$ que da la anomalía de traza. Komargodski y Schwimmer encuentran que este término es definido positivo, de manera que se cumple la Ecuación (51).

3.4 Teorema c en Más Dimensiones

Durante los años siguientes hubo mucho trabajo para encontrar análogos a funciones c con comportamiento monótono bajo el RGF para dimensiones mayores a 2. Para dimensión 4, como vimos en la subsección 3.3, se observó que el coeficiente a

del término Euler en la anomalía de traza sirve para demostrar la irreversibilidad. Como ya dijimos, a este se lo conoce como el *teorema a* [8]. Se cree que en dimensiones pares, el coeficiente a es el candidato correcto para demostrar los teoremas de irreversibilidad.

Para el caso de dimensión impar, el problema se hace mas complejo debido a la falta de la anomalía de traza. Basado en estudios de teorías con dual holográfico, en [11] se propuso que en dimensiones impares el término constante de la entropía de entrelazamiento de una esfera era un buen candidato para demostrar irreversibilidad. Esta conjetura, ahora conocida como *teorema F*, fue probada por Casini y Huerta en [14], extendiendo las ideas de una prueba alternativa para el teorema c en $d = 2$ utilizando entropía de entrelazamiento. Esta demostración se basa en la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía. Luego, estudiando teorías supersimétricas, se conjeturó que la energía libre [9] $F = -\log Z$ de una CFT en 3 dimensiones, calculada sobre una esfera euclídea S^3 , cumple las condiciones necesarias para el teorema F (de acá saca su nombre). En [10] se chequeó su validez en distintos modelos sin supersimetría. Se puede ver que estas dos cantidades son proporcionales en [12].

La prueba entrópica de Casini y Huerta [14], es la única que hay actualmente del teorema F ($d = 3$). En $d = 2$ existen varias pruebas distintas del teorema c . Por ejemplo, utilizando propiedades de las funciones de correlación [6, 34, 35], o de las propiedades de la entropía de entrelazamiento [13] o entropía relativa [36].

En la próxima sección, vamos a estudiar las demostraciones entrópicas de la irreversibilidad. Para esto, se van a complementar los conceptos de entropía de entrelazamiento en teoría cuántica de campos que vimos en la sección 2, con los del flujo del grupo de renormalización que vimos en esta sección 3.

4 Demostraciones Entrópicas de Irreversibilidad

En la sección 3, vimos las demostraciones del teorema c ($1 + 1$ dimensiones) y del teorema a ($3 + 1$ dimensiones), utilizando funciones de correlación del tensor de energía momento y sus propiedades. También, notamos que para el caso del teorema F en $2 + 1$ dimensiones, no se ha encontrado aún una prueba utilizando estas mismas propiedades.

Para estos tres teoremas (c , F y a), se ha encontrado una prueba alternativa [13, 14, 16] basándose en la propiedad de la subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento (ver Ecuación (7)). En esta sección, vamos a utilizar el concepto de entropía de entrelazamiento en QFT aprendido en la sección 2, para examinar la irreversibilidad del RGF, tal como hicieron Casini y Huerta.

4.1 Teorema c ($1+1$)

En [13], se demostró que la irreversibilidad del RG en $1 + 1$ dimensiones, para QFT que respetan la invariancia relativista y causalidad, se puede ver como consecuencia de la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento (Ecuación (7)). En la prueba, se demuestra que existe una función c entrópica, que en los puntos fijos (UV e IR) del RG es igual a la carga central de la CFT correspondiente, y tiene comportamiento monótono bajo el RGF. Esta función entrópica c juega un rol similar al de la función $c(g)$ de Zamolodchikov.

Antes de empezar con la demostración, veamos la forma correcta de aplicar la SSA para regiones en QFT. Una región, como vimos en la subsección 2.2.2, está asociada

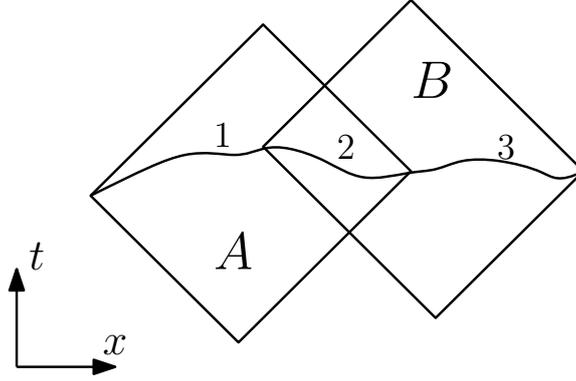


Figura 8: Intervalos 1, 2 y 3 sobre una misma superficie de Cauchy, definidos sobre el espacio de Minkowski en $1+1$ dimensiones. Se marcaron los dominios causales de $A = 1 \cup 2$ y $B = 2 \cup 3$. Para las regiones A y B definidas de esta manera, se cumple la SSA, dada por la Ecuación (55).

al desarrollo causal de un subconjunto de una superficie de Cauchy. En esta sección, vamos a considerar que las regiones están dadas por un único subconjunto continuo de la superficie de Cauchy (un intervalo para $d = 2$). Para un intervalo en $1+1$ la entropía de entrelazamiento $S(l)$ depende de la longitud propia l del mismo por invarianza de Lorentz [37].

Consideremos dos regiones A y B que sean subconjuntos de una misma superficie de Cauchy (por ejemplo ver la Figura 8). Se definen a los intervalos 1, 2 y 3 tal como se ve en la Figura 8, de manera que $A = 1 \cup 2$ y $B = 2 \cup 3$. Como estos tres intervalos tienen intersección nula y están definidos sobre una misma superficie de Cauchy, se cumple SSA $S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) \geq S(\rho_{123}) + S(\rho_2)$. Esto nos dice que para las regiones consideradas ($A = 1 \cup 2$ y $B = 2 \cup 3$), podemos escribir la SSA de la siguiente forma

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cap B) + S(A \cup B). \quad (55)$$

Ahora, volviendo a la demostración de la irreversibilidad, consideremos el caso más específico de un par de intervalos boosteados A y B con extremos ubicados sobre

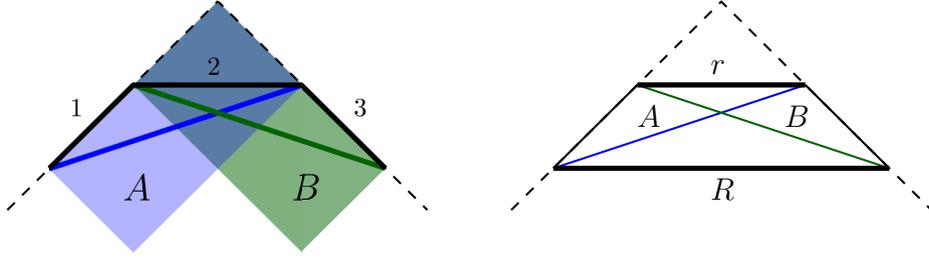


Figura 9: Izquierda: Diagrama espacio-temporal de Minkowski en $d = 2$, en el que se marcó con una línea punteada un cono de luz. Se consideran dos intervalos A y B , que tienen los mismos desarrollos causales que $1 \cup 2$ y $2 \cup 3$ respectivamente. Derecha: Se definen los intervalos a t constante con longitud propia R y r , que generan el mismo desarrollo causal que la unión y la intersección de A y B respectivamente.

un cono de luz, tal como muestra la Figura 9. Esta disposición es un caso límite en el que los intervalos 1 y 3 de la Figura 8 son superficies nulas. En el diagrama de la derecha de la Figura 9, se grafican también los intervalos a tiempo constante de longitud propia R y r , con el mismo desarrollo causal que la unión y la intersección de A y B respectivamente. A es equivalente al intervalo $1 \cup 2$ (análogamente B y $2 \cup 3$), en el sentido de que su dominio causal es el mismo, por lo que tienen la misma entropía de entrelazamiento. Del mismo modo, la unión de A y B es equivalente al intervalo $1 \cup 2 \cup 3$, el cual tiene el mismo dominio causal que R , y la intersección de A y B es equivalente al intervalo 2. Debido a la invariancia de Lorentz, la longitud propia de tanto de A como de B es de \sqrt{rR} .

Todas las entropías de la Ecuación (55) son para este caso entropías de un intervalo que, como dijimos depende sólo de la longitud propia del mismo. Teniendo en cuenta la longitud propia de cada intervalo, la Ecuación (55) queda

$$2S(\sqrt{rR}) \geq S(r) + S(R). \quad (56)$$

Escribiendo $R = r + \epsilon$, en el limite $\epsilon \rightarrow 0$ la Ecuación (56) se transforma en

$$rS''(r) + S'(r) = (rS')' \leq 0. \quad (57)$$

Podemos identificar entonces una función

$$c(r) = 3rS'(r) \quad (58)$$

que es monótonamente decreciente.

Como vimos en la subsección 2.2.3, la entropía de entrelazamiento de un intervalo de longitud l para una CFT en $1 + 1$ en el vacío es

$$S(l) = \frac{\tilde{c}}{3} \log(l/\epsilon), \quad (59)$$

donde \tilde{c} es la carga central de la CFT. Esto nos dice que en los puntos fijos del RGF (CFT), se tiene que $c(r) = \tilde{c}$.

Es interesante notar que la función c entrópica no coincide con la función $c(g)$ de Zamolodchikov. En [13], se puede ver un ejemplo del cálculo de ambas para el campo escalar real y un campo de Dirac. De todas formas, son similares en el sentido de que ambas demuestran la irreversibilidad del RGF, veamos porque.

Como vimos en la sección 3, al hacer variaciones en las constantes de acoplamiento, recorremos el flujo del grupo de renormalización, permitiendo así que la función $c(g)$ recorra los distintos modelos de QFT, dando una idea de irreversibilidad. Por otro lado, para el caso entrópico, consideramos el lenguaje de Wightman, donde un modelo de teoría de campos no se piensa que está definido a través de un Lagrangiano y sus constantes de acoplamiento, sino directamente a través del conjunto de todas sus funciones de correlación $\mathcal{W}_{(n)}(r_1, \dots, r_n)$. Con lo cual, al hacer dilataciones $r \rightarrow \lambda r$ se recorre el RGF, haciendo que $c(r)$ juegue el rol análogo a $c(g)$. Siguiendo esta

idea, los puntos fijos se alcanzan en los casos límites cuando $r \rightarrow 0$ para CFT_{UV} y $r \rightarrow \infty$ para CFT_{IR} , obteniendo que la función entrópica $c(r)$ se iguala a c_{UV} y c_{IR} respectivamente.

4.2 Teorema F (2+1)

La demostración del teorema c se basa fuertemente en que se está trabajando en dimensión $1+1$. Para dimensiones mayores, el equivalente a un intervalo será la esfera (círculo en $d = 2 + 1$). Pero, al querer generalizar el teorema a $2 + 1$ dimensiones, nos encontramos con que no se lo puede lograr utilizando la intersección y la unión de dos círculos. Esto se debe principalmente a dos problemas.

En primer lugar, las regiones que se forman en la unión e intersección de dos círculos, no son del mismo tipo. Esto hace que las entropías de entrelazamiento puedan tener distintos tipos de divergencias, y al escribir la SSA estas no se cancelen, dando un resultado no significativo. Al contrario, en $1 + 1$ dimensiones, la unión e intersección de intervalos también son intervalos. El segundo problema que surge de la unión e intersección de dos círculos, son los vértices que aparecen. Cuando se calcula la entropía de entrelazamiento de una región con vértices, cada uno de estos contribuye un término divergente dependiente de su ángulo de apertura.

Entonces, lo que se busca, es una forma de generar un resultado significativo de la Ecuación (7) controlando las divergencias de las entropías de entrelazamiento (haciendo que se cancelen). Casini y Huerta [14] llegaron a la conclusión de que se podía lograr si se generaliza la Ecuación (7) para un número N de regiones, y luego

se toma el límite $N \rightarrow \infty$. Por ejemplo, si se tienen tres regiones A , B y C

$$\begin{aligned}
S(A)+S(B) + S(C) &\geq S(A \cup B) + S(A \cap B) + S(C) \\
&\geq S(A \cup B \cup C) + S((A \cup B) \cap C) + S(A \cap B) \\
&\geq S(A \cup B \cup C) + S(((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)) + S(A \cap B \cap C) \\
&= S(A \cup B \cup C) + S((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) + S(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Inductivamente, se encuentra que repitiendo esto para un número arbitrario de regiones X_i con $i = 1, \dots, N$ se obtiene

$$\sum_i S(X_i) \geq S(\cup_i X_i) + S(\cup_{\{ij\}} (X_i \cap X_j)) + S(\cup_{\{ijk\}} (X_i \cap X_j \cap X_k)) + \dots + S(\cap_i X_i). \quad (60)$$

donde se tiene la misma cantidad de términos en la derecha y en la izquierda de la ecuación.

La idea es elegir N regiones tales que en principio sus uniones e intersecciones no sean la misma clase de regiones, pero que cuando se tome $N \rightarrow \infty$ tiendan a la misma clase. El primer ejemplo que se puede pensar, es el de N círculos descentrados rotados por un ángulo $\frac{2\pi k}{N}$ con $k = 1, 2, \dots, N$ en el plano, tal como se ve en la Figura 10. En el diagrama de la izquierda se muestra cómo se van rotando los círculos, mientras que en la derecha se puede ver el resultado de los N círculos, donde también se marcó con una línea más gruesa una de las regiones que se forma a partir de las intersecciones y uniones de estos (región de un término de la derecha de la Ecuación (60)). Visualmente se ve que estas regiones tienden a círculos para $N \rightarrow \infty$, pero su entropía no tiende a la de un círculo. Esto se debe a que, aunque nuestra visión limitada no vea esquinas, estas siguen estando y aportando términos divergentes. Además, se tiene que el perímetro de estas regiones no tienden al de un círculo, sino que son mas grandes debido a las ondulaciones formadas por las esquinas. Esto hace que en la relación

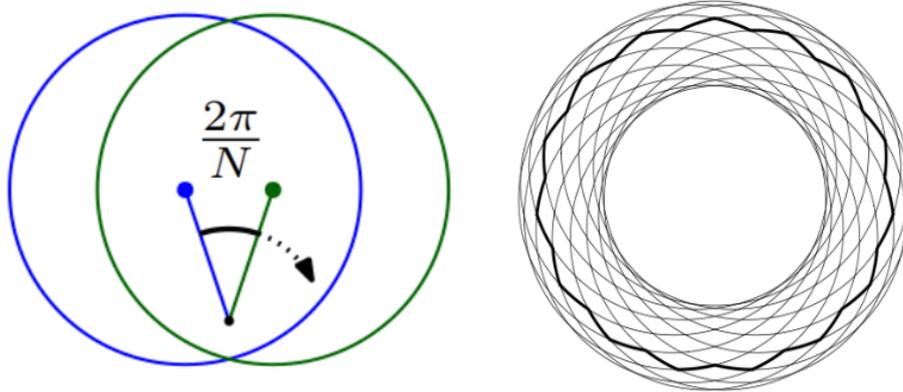


Figura 10: En el diagrama de la izquierda, se muestra una región circular definida sobre el plano espacial, y su rotación en un ángulo $2\pi/N$. Si se continúa generando rotaciones con este mismo ángulo se obtienen N círculos descentrados, tal como lo muestra el diagrama de la derecha (líneas finas). En este también se remarcó con una línea mas gruesa una de las regiones que resulta de las intersecciones y uniones de los círculos descentrados que aparece en la parte derecha de la Ecuación (60).

de la Ecuación (60) las divergencias de los términos de la derecha y de la izquierda no concuerden.

Sin embargo, si consideramos círculos boosteados con bordes sobre el cono de luz y los rotamos de la misma manera que a los círculos en el plano, aunque las esquinas sigan estando, están sobre una superficie nula (ver Figura 11). Esto tiene dos consecuencias. Primero, el perímetro de los círculos formados por las uniones e intersecciones de estos tienden al de un círculo suave. Segundo, los ángulos sobre la superficie nula son iguales a π , de manera que no aparecen divergencias asociadas a esquinas. Por lo tanto, se espera que las regiones de los términos de la derecha de la Ecuación (60) tiendan a la entropía de entrelazamiento de un círculo suave en el límite $N \rightarrow \infty$. En el diagrama de la izquierda de la Figura 11, se muestra el equivalente a los N círculos descentrados en el plano donde se remarcó con una línea más gruesa una de las regiones que se forma por la intersección y unión de estos.

Al igual que la entropía de entrelazamiento de un intervalo en $1 + 1$ solo depende

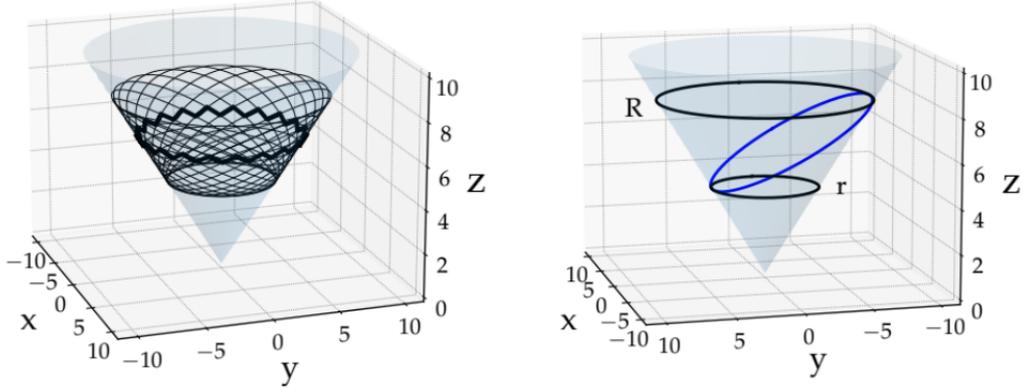


Figura 11: Izquierda: Se muestra el equivalente a los N círculos descentrados en el plano, rotados por un ángulo $2\pi/N$, pero en este caso se tienen N círculos boosteados. Además, se remarcó con una línea más gruesa una de las regiones que se forma por la unión y la intersección de estos. Derecha: Se graficó un único círculo boosteado, y se definen los círculos espaciales de radio R y r que se forman por sólo la unión y sólo la intersección de las regiones respectivamente para $N \rightarrow \infty$.

de su longitud propia, la entropía de un círculo en $2+1$ solo depende del radio de este. Veamos en detalle cuáles son las longitudes relevantes. En primer lugar, definimos a un círculo boosteado D con borde igual a la intersección del cono de luz con el plano,

$$t = x \frac{R - r}{R + r} + \frac{2rR}{R + r}, \quad (61)$$

tal como lo muestra el diagrama de la derecha de la Figura 11, donde también se marcaron los círculos espaciales sobre el cono de luz de radio R y r . Estas dos, son las regiones que se forman de sólo uniones y sólo intersecciones de los N círculos (en $N \rightarrow \infty$). La ecuación del círculo D está dada por

$$rR = \left(x - \frac{R - r}{2} \right)^2 + y^2 - \left(t - \frac{R + r}{2} \right)^2, \quad (62)$$

por lo que el mismo tiene radio \sqrt{rR} . Usando las Ecuaciones (61) y (62), y la relación

entre x e y en el punto de intersección entre dos círculos rotados un ángulo θ ,

$$y = x \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (63)$$

se puede calcular el radio l de los círculos formados en el lado derecho de la Ecuación (60), obteniendo

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2rR}{R + r - (R - r) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (64)$$

Por lo tanto, se puede reescribir la Ecuación (60) de la forma

$$NS(\sqrt{rR}) \geq \sum_{i=1}^N \tilde{S}\left(\frac{2rR}{R + r - (R - r) \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right)}\right), \quad (65)$$

donde si se toma el límite $N \rightarrow \infty$ la entropía \tilde{S} tiende a la de un círculo de radio l , $S(l)$. En ese caso nos queda

$$S(\sqrt{rR}) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dz S\left(\frac{2rR}{R + r - (R - r) \cos(z)}\right). \quad (66)$$

En el límite de $R \rightarrow r$ obtenemos

$$S''(r) \leq 0. \quad (67)$$

Esta desigualdad equivale a decir que la función

$$F(r) = rS'(r) - S(r), \quad (68)$$

es monótonamente decreciente. Además, tenemos que para una CFT en vacío, la

entropía de entrelazamiento de un círculo ($2 + 1$ dimensiones) es [38]

$$S_{CFT} = kr - \tilde{F}, \quad (69)$$

concluyendo que $F(r)$, en un punto fijo, toma el valor de \tilde{F} correspondiente a la CFT. De esta manera, se establece el teorema F de la irreversibilidad del grupo de renormalización en $2 + 1$ dimensiones: existe una función monótonamente decreciente ante el RGF, $F(r) = rS'(r) - S(r)$, y tal que $F_{UV} \geq F_{IR}$.

4.3 Teorema a ($3+1$)

En [14], se realizó un primer intento de generalizar la demostración entrópica de la irreversibilidad del RGF a dimensión $3 + 1$. Al igual que para el teorema F , se utiliza la entropía de entrelazamiento de un número genérico (que luego se lo hace tender a infinito) de esferas boosteadas con superficies sobre el cono de luz, así como sus uniones e intersecciones. Pero en este caso, sucede que la entropía \tilde{S} de las regiones de los términos en la parte derecha de la Ecuación (60), no tienden a la de una esfera suave $S(l)$. Por esta razón, los términos divergentes en la SSA no se cancelan, lo que impide obtener la irreversibilidad buscada.

Luego de unos años, se logró solucionar este problema, y dieron una prueba generalizada de los teoremas c , F y a [16]. La nueva propiedad clave que utilizaron fue la propiedad Markoviana del estado de vacío en una CFT [15], que dice que para dos regiones A y B con superficies sobre el cono de luz se satura la desigualdad de SSA:

$$S(A) + S(B) - S(A \cap B) - S(A \cup B) = 0. \quad (70)$$

Esto es sorprendente ya que, como vimos en los casos anteriores, las intersecciones y uniones de dos regiones contienen singularidades adicionales que pueden producir

términos divergentes al calcular la entropía de entrelazamiento.

Definimos la diferencia entre la entropía para una CFT τ_0 y un modelo de QFT τ_1 a lo largo del flujo como

$$\Delta S(r) = S_{\tau_1}(r) - S_{\tau_0}(r). \quad (71)$$

De esta manera, si calculamos la diferencia de entropía $\Delta\tilde{S}$ para una de las regiones formada por las intersecciones y uniones de N esferas boosteadas (análogo a la región remarcada del diagrama de la izquierda de la Figura 11), tenemos que las divergencias debidas a las singularidades geométricas se cancelan entre \tilde{S}_{τ_1} y \tilde{S}_{τ_0} . Por lo tanto, en el límite $N \rightarrow \infty$, $\Delta\tilde{S}$ se puede remplazar por la diferencia de entropías de esferas suaves ΔS .

Debido a la propiedad de Markov, $\Delta S(r)$ sigue satisfaciendo la propiedad de subaditividad fuerte $\Delta S(A) + \Delta S(B) \geq \Delta S(A \cup B) + \Delta S(A \cap B)$ (la cual también se puede generalizar para N regiones al igual que la Ecuación (60)). Teniendo en cuenta los radios propios de las esferas, podemos escribir para un número N de esferas boosteadas la desigualdad

$$\Delta S(\sqrt{rR}) \geq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta\tilde{S}_k \approx \int_r^R dl \beta(l) \Delta S(l), \quad (72)$$

donde $\beta(l)$ es la densidad de las esferas formadas por las intersecciones y uniones de las regiones boosteadas. Ésta fue calculada en [14] para dimensión d :

$$\beta(l) = \frac{1}{N} \frac{dk}{dl} = \frac{2^{d-3} \Gamma[(d-1)/2]}{\sqrt{\pi} \Gamma[(d-2)/2]} \frac{(rR)^{\frac{d-2}{2}} ((l-r)(R-l))^{\frac{d-4}{2}}}{l^{d-2} (R-r)^{d-3}}. \quad (73)$$

Finalmente, para $R = r + \epsilon$ en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$r\Delta S''(r) - (d - 3)\Delta S'(r) \leq 0. \quad (74)$$

Con este resultado podemos volver a obtener los resultados del teorema *c*: $(r\Delta S'(r))' \leq 0$, y el teorema *F*: $\Delta S''(r) \leq 0$.

Ahora, veamos si podemos obtener el teorema *a*. En $d = 3 + 1$, la Ecuación (74) queda

$$r\Delta S''(r) - \Delta S'(r) \leq 0, \quad (75)$$

donde si usamos que la contribución de la CFT es

$$S_{\tau_0}(r) = \mu r^2 - 4A_{UV} \log(r/\epsilon), \quad (76)$$

resulta

$$rS''_{\tau_1}(r) - S'_{\tau_1}(r) \leq \frac{8A_{UV}}{r}. \quad (77)$$

Podemos notar que evaluando la parte izquierda en el punto fijo del IR obtenemos $A_{IR} \leq A_{UV}$.

Con esto queda demostrada la irreversibilidad del RGF en $d = 3 + 1$: el teorema *a*. Podemos destacar que sin la propiedad de Markov no se hubiese podido haber completado esta prueba debido a las singularidades adicionales que aparecen al intersectar esferas en $3 + 1$. Para el caso de dimensiones mayores a 4 [16], se concluye que la propiedad de SSA y la de Markov no son suficientes para demostrar la irreversibilidad del RGF. Hasta el momento, no hay pruebas de la validez del teorema de irreversibilidad del RGF en dimensión mayor a 4.

5 Conclusiones

En este trabajo nos concentramos en el estudio de la irreversibilidad en teoría cuántica de campos. Como objetivo principal, se estudiaron las demostraciones de irreversibilidad para distintas dimensiones basadas en las propiedades entrópicas de las QFTs. Específicamente, utilizando la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento.

Para lograr esto, primero se estudió la primera prueba (no entrópica) del teorema de irreversibilidad del RGF en $1 + 1$, conocida como *teorema c* [6]. La prueba utiliza funciones de correlación del tensor de energía momento y propiedades de positividad de las mismas para encontrar una función monótonamente decreciente sobre el RGF que sobre los puntos fijos es igual a la carga central de la CFT correspondiente. Debido a que esta demostración está basada fuertemente en que la dimensión es $1 + 1$, la generalización a dimensiones mayores no es inmediata. También, estudiamos la demostración de la irreversibilidad en $3 + 1$ utilizando la anomalía de traza como análogo a la carga central: *teorema a* [8]. Para el caso de dimensiones impares, el problema se vuelve mas complejo debido a la inexistencia de la anomalía de traza. Se cree que la energía libre de una esfera euclídea de una CFT cumple las condiciones necesarias para demostrar la irreversibilidad en $2 + 1$: *teorema F* [9].

La primera prueba de irreversibilidad del RGF que utiliza cantidades entrópicas fue para dimensión $1 + 1$ [13]. Utiliza la propiedad de subaditividad fuerte para dos intervalos boosteados con bordes sobre el cono de luz. La carga central aparece al calcular la entropía de entrelazamiento de un intervalo para una CFT. Para obtener un resultado significativo es importante que las divergencias de la entropía de entrelazamiento se cancelen entre los distintos términos que aparecen en la desigualdad de la SSA. Esto ocurre en el caso de intervalos gracias a que la intersección y unión de

estos también son intervalos.

En el caso de $2 + 1$ dimensiones, el equivalente a los intervalos son los círculos, pero nos encontramos con el problema de que la intersección y unión de círculos no son círculos. Para solucionar esto, hay que generalizar la SSA para un número N arbitrario de regiones y tomar el límite de $N \rightarrow \infty$. Además, hay que deshacerse de las divergencias que aparecen debido a las esquinas que se forman en las regiones de las intersecciones y uniones de los círculos. Esto se puede hacer utilizando círculos boosteados con bordes sobre el cono de luz, haciendo que se pierda la noción de ángulo en las esquinas, de manera que no contribuyen a la entropía. Teniendo esto en cuenta, queda demostrado el teorema F [14]. Es importante notar que ésta es la única demostración del teorema F que hay actualmente.

Por último, estudiamos la irreversibilidad en $3 + 1$. Para este caso se utilizaron esferas, de forma que aparecen nuevos problemas geométricos al tomar las intersecciones y uniones de éstas. Algunos de estos problemas se pueden solucionar boosteando a las esferas tal como se hizo en el caso de los círculos, pero en este caso siguen apareciendo singularidades que contribuyen con divergencias que son distintas a la de una esfera suave. Para resolver este problema, se tiene que utilizar una propiedad adicional, la denominada propiedad de Markov, que nos dice que la SSA satura para regiones de una CFT con bordes sobre el cono de luz para el vacío. De esta manera, se obtiene una demostración unificada de los teoremas c , F y a [16]. Se cree que es muy probable que para una demostración de la irreversibilidad en $d > 3 + 1$ la SSA no sea suficiente y se necesite alguna cota mas fuerte que involucre derivadas superiores de la entropía.

Es interesante destacar que existen muchas pruebas distintas del teorema c además de la prueba de Zamolodchikov [6] y la entrópica [13]. Por ejemplo, el truco del *dilatón* de Komargodski [34], utilizando la representación espectral de la función de dos puntos del tensor de energía momento [35] o utilizando la entropía relativa [36].

Para modelos de campos con dual holográfico, se demostró que el RGF es irreversible para todas las dimensiones [39]. Para las dimensiones pares, la demostración apoya la idea de que la cantidad relevante es el coeficiente de la anomalía de traza al igual que en las pruebas que vimos, y para dimensiones impares, el término constante de la entropía de entrelazamiento de una esfera al igual que en el teorema F entrópico.

A grandes rasgos, observamos que para dimensiones más altas cada vez se necesitan cotas mas fuertes. Estos resultados nos incentivan a creer que se está en un buen camino pero falta encontrar algún elemento clave que sostenga la validez del teorema en toda dimensión.

Referencias

- [1] Luca Bombelli, Rabinder K. Koul, Joochan Lee, and Rafael D. Sorkin. Quantum source of entropy for black holes. *Phys. Rev. D*, 34:373–383, Jul 1986.
- [2] Michael Levin and Xiao-Gang Wen. Detecting topological order in a ground state wave function. *Physical Review Letters*, 96(11), mar 2006.
- [3] Mark Van Raamsdonk. Building up spacetime with quantum entanglement. *Gen. Rel. Grav.*, 42:2323–2329, 2010.
- [4] Thomas Faulkner, Monica Guica, Thomas Hartman, Robert C. Myers, and Mark Van Raamsdonk. Gravitation from entanglement in holographic CFTs. *Journal of High Energy Physics*, 2014(3), mar 2014.
- [5] David Blanco, Mauricio Leston, and Guillem Pérez-Nadal. Gravity from entanglement for boundary subregions. *Journal of High Energy Physics*, 2018(6), jun 2018.
- [6] A. B. Zamolodchikov. Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.*, 43:730–732, 1986.
- [7] John L. Cardy. Is There a c Theorem in Four-Dimensions? *Phys. Lett. B*, 215:749–752, 1988.
- [8] Zohar Komargodski and Adam Schwimmer. On renormalization group flows in four dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2011(12), dec 2011.
- [9] Daniel L. Jafferis, Igor R. Klebanov, Silviu S. Pufu, and Benjamin R. Safdi. Towards the f-theorem: $\mathcal{N} = 2$ field theories on the three-sphere. *Journal of High Energy Physics*, 2011(6), jun 2011.
- [10] Igor R. Klebanov, Silviu S. Pufu, and Benjamin R. Safdi. F-theorem without supersymmetry. *Journal of High Energy Physics*, 2011(10), oct 2011.
- [11] Robert C. Myers and Aninda Sinha. Seeing a c-theorem with holography. *Physical Review D*, 82(4), aug 2010.
- [12] Horacio Casini, Marina Huerta, and Robert C. Myers. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2011(5), may 2011.

- [13] H Casini and M Huerta. A c-theorem for entanglement entropy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(25):7031–7036, jun 2007.
- [14] H. Casini and M. Huerta. Renormalization group running of the entanglement entropy of a circle. *Physical Review D*, 85(12), jun 2012.
- [15] Horacio Casini, Eduardo Testé , and Gonzalo Torroba. Modular hamiltonians on the null plane and the markov property of the vacuum state. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(36):364001, aug 2017.
- [16] Horacio Casini, Eduardo Testé , and Gonzalo Torroba. Markov property of the conformal field theory vacuum and the a theorem. *Physical Review Letters*, 118(26), jun 2017.
- [17] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [18] E. H. Lieb and M. B. Ruskai. Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy. *J. Math. Phys.*, 14:1938–1941, 1973.
- [19] Matthew Headrick and Tadashi Takayanagi. A Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy. *Phys. Rev. D*, 76:106013, 2007.
- [20] Tomoyoshi Hirata and Tadashi Takayanagi. AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy. *JHEP*, 02:042, 2007.
- [21] David D. Blanco and Horacio Casini. Localization of Negative Energy and the Bekenstein Bound. *Phys. Rev. Lett.*, 111(22):221601, 2013.
- [22] H Casini and M Huerta. Entanglement entropy in free quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504007, dec 2009.
- [23] Mark Srednicki. Entropy and area. *Physical Review Letters*, 71(5):666–669, aug 1993.
- [24] R. Lohmayer, H. Neuberger, A. Schwimmer, and S. Theisen. Numerical determination of entanglement entropy for a sphere. *Physics Letters B*, 685(2-3):222–227, mar 2010.
- [25] H Casini and M Huerta. Reduced density matrix and internal dynamics for multicomponent regions. *Classical and Quantum Gravity*, 26(18):185005, sep 2009.

- [26] Pasquale Calabrese and John Cardy. Entanglement entropy and conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504005, dec 2009.
- [27] F. Smithies. Singular integral equations. by n.i. muskhelishvili. translated from the 2nd russian edition by j.r.m. radok. pp. 447. fl. 28.50. 1953. (noordhoff, groningen). *The Mathematical Gazette*, 39(329):252–253, 1955.
- [28] David Blanco, Alan Garbarz, and Guillem Pérez-Nadal. Entanglement of a chiral fermion on the torus. *Journal of High Energy Physics*, 2019(9), sep 2019.
- [29] H Casini, C D Fosco, and M Huerta. Entanglement and alpha entropies for a massive dirac field in two dimensions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(07):P07007–P07007, jul 2005.
- [30] Christoph Holzhey, Finn Larsen, and Frank Wilczek. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 424(3):443–467, aug 1994.
- [31] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241(2):333–380, 1984.
- [32] Jean-Bernard Zuber Claude Itzykson. *Quantum field theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill International Book Co, 1987.
- [33] Karl-Hermann Neeb and Gestur Olafsson. Reflection positivity—a representation theoretic perspective, 2018.
- [34] Zohar Komargodski. The constraints of conformal symmetry on RG flows. *Journal of High Energy Physics*, 2012(7), jul 2012.
- [35] Andrea Cappelli, Daniel Friedan, and JoséI. Latorre. c-theorem and spectral representation. *Nuclear Physics B*, 352(3):616–670, 1991.
- [36] Horacio Casini, Eduardo Testé, and Gonzalo Torroba. Relative entropy and the RG flow. *Journal of High Energy Physics*, 2017(3), mar 2017.
- [37] H Casini. Geometric entropy, area and strong subadditivity. *Classical and Quantum Gravity*, 21(9):2351–2378, apr 2004.
- [38] Horacio Casini, Marina Huerta, and Robert C. Myers. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2011(5), may 2011.

- [39] Robert C. Myers and Aninda Sinha. Holographic c-theorems in arbitrary dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2011(1), jan 2011.