



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis de Licenciatura

Funciones de estructura partónicas a partir del método de Integración por Partes

Carla Johanna Crucianelli

Director: Dr. Daniel de Florian

Fecha de Presentación: Agosto 2022

Índice general

Índice general	1
1 Introducción	4
1.1. Un poco de historia	4
1.2. Organización del trabajo	6
2 Preliminares	8
2.1. Electrodinámica cuántica (QED)	8
2.2. Variables de Mandelstam	10
2.3. Interacción electro-débil	10
2.4. Cromodinámica cuántica (QCD)	10
2.5. QCD perturbativa	12
2.6. Reglas de Feynman	12
2.7. Ejemplos de cálculo	15
2.8. Regularización dimensional y esquema HVBM	18
2.9. Integración por partes (IBP)	20
2.10. Ejemplo: corrección a 1-loop	21
2.11. Métodos computacionales	24
3 Modelo de partones y DIS	25
3.1. Deep Inelastic Scattering (DIS)	25
3.2. Modelo partones	26
3.3. Funciones de estructura a ordenes mayores	27
3.4. Secciones eficaces	28
3.5. Funciones de estructura para el protón	28
3.6. Factorización	29
3.7. proyectores	30
4 Cálculo de las funciones de estructura	32
4.1. Espacio de fases con una partícula en el estado final	32
4.2. Funciones de estructura a LO	33
4.3. Correcciones a NLO: Diagramas asociados a contribuciones virtuales	34
4.4. Correcciones a NLO: Diagramas asociados a contribuciones reales	37
5 Reducciones de las contribuciones NLO	47
5.1. Contribuciones virtuales no polarizadas	47
5.2. Contribuciones virtuales polarizadas	51
5.3. Espacio de fases con dos partículas en el estado final	53

5.4. IBP para las contribuciones reales	53
5.5. Contribuciones reales de \mathcal{F}_L	56
5.6. Contribuciones reales de \mathcal{F}_1	57
5.7. Contribuciones reales de \mathcal{F}_3	59
5.8. Contribuciones reales de g_L	61
5.9. Contribuciones reales de g_1	61
5.10. Contribuciones reales de g_3	63
6 Resultados a orden ε	66
6.1. Expansión en serie	66
6.2. Núcleos de Altarelli-Parisi	67
6.3. Resultados: \mathcal{F}_L	67
6.4. Resultados: \mathcal{F}_1	67
6.5. Resultados: \mathcal{F}_3	70
6.6. Resultados: g_L	71
6.7. Resultados: g_1	71
6.8. Resultados: g_3	73
7 Conclusiones	76
A Proyectores y funciones de estructura	78
B Integrales útiles	82
B.1. Integrales tadpole	82
B.2. Integrales burbuja	83
B.3. Integrales de triangulo	83
B.4. Integral con \hat{k}	84
Bibliografía	85

Agradecimientos

Quiero empezar por agradecerle a mi familia, en especial a mis papás, Roberto y Estela, que me acompañaron incondicionalmente en este camino y me dieron ánimos para no bajar los brazos. A mis tías que siempre

A Daniel que acepto dirigir esta tesis y sin quién este trabajo no hubiera sido posible. También quiero agradecerle a Iván que me brindó una mano con los problemas del código.

Al jurado, Fernando Lombardo, Gustavo Otero y Garzón y Rodolfo Sassot, por leer esta tesis.

A todos los profesores que tanto me enseñaron a lo largo de este camino. Y gracias especialmente a los que me apoyaron para poder seguir formándome por fuera de la UBA. En particular, quiero agradecerle a Martín que siempre me dio una mano siempre que lo necesité.

A mis amigos y compañeros de carrera, Nico, Drupy, Juli, Luquitas, Joni, Kenneth, Pato, Pau, Ale y a todos los que conocí a lo largo de estos años. Sin ustedes la carrera hubiera sido muy distinta. Y gracias a Lucas por ser un gran compañero de labo y amigo a lo largo de todos estos años.

A mis amigos de OMA y compañeros de matemática, Agus, Buso, Deamo, Marchi, Mati, Guido, Leo, Maki, que también formaron parte de este camino.

A Flora y Patricia, por dejarme participar de OMA y todo lo que pude aprender y los amigos que hice gracias a eso.

A mis amigos de fuera de la facu, Java, Vi, Ani, Ka, Octa, Milo, Mini, Mari y Axel, por bancarme siempre y dar ánimos para seguir adelante.

Finalmente, le agradezco a cualquiera que se este tomando el tiempo de leer este trabajo.

Introducción

1.1. Un poco de historia

Una pregunta que la humanidad busca responder desde la antigüedad es: ¿de qué está compuesta la materia? A lo largo de la historia muchas teorías intentaron explicar las partes más pequeñas del universo describiendo de manera cada vez más compleja a las estructuras fundamentales de la materia. Uno de los primeros modelos para un átomo fue el modelo de budín de pasas de Thomson que postulaba que un átomo se componía de una carga positiva en donde estaban incrustados los electrones de carga negativa. Los experimentos de Rutherford mostraron que este modelo era incorrecto y este propuso el modelo atómico donde toda la carga positiva se concentra en una pequeña región del espacio o núcleo y los electrones orbitan a su alrededor. Con la introducción de la mecánica cuántica, Bohr modificó este modelo e introdujo, entre otras cosas, que las orbitas están cuantizadas. Además, Chadwick descubrió que existían partículas con carga neutra, los cuales llamó neutrones, trabajo por el cuál ganó el premio Nobel en 1935. En este punto el modelo aceptado era que el núcleo estaba compuesto por neutrones y protones con electrones que orbitan a este núcleo. Este modelo tenía varios problemas, por ejemplo, no explicaba la estabilidad de los núcleos atómicos, ya que las fuerzas de Coulomb deberían repeler a los neutrones y protones, por lo que debería existir alguna otra fuerza que no se estaba considerando. Por otro lado, este modelo no explicaba por qué los electrones no decaían al núcleo.

En los años 60 se produjo un cambio de paradigma con el nacimiento del modelo de quarks (propuesto por Murray Gell-Mann en [1]). El modelo de quarks postula que el protón y el neutrón que no eran fundamentales como se creía hasta el momento, si no que estaban compuestas por otras partículas elementales denominadas *quarks*. En la naturaleza, los quarks no pueden estar solos si no que deben agruparse en ternas y formar partículas que se llaman *bariones* o pares de quark-antiquark que se denominan *mesones*. En general, el conjunto de mesones y bariones se conoce como *hadrones*. Según este modelo el protón se compone de dos quarks *up* (*u*) y un quark *down* (*d*) y el neutrón se compone de dos quarks *d* y un quark *u*. Además, para poder reproducir ciertos resultados experimentales fue necesario introducir otras dos familias de quarks: *charm* (*c*) y *strange* (*s*) y *top* (*t*) y *bottom* (*b*) donde cada familia tiene una masa mayor a la anterior [6].

Este modelo tenía un problema: predecía funciones de onda simétricas para fermiones. Para arreglar esto se propuso agregar un nuevo grado de libertad interno a los quarks: el *color*. Se

postuló que los quarks podían venir en tres colores posibles R , G , B y que la naturaleza prefiere estar en estados incoloros [6]. El modelo de quarks con un grado de libertad de color, permitió clasificar a muchas de las partículas descubiertas durante los años anteriores con ciertos tipos de hadrones. Además de los quarks, existen otras partículas conocidas que también son elementales, como por ejemplo el electrón.

Hoy en día se conocen seis tipos de quarks organizados en tres pares: *up* y *down*, *charm* y *strange* y *top* y *bottom*. Además, existen seis leptones organizados en tres pares: electrón, muón y tauón cada uno acompañado por un neutrino asociado.

Si bien esto nos ayuda a entender cómo se componen las partículas y a explicar ciertas simetrías, todavía nos falta entender cómo estas partículas interactúan entre sí. Existen cuatro fuerzas fundamentales: la fuerza gravitatoria, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. En este trabajo, nos va a interesar estudiar interacciones entre partículas fundamentales por lo que las fuerzas de interés van a ser solamente la fuerza electromagnética, la fuerza fuerte y la fuerza débil. La gravedad la vamos a poder despreciar ya que es varios órdenes de magnitud menor que las demás. La pregunta natural en este punto sería: ¿cómo podemos describir estas fuerzas? En el capítulo 2 responderemos esta pregunta. Sin embargo, podemos adelantarnos y mencionar que hoy en día, el modelo estándar es el que cumple este rol. Este consiste en representar a la fuerza electro-débil como una simetría $SU(2) \times U(1)$ y a la fuerza fuerte como una simetría $SU(3)$ de color (QCD) [6]. Este modelo es suficientemente complejo para necesitar un curso entero para poder entender todas sus partes y les requirió a los físicos del siglo XX muchos años para poder derivarlo.

Una pregunta relevante que surge es sobre qué elementos componen al protón. Ya mencionamos que está compuesto por tres quarks, pero ¿es esto todo? Si suponemos que solamente hay quarks obtenemos una fracción del momento que se mide experimentalmente, por lo que tiene que haber otros constituyentes. Estos se conocen como *gluones* y son los propagadores de QCD, de la misma manera que los fotones son los propagadores de la fuerza electromagnética.

Resulta importante conocer cómo los hadrones interactúan al colisionar con los propagadores de las distintas fuerzas. Es por esto que se introducen las funciones de estructura que como su nombre lo indica permiten extender los cálculos para choques entre partículas elementales a hadrones, dando cuenta de la estructura interna del hadrón.

Hoy en día el modelo estándar predice con una asombrosa precisión un gran número de observables. Sin embargo, se sabe que es necesario expandirlo para poder incluir fenómenos que todavía no podemos explicar con la teoría actual, como por ejemplo la materia oscura. Existen diversas teorías para extender el modelo estándar pero ninguna cuenta con suficiente evidencia experimental para ser completamente aceptada. La forma de contrastar estas teorías es realizando experimentos en colisionadores de hadrones, como el LHC, por lo que es de suma importancia poder contar con cálculos precisos para los observables que se desean medir, es por esto que en los últimos años la física de precisión comenzó a cobrar mayor relevancia. En este trabajo ahondaremos sobre cálculos de precisión en QCD. La idea detrás de estos cálculos es sencilla: hacer un desarrollo

perturbativo en la constante de acoplamiento y calcular al orden más bajo (LO o Leading Order), luego extender a primer orden (NLO o Next to Leading Order). El hecho de poder realizar cálculos a NLO permite estudiar resultados experimentales con mayor precisión. Más aún, hay observables para los cuales se conocen las correcciones a NNLO (Next-to-Next-to Leading Order), aunque estas correcciones son difíciles de calcular.

1.2. Organización del trabajo

El objetivo de este trabajo es usar el método de integración por partes para calcular las contribuciones finitas de las funciones de estructura partónicas en un proceso DIS.

El capítulo 2 tiene como objetivo introducir los principales componentes de la teoría, en particular hablaremos de los tipos de interacciones entre partículas de manera más formal. Y en particular, discutiremos como realizar cálculos perturbativos en QCD. Enunciaremos las reglas de Feynman y realizaremos ejemplos de calculo de amplitudes en diagramas de Feynman. En los cálculos de esta tesis nos encontraremos con divergencias que regularizaremos usando el esquema el esquema HVBM, por lo cuál introduciremos este esquema y las propiedades fundamentales que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo. Además, introduciremos el método de Integración por Partes (IBP) para reducir integrales a una base de integrales maestras. Desarrollaremos un ejemplo sobre como usar este método e introduciremos las herramientas computacionales con las que se realizaron los cálculos de este trabajo.

En el capítulo 3, introduciremos el proceso DIS (Deep Inelastic Scattering) que será sobre el que trabajaremos en esta tesis. Luego, discutiremos la estructura interna de los hadrones a partir del modelo de partones e introduciremos las funciones de estructura hadrónicas, que como su nombre lo indica, nos permitirá entender la estructura interna del hadrón correspondiente. Sin embargo, como estas funciones tienen efectos de largo alcance, no son perturbativas. Es por esto que introduciremos las funciones de estructura partónicas, las cuales se pueden calcular perturbativamente. Además, presentaremos proyectores que serán los encargados de relacionar los cálculos sobre amplitudes y las funciones de estructura.

En el capítulo 4, calcularemos las contribuciones a LO de las funciones de estructura polarizadas y no polarizadas. Luego, escribiremos las correcciones gluónicas a 1 loop para ese mismo vértice.

En el capítulo 5, usaremos el método de IBP para reducir las integrales que obtuvimos en el capítulo anterior, tanto en el caso real como en el caso virtual.

En el capítulo 6, realizaremos la expansión en serie a orden $\mathcal{O}(\epsilon)$, de las funciones de estructura que calculamos en 5. Sumando las contribuciones virtuales y reales y restando el polo restante según el esquema \overline{MS} obtendremos la contribución finita en este esquema a las funciones de estructura partónicas.

Uno de los principales trabajos en los que nos basamos para realizar esta tesis es la Tesis de Licenciatura de Y. Rotstein Habarnau [18]. En ella, entre otras cosas, se calculan las contribuciones

a LO y NLO de las funciones de estructura polarizada y no polarizada para un proceso DIS de manera clásica. Si bien hay algunas diferencias en el planteo del problema, en particular se usa otra simetrización del vértice débil, se decidió utilizar las mismas convenciones de normalización y esquemas de regularización dimensional y factorización, para poder comparar los resultados intermedios en los casos en los que sea posible. De esta manera, podremos tener un chequeo de consistencia sobre nuestros cálculos en cada paso.

Preliminares

En este capítulo, describimos el marco teórico en el que se realizan los cálculos principales de este trabajo. Como ya mencionamos, las tres fuerzas fundamentales que vamos a considerar se enmarcan en dos tipos de simetrías. En la sección 2.1, describimos la fuerza electromagnética e introducimos la noción de diagrama de Feynman para describir interacciones a partir del lagrangiano. En la sección 2.3, describimos brevemente la simetría de la fuerza electro-débil. En la sección 2.4, describimos la teoría de QCD e introducimos las interacciones que son posibles mediante esta fuerza. Una vez descritas todos los tipos de interacciones, enunciaremos las reglas de Feynman (sección 2.6). Luego, en la sección 2.7, mostramos ejemplos de aplicación. En la sección 2.8, definimos el esquema de regularización dimensional que usaremos en este trabajo. En la sección 2.9, describimos el método que utilizaremos para reducir las integrales que aparezcan en el capítulo 5. Finalmente, en la sección 2.11 describiremos los métodos computacionales que usaremos para realizar los cálculos de este trabajo.

Aunque se utilizan también otros textos, la referencia principal de este capítulo es el libro de Halzen y Martin [6].

2.1. Electrodinámica cuántica (QED)

La interacción electromagnética viene dada por la fuerza de Coulomb que sienten las partículas cargadas. Esta interacción viene mediada por un propagador que es el *fotón*. Formalmente esta teoría se puede describir mediante una densidad lagrangiana que tiene simetría frente a transformaciones locales de gauge $U(1)$, es decir es invariante frente a transformaciones $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, de la forma [6]:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.1)$$

donde A_μ es el campo electromagnético y $F_{\mu\nu}$ es el tensor intensidad de campo. A partir de la expresión 2.1 podemos inferir que el fotón es una partícula no masiva ya que no aparece un término de masa de la forma $mA^\mu A_\mu$. Más aún, este término viola la invarianza de gauge por ende no se lo puede agregar [6]. Lo segundo que se puede leer de la expresión 2.1 son las interacciones entre el campo A_μ y la partícula: el término $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ representa un electrón y un fotón entrantes que interactúan y un electrón saliente (o un positrón entrante).

Existe una forma pictórica de representar estas interacciones mediante los llamados *diagramas de Feynman* que consisten en representar las interacciones como puntos en los que chocan las partículas que interactúan. Por ejemplo, el término $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ de la expresión 2.1 se puede traducir en un vértice de la forma que se muestra en la Figura 2.1.

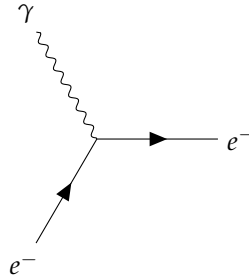


Figura 2.1: Esquema de un vértice de interacción entre un electrón y un fotón, proveniente del término $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$.

Este tipo de diagramas nos van a ser útiles para poder escribir perturbativamente las contribuciones a un determinado proceso. A lo largo de este trabajo usaremos estos diagramas para entender las interacciones que vamos a querer estudiar y para realizar cálculos a LO y NLO. A modo de ejemplo de como podemos armar un diagrama de Feynman a LO, podemos considerar el proceso $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ a menor orden. Este proceso se describe mediante el diagrama de Feynman de la Figura 2.2, combinando dos posibles vértices de interacción de QED [6].

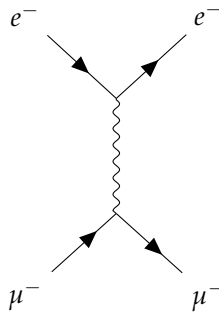


Figura 2.2: Esquema del diagrama de Feynman de menor orden para el proceso $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$

En general, la convención que se adopta es que el tiempo transcurre de izquierda a derecha [6]. Este hecho, sumado a la interpretación de que las antipartículas, son partículas que viajan de forma inversa a la dirección temporal [6], podemos invertir la dirección en la que viaja una partícula y transformarla en una antipartícula. Por ejemplo, podemos convertir el vértice de interacción de QED en:

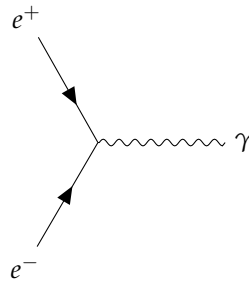


Figura 2.3: Esquema de un vértice de interacción entre un electrón y un positrón que se aniquilan en un fotón.

2.2. Variables de Mandelstam

Cuando consideramos un proceso de scattering entre cuatro partículas de la forma $A + B \rightarrow C + D$, podemos considerar las variables invariantes respecto de las transformaciones de Lorentz [6]:

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - p_C)^2, \\ u &= (p_A - p_D)^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Estas se conocen como *variables de Mandelstam*. Notemos que durante el proceso se conserva el momento total por lo que: $p_A + p_B = p_C + p_D$

2.3. Interacción electro-débil

La interacción débil es la que nos permite explicar fenómenos que incluyen (entre otras cosas) neutrinos, que son partículas que no interactúan mediante ninguna otra fuerza. En particular, esta interacción permite que un leptón se transforme en su neutrino asociado y permite que un quark se convierta en otro.

No desarrollaremos los detalles sobre esta interacción pero se puede ver en el libro de Halzen[6].

Lo fundamental que debemos saber es que esta interacción tiene tres posibles propagadores bosónicos: W^+ , W^- y Z . Los bosones W^\pm llevan carga y el bosón Z es neutro. Una de las diferencias que tenemos en los vértices de interacciones débiles es que hay una contribución vectorial y una axial, es decir, en general vamos a encontrarnos con términos de la forma:

$$\gamma^\mu (1 - \gamma^5). \tag{2.3}$$

2.4. Cromodinámica cuántica (QCD)

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que describe a la fuerza fuerte. Esta fuerza es la que nos permite describir las interacciones entre quarks. La simetría que

rige esta fuerza es la del grupo de Lie $SU(N_c)$ donde N_c es el número de colores (para el modelo standard $N_c = 3$) y si llamamos T_a a los $N_c^2 - 1$ generadores del grupo se verifica la relación [6]:

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (2.4)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(N_c)$. Donde es conocido que [23]:

$$\text{Tr}\{T_a T_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (2.5)$$

Además, se denota C_F a la constante de color dada por [23]:

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \quad (2.6)$$

En el caso particular de tomar $N_c = 3$, obtenemos que $C_F = \frac{4}{3}$.

Como toda teoría de campos, QCD viene descrita por una densidad lagrangiana que para un único sabor tiene la forma [6]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q - g\bar{q}\gamma^\mu T_a G_\mu^a q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

donde q es la función de onda de un quark, g es la constante de acoplamiento de QCD y G_μ^a son $N_c^2 - 1$ campos de gauge o *gluones*. Además, definimos [6]:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.8)$$

La generalización de esto para distintos sabores es inmediata y se puede ver por ejemplo en [9].

La densidad lagrangiana 2.7 tiene simetría respecto del grupo local $SU(N_c)$, es decir, es invariante frente a transformaciones de la forma [6]:

$$q(x) \rightarrow e^{i\alpha_a(x)T_a}q(x). \quad (2.9)$$

A partir de este lagrangiano, podemos interpretar cuales son las interacciones posibles mediante esta fuerza. En primer lugar, el término $g\bar{q}\gamma^\mu T_a G_\mu^a q$ representa la interacción entre un quark, un antiquark y un campo de gauge que se representa como muestra la Figura 2.4a (de manera análoga a QED). Al expandir el término $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$, aparecen términos que tienen GGG o GGGG por lo que aparecen vértices de interacción entre tres o cuatro campos, como se ve en las Figuras 2.4b y 2.4c [6].

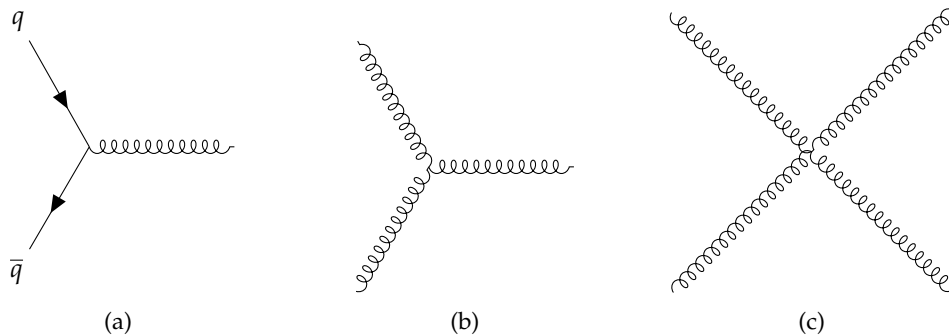


Figura 2.4: (a) Vértice de interacción de QCD para el término $g\bar{q}\gamma^\mu T_a G_\mu^a q$. (b) Vértice de interacción correspondiente a tres campos de gauge. (c) Vértice de interacción correspondiente a cuatro campos de gauge.

Cabe destacar que a diferencia con QED, en QCD los gluones pueden interactuar entre sí y llevan carga de color [6].

2.5. QCD perturbativa

Para calcular observables para procesos de QCD, por ejemplo secciones eficaces, un método razonable es realizar un desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento α_S (donde esta se relaciona con la constante de acoplamiento g de la ecuación 2.7 vía, $\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi}$ [22]). Para que esto sea posible, es necesario que α_S sea chica. Sin embargo, experimentalmente se ve que la constante de acoplamiento depende de la energía: para energías bajas la constante diverge (*confinamiento*) y para energías altas la constante tiende a cero (*libertad asintótica*). En el segundo caso, se puede tratar a los constituyentes de los hadrones como si estuviesen libres y se puede hacer un tratamiento perturbativo de los procesos. Por lo que si nos interesa estudiar procesos a altas energías, como los que se dan en experimentos como el LHC, podemos realizar un tratamiento perturbativo de QCD (pQCD). En cambio, si queremos estudiar procesos que se dan a bajas energías, no es posible hacer un desarrollo perturbativo y será necesario recurrir a otros métodos [18].

En general, como α_S depende de la energía característica del proceso a estudiar, se suele expresar a la constante α_S como función de una escala de renormalización no física μ_R y se suele elegir $\mu_R^2 \approx Q^2$, donde Q es la transferencia de momento del proceso a estudiar [22].

La constante $\alpha_S(\mu_R^2)$ satisface la siguiente ecuación diferencial [23]:

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_S}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_S) = -(b_0\alpha_S^2 + b_1\alpha_S^3 + \dots). \quad (2.10)$$

donde, si llamamos n_f a la cantidad de sabores, las constantes toman la forma [23]:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \\ b_1 &= \frac{153 - 19n_f}{24\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Los coeficientes de orden más alto dependen del esquema de normalización utilizado para calcularlos [23].

Si despreciamos los términos de ordenes mayores a b_0 , la expresión analítica para la running coupling constant toma la forma [23]:

$$\alpha_S = \frac{1}{b_0 \ln\left(\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right)} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln\left(\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (2.12)$$

donde Λ es una constante de integración que se experimentalmente ($\Lambda_{QCD} \sim 200\text{MeV}$ [20]).

2.6. Reglas de Feynman

Ya mencionamos que la herramienta principal para calcular observables a altas energías es realizar un desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento y sumar las contribuciones de todos los posibles diagramas de Feynman para el proceso. Es por eso que en esta sección

vamos a describir como leer la amplitud de un determinado diagrama mediante un resumen de las reglas de Feynman.

Reglas de Feynman para QED

En el caso de QED, tenemos el propagador fermionico y el fotón y un vértice de interacción [12]:

$$\begin{aligned}
 \text{---}\xrightarrow{p}\text{---} &= i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\
 \mu \text{---}\overset{p}{\text{wavy}}\text{---}\nu &= -i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{l} \nearrow \\ \mu \\ \searrow \end{array} \text{---}\text{wavy}\text{---} &= ie\gamma_\mu Q
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

donde en la última regla Q es la cantidad de múltiplos de e de la carga del fermión correspondiente. En general, las líneas llenas representan fermiones y las líneas onduladas representan fotones.

Reglas de Feynman para la interacción electro-débil

En este caso tenemos como propagadores a los tres bosones W^+ , W^- , Z . Además, estos pueden interactuar entre si. No incluiremos las reglas para todos estos vértices, pero si incluiremos los vértices que necesitaremos usar [6]:

$$\begin{aligned}
 W^+ \text{---}\text{---}\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} e^+ \\ \nu_e \end{array} &= -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \\
 W^- \text{---}\text{---}\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} e^- \\ \bar{\nu}_e \end{array} &= -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Las expresiones son análogas para las restantes familias lepton-neutrino y los pares de quarks multiplicados por la constante de mixing entre el par. Estos dos vértices son los que permiten

cambiar la carga de la partícula. Tenemos también el vértice con carga neutra [6]:

$$= -i \frac{g}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \quad (2.15)$$

donde [6]:

$$\begin{aligned} \text{Neutrinos: } C_A &= \frac{1}{2}, C_V = \frac{1}{2} \\ \text{Leptones: } C_A &= -\frac{1}{2}, C_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \approx -0,03 \\ u, c, \dots : C_A &= \frac{1}{2}, C_V = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \approx 0,19 \\ d, s, \dots : C_A &= -\frac{1}{2}, C_V = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \approx -0,34 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Reglas de Feynman para QCD

Notemos que al introducir colores, las reglas de Feynman que definimos para QED van a tener que ser modificadas. Además, introducimos dos nuevos tipos de líneas: los gluones. Para los propagadores, vale que [9]:

$$\begin{aligned} \alpha, i \xrightarrow{k} \beta, j &= i \frac{\delta_{ij}}{k^2 + m^2 + i\epsilon} (k + m)_{\beta\alpha} \\ a \text{-----}^k \text{-----} b &= i \frac{\delta_{ba}}{k^2 + i\epsilon} \\ \mu, a \text{~~~~~}^k \text{~~~~~} \nu, b &= i \frac{\delta_{ba}}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

El valor λ proviene del gauge elegido. En general, utilizaremos el gauge de Feynman donde se cumple que $\lambda = 1$ [9].

Y para los vértices de interacción [9]:

$$\begin{aligned}
 &= -ig(T_c)_{ji}(\gamma)_{\beta\alpha} \\
 &= gf_{abc}k'_\alpha \\
 &= -gf_{a_1a_2a_3} [g^{\nu_1\nu_2}(p_1 - p_2)^{\nu_3} + g^{\nu_2\nu_3}(p_2 - p_3)^{\nu_1} + g^{\nu_3\nu_1}(p_3 - p_1)^{\nu_2}] \\
 &= -ig [f_{ea_1a_2}f_{ea_3a_4}(g^{\nu_1\nu_3}g^{\nu_2\nu_4} - g^{\nu_1\nu_4}g^{\nu_2\nu_3}) \\
 &\quad + f_{ea_1a_3}f_{ea_4a_2}(g^{\nu_1\nu_4}g^{\nu_3\nu_2} - g^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}) \\
 &\quad + f_{ea_1a_4}f_{ea_2a_3}(g^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_4\nu_3} - g^{\nu_1\nu_3}g^{\nu_4\nu_2})]
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

donde adoptamos la convención de que los momentos siempre son entrantes al vértice.

2.7. Ejemplos de cálculo

Ahora con todas estas herramientas vamos a mostrar dos ejemplos sobre como podemos usar estas reglas: el scattering de Compton y la self-energy del quark.

Scattering de Compton [6]

Como primer ejemplo, calculemos la amplitud \mathcal{M} a menor orden en QED para el proceso $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ (Scattering de Compton) Para este ejemplo seguiremos la sección 6.14. El primer paso es encontrar todos los diagramas de Feynman del proceso que tienen dos vértices (es claro que necesitamos al menos esa cantidad de vértices de interacción), necesitamos los vértices de 2.1. No es difícil ver que hay dos posibles diagramas (Figura 2.5b y 2.5a).

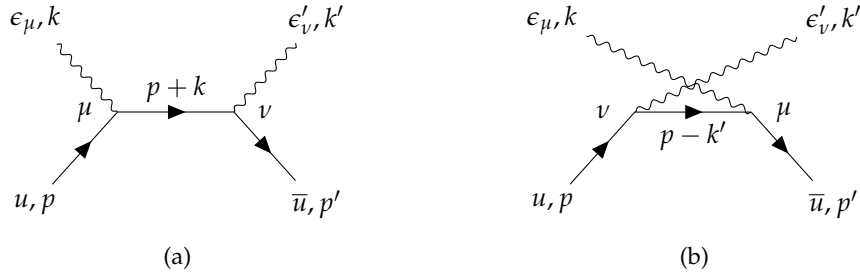


Figura 2.5: Posibles diagramas de Feynman para el scattering de Compton de menor orden.

donde notamos u, \bar{u} a las funciones de onda del electrón y ϵ es la polarización del fotón. Para una dada helicidad de las partículas incidentes tenemos:

1. *Diagrama 2.5a*: Para calcular \mathcal{M}_1 necesitamos escribir las corrientes que pasan por el vértice μ y por el vértice ν y relacionarlas mediante el propagador. Las corrientes vienen dadas por:

$$\bar{u}\gamma^\mu u \epsilon_\mu \quad \text{y} \quad \bar{u}\gamma^\nu u \epsilon_\nu'^* \quad (2.19)$$

Luego, usando las reglas de Feynman 2.13 para el propagador:

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}\gamma^\nu i e \epsilon_\nu'^* \left(i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 + m^2} \right) i e \gamma^\mu \epsilon_\mu u \quad (2.20)$$

2. *Diagrama 2.5b*: De manera análoga,

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}\gamma^\mu i e \epsilon_\mu \left(i \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p-k')^2 + m^2} \right) i e \gamma^\nu \epsilon_\nu'^* u \quad (2.21)$$

Ahora, para calcular la sección eficaz del proceso necesitamos calcular:

$$|\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_1}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_2}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*}\} \quad (2.22)$$

Una forma de hacer esta cuenta sería hacer la cuenta de manera explícita promediando sobre todas las helicidades posibles como en [6]:

$$|\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \sum_{s,s'} (\bar{u}(s', p') \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu u(s, p)) (\bar{u}(s, p) \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu u(s', p')) \quad (2.23)$$

donde definimos $s = (p+k)^2$ y $m \approx 0$. Además, se tiene que para fotones reales vale [6]:

$$\sum_{\text{polarizaciones transversales}} \epsilon_\mu^* \epsilon_{\mu'} = -g_{\mu\mu'}, \quad (2.24)$$

por lo que podemos deshacernos de ellos.

La expresión 2.23 se puede reescribir usando la traza:

$$|\overline{\mathcal{M}_1}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \operatorname{Tr}\{\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\mu\} \quad (2.25)$$

Hay dos cosas interesantes sobre la expresión 2.25. Lo primero es que este tipo de expresiones son fáciles de calcular computacionalmente. En particular, en este trabajo utilizaremos el paquete de Mathematica Tracer [8] para realizar estos cálculos. El segundo punto a notar es que no hacía falta

hacer todas las cuentas, podríamos haber llegado directamente a la expresión de la traza. La idea es que para calcular $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^*$ podemos usar el diagrama de la Figura 2.6.

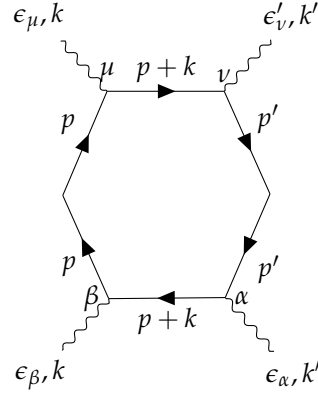


Figura 2.6: Esquema del producto $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^*$. Se replica el esquema 2.5a abajo del otro de manera que queda un ciclo de fermiones.

Teniendo el diagrama 2.6 podemos recorrer la parte fermionica y poner los momentos slash de cada lugar y por cada vértice colocamos una matriz gamma con el índice del vértice adentro de la traza. Finalmente, agregamos los denominadores de los propagadores y las polarizaciones por afuera de la traza. Resulta:

$$|\overline{\mathcal{M}_1}|^2 = \frac{e^4}{(p+k)^4} \text{Tr} \left\{ \not{p}' \gamma^\alpha (\not{p} + \not{k}) \gamma^\beta \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \right\} (-g_{\alpha\nu}) (-g_{\beta\mu}) \quad (2.26)$$

No es difícil notar que la expresión 2.26 es igual a (salvo un factor $\frac{1}{4}$ que proviene del promedio sobre los spines) usando que $\gamma_\mu = \gamma^\alpha g_{\alpha\mu}$.

Podemos copiar el procedimiento para los dos términos restantes de la suma.

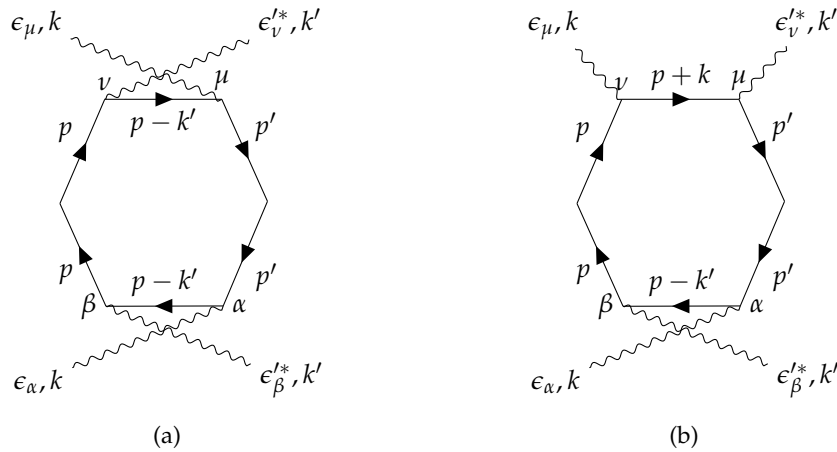


Figura 2.7: Diagramas conjugados para $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_2^*$ y $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*$

Luego obtenemos [6]:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_2}|^2 &= \frac{e^4}{4(p-k')^4} \text{Tr} \left\{ \not{p}' \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}') \gamma^\beta \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\mu \right\} (-g_{\alpha\mu}) (-g_{\beta\nu}) \\ &= 2e^4 \left(-\frac{(k+p)^2}{(k-p')^2} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*} = \frac{e^4}{4(p+k)^2 (p-k')^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}' \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}') \gamma^\beta \not{p} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \right\} (-g_{\alpha\nu}) (-g_{\beta\mu}) = 0 \quad (2.28)$$

Una forma de terminar esta cuenta es usar propiedades de las trazas de matrices γ [6], pero también se puede hacer la cuenta usando el paquete de Mathematica Tracer.

Finalmente, obtenemos que:

$$|\overline{\mathcal{M}^2}| = -2e^4 \left(\frac{(k-p')^2}{(k+p)^2} + \frac{(k+p)^2}{(k-p')^2} \right) \quad (2.29)$$

Loop de gluón [12]

Un ejemplo importante es la self-energy del quark. En general, en procesos de QCD, puede pasar que una partícula emita espontáneamente un gluón y lo reabsorba, entonces este tipo de diagrama es uno que debemos considerar. Veamos como es su contribución.

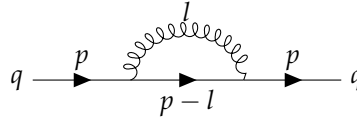


Figura 2.8: Diagrama para el proceso en el que un electrón emite un gluón y luego lo reabsorbe.

El problema que surge es, ¿cuál es el momento con el que sale el fotón? Como puede ser cualquier valor entre $0 \leq l \leq p$, debemos integrar en todos los valores posibles y obtenemos según las reglas de Feynman [12]:

$$(-ig)^2 C_F \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} - \not{l})}{(p-l)^2} \gamma_\nu \left(-\frac{g^{\mu\nu}}{l^2} \right) \equiv i\not{p} \Sigma(p). \quad (2.30)$$

Luego,

$$\Sigma(p) \propto \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^2} \frac{1}{l^2 (p+l)^2} \quad (2.31)$$

pero esta expresión es divergente. Una forma de regularizar esta expresión es usar el método de renormalización, introduciendo un cut-off Λ e integrar entre $\pm\Lambda$.

2.8. Regularización dimensional y esquema HVBM

De la misma manera que en el ejemplo anterior, al hacer cálculos sobre diagramas de Feynman de ordenes superiores que incluyen loops, es necesario integrar sobre el momento k de la partícula emitida. Esto genera problemas, ya que, el resultado son integrales que divergen. Existen distintos motivos por los cuales los diagramas de Feynman divergen, en general estas divergencias se clasifican según su origen: las *divergencias infrarrojas* son aquellas que se deben a momentos muy chicos; las *divergencias ultravioletas* se deben a contribuciones de momento grandes; y las *divergencias colineales* que se dan cuando el fotón emitido es colineal con el fermión saliente [6, 12].

Existen distintos métodos para poder obtener resultados a pesar de estos problemas, para eso debemos primero regularizar las divergencias y luego renormalizar para deshacernos de las divergencias ultravioletas.

El método de regularización dimensional fue desarrollado (simultáneamente) por t'Hooft-Veltman [3] y por Bollini-Giambiagi [2]. En este, se propone que en lugar de trabajar en 4 dimensiones, los cálculos se realicen en $n = 4 - 2\epsilon$ dimensiones. De esta manera, las divergencias aparecerán como polos en ϵ .

Para poder trabajar en $n = 4 - 2\epsilon$ dimensiones, es necesario redefinir a las matrices γ^μ y γ^5 . En este trabajo vamos a utilizar el esquema HVBM sistematizado por Breitenlohner y Mason en [4]. En este esquema se redefine el tensor métrico con una parte de 4 dimensiones \tilde{g} y uno de -2ϵ dimensiones \hat{g} donde $g = \hat{g} + \tilde{g}$. Además, se introducen $\hat{\gamma}^\mu$, $\tilde{\gamma}^\mu$, \hat{p}^μ y \tilde{p}^μ . Donde se cumplen las siguientes propiedades [18, 4]:

1. Los tensores g , \hat{g} y \tilde{g} son simétricos:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}; \quad \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\nu\mu}; \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\nu\mu}. \quad (2.32)$$

2. Los índices se contraen con las reglas usuales:

$$g_{\mu\alpha}g^\alpha{}_\nu = g_{\mu\nu}; \quad \hat{g}_{\mu\alpha}\hat{g}^\alpha{}_\nu = \hat{g}_{\mu\nu}; \quad \tilde{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}^\alpha{}_\nu = \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

3. Las contracciones valen:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = N; \quad \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = 4; \quad \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} = -2\epsilon. \quad (2.34)$$

4. Los índices se contraen con otros g de la siguiente manera:

$$\tilde{g}_{\mu\alpha}g^\alpha{}_\nu = \tilde{g}_{\mu\nu}; \quad \hat{g}_{\mu\alpha}g^\alpha{}_\nu = \hat{g}_{\mu\nu}; \quad \hat{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}^\alpha{}_\nu = 0. \quad (2.35)$$

5. Vale que:

$$g_{\mu\nu}p^\nu = p^\mu; \quad g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma^\mu. \quad (2.36)$$

6. Se define:

$$\hat{g}_{\mu\nu}p^\nu = \hat{p}^\mu; \quad \hat{g}_{\mu\nu}\gamma^\nu = \hat{\gamma}^\mu; \quad (2.37)$$

$$\gamma^\mu = \hat{\gamma}^\mu + \tilde{\gamma}^\mu; \quad p^\mu = \hat{p}^\mu + \tilde{p}^\mu \quad (2.38)$$

7. Valen las relaciones de anti-conmutación:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}; \quad \{\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_\nu\} = 2\hat{g}_{\mu\nu}; \quad \{\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\} = 2\tilde{g}_{\mu\nu}; \quad \{\hat{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\} = 0. \quad (2.39)$$

8. Además se verifica:

$$\hat{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}^\mu = 0; \quad \tilde{g}_\mu{}^\nu\tilde{\gamma}_\nu = 0; \quad \tilde{g}_\mu{}^\nu\hat{\gamma}_\nu = 0. \quad (2.40)$$

Es conocido que al usar regularización dimensional la definición de γ^5 genera inconvenientes. En principio sería ideal que pudiéramos definir γ^5 de manera que se mantenga la relación de anti-conmutación que se tiene en 4 dimensiones, pero esto no es posible ya que reproduce resultados incorrectos [18]. En este esquema se define γ^5 como [11]:

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta, \quad (2.41)$$

donde el tensor ϵ es el tensor de Levi-Civita en 4 dimensiones y se anula sobre todas las dimensiones no físicas. Con esta definición se verifican las relaciones [18]:

$$\gamma_5^2 = 1; \quad \{\gamma_5, \tilde{\gamma}_\mu\} = 0; \quad [\gamma_5, \hat{\gamma}_\mu] = 0. \quad (2.42)$$

Es decir, perdemos la anti-conmutación con una parte de la matriz γ^μ . Esto lleva a que aparezcan términos finitos que se deben renormalizar al final de los cálculos para que se mantengan las identidades de Ward [24].

En este esquema también se deben cambiar los acoplamientos por [18]:

$$g \rightarrow g\mu^\epsilon \quad (2.43)$$

donde μ es una escala no física de regularización.

Lo último que nos falta cambiar son los vértices. Uno de los problemas que surgen al cambiar las dimensiones y redefinir la matriz γ^5 , ahora no vale que γ^μ y γ^5 conmuten y para recuperar esta propiedad podemos simetrizar el vértice de la interacción débil [24]:

$$\gamma^\mu \gamma^5 \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^\mu) = \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5 \quad (2.44)$$

Esto nos permite cambiar el vértice electro-débil a un vértice de la forma [24]:

$$\gamma^\mu (a + b\gamma^5) \rightarrow a\gamma^\mu + b\tilde{\gamma}^\mu \gamma^5. \quad (2.45)$$

2.9. Integración por partes (IBP)

Como se mostró en la sección 2.7, al momento de calcular contribuciones de diagramas de Feynman a nivel de loop, va a ser necesario integrar sobre el momento del gluón emitido. Por lo que vamos a necesitar saber integrar expresiones de la forma:

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2(p+l)^2} \quad (2.46)$$

Esta integral es difícil de calcular, pero se conoce la solución explícita para $n \neq 4$ (ver Apéndice B). Sin embargo, al considerar diagramas más complejos la cantidad de términos en el denominador aumenta generando que el problema de calcular estas integrales sea muy complicado, incluso computacionalmente. El método que se utiliza para poder realizar estos cálculos es el método de integración por partes o IBP introducido en 1981 por Chetyrkin y Tkachov en [5]. La idea es descomponer las integrales que aparecen en los cálculos de diagramas de Feynman en una base de integrales maestras y solamente resolver las integrales de la base. Esta reducción hace que aunque sepamos resolver cada integral por separado alcance con resolver un conjunto menor de integrales, por lo que se simplifica el cálculo.

Formalmente, supongamos que tenemos un diagrama con l loops con momentos k_i , e momentos externos p_i independientes y t propagadores internos q_i , una integral de Feynman es una integral de la forma [19]:

$$\int \frac{d^n k_1}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \dots \int \frac{d^n k_l}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{S_1^{d_1} \dots S_b^{d_b}}{D_1 \dots D_t}. \quad (2.47)$$

donde S_i son los productos escalares entre dos momentos de loop (no necesariamente distintos) o entre un momento de loop y unos externo y $D_i = q_i^2 + m_i^2$ son los propagadores. Vamos a querer escribir esta integral en términos de b propagadores, los primeros p ya los tenemos y los restantes debemos agregarlos adecuadamente, para poder representar a todos los productos escalares en términos de estos b propagadores. De esta manera vamos a obtener integrales de la forma [19]:

$$F[a_1, \dots, a_b] = \int \frac{d^n k_1}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \dots \int \frac{d^n k_l}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_l^{a_l}}. \quad (2.48)$$

La nomenclatura indica el exponente al que aparece cada propagador. Por ejemplo si $l = 3$ podemos tener:

$$F[1, -1, 0] = \int \frac{D_2}{D_1}. \quad (2.49)$$

Una vez que tenemos esto podemos usar las identidades de IBP para reducir a un conjunto de integrales maestras [19]:

$$\int \frac{d^n k_1}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \dots \int \frac{d^n k_l}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial (k_j)_\mu} \left(\frac{(k_j)_\mu}{D_1^{a_1} \dots D_l^{a_l}} \right) = 0 \quad (2.50a)$$

$$\int \frac{d^n k_1}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \dots \int \frac{d^n k_l}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial (k_j)_\mu} \left(\frac{(p_j)_\mu}{D_1^{a_1} \dots D_l^{a_l}} \right) = 0 \quad (2.50b)$$

La validez de esta ecuación es una consecuencia del teorema de la divergencia (o de integrar por partes) en n dimensiones ya que al no haber condiciones de borde la integral sobre el borde se anula [19]. A modo de ejemplo, notemos que si la dimensión fuese entero el integrando es exactamente la divergencia de un campo por lo que por el teorema de la divergencia usual, tenemos que vale la identidad.

Las ecuaciones 2.50 nos van a permitir reducir al conjunto de integrales maestras. En general, el problema de reducir integrales de Feynman a un conjunto de integrales maestras es difícil, especialmente cuando se tiene más de un loop.

Para ilustrar este método veamos como aplicarlo en un ejemplo concreto.

2.10. Ejemplo: corrección a 1-loop

Veamos el caso de la corrección de 1-loop a un vértice de interacción entre quarks como se muestra en la Figura 2.9.

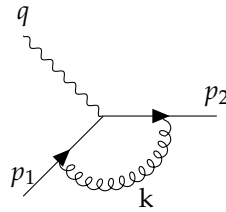


Figura 2.9: Corrección de 1-loop

En este caso tenemos un único loop con momento k , por lo que $l = 1$. Tenemos dos momentos externos independientes p_1 y p_2 (ya que por conservación $p_1 + q = p_2$ entonces de los tres sola-

mente dos son independientes). Por lo que los posibles productos escalares son: $p_1 \cdot k$, $p_2 \cdot k$ y k^2 . Además, los dos propagadores son $(p_1 - k)^2$ y $(p_2 - k)^2$.

Luego, una integral de Feynman es de la forma genérica:

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{(k^2)^{d_1} (p_1 \cdot k)^{d_2} (p_2 \cdot k)^{d_3}}{(p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2} \quad (2.51)$$

Como tenemos $b = 3$, necesitamos una base de 3 propagadores. Dos van a ser los que ya tenemos $D_1 = (p_1 - k)^2$ y $D_2 = (p_2 - k)^2$ y como tercero podemos elegir $D_3 = k^2$. Una vez elegida la base, debemos escribir los productos escalares en función de los propagadores usando la cinemática del problema. En este caso,

$$(p_1 \cdot k) = -\frac{(p_1 - k)^2 - k^2}{2} = -\frac{D_1 - D_3}{2} \quad (2.52)$$

y

$$(p_2 \cdot k) = -\frac{(p_2 - k)^2 - k^2}{2} = -\frac{D_2 - D_3}{2} \quad (2.53)$$

Luego,

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{D_3^{d_1} (D_3 - D_1)^{d_2} (D_3 - D_2)^{d_3}}{2^{d_2+d_3} D_1 D_2} \quad (2.54)$$

Por lo que logramos escribir la integral de Feynman en términos de la base de propagadores. Notemos que tenemos la libertad de elegir como momentos independientes cualesquiera dos entre p_1, p_2, q .

En estas ecuaciones 2.50 toman la forma:

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{p_i^\mu}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} \right) \quad (2.55)$$

análogamente cambiando p_i por k . Podemos calcular de manera explícita estas identidades. Notemos que derivar los propagadores respecto de k es inmediato:

$$\frac{\partial D_1}{\partial k_\mu} = 2(p_1 - k)_\mu \quad (2.56a)$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial k_\mu} = 2(p_2 - k)_\mu \quad (2.56b)$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial k_\mu} = 2k_\mu \quad (2.56c)$$

Si calculamos la identidad para p_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{p_1^\mu}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} \right) &= \frac{-p_1^\mu}{(D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3})^2} (a_1 D_1^{a_1-1} D_2^{a_2} D_3^{a_3} \partial_k D_1 + a_2 D_1^{a_1} D_2^{a_2-1} D_3^{a_3} \partial_k D_2 \\ &\quad + a_3 D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3-1} \partial_k D_3) \\ &= -\frac{2a_1 p_1 \cdot (p_1 - k)}{D_1^{a_1+1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} - \frac{2a_2 p_1 \cdot (p_2 - k)}{D_1^{a_1} D_2^{a_2+1} D_3^{a_3}} - \frac{2a_3 p_1 \cdot k}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3+1}} \\ &= \frac{a_1(D_3 - D_1)}{D_1^{a_1+1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} + \frac{a_2(c + D_3 - D_1)}{D_1^{a_1} D_2^{a_2+1} D_3^{a_3}} + \frac{a_3(D_1 - D_3)}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3+1}} \\ &= \frac{1}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} \left[\frac{a_1 D_3}{D_1} - a_1 + \frac{a_2 c}{D_2} + \frac{a_2 D_3}{D_2} - a_2 + \frac{a_3 D_1}{D_3} - a_3 \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde usamos que $p_1^2 = 0, c = -2p_1 \cdot p_2 = q^2$

Podemos introducir la notación de operadores de subida y bajada de la siguiente manera [19]:

$$1^\pm F[a_1, a_2, a_3] = F[a_1 \pm 1, a_2, a_3] \quad (2.58a)$$

$$2^\pm F[a_1, a_2, a_3] = F[a_1, a_2 \pm 1, a_3] \quad (2.58b)$$

$$3^\pm F[a_1, a_2, a_3] = F[a_1, a_2, a_3 \pm 1] \quad (2.58c)$$

Es decir, el numero nos dice sobre que coordenada actúa el operador y el signo indica si se aumenta o disminuye el índice en 1.

Escrito en términos de estos operadores la ecuación 2.57:

$$0 = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 1^- 3^+ + a_2 2^- 3^+ + a_3 1^+ 3^- - a_2 c 2^- \quad (2.59)$$

Análogamente podemos calcular las restantes dos identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{p_2^\mu}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} \right) &= \frac{-p_2^\mu}{(D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3})^2} (a_1 D_1^{a_1-1} D_2^{a_2} D_3^{a_3} \partial_k D_1 + a_2 D_1^{a_1} D_2^{a_2-1} D_3^{a_3} \partial_k D_2 \\ &\quad + a_3 D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3-1} \partial_k D_3) \\ &= \frac{a_1(c + D_3 - D_2)}{D_1^{a_1+1} D_2^{a_2} D_3^{a_3}} + \frac{a_2(D_3 - D_2)}{D_1^{a_1} D_2^{a_2+1} D_3^{a_3}} + \frac{a_3 D_2 - D_3}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} D_3^{a_3+1}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

y en función de los operadores:

$$0 = a_1 c 1^{-1} + a_1 1^- 3^+ - a_1 1^{-1} 2^+ + a_2 2^- 3^+ - a_2 + a_3 2^+ 3^- - a_3 \quad (2.61)$$

Finalmente, para k_μ :

$$0 = n + a_1 + a_1 1^- 3^+ + a_2 + a_2 2^- 3^+ + 2a_3. \quad (2.62)$$

A partir de estas ecuaciones podemos reducir cualquier integral. Algunas observaciones:

1. En regularización dimensional tenemos que $F[0, 0, 1] = 0$.

2. Podemos hacer un cambio de variable $k \rightarrow p_1 - k$ por lo que:

$$F[a_1, 0, a_3] = \int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(p_1 - k)^{2a_1} k^{2a_3}} = \int \frac{d^n k}{i\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(k)^{2a_1} (p_1 - k)^{2a_3}} = F[a_3, 0, a_1] \quad (2.63)$$

3. Análogamente $F[0, a_2, a_3] = F[0, a_3, a_2]$ haciendo el cambio de variable $k \rightarrow p_2 - k$.

Usando estas observaciones y las identidades de integración por partes podemos reducir integrales con índices grandes a un conjunto de integrales maestras. En esta topología, hay una única integral maestra no nula (las denotamos con G para diferenciarlas de las que no son irreducibles) que es $G[1, 1, 0]$.

Por ejemplo, si queremos reducir $F[2, 0, 1]$, tenemos que:

$$3F[2, 0, 1] = 2F[1, 0, 2] + F[3, 0, 0] \quad (2.64)$$

Pero como, $F[2, 0, 1] = F[1, 0, 2]$, tenemos que $F[2, 0, 1] = F[3, 0, 0]$.

Podemos ver que para todo a , $F[a, 0, 0] = F[0, a, 0] = F[0, 0, a] = 0$ con $a \neq \frac{n}{2}$.

La primera igualdad es consecuencia de la simetría de traslación de la integral respecto de la variable k .

1. Usamos 2.59 para $F[a, 0, 0]$:

$$aF[a, 0, 0] = aF[a - 1, 0, 1] \quad (2.65)$$

2. Usamos 2.62 para $F[a, 0, 0]$:

$$-(n + a)F[a, 0, 0] = aF[a - 1, 0, 1] \quad (2.66)$$

3. Igualando:

$$aF[a, 0, 0] = -(n + a)F[a, 0, 0] \Rightarrow 0 = (n + 2a)F[a, 0, 0]. \quad (2.67)$$

2.11. Métodos computacionales

Como mostramos en la sección 2.7, calcular la amplitud de un cierto diagrama de Feynman aparecen trazas. Para calcular estas trazas vamos a usar el paquete de Mathematica Tracer [8]. Este paquete calcula simbólicamente estas trazas en una dimensión d usando el esquema HVBM.

De la misma manera se puede cargar el paquete FIRE5 [21] para realizar las reducciones del método de integración por partes. Si bien existen diversos métodos para reducir por IBP, FIRE usa el método de Laporta [13], que consiste en generar un sistema de ecuaciones lineales a partir de las identidades de IBP.

Para poder implementar el método de IBP es necesario definir una base completa para los propagadores, los momentos que están libres y que serán integrados y poder escribir a las integrales provenientes de los diagramas en esta base. Si podemos hacer esto, obtenemos la reducción a integrales maestras.

Modelo de partones y DIS

Una de las partículas que nos va a interesar estudiar en este trabajo es el protón y sus componentes, o más en general, hadrones. En el capítulo 2 describimos cómo realizar cálculos perturbativos entre partículas puntuales. Sin embargo, la mayoría de las partículas no son fundamentales, es decir, que se componen de otros constituyentes que interactúan entre sí. Por lo tanto, la estructura interna de los hadrones deberá entrar en juego al momento de estudiar observables como la sección eficaz del scattering de un electrón y un protón. Esta contribución va a venir adentro de las llamadas funciones de estructura que definiremos en este capítulo.

Para este capítulo la principal referencia es el review de funciones de estructura del Particle Data Group [23].

3.1. Deep Inelastic Scattering (DIS)

Para entender las propiedades del protón experimentalmente podríamos irradiar un blanco con electrones, de manera que un fotón virtual con momento q interactúe con el protón. Esta interacción puede tener dos resultados: si q^2 es chico, tenemos una longitud de onda grande y por lo tanto el choque es elástico. En cambio, si q^2 es grande, tenemos una longitud de onda chica, por lo que el fotón es capaz de interactuar con los constituyentes del protón y lo rompe [6]. A cada una de estas partes se lo denomina (*partón*). Este proceso se conoce como *Deep Inelastic Scattering (DIS)* y el diagrama de Feynman correspondiente se puede ver en la Figura 3.1.

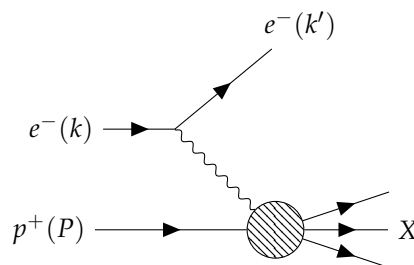


Figura 3.1: Diagrama de Feynman de menor orden para el proceso $e^- p^+ \rightarrow e^- X$. Más en general, se podría pensar en que en vez de un electrón, incide un leptón y sale otro leptón y en vez de un protón hay un hadrón cualquiera. Además, el propagador podría ser un fotón o un bosón W^\pm, Z

Además, para el proceso 3.1 se definen las variables cinemáticas invariantes [6]:

$$Q^2 = -q^2 \tag{3.1}$$

$$\omega = \frac{2q \cdot P}{Q^2} \quad (3.2)$$

$$W^2 = (P + q)^2 \quad (3.3)$$

donde p, q, k son los momentos de las partículas que se indican en la Figura 3.1 y W es la masa invariante del sistema hadronico. También son útiles las variables adimensionales [6]:

$$x = \frac{1}{\omega} = \frac{Q^2}{2q \cdot P} \quad (3.4)$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k}. \quad (3.5)$$

A LO la variable x se interpreta como la fracción de energía del hadrón que se lleva el partón [23]. Si llamamos M a la masa del protón, podemos decir que el proceso es DIS si $Q^2 \gg M^2$ y $W^2 \gg M^2$ [23].

Para este proceso se conoce una expresión para la sección eficaz [23]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{2xQ^4} \left[(1 + (1 - y)^2) F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2) \right] \quad (3.6)$$

donde F_2 y F_L son las funciones de estructura no polarizadas del protón y α es la constante de acoplamiento electromagnética.

3.2. Modelo partones

Hasta acá dijimos que los hadrones estan compuestos de partones, pero ¿quienes son estos partones? Como sabemos que los hadrones se componen de quarks, lo más sencillo sería afirmar que estos son los partones. Sin embargo, esto no es así. Los quarks que componen al protón, están todo el tiempo emitiendo y absorbiendo gluones. Por lo que los partones pueden ser tanto gluones como quarks.

Un fenómeno importante es el *Escaleo de Bjorken*, que nos dice que si estamos en el límite de $Q^2, P \cdot q \rightarrow \infty$ se tiene que las funciones de estructura dependen únicamente de x [6]. Si definimos las *funciones de distribución de partones* $f_i(x)$ (*parton distribution function* o PDF) que describen la probabilidad de encontrar un parton con la distribución i en el nucleo [22], podemos describir a las funciones de estructura como [23]:

$$F_2(x) = \sum_q e_q^2 x f_q(x) \quad (3.7a)$$

$$F_L(x) = 0 \quad (3.7b)$$

donde e_q es la carga del partón.

La función F_L se puede reemplazar por otra que es F_1 . Esta cumple la conocida ecuación de Callan-Gross [6]:

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (3.8)$$

En este modelo (a LO) es fácil escribir las funciones de estructura ya que son suma de las funciones de distribución de los quarks en el interior del hadrón. Por ejemplo, en el caso del

protón, donde despreciamos que haya una contribución significativa de quarks c, t, b [6]:

$$\frac{F_2(x)}{x} = \frac{4}{9}(u(x) - \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) - \bar{d}(x)) + \frac{1}{9}(s(x) - \bar{s}(x)). \quad (3.9)$$

Además, si integramos deberíamos recuperar los números cuánticos del protón. En efecto, se obtiene que [6]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x) - \bar{u}(x) dx &= 2 \\ \int_0^1 d(x) - \bar{d}(x) dx &= 1 \\ \int_0^1 s(x) - \bar{s}(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando estas expresiones se puede inferir que es necesario que dentro del protón haya otros componentes además de quarks y que estos llevan cerca del 50 % del momento del protón. Estos constituyentes son los gluones de QCD [6].

A modo de resumen, podemos decir que un protón esta constituido por dos quarks u y un quark d de valencia, y un mar de gluones y pares quark anti-quark que interactúan todo el tiempo.

3.3. Funciones de estructura a ordenes mayores

En general, la dependencia no es unicamente con x , si no que también tenemos dependencia en Q^2 . A orden más bajo, las funciones de estructura se escriben como antes [22]:

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) &= x \sum_q e_q^2 f_q(x) \\ F_L(x, Q^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Estas funciones de estructura nos dan una noción de la estructura interna de hadrón y se llaman no polarizadas pues consideramos al fotón virtual con una polarización determinada. La independencia de Q^2 solamente se da a LO. En general, recuperamos la dependencia con Q^2 y la expresión para la función F_2 es [23]:

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_S^n(\mu_R^2)}{(2\pi)^n} \sum_{i=q,g} \int_x^1 \frac{dz}{z} C_{2,i}^{(n)}(z, Q^2, \mu_R^2, \mu_F^2) f_i\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) \quad (3.11)$$

donde los coeficientes $C_{2,i}^{(n)}$ se calculan perturbativamente usando los diagramas de Feynman del orden correspondiente. Además a orden cero [23],

$$\begin{aligned} C_{2,q}^{(0)} &= e_q^2 \delta(1-z) \\ C_{2,g}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Notemos que en la ecuación 3.11, aparecen dos escalas no físicas. La primera es μ_R que es la escala de renormalización que ya mencionamos. Además, aparece una escala μ_F conocida como escala de factorización [23].

El cálculo de las correcciones $C^{(n)}$ se torna más complejo a medida que se aumenta el orden. Tanto es así, que para el caso electromagnético se conocen únicamente hasta orden N^3LO [23].

3.4. Secciones eficaces

Las reglas de Feynman que describimos en el capítulo 2, sirven para calcular amplitudes para procesos entre partículas puntuales y la forma de generalizar estas reglas para hadrones es usando las funciones de estructura. La expresión para calcular la sección eficaz en un proceso como el de la Figura 3.1 a orden más bajo viene dado por [22]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{2\pi y \alpha^2}{Q^4} \sum_j \eta_j L_j^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^j, \quad (3.13)$$

donde la suma sobre j se entiende como sumar sobre todos los posibles propagadores, esto es Z, γ y la interferencia entre ambos para procesos de corriente neutra o W para procesos sin corriente neutra [22]. La ecuación 3.13 nos dice que el diferencial de sección eficaz a LO se factoriza con una parte leptónica ($L^{\mu\nu}$) que proviene de la parte superior del diagrama, una parte hadronica ($W_{\mu\nu}$) que proviene de la interacción en el núcleo y un factor que corresponde al propagador del proceso.

Estos tensores se conocen y para leptones entrantes de carga e y helicidad λ toman la forma [22] (para una deducción más detallada ver [25]):

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^\gamma &= 2(k_\mu k'_\nu + k'_\nu k_\mu - k \cdot k' g_{\mu\nu} - i\lambda \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha k'^\beta) \\ L_{\mu\nu}^{\gamma Z} &= L_{\mu\nu}^Z = (g_V^e + e\lambda g_A^e) L_{\mu\nu}^\gamma \\ L_{\mu\nu}^W &= (1 + e\lambda) L_{\mu\nu}^\gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$g_V^e = -\frac{1}{2} + 2 \sin \theta_W \quad \text{y} \quad g_A^e = -\frac{1}{2}.$$

Además, los factores η_j son [22, 25]:

$$\begin{aligned} \eta_\gamma &= 1 \\ \eta_{\gamma Z} &= \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \frac{Q^2}{Q^2 + M_Z^2} \approx \frac{4}{3} \frac{Q^2}{Q^2 + M_Z^2} \\ \eta_Z &= \eta_{\gamma Z}^2 \\ \eta_W &= \frac{1}{2} \left(\frac{G_F M_W^2}{4\pi\alpha} \frac{Q^2}{Q^2 + M_W^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde G_F es la constante de Fermi y M_Z, M_W son las masas de los bosones Z y W respectivamente.

El tensor $W^{\mu\nu}$ se denomina *tensor hadrónico* y se define como [22]:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iq \cdot z} \langle p, S | [J_\mu^\dagger(z), J_\nu(0)] | p, S \rangle \quad (3.16)$$

donde S es el spin del núcleo.

3.5. Funciones de estructura para el protón

En el caso de que el hadrón incidente sea un protón, el tensor hadronico toma la forma [22]:

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} = & \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{\hat{P}_\mu \hat{P}_\nu}{P \cdot q} F_2(x, Q^2) - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha P^\beta}{2P \cdot q} F_3(x, Q^2) \\
 & + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{P \cdot q} \left[S^\beta g_1(x, Q^2) + \left(S^\beta - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P^\beta \right) g_2(x, Q^2) \right] \\
 & + \frac{1}{P \cdot q} \left[\frac{1}{2} (\hat{P}_\mu \hat{S}_\nu + \hat{S}_\mu \hat{P}_\nu) - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu \right] g_3(x, Q^2) \\
 & + \frac{S \cdot q}{P \cdot q} \left[\frac{\hat{P}_\mu \hat{P}_\nu}{P \cdot q} g_4(x, Q^2) + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_5(x, Q^2) \right],
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde definimos:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_\mu &= P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \\
 \hat{S}_\mu &= S_\mu - \frac{S \cdot q}{q^2} q_\mu.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

En la ecuación 3.17 introducimos las funciones de estructura polarizadas g_i . Estas funciones de estructura son análogas a las funciones no polarizadas pero para la sección eficaz polarizada que se define como [23]:

$$\Delta\sigma = \sigma(\lambda = 1) - \sigma(\lambda = -1) \tag{3.19}$$

donde λ es la helicidad. Será de utilidad re-definir las funciones de estructura como [18]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1 &= 2F_1 \\
 \mathcal{F}_2 &= \frac{F_2}{x} \\
 \mathcal{F}_3 &= F_3 \\
 \mathcal{F}_L &= \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.6. Factorización

Como ya mencionamos, nuestro plan es realizar cálculos perturbativos para realizar predicciones de QCD. Sin embargo, también mencionamos que a energías bajas (o distancias grandes) la teoría no es perturbativa. Existen teoremas de factorización que nos permiten calcular la sección eficaz del scattering electrón-hadrón, a partir de la sección eficaz del scattering, $\hat{\sigma}$, entre el fotón virtual y el partón con el que interactúa (recordemos que si Q^2 es grande el fotón ve una distribución de partones $f_i(y)$ congelada e interactúa con un único parton) [7]:

$$\sigma_{eH}(x, Q^2) = \sum_i \int_x^1 dy f_i(y) \hat{\sigma} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right). \tag{3.21}$$

De la misma manera podemos definir magnitudes análogas para las funciones de estructura y el tensor $W_{\mu\nu}$. Las funciones de estructura se pueden escribir como [18]:

$$\mathcal{F}_i(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_j \mathcal{F}_i^j \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) q_0^j(y) \tag{3.22}$$

donde \mathcal{F}_i^j es la función de estructura correspondiente al partón j y la función q_0 es la distribución de del partón. En general para un proceso DIS, vale que a LO [7]:

$$q_0^q = \delta(1-x) \quad (3.23)$$

Las funciones \mathcal{F}_i^j se pueden calcular perturbativamente sumando las contribuciones de todos los diagramas involucrados como haremos en los próximos capítulos. Como ya mencionamos en estos cálculos aparecerán polos en ε . Lo que nos va a interesar calcular es la contribución finita a NLO de las funciones de estructura. Como existe una ambigüedad al momento de sustraer las divergencias es necesario definir un esquema de factorización adecuado. El más común y el que usaremos en este trabajo es el esquema \overline{MS} (*Modified Minimal Subtraction*) donde sustraemos un factor proporcional a:

$$-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \quad (3.24)$$

donde la constante de proporcionalidad tiene que ver con la contribución a LO y un factor conocido como núcleo de Alterelli-Parisi que definiremos más adelante. Una vez sustraído el término apropiado se puede escribir a NLO [18]:

$$\mathcal{F}_i^q = C_0^{i,q} \delta(1-x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_1^{i,q} \quad (3.25)$$

Esto nos servirá para regularizar las divergencias colineales en el capítulo 6 en el caso no polarizado. En el caso no polarizado será necesario modificar el esquema de factorización agregando un término para corregir efectos indeseados que surgen de los problemas de definición de γ^5 en el esquema HBVM [11].

Podemos definir también el tensor partónico para el partón j (análogo al tensor hadrónico $W_{\mu\nu}$) [10]:

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}^j &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) F_1^j + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) \frac{F_2^j}{p \cdot q} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{2p \cdot q} F_3^j \\ &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2(p \cdot q)^2} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{2p \cdot q} \mathcal{F}_3^j. \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde en la última expresión definimos las funciones de estructura partónicas \mathcal{F}_i^j igual que lo hicimos para las funciones hadrónicas.

De manera análoga podemos definir un tensor $\tilde{w}_{\mu\nu}^j$ que se escribe en función de las funciones de estructura partónicas g_1^j, g_3^j y g_4^j [10]:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\mu\nu}^j &= -i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{p \cdot q} g_1^j(x', Q^2) + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) g_3^j(x', Q^2) \\ &\quad \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) \frac{g_4^j(x', Q^2)}{p \cdot q} \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.7. Projectores

A partir de las expresiones 3.26 y 3.27 podemos multiplicar por tensores adecuados para recuperar las funciones de estructura. En particular, definimos los proyectores [10]:

$$\begin{aligned}
 P_L^{\mu\nu} &= \frac{8x'^2}{Q^2} p_1^\mu p_1^\nu \\
 P_1^{\mu\nu} &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} P_L^{\mu\nu} \right) \\
 P_3^{\mu\nu} &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{p \cdot q}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P_L^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^j &= \mathcal{F}_L = \mathcal{F}_2^j - \mathcal{F}_1^j \\
 P_1^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^j &= \mathcal{F}_1 \\
 P_3^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^j &= \mathcal{F}_3
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

la demostración de estas igualdades puede verse en el Apéndice A.

De manera análoga para las funciones g podemos definir los proyectores [10]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_1^{\mu\nu} &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{2p \cdot q} \\
 \tilde{P}_3^{\mu\nu} &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{4x'^2}{Q^2} p^\mu p^\nu \right) \\
 \tilde{P}_4^{\mu\nu} &= \frac{x}{1-\varepsilon} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{4x'^2(3-2\varepsilon)}{Q^2} p^\mu p^\nu \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Además, se define [18]:

$$g_L^j = \frac{g_4^j}{2x} - g_3^j \tag{3.31}$$

y por ende podemos definir un proyector:

$$\tilde{P}_L^{\mu\nu} = \frac{4x^2}{Q^2} p^\mu p^\nu \tag{3.32}$$

De la misma manera que antes, se tiene que:

$$\tilde{P}_i^{\mu\nu} \tilde{w}_{\mu\nu}^j = g_i^j \tag{3.33}$$

y se pueden ver las pruebas de estas igualdades en el Apéndice A

Cálculo de las funciones de estructura

En este capítulo comenzamos con el cálculo de las funciones de estructura partónicas polarizadas y no polarizadas para un proceso DIS, para lo cual procederemos perturbativamente. Con este fin debemos calcular:

$$\mathcal{F}_i = P_i^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^i = P_i^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^2 PS \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{M}_{\mu\nu}^2$ es la amplitud de los diagramas en el orden al que queremos hacer la corrección y PS es el espacio de fases correspondiente. Análogamente, para las funciones polarizadas:

$$g_i = P_i^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^i = \tilde{P}_i^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^2 PS \quad (4.2)$$

Como nuestro objetivo es calcular funciones de estructura partónicas, nos concentramos en la parte inferior del diagrama de la Figura 3.1, es decir, consideramos que el proceso a estudiar consiste de una partícula virtual que puede ser un fotón o un bosón W, Z . Sin pérdida de generalidad, en todas las figuras dibujaremos un fotón entrante con momento q pero para los cálculos utilizaremos un vértice genérico lo que nos permitirá ajustar las constantes al final dependiendo de que partícula sea la mediadora del proceso. Entonces, el proceso a considerar es $\gamma^*(q) + q(p_1) \rightarrow q(p_2)$. Consideramos que el quark incidente tiene momento p_1 y spin λ . Y el quark saliente tiene momento p_2 . Todos los cálculos de trazas se realizaron con el paquete de Mathematica Tracer y usaremos es esquema de regularización dimensional HBVM, que definimos en 2.8.

En la sección 4.1, calculamos el espacio de fases para dos partículas entrantes y una saliente, que será el necesario para el calculo a LO y para las contribuciones virtuales a NLO. Después, realizamos el cálculo de las funciones de estructura a LO. En el resto del capítulo se realizan los cálculos de las amplitudes para los diagramas correspondientes a las contribuciones gluónicas a NLO.

4.1. Espacio de fases con una partícula en el estado final

Comenzamos por calcular el espacio de fases correspondiente a dos partículas en el estado inicial y una partícula en el estado final. En este caso, el diferencial del espacio de fases en n dimensiones viene dado por [6]:

$$dPS = (2\pi)^n \frac{d^n p_2}{(2\pi)^{n-1}} \delta(q + p_1 - p_2) \delta^+(p_2^2). \quad (4.3)$$

Podemos integrar y usando como actúa la δ , nos queda:

$$\begin{aligned} PS &= 2\pi \delta((p_1 + q)^2) \\ &= 2\pi \delta(2p_1 \cdot q + q^2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como vale que:

$$\delta(a - x) = \frac{1}{a} \delta\left(1 - \frac{x}{a}\right). \quad (4.5)$$

Podemos reescribir PS como:

$$PS = 2\pi \frac{1}{2p_1 \cdot q} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2p_1 \cdot q}\right) = 2\pi \frac{x}{Q^2} \delta(1 - x). \quad (4.6)$$

4.2. Funciones de estructura a LO

Al orden más bajo, hay únicamente un diagrama posible (Figura 4.1). la partícula que llega con momento k puede ser un fotón o un bosón W, Z por lo que consideraremos un vértice genérico en el esquema HVBM:

$$a\gamma^\mu + b\tilde{\gamma}^\mu\gamma^5 \quad (4.7)$$

donde al final podemos reemplazar los valores apropiados de a y b según la partícula virtual que interactúa con el quark.

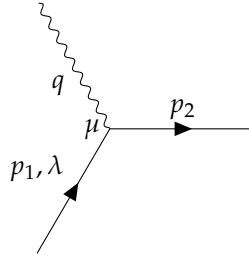


Figura 4.1: Contribución a LO.

Las partículas reales están on-shell por lo que:

$$p_1^2 = 0 \quad \text{y} \quad p_2^2 = 0 \quad (4.8)$$

Además, valen las siguientes propiedades:

$$p_2 = p_1 + q, \quad q^2 = -Q^2, \quad \hat{p}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \hat{p}_2 = 0 \quad (4.9)$$

De la misma manera que en la sección 2.7 podemos considerar el diagrama conjugado y obtener que la amplitud es:

$$\overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2}_{\lambda} = e_q^2 \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 (\gamma^\mu a + b\tilde{\gamma}^\mu\gamma^5) \frac{(1 + \lambda\gamma^5)}{2} \not{p}_1 (a\gamma^\nu + b\tilde{\gamma}^\nu\gamma^5) \right\} \quad (4.10)$$

donde e_q es la carga del quark incidente. Notemos que al no haber gluones involucrados, el quark entrante y el saliente tienen el mismo color, por lo que promediar sobre la cantidad de colores da

1. Luego, al contraer con los proyectores 3.28 y promediar sobre todos los posibles valores para λ (± 1), es decir,

$$\mathcal{F}_i \propto \frac{1}{2} \left[P_{i\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2}_{\lambda=1}^{\mu\nu} + P_{i\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2}_{\lambda=-1}^{\mu\nu} \right], \quad (4.11)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} P_{L,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= 0, \\ P_{1,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= -\frac{2e_q^2 Q^2 (b^2 - a^2(-1 + \varepsilon))}{(-1 + \varepsilon)x}, \\ P_{3,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= \frac{4e_q^2 ab Q^2}{x}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para calcular g_i debemos proyectar sobre las expresiones 3.33 y en vez de sumar, debemos tomar la diferencia sobre los posibles spines.

$$g_i \propto \frac{1}{2} \left[\tilde{P}_{i\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2}_{\lambda=1}^{\mu\nu} - \tilde{P}_{i\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2}_{\lambda=-1}^{\mu\nu} \right]. \quad (4.13)$$

Especializando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{L,\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= 0, \\ \tilde{P}_{1,\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= \frac{e_q^2 (a^2 + b^2) Q^2}{x}, \\ \tilde{P}_{3,\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{LO}|^2} &= -\frac{2e_q^2 ab Q^2}{(-1 + \varepsilon)x}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Lo último que nos falta para obtener las contribuciones a LO de las funciones de estructura polarizadas y no polarizadas es multiplicar por el espacio de fases dado por la ecuación 4.6. Vamos a usar como normalización dividir por $4\pi e_q^2$ (de manera que en el caso $a = 1, b = 0$, \mathcal{F}_1 queda normalizada a la $\delta(1 - x)$), obtenemos para las contribuciones en \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L^{LO} &= 0, \\ \mathcal{F}_1^{LO} &= \frac{(-b^2 + a^2(-1 + \varepsilon))}{(-1 + \varepsilon)} \delta(1 - x), \\ \mathcal{F}_3^{LO} &= 2ab \delta(1 - x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

y para g usamos la normalización $\frac{1}{2\pi e_q^2}$:

$$\begin{aligned} g_L^{LO} &= 0, \\ g_1^{LO} &= (a^2 + b^2) \delta(1 - x), \\ g_3^{LO} &= -\frac{2ab}{(-1 + \varepsilon)} \delta(1 - x). \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3. Correcciones a NLO: Diagramas asociados a contribuciones virtuales

Si queremos realizar correcciones a NLO tenemos que separar en dos casos: las correcciones que provienen de correcciones virtuales (gluones que se reabsorben en el diagrama) y las que provienen de contribuciones reales, es decir, de gluones que se pueden observar en el estado final.

Al momento de considerar las contribuciones dadas por gluones virtuales, es decir, aquellos que se reabsorben de manera que sigue habiendo una única partícula en el estado final y hay tres diagramas que posibles, dados por las Figuras 4.2a,4.2b y 4.2c.

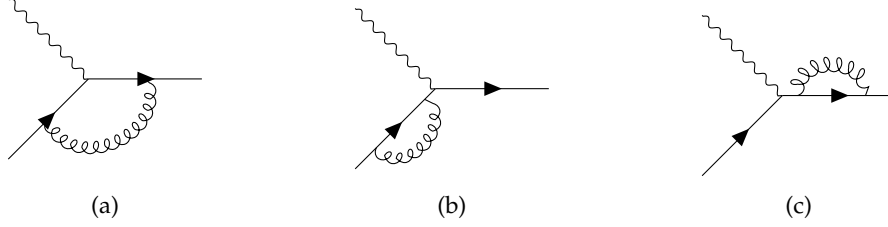


Figura 4.2: Contribuciones NLO con gluones virtuales.

La amplitud que debemos considerar es:

$$|\overline{\mathcal{M}_v}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{v_a} + \mathcal{M}_{v_b} + \mathcal{M}_{v_c}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{LO}}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_{virtual}}|^2 + 2 \text{Re}\{\overline{\mathcal{M}_{virtual}}\mathcal{M}_{LO}^*\} \quad (4.17)$$

En este caso, debemos incluir la amplitud a LO pues en ambos tenemos una única partícula en el estado final, por lo que podemos conjugar con este diagrama. Notemos que de los tres términos, el único que es una corrección a NLO es $\overline{\mathcal{M}_{virtual}}\mathcal{M}_{LO}^*$ ya que el primer término es lo que calculamos en la sección 4.2 y el segundo término tiene dos loops, por lo que es de orden mayor. Luego, los únicos diagramas que debemos considerar son 4.2a,4.2b y 4.2c conjugados con el diagrama 4.1 (ver Figuras 4.3a,4.3b y 4.3c).

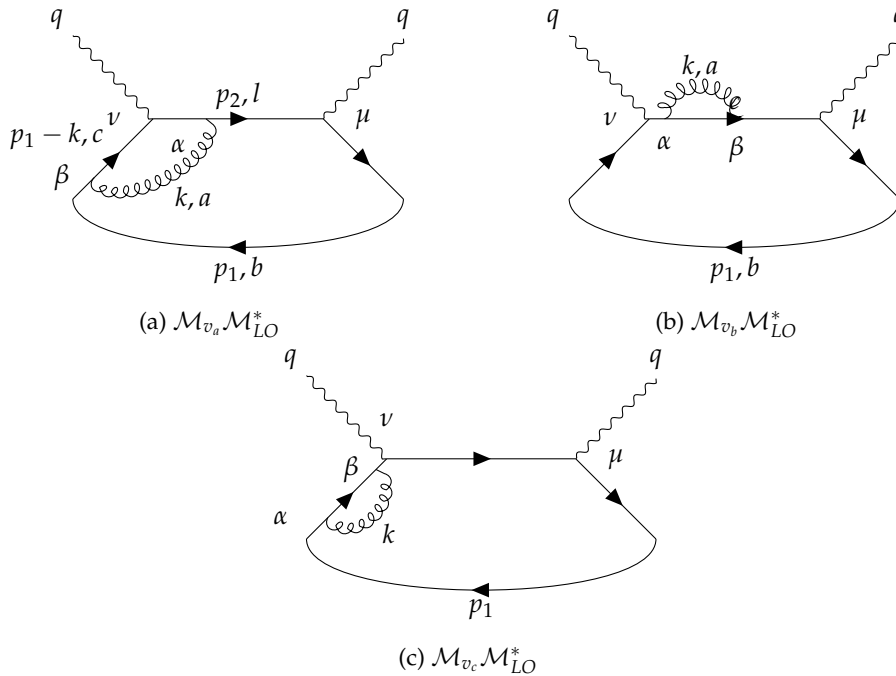


Figura 4.3: Contribuciones NLO con gluones virtuales. En todos los casos las letras griegas μ, ν, α, β son los vértices, p_1, p_2, q, k son los momentos de las partículas y a, b, c, m, l son los colores respectivos de cada línea del diagrama.

Las contribuciones de los diagramas 4.2b y 4.2c son nulas ya que es un resultado conocido de la teoría que estos, en regularización dimensional, dan integrales sin escala por lo cuál no van

a contribuir a las funciones de estructura. Nos concentraremos entonces en la contribución del diagrama 4.3a. Debemos recordar que la amplitud buscada será la parte dos veces la parte real de la que vamos a calcular. Por comodidad agregaremos esto al final.

Usando las reglas de Feynman obtenemos que el diagrama 4.2a tiene amplitud:

$$\overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2} = \frac{ie_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon}}{2} \frac{T_{bc}^a \delta_{cl} T_{lm}^a \delta_{mb}}{N_c} \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 - k)^2 (p_1 + q - k)^2 k^2} \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\alpha (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) (\not{p}_2 - \not{k}) \gamma^\beta \not{p}_2 (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) \right\} \quad (4.18)$$

Usando la expresión 2.5 y recordando que la expresión esta sumada sobre todos los valores de a , queda que:

$$\frac{\text{Tr}\{T^a T^a\}}{N_c} = \frac{N_c^2 - 1}{N_c} = C_F. \quad (4.19)$$

Por lo que queda:

$$\overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2} = \frac{ie_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon}}{2} C_F \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 - k)^2 (p_1 + q - k)^2 k^2} \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\alpha (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) (\not{p}_2 - \not{k}) \gamma^\beta \not{p}_2 (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) \right\} \quad (4.20)$$

A momento de calcular la traza simbólicamente debemos usar que:

$$\hat{p}_1 = 0, \quad \hat{q} = 0, \quad p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = 0. \quad (4.21)$$

Cómo en el cálculo a LO, debemos sumar sobre $\lambda = \pm 1$ (y dividir por 2) para las contribuciones a las funciones no polarizadas, luego contraer con los proyectores 3.28 y dividir por el factor de normalización $4\pi e_q^2$:

$$\begin{aligned} P_{L,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= 0 \\ P_{1,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= \frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{1}{2(\epsilon - 1)k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2} \left[16a^2 Q^4 + 16b^2 Q^4 - 16a^2 e Q^4 \right. \\ &\quad - 16b^2 Q^2 \hat{k}^2 - 16b^2 e Q^2 \hat{k}^2 - 16a^2 e Q^2 k^2 + 16a^2 e^2 Q^2 k^2 - 32a^2 Q^2 k \cdot p_1 \\ &\quad - 32b^2 Q^2 k \cdot p_1 + 32a^2 e Q^2 k \cdot p_1 - 32a^2 Q^2 k \cdot p_2 - 32b^2 Q^2 k \cdot p_2 \\ &\quad + 32a^2 e Q^2 k \cdot p_2 + 64a^2 (k \cdot p_1)(k \cdot p_2) + 64b^2 (k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \\ &\quad \left. - 64a^2 e (k \cdot p_1)(k \cdot p_2) + 64b^2 e (k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \right] \quad (4.22) \\ P_{3,\mu\nu}^q \overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= \frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{ab}{2k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2} \left[-32Q^4 + 32e Q^2 \hat{k}^2 + 64Q^2 k \cdot p_1 \right. \\ &\quad \left. + 64Q^2 k \cdot p_2 - 128(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \right]. \end{aligned}$$

Análogamente, podemos restar la contribución con $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$, proyectar sobre 3.33 y nor-

malizar dividiendo por $2\pi e_q^2$ para obtener las contribuciones polarizadas:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{L,\mu\nu}^q \overline{|\Delta\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= 0 \\
 \tilde{P}_{1,\mu\nu}^q \overline{|\Delta\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{1}{2k^2(p_1-k)^2(p_2-k)^2} \left[-8a^2Q^4 - 8b^2Q^4 - 8a^2Q^2\hat{k}^2 + 8b^2Q^2\hat{k}^2 \right. \\
 &\quad + 8a^2e * Q^2\hat{k}^2 + 8b^2eQ^2\hat{k}^2 + 16a^2Q^2k \cdot p_1 + 16b^2Q^2k \cdot p_1 + 16a^2Q^2k \cdot p_2 \\
 &\quad + 16b^2Q^2k \cdot p_2 - 32a^2(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) - 32b^2(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \\
 &\quad \left. + 32a^2e(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) - 32b^2e(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \right] \\
 \tilde{P}_{3,\mu\nu}^q \overline{|\Delta\mathcal{M}_{v_a}|^2} &= \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{ab}{2(\epsilon-1)k^2(p_1-k)^2(p_2-k)^2} \left[16Q^4 - 16eQ^2\hat{k}^2 - 32Q^2k \cdot p_1 \right. \\
 &\quad \left. - 32Q^2k \cdot p_2 + 64(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \right]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Hasta acá tenemos los vértices proyectados, queda multiplicar por el espacio de fases e integrar sobre el momento k del loop. Haremos esto en las primeras secciones del capítulo 5.

4.4. Correcciones a NLO: Diagramas asociados a contribuciones reales

En esta sección trataremos con las contribuciones reales, que vienen dadas por la emisión de un gluón de momento k , como se muestra en los diagramas 4.4a y 4.4b. Un cambio importante que tenemos respecto del caso en el que hay una única partícula en el estado final es que ahora p_2 puede tener momento en las dimensiones no físicas, por lo que ya no vale que $\hat{p}_2 = 0$.

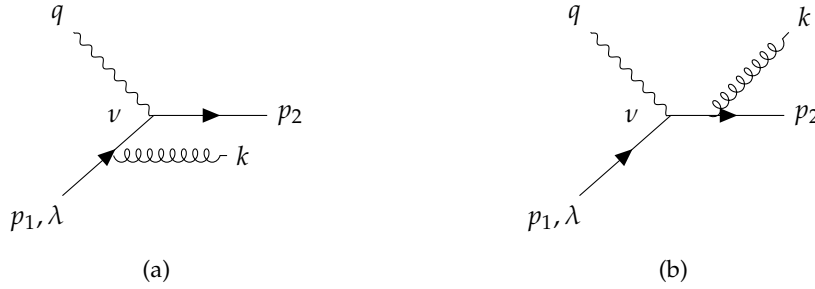


Figura 4.4: Contribuciones NLO con gluones reales.

En este caso debemos considerar la amplitud dada por:

$$\overline{|\mathcal{M}_{\text{reales}}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{r_a} + \mathcal{M}_{r_b}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{r_a}|^2} + \overline{|\mathcal{M}_{r_b}|^2} + 2\text{Re}\left\{\overline{\mathcal{M}_{r_a}\mathcal{M}_{r_b}^*}\right\} \tag{4.24}$$

donde estamos llamando con subíndice r_a a la contribución del diagrama 4.4a y r_b a la contribución del diagrama 4.4b. Los diagramas correspondientes a al producto de dos diagramas se ven en las Figuras 4.5a, 4.5b y 4.5c.

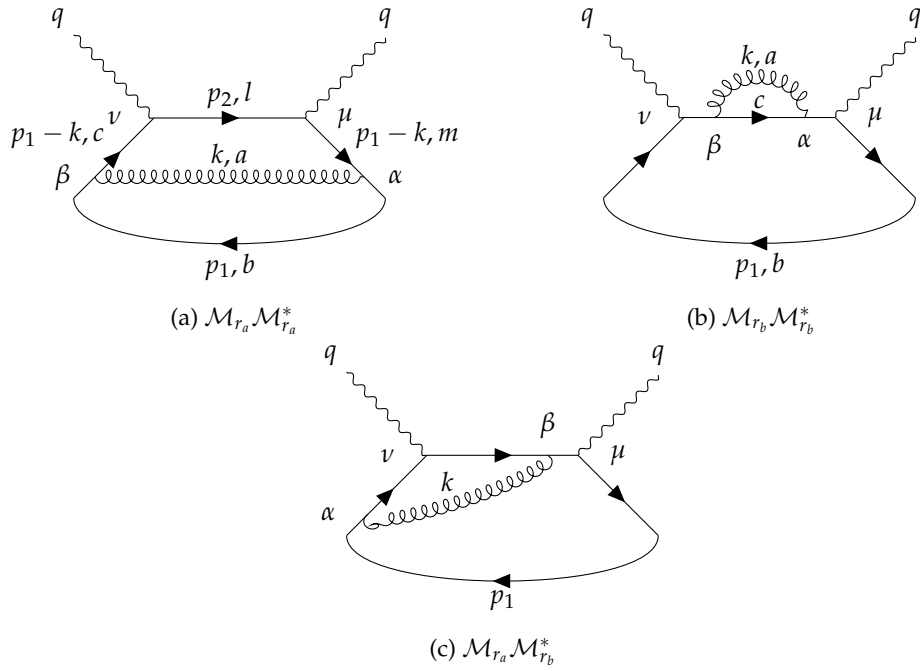


Figura 4.5: Contribuciones NLO con gluones reales. En todos los casos las letras griegas μ, ν, α, β son los vértices, p_1, p_2, q, k son los momentos de las partículas y a, b, c, m, l son los colores respectivos de cada línea del diagrama.

Para calcular las amplitudes, primero calculamos las trazas fermiónicas a partir de los diagramas 4.5a, 4.5b y 4.5c y agregaremos los factores de color. Empecemos calculando el término $|\overline{\mathcal{M}_{r_a}}|^2$:

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}_{r_a}}|^2 &= \frac{e_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon}}{2} \frac{T_{bc}^a \delta_{cl} \delta_{lm} T_{mb}^a}{N_c} \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 - k)^4} \\
 &\quad \times \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\beta (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) \not{p}_2 (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\alpha \right\} \\
 &= \frac{e_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon}}{2} \frac{\text{Tr} \{ T^a T^a \}}{N_c} \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 - k)^2} \\
 &\quad \times \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\beta (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) \not{p}_2 (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\alpha \right\}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De la misma manera que antes, obtenemos que:

$$\frac{\text{Tr} \{ T^a T^a \}}{N_c} = \frac{N_c^2 - 1}{N_c} = C_F$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}_{r_a}}|^2 &= \frac{e_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon}}{2} C_F \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 - k)^2} \\
 &\quad \times \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\beta (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) \not{p}_2 (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\alpha \right\}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Para el diagrama 4.5b, se obtiene de manera análoga al caso anterior:

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}_{r_b}}|^2 &= \frac{e_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 + q)^4} \\
 &\quad \times \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) (\not{p}_1 + \not{q}) \gamma^\beta (\not{p}_1 + \not{q} - \not{k}) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + \not{q}) (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Finalmente, para el diagrama 4.5c. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{r_a} \mathcal{M}_{r_b}^*} &= \frac{e_q^2 g^2 \mu^{2\varepsilon} C_F}{2} \frac{(-g_{\alpha\beta})}{(p_1 + q)^2 (p_1 - k)^2} \\ &\times \text{Tr} \left\{ (1 + \lambda \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\alpha (\not{p}_1 - \not{k}) (a \gamma^\nu + b \tilde{\gamma}^\nu \gamma^5) (\not{p}_1 - \not{k} + \not{q}) \gamma^\beta (\not{p}_1 + \not{q}) (a \gamma^\mu + b \tilde{\gamma}^\mu \gamma^5) \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Al momento de calcular la traza simbólicamente debemos usar que:

$$\hat{p}_1 = 0, \quad \hat{q} = 0, \quad p_1^2 = 0, \quad p_2^2 = 0, \quad \text{y} \quad k^2 = 0. \quad (4.29)$$

Notemos que $(p_1 + q)^2$ se puede escribir en términos de Q^2 y x como:

$$(p_1 + q)^2 = -Q^2 + 2p_1 \cdot q = -Q^2 + \frac{Q^2}{x} = \frac{Q^2(1-x)}{x}. \quad (4.30)$$

Por lo que el único propagador real involucrado es $\frac{1}{(p_1 - k)^2}$. Usando este reemplazo y sumando:

$$\mathcal{M}^2 = |\mathcal{M}|_{r_a}^2 + |\mathcal{M}|_{r_b}^2 + 2 \text{Re} \left\{ \mathcal{M}_{r_a} \mathcal{M}_{r_b}^* \right\}, \quad (4.31)$$

Tenemos la amplitud de los diagramas reales. Ahora resta promediar sobre $\lambda = \pm 1$ y proyectar sobre 3.28 para obtener las contribuciones a las funciones no polarizadas (usando la normalización $1/4\pi e_q^2$):

$$\begin{aligned} P_{L,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 &= -\frac{\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F}{2} \frac{128(a^2 + b^2)(\varepsilon - 1)x(k \cdot p_1)^2(Q^2 - 2xk \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2 Q^2} \\ P_{1,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 &= \frac{\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F}{2} \frac{1}{(e-1)(x-1)^2} \left[-8a^2 - 8b^2 + 16a^2\varepsilon + 8b^2\varepsilon - 8a^2\varepsilon^2 - \frac{16a^2Q^2}{(p_1 - k)^2} \right. \\ &\quad - \frac{16b^2Q^2}{(p_1 - k)^2} + \frac{16a^2\varepsilon Q^2}{(p_1 - k)^2} + \frac{16a^2Q^2}{(p_1 - k)^2 x} + \frac{16b^2Q^2}{(p_1 - k)^2 x} - \frac{16a^2\varepsilon Q^2}{(p_1 - k)^2 x} + 8a^2x \\ &\quad + 8b^2x - 16a^2\varepsilon x - 8b^2\varepsilon x + 8a^2\varepsilon^2 x - \frac{16b^2\hat{k}^2}{(p_1 - k)^2} - \frac{16b^2\varepsilon\hat{k}^2}{(p_1 - k)^2} + \frac{16b^2x\hat{k}^2}{(p_1 - k)^2} \\ &\quad + \frac{16b^2\varepsilon x\hat{k}^2}{(p_1 - k)^2} - \frac{64a^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} - \frac{64b^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{96a^2\varepsilon(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} - \frac{64b^2\varepsilon(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} \\ &\quad - \frac{32a^2\varepsilon^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} - \frac{128a^2\varepsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} \\ &\quad + \frac{128b^2\varepsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{64a^2\varepsilon^2 x(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{32a^2\varepsilon x^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} - \frac{64b^2\varepsilon x^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} \\ &\quad - \frac{32a^2\varepsilon^2 x^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2} + \frac{16a^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2} + \frac{16b^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2} - \frac{32a^2\varepsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2} \\ &\quad - \frac{16b^2\varepsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2} + \frac{16a^2\varepsilon^2 x^2(k \cdot p_1)}{Q^2} - \frac{96b^2\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} + \frac{96b^2\varepsilon\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} \\ &\quad + \frac{192b^2x\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} - \frac{192b^2\varepsilon x\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} - \frac{96b^2x^2\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} + \frac{96b^2\varepsilon x^2\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4} \\ &\quad - \frac{32a^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{32b^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2\varepsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{32b^2\varepsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} \\ &\quad - \frac{32a^2\varepsilon^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{64a^2\varepsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2\varepsilon^2 x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2 Q^2} \\ &\quad + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2 Q^2} - \frac{64a^2\varepsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2 Q^2} + \frac{64b^2\varepsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2 Q^2} + \frac{96a^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{96b^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{64a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{96b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{32a^2\epsilon^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} \\
 & - \frac{64a^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2Q^2} - \frac{64b^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2Q^2} + \frac{64a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2Q^2} - \frac{64b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2Q^2} \\
 & - \frac{64a^2x^3(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{64b^2x^3(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2\epsilon x^3(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64b^2\epsilon x^3(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} \\
 & + \frac{128a^2x^2(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} + \frac{128b^2x^2(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} - \frac{128a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} - \frac{128b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} \\
 & - \frac{256a^2x^3(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} - \frac{256b^2x^3(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} + \frac{256a^2\epsilon x^3(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} + \frac{256b^2\epsilon x^3(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} \\
 & + \frac{128a^2x^4(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} + \frac{128b^2x^4(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} - \frac{128a^2\epsilon x^4(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} - \frac{128b^2\epsilon x^4(k \cdot p_1)^3}{(p_1 - k)^4Q^2} \\
 & - \frac{32a^2(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} - \frac{32b^2(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} + \frac{32a^2\epsilon(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} + \frac{32a^2x(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} + \frac{32b^2x(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} \\
 & - \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2} + \frac{16a^2x(k \cdot q)}{Q^2} + \frac{16b^2x(k \cdot q)}{Q^2} - \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2} - \frac{16b^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2} \\
 & + \frac{16a^2\epsilon^2x(k \cdot q)}{Q^2} - \frac{32a^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{32b^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & + \frac{32b^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{32a^2\epsilon^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{128a^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{64b^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & + \frac{64a^2\epsilon^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} \\
 & - \frac{64a^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} + \frac{64b^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} - \frac{32a^2x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & - \frac{32b^2x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} + \frac{64a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} + \frac{32b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & - \frac{32a^2\epsilon^2x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{64a^2x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} - \frac{64b^2x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} \\
 & + \frac{64a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} - \frac{64b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2} \Big] \\
 P_{3,\mu\nu}^q \mathcal{M} = & \frac{\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \left[\frac{16ab}{(1-x)^2} - \frac{16ab\epsilon}{(1-x)^2} - \frac{32abQ^2}{(p_1 - k)^2(1-x)x} - \frac{16abx}{(1-x)^2} + \frac{16ab\epsilon x}{(1-x)^2} \right. \\
 & + \frac{32ab\epsilon \hat{k}^2}{(p_1 - k)^2(1-x)} + \frac{64ab(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2(1-x)} + \frac{64abx(k \cdot p_1)}{(p_1 - k)^2(1-x)} - \frac{32abx^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} \\
 & + \frac{32ab\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{64ab(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{64ab\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} + \frac{128abx(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} \\
 & - \frac{128ab\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^4} - \frac{128abx^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1 - k)^2Q^2(1-x)} + \frac{64ab(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2(1-x)} \\
 & - \frac{32abx(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{32ab\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{64ab(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} \\
 & \left. - \frac{64ab\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^4} - \frac{128abx(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1 - k)^2Q^2(1-x)} \right]
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Para comparar estos resultados con los que están en [18], vamos a necesitar escribir estas contribuciones en términos de las variables cinématicas x y y . Para eso necesitamos escribir $k \cdot p_1$ y

$k \cdot q$ en función de estas variables.

De la definición de x podemos despejar que:

$$p_1 \cdot q = \frac{Q^2}{2x} \quad (4.33)$$

y usando la cinemática del problema se obtiene [18]:

$$(p_1 - k)^2 = -2p_1 \cdot k = -\frac{Q^2(1-y)}{x} \Rightarrow p_1 \cdot k = \frac{Q^2(1-y)}{2x}. \quad (4.34)$$

Por otro lado, como

$$p_1 + q = p_2 + k \Rightarrow -2p_1 \cdot p_2 = (p_1 - p_2)^2 = (k - q)^2 = -Q^2 - 2k \cdot q. \quad (4.35)$$

Como $-p_1 \cdot p_2$ es la variable de Mandelstam u , usando la cinemática tenemos [18]:

$$-2p_1 \cdot p_2 = -Q^2 \frac{y}{x} = -Q^2 - 2k \cdot q. \quad (4.36)$$

Despejando,

$$k \cdot q = -\frac{Q^2}{2} \left(\frac{x-y}{x} \right). \quad (4.37)$$

Haciendo estos cambios de variable obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned} P_{L,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 &= -\frac{\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} 32(a^2 + b^2)(\epsilon - 1)xy \\ P_{1,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 &= \frac{\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{1}{(\epsilon - 1)(x - 1)(y - 1)} \left[-16a^2 - 16b^2 + 16a^2\epsilon + 32b^2\epsilon + 16a^2x \right. \\ &\quad + 16b^2x - 16a^2\epsilon x - 32b^2\epsilon x - 8a^2x^2 - 8b^2x^2 + 16a^2\epsilon x^2 + 8b^2\epsilon x^2 - 8a^2\epsilon^2x^2 \\ &\quad + 16a^2y + 16b^2y - 16a^2\epsilon y - 32b^2\epsilon y - 32a^2xy - 32b^2xy + 16a^2\epsilon xy + 32b^2\epsilon xy \\ &\quad + 16a^2\epsilon^2xy + 16a^2x^2y + 16b^2x^2y - 16a^2\epsilon x^2y - 16b^2\epsilon x^2y - 8a^2y^2 - 8b^2y^2 \\ &\quad + 16a^2\epsilon y^2 + 8b^2\epsilon y^2 - 8a^2\epsilon^2y^2 + 16a^2xy^2 + 16b^2xy^2 - 16a^2\epsilon xy^2 - 16b^2\epsilon xy^2 \\ &\quad - 16a^2x^2y^2 - 16b^2x^2y^2 + 16a^2\epsilon x^2y^2 + 16b^2\epsilon x^2y^2 - \frac{32b^2x\hat{k}^2}{Q^2} + \frac{64b^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2} \\ &\quad \left. + \frac{48b^2x^2\hat{k}^2}{Q^2} - \frac{48b^2\epsilon x^2\hat{k}^2}{Q^2} \right] \\ P_{3,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 &= \frac{\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{16ab}{(x - 1)(y - 1)} \left[2x - 2\epsilon x - x^2 + \epsilon x^2 + 2y - 4xy + 4\epsilon xy + 2x^2y \right. \\ &\quad \left. - 2\epsilon x^2y - y^2 - \epsilon y^2 + 2xy^2 - \frac{2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Usando estas expresiones podemos comparar $P_{1,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2 - \frac{1}{2(1-\epsilon)} P_{L,\mu\nu}^q \mathcal{M}^2$ con los resultados en [18] en el caso $a = 1, b = 0$ y re-obtenemos los resultados.

Para poder comparar con [18] nos conviene tener a mano las proyecciones sobre $\frac{-g_{\mu\nu}}{1-\epsilon}$:

$$\begin{aligned} -\frac{g_{\mu\nu}}{1-\epsilon} \mathcal{M} &= -\frac{1}{1-\epsilon} \left[\frac{-8a^2}{(1-x)^2} - \frac{8b^2}{(1-x)^2} + \frac{16a^2\epsilon}{(1-x)^2} + \frac{8b^2\epsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2\epsilon^2}{(1-x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16a^2Q^2}{(p_1 - k)^2(1-x)x} + \frac{16b^2Q^2}{(p_1 - k)^2(1-x)x} - \frac{16a^2\epsilon Q^2}{(p_1 - k)^2(1-x)x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8a^2x}{(1-x)^2} + \frac{8b^2x}{(1-x)^2} - \frac{16a^2\epsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8b^2\epsilon x}{(1-x)^2} + \frac{8a^2\epsilon^2x}{(1-x)^2} - \frac{16b^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
& - \frac{16b^2\epsilon\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{64a^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{64b^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{96a^2\epsilon(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
& - \frac{64b^2\epsilon(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{32a^2\epsilon^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{64b^2\epsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
& + \frac{32a^2\epsilon^2x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{16a^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{16b^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{32a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} \\
& - \frac{16b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{16a^2\epsilon^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{96b^2\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^4} + \frac{96b^2\epsilon\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^4} \\
& - \frac{32a^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} - \frac{32b^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{64a^2\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{32b^2\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} \\
& - \frac{32a^2\epsilon^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \\
& - \frac{64a^2\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} + \frac{64b^2\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} - \frac{32a^2(k \cdot q)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
& - \frac{32b^2(k \cdot q)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{32a^2\epsilon(k \cdot q)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{16a^2x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{16b^2x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} \\
& - \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{16b^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{16a^2\epsilon^2x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{32a^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} \\
& - \frac{32b^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} + \frac{64a^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} + \frac{32b^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} \\
& - \frac{32a^2\epsilon^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} + \frac{64a^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} + \frac{64b^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \\
& - \frac{64a^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} + \frac{64b^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \Big]
\end{aligned}$$

(4.39)

Y reemplazando los productos para obtener una expresión en términos de x e y :

$$\begin{aligned}
 -\frac{g_{\mu\nu}}{1-\varepsilon}\mathcal{M} = \frac{1}{1-\varepsilon} & \left[8a^2 + 8b^2 - 16a^2\varepsilon - 8b^2\varepsilon + 8a^2\varepsilon^2 + \frac{8a^2}{(1-x)^2} + \frac{8b^2}{(1-x)^2} - \frac{16a^2\varepsilon}{(1-x)^2} \right. \\
 & - \frac{8b^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{8a^2\varepsilon^2}{(1-x)^2} - \frac{32a^2}{(1-x)} - \frac{32b^2}{1-x} + \frac{48a^2\varepsilon}{1-x} - \frac{32b^2\varepsilon}{1-x} - \frac{16a^2\varepsilon^2}{1-x} \\
 & - \frac{8a^2x}{(1-x)^2} - \frac{8b^2x}{(1-x)^2} + \frac{16a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} + \frac{8b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2\varepsilon^2 x}{(1-x)^2} - \frac{16a^2\varepsilon x}{1-x} \\
 & + \frac{32b^2\varepsilon x}{1-x} + \frac{16a^2\varepsilon^2 x}{1-x} + \frac{16a^2}{(1-x)(1-y)} + \frac{16b^2}{(1-x)(1-y)} \\
 & - \frac{16a^2\varepsilon}{(1-x)(1-y)} + \frac{(16a^2(1-y))}{1-x} + \frac{16b^2(1-y)}{1-x} - \frac{16a^2\varepsilon(1-y)}{1-x} \\
 & + \frac{16b^2\varepsilon(1-y)}{1-x} - \frac{8a^2x(1-y)}{(1-x)^2} - \frac{8b^2x(1-y)}{(1-x)^2} + \frac{16a^2\varepsilon x(1-y)}{(1-x)^2} \\
 & + \frac{8b^2\varepsilon x(1-y)}{(1-x)^2} - \frac{8a^2\varepsilon^2 x(1-y)}{(1-x)^2} + \frac{8a^2(x-y)}{(1-x)^2} + \frac{8b^2(x-y)}{(1-x)^2} \\
 & - \frac{16a^2\varepsilon(x-y)}{(1-x)^2} - \frac{8b^2\varepsilon(x-y)}{(1-x)^2} + \frac{8a^2\varepsilon^2(x-y)}{(1-x)^2} - \frac{16a^2(x-y)}{1-x} \\
 & - \frac{16b^2(x-y)}{1-x} + \frac{16a^2\varepsilon(x-y)}{1-x} - \frac{16b^2\varepsilon(x-y)}{1-x} - \frac{8a^2(x-y)}{1-y} \\
 & - \frac{8b^2(x-y)}{1-y} + \frac{16a^2\varepsilon(x-y)}{1-y} + \frac{8b^2\varepsilon(x-y)}{1-y} - \frac{8a^2\varepsilon^2(x-y)}{1-y} \\
 & + \frac{16a^2(x-y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{16b^2(x-y)}{(1-x)(1-y)} - \frac{16a^2\varepsilon(x-y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{48b^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)} \\
 & \left. - \frac{48b^2\varepsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)} - \frac{16b^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} - \frac{16b^2\varepsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} \right] \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Análogamente podemos calcular las contribuciones a las funciones polarizadas. En este caso la normalización es $\frac{1}{2\pi e_q^2}$:

$$\tilde{P}_L^{\mu\nu} \Delta\mathcal{M}^2 = \alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \frac{128ab(1+\varepsilon)x(k \cdot p_1)^2(Q^2 - 2xk \cdot p_1)}{(p_1 - k)^4 Q^2} \tag{4.41}$$

o en términos de x y y

$$\tilde{P}_L^{\mu\nu} \Delta\mathcal{M}^2 = \alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F 32ab(1+\varepsilon)xy \tag{4.42}$$

Para las contribuciones a g_1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_1^{\mu\nu} \Delta \mathcal{M}^2 = & \alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \left[\frac{4a^2}{(1-x)^2} + \frac{4b^2}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\epsilon}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\epsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2Q^2}{(p_1-k)^2(1-x)} \right. \\
 & - \frac{8b^2Q^2}{(p_1-k)^2(1-x)x} - \frac{4a^2x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\epsilon x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\epsilon x}{(1-x)^2} \\
 & - \frac{8a^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{8b^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{8a^2\epsilon\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{8b^2\epsilon\hat{k}^2}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
 & + \frac{8a^2Q^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^4x} + \frac{8b^2Q^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^4x} + \frac{8a^2\epsilon Q^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^4x} + \frac{8b^2\epsilon Q^2\hat{k}^2}{(p_1-k)^4x} + \frac{16a^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
 & + \frac{16b^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{16a^2\epsilon(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{16b^2\epsilon(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{16a^2x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
 & + \frac{16b^2x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} + \frac{16a^2\epsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{16b^2\epsilon x(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{8a^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} \\
 & - \frac{8b^2x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{8a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{8b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{32b^2\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^4} \\
 & - \frac{32b^2\epsilon\hat{k}^2(k \cdot p_1)}{(p_1-k)^4} - \frac{16a^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} - \frac{16b^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} - \frac{16a^2\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} \\
 & - \frac{16b^2\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{32a^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{32b^2x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} + \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} \\
 & + \frac{32b^2\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^4} - \frac{32a^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} - \frac{32b^2x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \\
 & + \frac{32a^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} - \frac{32b^2\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} + \frac{16a^2(k \cdot q)}{(p_1-k)^2(1-x)} \\
 & + \frac{16b^2(k \cdot q)}{(p_1-k)^2(1-x)} - \frac{8a^2x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} - \frac{8b^2x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{8a^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} + \frac{8b^2\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(1-x)^2} \\
 & + \frac{16a^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} + \frac{16b^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} + \frac{16a^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} \\
 & + \frac{16b^2\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^4} - \frac{32a^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} - \frac{32b^2x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \\
 & \left. - + \frac{32a^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \frac{32b^2\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(p_1-k)^2Q^2(1-x)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

Análogamente, podemos escribir esta expresión en función de x e y :

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_1^{\mu\nu} \Delta \mathcal{M}^2 = & \alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \left[-4a^2 - 4b^2 - 4a^2\epsilon - 4b^2\epsilon + \frac{4a^2}{(1-x)^2} + \frac{4b^2}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\epsilon}{(1-x)^2} \right. \\
 & - \frac{4b^2\epsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} + \frac{8a^2\epsilon}{1-x} - \frac{8b^2\epsilon}{1-x} + 8a^2x + 8b^2x + 8a^2\epsilon x + 8b^2\epsilon x \\
 & - \frac{4a^2x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\epsilon x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\epsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} - \frac{8b^2x}{1-x} - \frac{8a^2\epsilon x}{1-x} \\
 & + \frac{8b^2\epsilon x}{1-x} + \frac{8a^2}{(1-x)(1-y)} + \frac{8b^2}{(1-x)(1-y)} - \frac{4a^2x(1-y)}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x(1-y)}{(1-x)^2} \\
 & + \frac{4a^2\epsilon x(1-y)}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\epsilon x(1-y)}{(1-x)^2} + \frac{8a^2x(1-y)}{1-x} + \frac{8b^2x(1-y)}{1-x} - \frac{8a^2\epsilon x(1-y)}{1-x} \\
 & + \frac{8b^2\epsilon x(1-y)}{1-x} + \frac{4a^2(x-y)}{(1-x)^2} + \frac{4b^2(x-y)}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\epsilon(x-y)}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\epsilon(x-y)}{(1-x)^2} \\
 & - \frac{8a^2(x-y)}{1-x} - \frac{8b^2(x-y)}{1-x} + \frac{8a^2\epsilon(x-y)}{1-x} - \frac{8b^2\epsilon(x-y)}{1-x} - \frac{4a^2(x-y)}{1-y} \\
 & - \frac{4b^2(x-y)}{1-y} - \frac{4a^2\epsilon(x-y)}{1-y} - \frac{4b^2\epsilon(x-y)}{1-y} + \frac{8a^2(x-y)}{(1-x)(1-y)} + \frac{8b^2(x-y)}{(1-x)(1-y)} \\
 & + \frac{8a^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)^2} + \frac{8b^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)^2} + \frac{8a^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)^2} + \frac{8b^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)^2} - \frac{16b^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)} \\
 & - \frac{16b^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-y)} + \frac{8a^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} - \frac{8b^2x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} - \frac{8a^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} \\
 & \left. - \frac{8b^2\epsilon x\hat{k}^2}{Q^2(1-x)(1-y)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

Podemos notar que si consideramos el caso de un fotón incidente ($a = 1, b = 0$), re-obtenemos la expresión clásica (ver [18]).

Nos queda solamente la contribución a g_3 :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_3^{\mu\nu} \Delta \mathcal{M}^2 = & \alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \frac{ab}{\epsilon - 1} \left[\frac{-8}{(-1+x)^2} + \frac{8\epsilon}{(-1+x)^2} - \frac{16Q^2}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} \right. \\
 & + \frac{16Q^2}{(k-p_1)^2(-1+x)^2 x} + \frac{8x}{(-1+x)^2} - \frac{8\epsilon x}{(-1+x)^2} - \frac{16\epsilon \hat{k}^2}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{32Q^2 \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{32\epsilon Q^2 \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{16Q^2 \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2 x} \\
 & - \frac{16\epsilon Q^2 \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2 x} + \frac{16\epsilon x \hat{k}^2}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} - \frac{16Q^2 x \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} \\
 & - \frac{16\epsilon Q^2 x \hat{k}^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{64(k \cdot p_1)}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} + \frac{64x(k \cdot p_1)}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{16x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(-1+x)^2} - \frac{16\epsilon x^2(k \cdot p_1)}{Q^2(-1+x)^2} - \frac{32(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{32\epsilon(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} \\
 & - \frac{64x(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{64\epsilon x(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{64x(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^2 Q^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{224x^2(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{224\epsilon x^2(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{64x^2(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^2 Q^2(-1+x)^2} \\
 & - \frac{128x^3(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{128\epsilon x^3(k \cdot p_1)^2}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{256x^2(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{256\epsilon x^2(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} - \frac{512x^3(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} - \frac{512\epsilon x^3(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{256x^4(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} + \frac{256\epsilon x^4(k \cdot p_1)^3}{(k-p_1)^4 Q^2(-1+x)^2} - \frac{32(k \cdot q)}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} \\
 & + \frac{32x(k \cdot q)}{(k-p_1)^2(-1+x)^2} + \frac{16x(k \cdot q)}{Q^2(-1+x)^2} - \frac{16\epsilon x(k \cdot q)}{Q^2(-1+x)^2} - \frac{32(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} \\
 & - \frac{32\epsilon(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{64x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} + \frac{64\epsilon x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} \\
 & + \frac{64x(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^2 Q^2(-1+x)^2} - \frac{32x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} - \frac{32\epsilon x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^4(-1+x)^2} \\
 & \left. - \frac{64x^2(k \cdot p_1)(k \cdot q)}{(k-p_1)^2 Q^2(-1+x)^2} \right] \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escribir en función de las variables x e y :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_3^{\mu\nu} \Delta \mathcal{M}^2 = & \alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \frac{ab}{(x-1)(\epsilon-1)(y-1)^2} \left[16 - 16x - 16\epsilon x + 8x^2 + 8\epsilon x^2 - 32y + 16\epsilon y + 64xy \right. \\
 & + 48\epsilon xy - 40x^2 y - 40\epsilon x^2 y + 24y^2 - 24\epsilon y^2 - 80xy^2 - 64\epsilon xy^2 + 64x^2 y^2 + 64\epsilon x^2 y^2 \\
 & - 8y^3 + 8\epsilon y^3 + 32xy^3 + 32\epsilon xy^3 - 32x^2 y^3 - 32\epsilon x^2 y^3 + \frac{16x \hat{k}^2}{Q^2} - \frac{16x^2 \hat{k}^2}{Q^2} - \frac{16\epsilon x^2 \hat{k}^2}{Q^2} \\
 & \left. + \frac{16\epsilon xy \hat{k}^2}{Q^2} \right] \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

Reducciones de las contribuciones NLO

En este capítulo nos concentraremos en usar el método de integración por partes (IBP) para reducir las integrales a las integrales maestras. Esta reducción la realizamos utilizando el paquete FIRE5 [21]. Esto nos va a simplificar el cálculo. En el caso de las contribuciones virtuales usaremos únicamente el método IBP con el objetivo de reobtener el resultado clásico. En el caso de las contribuciones virtuales el espacio de fases es el que ya calculamos.

Para las contribuciones reales, primero vamos a calcular el espacio de fases de dos partículas en el estado inicial y dos partículas en el estado final (5.3). Luego, describiremos el método que usaremos para hacer la reducción y calcularemos las funciones de estructura polarizadas y no polarizadas.

5.1. Contribuciones virtuales no polarizadas

Para hacer las cuentas separamos primero los términos que tienen a \hat{k} y los que no lo tienen, ya que vamos a necesitar reducirlos en distintas dimensiones. Además, usamos la base de propagadores $\{k^2, (p_1 - k)^2, (p_2 - k)^2\}$. Notemos que el diagrama es el mismo que discutimos en detalle en 2.10, con la diferencia que reordenamos la base, por lo que la MI no nula va a ser $G[0, 1, 1]$.

Lo primero que debemos hacer es escribir las expresiones de la ecuación 4.22 en función de los elementos de la base. Es decir, debemos reemplazar $k \cdot p_1, k \cdot p_2$ como función de los propagadores. Como $p_1^2 = p_2^2 = 0$ vale que:

$$(p_1 - k)^2 = k^2 - 2p_1 \cdot k \Rightarrow p_1 \cdot k = \frac{k^2 - (p_1 - k)^2}{2}. \quad (5.1)$$

y análogamente,

$$(p_2 - k)^2 = k^2 - 2p_2 \cdot k \Rightarrow p_2 \cdot k = \frac{k^2 - (p_2 - k)^2}{2}. \quad (5.2)$$

Para acortar notación, introducimos A_i a la parte de $P_{i,\mu\nu} \overline{|\mathcal{M}_{v_a}|^2}$ que no tiene componentes \hat{k} y B_i a la parte que tiene los momentos \hat{k}^2 .

Usando IBP, se obtiene que:

$$A_1 = \frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \left[4(b^2 - a^2)Q^2 + \frac{8(a^2 + b^2)Q^2}{\epsilon} + 8a^2 e Q^2 \right] G[0, 1, 1] \quad (5.3)$$

donde $G[0, 1, 1]$ es la única integral maestra que aparece. Usando B.8, podemos escribir $G[0, 1, 1]$ como:

$$G[0, 1, 1] = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2} = S_\Gamma (-q^2)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1 + \epsilon) \Gamma^3(1 - \epsilon)}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} \frac{i}{\epsilon} \quad (5.4)$$

Por otro lado, la expresión con \hat{k}^2 :

$$B_1 = -\frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{8Q^2 b^2 (1 + \epsilon) \hat{k}^2}{(\epsilon - 1) k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2}, \quad (5.5)$$

se puede reducir con FIRE, tomando la dimensión $n = 6 - 2\epsilon$ (esto lo hacemos porque podemos usar la ecuación B.14 para pasar de una integral con \hat{k}^2 en $4 - 2\epsilon$ dimensiones a una sin \hat{k}^2 pero en $6 - 2\epsilon$ dimensiones). Lo que nos devuelve:

$$B_1 = -\frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{8b^2 (3 + \epsilon - 2\epsilon^2)}{(e - 1)^2} \frac{\hat{k}^2}{(p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2}. \quad (5.6)$$

Podemos eliminar la dependencia en \hat{k}^2 usando la expresión B.14, con $\alpha = 1$, es decir, hacemos el cambio:

$$\hat{k}^2 \longrightarrow -4\pi \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} = -4\pi \frac{(-\epsilon \Gamma(-\epsilon))}{\Gamma(-\epsilon)} = 4\pi\epsilon. \quad (5.7)$$

Donde usamos la identidad:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \quad (5.8)$$

Reemplazando en B_1 :

$$B_1 = \frac{i\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \frac{8b^2 (3 + \epsilon - 2\epsilon^2)}{(e - 1)^2} 4\pi\epsilon \int \frac{d^{6-2\epsilon} k}{(2\pi)^{6-2\epsilon}} \frac{1}{(p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2}. \quad (5.9)$$

Notemos que como el cambio de dimensión en la integral solamente agrega constantes podemos hacerla antes o después de la reducción, siempre usando IBP en $6 - 2\epsilon$ dimensiones.

Para poder realizar la integral en $6 - 2\epsilon$ dimensiones reemplazamos $\epsilon \rightarrow \epsilon - 1$ en B.8. Lo que nos da:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{6-2\epsilon} k}{(2\pi)^{6-2\epsilon}} \frac{1}{(p_1 - k)^2 (p_2 - k)^2} &= \frac{(4\pi)^{(\epsilon-1)}}{16\pi^2 \Gamma(1 - (\epsilon - 1))} (-q^2)^{-(\epsilon-1)} \\ &\times \frac{\Gamma(1 + (\epsilon - 1)) \Gamma^3(1 - (\epsilon - 1))}{\Gamma(2 - 2(\epsilon - 1))} \frac{i}{(\epsilon - 1)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{(4\pi)^\epsilon}{16\pi^2 \Gamma(2 - \epsilon)} (-q^2)^{-\epsilon} Q^2 \\ &\times \frac{\Gamma(\epsilon) \Gamma^3(2 - \epsilon)}{\Gamma(4 - 2\epsilon)} \frac{i}{(\epsilon - 1)} \\ &= \frac{Q^2 (1 - \epsilon)^3}{4\pi (1 - \epsilon) \epsilon (2 - 2\epsilon) (3 - 2\epsilon)} G[0, 1, 1] \frac{\epsilon}{(\epsilon - 1)} \\ &= -\frac{Q^2}{8\pi (3 - 2\epsilon)} G[0, 1, 1] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Por lo que luego de la reducción en $6 - 2\epsilon$ dimensiones debemos reemplazar:

$$\boxed{\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\hat{k}^2}{(k - p_1)^2 (k - p_2)^2} \longrightarrow 4\pi\epsilon \frac{-Q^2}{8\pi (3 - 2\epsilon)} G[0, 1, 1] = -\frac{Q^2 \epsilon}{2(3 - 2\epsilon)} G[0, 1, 1]} \quad (5.11)$$

donde ahora $G[0, 1, 1]$ es integral en $4 - 2\varepsilon$ dimensiones. Resulta cómodo escribirlo de esta manera para poder sumar ambas contribuciones más fácilmente.

Por lo que usando 5.11:

$$B_1 = -\frac{i\alpha_s\mu^{2\varepsilon}C_F}{2} \frac{4b^2\varepsilon(1+\varepsilon)Q^2}{(\varepsilon-1)^2} G[0, 1, 1] \quad (5.12)$$

Finalmente,

$$A_1 + B_1 = \frac{i\alpha_s\mu^{2\varepsilon}C_F}{2} \frac{Q^2}{(\varepsilon-1)^2} \left[-20a^2 - 12b^2 + \frac{8a^2}{\varepsilon} + \frac{8b^2}{\varepsilon} + 24a^2\varepsilon - 4b^2\varepsilon - 20a^2\varepsilon^2 + 8a^2\varepsilon^3 \right] G[0, 1, 1] \quad (5.13)$$

Multiplicando por el espacio de fases para una partícula en el estado final y recordando que teníamos que tomar el doble de la parte real:

$$\mathcal{F}_1 = 2\frac{\alpha_s\mu^{2\varepsilon}C_F}{2} \frac{Q^2}{(\varepsilon-1)^2} \left[-20a^2 - 12b^2 + \frac{8a^2}{\varepsilon} + \frac{8b^2}{\varepsilon} + 24a^2\varepsilon - 4b^2\varepsilon - 20a^2\varepsilon^2 + 8a^2\varepsilon^3 \right] \text{Re}\{iG[0, 1, 1]\} \frac{2\pi}{Q^2} \delta(1-x) \quad (5.14)$$

Como chequeo de consistencia podemos ver que obtenemos en el caso $a = 1, b = 0$, que es el caso de un fotón incidente, es ese caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1|_{\gamma} &= -\alpha_s\mu^{2\varepsilon}C_F \frac{2\pi}{(\varepsilon-1)^2} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{16\pi^2\Gamma(1-\varepsilon)} (-q^2)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^3(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \left[-20 \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{\varepsilon} + 24\varepsilon - 20\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 \right] \delta(1-x) \\ &= -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{1}{(\varepsilon-1)^2} \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{4\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \left[-20 \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{\varepsilon} + 24\varepsilon - 20\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 \right] \delta(1-x) \\ &\approx \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + \left(-8 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \delta(x-1). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por lo que recuperamos el resultado clásico, como se ve en [18].

Volviendo al caso general, podemos factorizar el Born y obtenemos, expandiendo a orden 0 en ε :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + \frac{-24a^2 - 12b^2 - a^2\pi^2 - b^2\pi^2}{3(a^2 + b^2)} \right] \\ &\quad \times \frac{(-b^2 + a^2(\varepsilon-1))}{(\varepsilon-1)} \delta(1-x). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Notamos que los polos son independientes de a y b que es el resultado que se espera de la teoría. Lo que resta hacer es restar un contra-término para renormalizar el resultado de la forma [24]:

$$C_T \propto \frac{\alpha_s}{2\pi} C_{F\sigma_{LO}}^A \quad (5.17)$$

donde σ_{LO}^A es la contribución a LO que contiene factores b , es decir, los términos con contribuciones axiales. Cabe destacar que como se mencionó en la sección 2.8, la renormalización finita es necesaria para mantener las identidades de Ward ya que en este esquema de regularización dimensional hay que arreglar el problema de definición de γ^5 [24].

Notemos que el factor $\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}$ no tiene polos en ϵ y su expansión en serie resulta:

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} = 1 + \left(\log\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right) - \gamma_E\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.18)$$

Al expandir vemos que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{-24a^2 - 12b^2 - a^2\pi^2 - b^2\pi^2}{3(a^2 + b^2)} \right] \\ &= \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{-24a^2 - 12b^2 - a^2\pi^2 - b^2\pi^2}{3(a^2 + b^2)} \right] + \left(\log\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right) - \gamma_E\right) \left[-\frac{2}{\epsilon} - 3 \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por lo que al restar el contratérmino podemos ignorar este factor, por lo que vamos a restar:

$$C_T = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon 4\sigma_{LO}^A. \quad (5.20)$$

En este caso,

$$C_T^1 = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \frac{4b^2}{\epsilon-1} \delta(x-1) \quad (5.21)$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{\mathcal{F}_1 = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\epsilon \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] \frac{(-b^2 + a^2(\epsilon-1))}{(\epsilon-1)} \delta(1-x)} \quad (5.22)$$

De manera análoga, para la contribución de \mathcal{F}_3 se tiene la expresión reducida:

$$A_3 = -\frac{i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{8ab(-2+\epsilon)Q^2}{\epsilon} G[0,1,1] \quad (5.23)$$

Como tenemos que:

$$B_3 = \frac{ie_q^2 g^2 \mu^{2\epsilon} C_F}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{16ab\epsilon Q^2 \hat{k}^2}{k^2(p_1-k)^2(p_2-k)^2} \quad (5.24)$$

podemos reducir esta expresión con FIRE de la misma manera que antes y obtenemos:

$$B_3 = \frac{i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{8ab\epsilon^2 Q^2}{(\epsilon-1)} G[0,1,1]. \quad (5.25)$$

Juntando A_3 y B_3 :

$$A_3 + B_3 = \frac{i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F Q^2}{2} \frac{8ab}{(\epsilon-1)} \left[-\frac{2}{\epsilon} + 3 - \epsilon + \epsilon^2 \right] G[0,1,1] \quad (5.26)$$

Resta multiplicar por el espacio de fases y recordar que la contribución es dos veces la parte real:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_3 &= \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_FQ^2}{2} \frac{8ab}{(\epsilon-1)} \left[-\frac{2}{\epsilon} + 3 - \epsilon + \epsilon^2 \right] G[0,1,1] \frac{2\pi}{Q^2} \delta(x-1) \\
 &= -C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)}{4\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{8ab}{(\epsilon-1)} \left[-\frac{2}{\epsilon} + 3 - \epsilon + \epsilon^2 \right] \delta(x-1) \\
 &= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(18 + \pi^2) \right] 2ab\delta(x-1).
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Es claro que el caso $a = 1, b = 0$ da 0 lo que es consistente con la teoría.

Como antes debemos restar el contratérmino:

$$C_T^3 = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon 4ab\delta(1-x) \tag{5.28}$$

y obtenemos:

$$\boxed{\mathcal{F}_3 = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] 2ab\delta(x-1).} \tag{5.29}$$

5.2. Contribuciones virtuales polarizadas

Procedemos de la misma manera para las contribuciones a las funciones g . En este caso, usamos la misma notación que antes pero le agregamos un moño. Para \tilde{A}_1 tenemos la expresión reducida:

$$\tilde{A}_1 = \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_FQ^2}{2} \left[-2a^2x - 2b^2x + \frac{4a^2x}{\epsilon} + \frac{4b^2x}{\epsilon} + 2a^2\epsilon x - 2b^2\epsilon x \right] G[0,1,1] \tag{5.30}$$

y para la parte con momentos \hat{k} que tenía la forma:

$$\tilde{B}_1 = \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} (4(a^2(-1+e) + b^2(1+e)))Q^2x \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\hat{k}^2}{k^2(p_1-k)^2(p_2-k)^2} \tag{5.31}$$

Podemos reducir con FIRE:

$$\tilde{B}_1 = \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{Q^2x}{(\epsilon-1)} \left[-2a^2e + 2b^2e + 2a^2e^2 + 2b^2e^2 \right] G[0,1,1] \tag{5.32}$$

Finalmente, juntamos \tilde{A}_1 y \tilde{B}_1 :

$$\boxed{\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 = \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{Q^2x}{(\epsilon-1)} \left[6a^2 + 6b^2 - \frac{4a^2}{\epsilon} - \frac{4b^2}{\epsilon} - 6a^2\epsilon + 2b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 \right] G[0,1,1].} \tag{5.33}$$

Nos falta multiplicar por el espacio de fases y multiplicar por dos:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)}{4\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{(\epsilon-1)} \\
 &\quad \times \left[6a^2 + 6b^2 - \frac{4a^2}{\epsilon} - \frac{4b^2}{\epsilon} - 6a^2\epsilon + 2b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 \right] \delta(1-x) \\
 &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-24a^2 - 12b^2 - a^2\pi^2 - b^2\pi^2}{3(a^2 + b^2)} \right] (a^2 + b^2)\delta(1-x)
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Las x valen 1 pues estamos multiplicando por la $\delta(1-x)$. Como chequeo de consistencia, en el caso de un fotón entrante ($a = 1, b = 0$):

$$g_1|_{\gamma} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] \delta(1-x) \quad (5.35)$$

Que es consistente con los resultados conocidos (ver [18]).

Restando un contratérmino $4\sigma_{LO}^A$:

$$\boxed{g_1 = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] (a^2 + b^2) \delta(1-x)} \quad (5.36)$$

Finalmente, nos queda analizar la contribución a g_3 :

$$\tilde{A}_3 = \frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{Q^2ab}{-1+\epsilon} \left[4 - \frac{8}{\epsilon} \right] G[0, 1, 1] \quad (5.37)$$

y para la parte con \hat{k} :

$$\tilde{B}_3 = -\frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{8ab\epsilon Q^2 \hat{k}^2}{(\epsilon-1)k^2(p_1-k)^2(p_2-k)^2} \quad (5.38)$$

Y reducido queda:

$$\tilde{B}_3 = -\frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{4ab\epsilon^2 Q^2}{(\epsilon-1)^2} G[0, 1, 1] \quad (5.39)$$

Sumando ambas contribuciones queda:

$$\tilde{A}_3 + \tilde{B}_3 = -\frac{2i\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F}{2} \frac{abQ^2}{(\epsilon-1)^2} \left[-12 + \frac{8}{\epsilon} + 4\epsilon - 4\epsilon^2 \right] G[0, 1, 1]. \quad (5.40)$$

Como en el caso $a = 1, b = 0$ se tiene que g_3 es nula, se recupera el resultado esperado.

Falta multiplicar por dos veces el espacio de fases:

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)}{2\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{ab}{(\epsilon-1)^2} \\ &\quad \times \left[-12 + \frac{8}{\epsilon} + 4\epsilon - 4\epsilon^2 \right] \delta(1-x) \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(18 + \pi^2) \right] \frac{(-2)ab}{(\epsilon-1)} \delta(1-x). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Finalmente, restamos un contratérmino $2\sigma_{LO}^A$:

$$\boxed{g_3 = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] \frac{(-2)ab}{(\epsilon-1)} \delta(1-x).} \quad (5.42)$$

Observamos que en todos los casos la corrección virtual a un loop da un vértice de la forma:

$$\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3}(24 + \pi^2) \right] \sigma_{LO} \quad (5.43)$$

Este resultado es acorde a la teoría, que nos dice que para obtener la corrección virtual a un loop es necesario multiplicar por un factor de forma como el que obtuvimos [18].

5.3. Espacio de fases con dos partículas en el estado final

Para obtener las contribuciones de los diagramas reales a las funciones de estructura vamos a necesitar el espacio de fases de dos partículas en el estado final.

Notemos primero que vale la siguiente identidad que se puede hacer con Mathematica (para $\varepsilon < 1$):

$$\int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(2-2\varepsilon)}. \quad (5.44)$$

Más aún, vale que:

$$\int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} y^a (1-y)^b = \frac{\Gamma(1+a-\varepsilon)\Gamma(1+b-\varepsilon)}{\Gamma(2+a+b-2\varepsilon)}. \quad (5.45)$$

El espacio de fases de puede escribir como una integral sobre la variable y [18]:

$$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}. \quad (5.46)$$

En general, antes de integrar debemos multiplicar por la contribución escrita en función de las variables x e y ahí realizar la integral. Una de las ventajas del método de IBP es que nos independizamos de la variable y por lo que podemos directamente multiplicar por la expresión integrada del espacio de fases.

Si estamos en el esquema HBVM nos van a aparecer términos proporcionales a \hat{k}^2 , en esos casos debemos usar la siguiente expresión del espacio de fases [18]:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\pi} \frac{Q^2(1-x)}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \\ & = -\frac{Q^2}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon+1} \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(4-2\varepsilon)} \\ & = -\frac{Q^2}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon+1} \frac{(1-\varepsilon)^2 \Gamma(1-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.4. IBP para las contribuciones reales

Para las contribuciones reales haremos los cálculos de dos maneras posibles. Por un lado haremos el cálculo clásico que consiste en usar las expresiones del espacio de fases (antes de integrar en y) de la sección anterior, multiplicar por la contribución escrita como función de x e y y finalmente integrar.

La segunda opción es usar el método de IBP (como se describe en [14]): la idea principal va a ser usar a las partículas salientes como propagadores y de esa manera obtener integrales de Feynman que podemos reducir usando el método de IBP de la misma manera que antes y luego de reducir, volver para atrás e integrar el espacio de fases. En este caso, como nos vamos a haber independizado de la variable y la integral es la que ya hicimos. Veamos más en detalle cómo hacer esto.

Hasta ahora lo que calculamos son expresiones de la forma,

$$P_i^{\mu\nu} \mathcal{M}^2(x, k \cdot p_1, k \cdot q, \hat{k}^2, (k - p_1)^2) \quad (5.48)$$

genéricamente, denotaremos para lo que sigue $f(x, k \cdot p_1, k \cdot q, \hat{k}^2, (k - p_1)^2)$ a cualquiera de estas funciones. Las funciones de estructura partónicas toman la forma:

$$f(x, k \cdot p_1, k \cdot q, \hat{k}^2, (k - p_1)^2)PS = f(x, k, p_1, q)PS \quad (5.49)$$

Acortamos la dependencia de f para alivianar la notación pero más adelante usaremos la dependencia explícita.

El diferencial del espacio de fases toma la forma:

$$dPS = (2\pi)^n \frac{d^n p_2}{(2\pi)^{n-1}} \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \delta^n(q + p_1 - p_2 - k) \delta^+(k^2) \delta^+(p_2^2). \quad (5.50)$$

Podemos integrar sobre p_2 :

$$PS = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \delta^+(k^2) \delta^+((k - p_1 - q)^2) \quad (5.51)$$

Por lo que podemos reescribir 5.49 como:

$$f(x, k, p_1, q)PS = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \delta^+(k^2) \delta^+((k - p_1 - q)^2) f(x, k, p_1, q) \quad (5.52)$$

Y como [14],

$$\delta^+(p^2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \quad (5.53)$$

podemos reemplazar las δ^+ del espacio de fases como propagadores:

$$f(x, k, p_1, q)PS = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)k^2} \frac{1}{(2\pi i)(k - p_1 - q)^2} f(x, k, p_1, q) \quad (5.54)$$

donde usamos la prescripción $\epsilon = 0$. Notemos que esta es (salvo constantes) una integral de Feynman para el diagrama de la Figura 5.1 donde los propagadores son $p_1 - k$, p_2 y k .

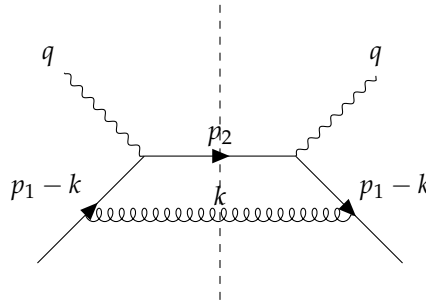


Figura 5.1: Esquema para la integral de las contribuciones reales

Para el diagrama de la Figura 5.1, tenemos dos momentos externos independientes: p_1 y q , un loop de momento k y dos patas internas $p_1 - k$ y $p_2 = q + p_1 - k$. Los propagadores del método de IBP para este diagrama son:

$$D_1 = k^2 \quad (5.55a)$$

$$D_2 = (q + p_1 - k)^2 \quad (5.55b)$$

$$D_3 = (p_1 - k)^2 \quad (5.55c)$$

Necesitamos poder escribir f en términos de estos propagadores para poder usar el método de IBP. En particular, necesitamos escribir $k \cdot p_1$ y $k \cdot q$. (Más abajo discutiremos que hacer con \hat{k}^2). Para hacer esto debemos tomar en cuenta que ya no estamos en el caso real por lo que $k^2 \neq 0$. Para hallar una expresión para $p_1 \cdot k$ usamos D_3 :

$$D_3 = (p_1 - k)^2 = p_1^2 - 2 \cdot k + k^2 = -2p_1 \cdot k + D_1 \Rightarrow p_1 \cdot k = \frac{D_1 - D_3}{2} \quad (5.56)$$

Para $k \cdot q$, usamos D_2 :

$$\begin{aligned} D_2 &= (q + p_1 - k)^2 = -Q^2 + k^2 + 2q \cdot p_1 - 2q \cdot k - 2p_1 \cdot k \\ &= -Q^2 + D_1 + \frac{Q^2}{x} - 2q \cdot k - (D_1 - D_3) \\ &= \frac{Q^2(1-x)}{x} - 2q \cdot k + D_3 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Despejando,

$$k \cdot q = \frac{D_3 - D_2}{2} + \frac{Q^2(1-x)}{x} \quad (5.58)$$

Spongamos primero que f es independiente de factores que van explícitamente como \hat{k}^2 . En este caso, pudimos escribir a f en términos de los propagadores. Por lo que podemos aplicar IBP para la base $\{k^2, (q + p_1 - k)^2, (p_1 - k)^2\}$ (Notemos que aunque la normalización de la integral sea distinta a la que usamos en 2.9 al ser constantes no afectan el cálculo siempre y cuando siempre usemos el mismo factor en todas las integrales).

Luego de la reducción, vamos a tener a las funciones de estructura escritas en términos de dos integrales maestras:

$$G[0, 1, 1] = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{(k - p_1 - q)^2 (p_1 - k)^2} \quad (5.59a)$$

$$G[1, 1, 0] = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{(k - p_1 - q)^2 k^2} \quad (5.59b)$$

Podemos volver para atrás con la identidad 5.53 y recuperar las δ^+

$$G[0, 1, 1] = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{\delta^+(k - p_1 - q)^2 k^2 \delta^+(k^2)}{(p_1 - k)^2} = 0 \quad (5.60a)$$

$$G[1, 1, 0] = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \delta^+(k^2) \delta^+((k - p_1 - q)^2) = PS \quad (5.60b)$$

donde para tener la última igualdad volvimos al problema original con $k^2 = 0$. Esto nos dice que solamente $G[1, 1, 0]$ es no nula y más aún, es la integral del espacio de fases 5.46.

Si bien con esto ya podemos plantear la reducción por IBP, por la misma cuenta que nos muestra que $G[0, 1, 1] = 0$ obtenemos que para cualquier par a, b :

$$F[0, a, b] = 0 \quad (5.61a)$$

$$F[a, 0, b] = 0 \quad (5.61b)$$

Falta ver que pasa si tenemos una dependencia explícita con \hat{k}^2 . En ese caso, podemos escribir a $f(x, k, p_1, k) = \hat{k}^2 g(x, k, p_1, q)$ donde g ya no depende explícitamente de \hat{k}^2 y por lo tanto podemos

escribirla como $g(D_1, D_2, D_3)$. No es estrictamente necesario que la dependencia respecto de \hat{k}^2 sea lineal en f para que el argumento sea válido pero, como en nuestro caso todas las funciones tienen dependencia lineal escribiremos la deducción de esta manera.

$$f(x, k, p_1, q)PS = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)k^2} \frac{1}{(2\pi i)(k-p_1-q)^2} \hat{k}^2 g(D_1, D_2, D_3) \quad (5.62)$$

Usando 5.11, podemos sacar el factor \hat{k}^2 cambiando la dimensionalidad de la integral:

$$\begin{aligned} f(x, k, p_1, q)PS &= \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)k^2} \frac{\hat{k}^2 g(D_1, D_2, D_3)}{(2\pi i)(k-p_1-q)^2} \\ &= (-1) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-2)} \int (2\pi) \frac{d^{n+2} k}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)k^2} \frac{g(D_1, D_2, D_3)}{(2\pi i)(k-p_1-q)^2} \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde $n+2 = 6 - 2\varepsilon$. Ahora estamos en las condiciones que describimos antes para poder usar el método de IBP. Al final de la reducción como antes quedan dos integrales maestras multiplicadas por el factor que apareció al cambiar la dimensionalidad de la integral:

$$\tilde{G}[0, 1, 1] = (-1) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-2)} \int (2\pi) \frac{d^{n+2} k}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{(k-p_1-q)^2 (p_1-k)^2} \quad (5.64a)$$

$$\tilde{G}[1, 1, 0] = (-1) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-2)} \int (2\pi) \frac{d^{n+2} k}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{(k-p_1-q)^2 k^2} \quad (5.64b)$$

Por el mismo argumento que antes, $\tilde{G}[0, 1, 1] = 0$. Para $\tilde{G}[1, 1, 0]$, podemos volver para atrás y hacer que aparezca de nuevo el término con \hat{k}^2 :

$$\tilde{G}[1, 1, 0] = \int (2\pi) \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \hat{k}^2 \frac{1}{(k-p_1-q)^2 k^2} \quad (5.65)$$

Luego, se tiene que $-\tilde{G}[1, 1, 0]$ es 5.47. Equivalentemente, se podría no absorber el factor y notar que la integral es la integral del espacio de fases en $6 - 2\varepsilon$ dimensiones, por lo que la podemos calcular reemplazando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon - 1$ en 5.46.

5.5. Contribuciones reales de \mathcal{F}_L

La primera función de estructura a considerar es \mathcal{F}_L . La cuenta clásica para agregar el espacio de fases es sencilla en este caso ya que como no hay polos en ε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L &= PS|_{\varepsilon=0} P_L \mathcal{M}^2 \left(-\frac{\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F}{2} 32(a^2 + b^2)(\varepsilon - 1)xy \right) |_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha_s C_F}{2} 32(a^2 + b^2)x \int_0^1 dy y \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha_s C_F}{2} 32(a^2 + b^2)x \frac{1}{2} \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} 2x(a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Lo que coincide con el resultado clásico para un fotón entrante [18].

Usemos IBP y veamos que obtenemos el mismo resultado. Luego de la reducción con FIRE:

$$\mathcal{F}_L = -\frac{\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F}{2} 16(a^2 + b^2)x(\epsilon - 1)G[1, 1, 0]|_{\epsilon=0} \quad (5.67)$$

donde $G[1, 1, 0]$ es la integral del espacio de fases. Entonces,

$$\mathcal{F}_L = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} 2(a^2 + b^2)x. \quad (5.68)$$

5.6. Contribuciones reales de \mathcal{F}_1

Vamos a comenzar con el cálculo directo. Multiplicando por el espacio de fases para la parte que no tiene términos \hat{k}^2 . Vamos a hacer la reducción para la proyección sobre $\frac{-g_{\mu\nu}}{(1-\epsilon)}$, de esta manera podremos comparar los resultados con [18], notamos A a esta expresión.

$$\begin{aligned} A = & \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{1}{1-\epsilon} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\epsilon} \frac{1}{(1-x)(1-y)} \left[16a^2 + 16b^2 \right. \\ & - 16a^2\epsilon - 32b^2\epsilon - 16a^2x - 16b^2x + 16a^2\epsilon x + 32b^2\epsilon x + 8a^2x^2 + 8b^2x^2 - 16a^2\epsilon x^2 \\ & - 8b^2\epsilon x^2 + 8a^2\epsilon^2 x^2 + (-16a^2 - 16b^2 + 16a^2\epsilon + 32b^2\epsilon + 16a^2x + 16b^2x - 16b^2\epsilon x \\ & \left. - 16a^2\epsilon^2 x)y + (8a^2 + 8b^2 - 16a^2\epsilon - 8b^2\epsilon + 8a^2\epsilon^2)y^2 \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Para integrar esta expresión usamos que:

$$\int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\epsilon} y^a (1-y)^b = \frac{\Gamma(1+a-\epsilon)\Gamma(1+b-\epsilon)}{\Gamma(2+a+b-2\epsilon)}. \quad (5.70)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi\mu^2} \left(\frac{4\pi}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{1}{1-\epsilon} \frac{1}{(1-x)} \left[(16a^2 + 16b^2 \right. \\
 &\quad - 16a^2\epsilon - 32b^2\epsilon - 16a^2x - 16b^2x + 16a^2\epsilon x + 32b^2\epsilon x + 8a^2x^2 + 8b^2x^2 \\
 &\quad - 16a^2\epsilon x^2 - 8b^2\epsilon x^2 + 8a^2\epsilon^2 x^2) \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} + (-16a^2 - 16b^2 + 16a^2\epsilon + 32b^2\epsilon \\
 &\quad + 16a^2x + 16b^2x - 16b^2\epsilon x - 16a^2\epsilon^2 x) \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} + (8a^2 + 8b^2 - 16a^2\epsilon - 8b^2\epsilon \\
 &\quad \left. + 8a^2\epsilon^2) \frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(3-2\epsilon)} \right] \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{1-\epsilon} \frac{1}{(1-x)} \left[(16a^2 + 16b^2 \right. \\
 &\quad - 16a^2\epsilon - 32b^2\epsilon - 16a^2x - 16b^2x + 16a^2\epsilon x + 32b^2\epsilon x + 8a^2x^2 + 8b^2x^2 - 16a^2\epsilon x^2 \\
 &\quad - 8b^2\epsilon x^2 + 8a^2\epsilon^2 x^2) + (-16a^2 - 16b^2 + 16a^2\epsilon + 32b^2\epsilon + 16a^2x + 16b^2x - 16b^2\epsilon x \\
 &\quad - 16a^2\epsilon^2 x) \frac{(1-\epsilon)}{(1-2\epsilon)} + (8a^2 + 8b^2 - 16a^2\epsilon - 8b^2\epsilon + 8a^2\epsilon^2) \frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon)}{(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)} \left. \right] \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{1-\epsilon} \frac{1}{(1-x)\epsilon} \left[-8a^2 - 8b^2 + 36a^2\epsilon + 28b^2\epsilon \right. \\
 &\quad - 32a^2\epsilon^2 - 36b^2\epsilon^2 + 4a^2\epsilon^3 - 32a^2\epsilon x - 32b^2\epsilon x + 48a^2\epsilon^2 x + 48b^2\epsilon^2 x - 16a^2\epsilon^3 x - 8a^2x^2 \\
 &\quad \left. - 8b^2x^2 + 32a^2\epsilon x^2 + 24b^2\epsilon x^2 - 40a^2\epsilon^2 x^2 - 16b^2\epsilon^2 x^2 + 16a^2\epsilon^3 x^2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Esta expresión se puede comparar con la que aparece en [18], que para el caso de un fotón entrante resulta la misma.

Veamos que podemos recuperar el mismo resultado haciendo la reducción con IBP. Obtengamos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{(1-\epsilon)(1-x)\epsilon} \left[-8a^2 - 8b^2 + 36a^2\epsilon + 28b^2\epsilon \right. \\
 &\quad - 32a^2\epsilon^2 - 36b^2\epsilon^2 + 4a^2\epsilon^3 - 32a^2\epsilon x - 32b^2\epsilon x + 48a^2\epsilon^2 x + 48b^2\epsilon^2 x - 16a^2\epsilon^3 x - 8a^2x^2 \\
 &\quad \left. - 8b^2x^2 + 32a^2\epsilon x^2 + 24b^2\epsilon x^2 - 40a^2\epsilon^2 x^2 - 16b^2\epsilon^2 x^2 + 16a^2\epsilon^3 x^2 \right].
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Que resulta la misma expresión que en el caso anterior. Resta analizar los términos con \hat{k}^2 . Para hacer la cuenta de manera clásica debemos usar el espacio de fases dado por 5.47, para la proyección sobre $\frac{-g^{\mu\nu}}{1-\epsilon}$ a estos términos los llamamos B .

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2(1-x)}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \times \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-y} \left[\frac{16b^2 x(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{Q^2(1-x)(1-\varepsilon)} \right] \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \\
 &\quad \times \frac{16b^2(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(1-\varepsilon)} \tag{5.73} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{16b^2(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(1-\varepsilon)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{16b^2(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(1-\varepsilon)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{16b^2(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(2-2\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

Veamos que recuperamos el mismo resultado reduciendo con FIRE, donde en este caso $G[1, 1, 0]$ es el espacio de fases dado por 5.47:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{Q^2}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon+1} \frac{(1-\varepsilon)^2 \Gamma(1-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \\
 &\quad \times \frac{16b^2(2\varepsilon-3)x(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{Q^2(x-1)(1-\varepsilon)^2} \tag{5.74} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{16b^2(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(2-2\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

Concluimos que la reducción con IBP coincide con el cálculo clásico. Ahora, podemos hallar la contribución a \mathcal{F}_1 sumando, es decir:

$$\mathcal{F}_1 = A + B + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \mathcal{F}_L. \tag{5.75}$$

5.7. Contribuciones reales de \mathcal{F}_3

Primero hacemos la cuenta de la manera clásica:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} ab \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} \left[(-16 + 16\varepsilon + \frac{16}{(1-x)^2} \right. \\
 &\quad - \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{32}{1-x} + 32x - 32\varepsilon x - \frac{16x}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \\
 &\quad + \frac{1}{1-y} \left(\frac{32}{1-x} - 16x + 16\varepsilon x + \frac{32x}{1-x} \right) \\
 &\quad + y \left(-\frac{16}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{32}{1-x} + \frac{16x}{(1-x)^2} - \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{y}{1-y} \left(16 - 16\varepsilon - \frac{32}{(1-x)} \right) \right] \tag{5.76}
 \end{aligned}$$

Integrando sobre y :

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} ab \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left(-16 + 16\varepsilon + \frac{16}{(1-x)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{32}{1-x} + 32x - 32\varepsilon x - \frac{16x}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{32}{1-x} - 16x + 16\varepsilon x + \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \left(-\frac{16}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{32}{1-x} + \frac{16x}{(1-x)^2} - \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left(16 - 16\varepsilon - \frac{32}{(1-x)} \right) \right] \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} ab \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left[\left(-16 + 16\varepsilon + \frac{16}{(1-x)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{32}{1-x} + 32x - 32\varepsilon x - \frac{16x}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-2\varepsilon)}{(-\varepsilon)} \left(\frac{32}{1-x} - 16x + 16\varepsilon x + \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\varepsilon)}{(2-2\varepsilon)} \left(-\frac{16}{(1-x)^2} + \frac{16\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{32}{1-x} + \frac{16x}{(1-x)^2} - \frac{16\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{32x}{1-x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} \left(16 - 16\varepsilon - \frac{32}{(1-x)} \right) \right] \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} ab \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left[\frac{8(\varepsilon^2 + \varepsilon(-5 + 2x - 2x^2) + 2(1+x^2))}{\varepsilon(-1+x)} \right]
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

Procedemos como en la sección anterior usando el método de IBP. Llamamos A_3 a las contribuciones sin \hat{k}^2 y B_3 a las que tienen \hat{k}^2

$$A_3 = \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{ab}{x-1} \left[-40 + \frac{16}{\varepsilon} + 8\varepsilon + 16x - 16x^2 + \frac{16x^2}{\varepsilon} \right]. \tag{5.78}$$

No es difícil verificar que ambas expresiones son iguales. Para la parte con factores \hat{k}^2 :

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2(1-x)}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \times \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{32ab\varepsilon x}{Q^2(1-x)(1-y)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{32ab\varepsilon}{(1-y)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} 32ab\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} 32ab\varepsilon \frac{(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} 16ab\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 B_3 &= -\frac{\alpha_s C_F Q^2}{2} \frac{(-\varepsilon)}{8\pi(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon x^{\varepsilon-1}(1-x)^{-\varepsilon+1} \frac{(1-\varepsilon)^2\Gamma(1-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \\
 &\quad \times \frac{64ab(3-2\varepsilon)\varepsilon x}{(2-2\varepsilon)Q^2(x-1)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)^2\Gamma(1-\varepsilon)}{(2-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{64ab\varepsilon}{(2-2\varepsilon)} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} 16ab\varepsilon
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Como antes obtenemos que la reducción por IBP reproduce la cuenta clásica.

5.8. Contribuciones reales de g_L

La contribución a g_L no tiene términos proporcionales a \hat{k}^2 . Empecemos por la cuenta clásica, como antes podemos evaluar el espacio de fases en $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}
 g_L &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \int_0^1 dy 32abxy \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} 16abx.
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

Veamos la reducción por IBP:

$$\begin{aligned}
 g_L &= \left[\alpha_s C_F \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} 16ab(1+\varepsilon)x \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} 16abx
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Como antes el método de IBP reproduce el resultado clásico.

5.9. Contribuciones reales de g_1

Comenzamos integrando la parte que no depende de \hat{k}^2 de manera clásica:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} \left[(-4a^2 - 4b^2 - 4a^2\varepsilon - 4b^2\varepsilon \right. \\
 &\quad + \frac{4a^2}{(1-x)^2} + \frac{4b^2}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} + \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} \\
 &\quad + 8a^2x + 8b^2x + 8a^2\varepsilon x + 8b^2\varepsilon x - \frac{4a^2x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} \\
 &\quad - \frac{8b^2x}{1-x} - \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \left. \right) + \frac{1}{1-y} \left(\frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} - 4a^2x - 4b^2x - 4a^2\varepsilon x - 4b^2\varepsilon x \right. \\
 &\quad + \frac{8a^2x}{1-x} + \frac{8b^2x}{1-x} \left. \right) + y \left(-\frac{4a^2}{(1-x)^2} - \frac{4b^2}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} \right. \\
 &\quad - \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} + \frac{4a^2x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2x}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} - \frac{8b^2x}{1-x} \\
 &\quad \left. + \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \right) + \frac{y}{1-y} \left(+4a^2 + 4b^2 + 4a^2\varepsilon + 4b^2\varepsilon - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} \right) \Big]
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Podemos integrar sobre y y queda:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} (-4a^2 - 4b^2 - 4a^2\varepsilon - 4b^2\varepsilon \right. \\
 &\quad + \frac{4a^2}{(1-x)^2} + \frac{4b^2}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} + \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} \\
 &\quad + 8a^2x + 8b^2x + 8a^2\varepsilon x + 8b^2\varepsilon x - \frac{4a^2x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} \\
 &\quad - \frac{8b^2x}{1-x} - \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \left. + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} - 4a^2x - 4b^2x - 4a^2\varepsilon x - 4b^2\varepsilon x \right. \right. \\
 &\quad + \left. \frac{8a^2x}{1-x} + \frac{8b^2x}{1-x} \right) + \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \left(-\frac{4a^2}{(1-x)^2} - \frac{4b^2}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} \right. \\
 &\quad - \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} + \frac{4a^2x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2x}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} - \frac{8b^2x}{1-x} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \right) + \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left(+4a^2 + 4b^2 + 4a^2\varepsilon + 4b^2\varepsilon - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} \right) \right] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left[(-4a^2 - 4b^2 - 4a^2\varepsilon - 4b^2\varepsilon \right. \\
 &\quad + \frac{4a^2}{(1-x)^2} + \frac{4b^2}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} + \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} \\
 &\quad + 8a^2x + 8b^2x + 8a^2\varepsilon x + 8b^2\varepsilon x - \frac{4a^2x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2x}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} \\
 &\quad - \frac{8b^2x}{1-x} - \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \left. + \frac{1-2\varepsilon}{(-\varepsilon)} \left(\frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} - 4a^2x - 4b^2x - 4a^2\varepsilon x - 4b^2\varepsilon x \right. \right. \\
 &\quad + \left. \frac{8a^2x}{1-x} + \frac{8b^2x}{1-x} \right) + \frac{(1-\varepsilon)}{(2-2\varepsilon)} \left(-\frac{4a^2}{(1-x)^2} - \frac{4b^2}{(1-x)^2} + \frac{4a^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{4b^2\varepsilon}{(1-x)^2} + \frac{8a^2}{1-x} + \frac{8b^2}{1-x} \right. \\
 &\quad - \frac{8a^2\varepsilon}{1-x} + \frac{8b^2\varepsilon}{1-x} + \frac{4a^2x}{(1-x)^2} + \frac{4b^2x}{(1-x)^2} - \frac{4a^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{4b^2\varepsilon x}{(1-x)^2} - \frac{8a^2x}{1-x} - \frac{8b^2x}{1-x} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{8a^2\varepsilon x}{1-x} - \frac{8b^2\varepsilon x}{1-x} \right) + \frac{(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} \left(+4a^2 + 4b^2 + 4a^2\varepsilon + 4b^2\varepsilon - \frac{8a^2}{1-x} - \frac{8b^2}{1-x} \right) \right] \\
 &\tag{5.84}
 \end{aligned}$$

Sacando de factor común $\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{2}{(x-1)\varepsilon} \left[-2b^2(-2+\varepsilon-3\varepsilon^2+2\varepsilon(3+\varepsilon)x \right. \\
 &\quad \left. - 2(1+\varepsilon)x^2) + 2a^2(2-\varepsilon(1+\varepsilon) + 2(-3+\varepsilon)\varepsilon x + 2(1+\varepsilon)x^2) \right] \\
 &\tag{5.85}
 \end{aligned}$$

Se puede verificar que en el caso de que $a = 1, b = 0$, recuperamos el resultado obtenido en [18]. Veamos que pasa con los factores proporcionales a \hat{k}^2 con el método clásico:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2(1-x)}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \times \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{1}{(1-x)(y-1)^2 Q^2} \left[-16a^2x + 16b^2x + 16b^2\varepsilon x + 8a^2x^2 - 8b^2x^2 \right. \\
 &\quad \left. + 8a^2\varepsilon x^2 - 8b^2\varepsilon x^2 + (8a^2x - 24b^2x - 8a^2\varepsilon x - 24b^2\varepsilon x + 16b^2x^2 + 16b^2\varepsilon x^2)y \right] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{1}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[\frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} (-16a^2x + 16b^2x \right. \\
 &\quad \left. + 16b^2\varepsilon x + 8a^2x^2 - 8b^2x^2 + 8a^2\varepsilon x^2 - 8b^2\varepsilon x^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma(3-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} (8a^2x - 24b^2x - 8a^2\varepsilon x - 24b^2\varepsilon x + 16b^2x^2 + 16b^2\varepsilon x^2) \right] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{1}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \left[\frac{(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} (-16a^2x + 16b^2x \right. \\
 &\quad \left. + 16b^2\varepsilon x + 8a^2x^2 - 8b^2x^2 + 8a^2\varepsilon x^2 - 8b^2\varepsilon x^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)(2-2\varepsilon)} (8a^2x - 24b^2x - 8a^2\varepsilon x - 24b^2\varepsilon x + 16b^2x^2 + 16b^2\varepsilon x^2) \right]
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

Simplificando queda:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{4}{\varepsilon} \left(2a^2 + 2b^2 - a^2\varepsilon + 3b^2\varepsilon - a^2\varepsilon^2 \right. \\
 &\quad \left. + b^2\varepsilon^2 + (-2a^2 - 2b^2 - 2b^2\varepsilon + 2a^2\varepsilon^2)x \right)
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Que de vuelta se corresponde con el resultado de [18].

Repetimos los cálculos pero ahora usando el método de IBP. En el caso de C_1 :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{2}{(x-1)\varepsilon} \left[2a^2 + 2b^2 - a^2\varepsilon - b^2\varepsilon - a^2\varepsilon^2 \right. \\
 &\quad \left. + 3b^2\varepsilon^2 + (-6a^2\varepsilon - 6b^2\varepsilon + 2a^2\varepsilon^2 - 2b^2\varepsilon^2)x + (2a^2 + 2b^2 + 2a^2\varepsilon + 2b^2\varepsilon)x^2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

No es difícil verificar que esta expresión coincide con la que obtuvimos de manera clásica.

5.10. Contribuciones reales de g_3

Finalmente, para las contribuciones a g_3 con el método clásico tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\varepsilon} \frac{ab}{(\varepsilon-1)(1-y)(1-x)} [(-16 \\
 &\quad + 16x + 16\varepsilon x - 8x^2 - 8\varepsilon x^2) + (16 - 16\varepsilon - 48x - 32\varepsilon x + 32x^2 + 32\varepsilon x^2)y \\
 &\quad + (-8 + 8\varepsilon + 32x + 32\varepsilon x - 32x^2 - 32\varepsilon x^2)y^2] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{ab}{(\varepsilon-1)(1-x)} \left[\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} (-16 \right. \\
 &\quad + 16x + 16\varepsilon x - 8x^2 - 8\varepsilon x^2) + \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} (16 - 16\varepsilon - 48x - 32\varepsilon x + 32x^2 \\
 &\quad + 32\varepsilon x^2) + \frac{\Gamma(3-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} (-8 + 8\varepsilon + 32x + 32\varepsilon x - 32x^2 - 32\varepsilon x^2) \left. \right] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{ab}{(\varepsilon-1)(1-x)} \left[\frac{(1-2\varepsilon)}{(-\varepsilon)} (-16 \right. \\
 &\quad + 16x + 16\varepsilon x - 8x^2 - 8\varepsilon x^2) + \frac{(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} (16 - 16\varepsilon - 48x - 32\varepsilon x + 32x^2 \\
 &\quad + 32\varepsilon x^2) + \frac{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)(2-2\varepsilon)} (-8 + 8\varepsilon + 32x + 32\varepsilon x - 32x^2 - 32\varepsilon x^2) \left. \right]
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

Simplificando obtenemos:

$$C_3 = \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{4ab(\varepsilon^2(-3+4x) + 2(1+x^2) + \varepsilon(-3-4x+2x^2))}{(\varepsilon-1)\varepsilon(1-x)} \tag{5.90}$$

Para el término con \hat{k}^2 :

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2(1-x)}{x} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{16abx}{(\varepsilon-1)Q^2(x-1)(y-1)^2} [(-1+x+\varepsilon x) - \varepsilon y] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{16ab}{(\varepsilon-1)(1-y)^2} [(-1+x+\varepsilon x) - \varepsilon y] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \int_0^1 dy [y(1-y)]^{1-\varepsilon} \frac{16ab}{(\varepsilon-1)(1-y)^2} [(-1+x+\varepsilon x) - \varepsilon y] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
 &\quad \frac{16ab}{(\varepsilon-1)} \left[\frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} (-1+x+\varepsilon x) - \frac{\Gamma(3-\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \varepsilon \right] \\
 &= \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \\
 &\quad \frac{16ab}{(\varepsilon-1)} \left[\frac{(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)} (-1+x+\varepsilon x) - \frac{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)(2-2\varepsilon)} \varepsilon \right]
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Finalmente,

$$D_3 = \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{8ab}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left[(2-\varepsilon^2)x + (-2+2\varepsilon^2)x^2 \right] \tag{5.92}$$

Podemos usar IBP para reobtener C_3 :

$$C_3 = \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{4ab}{(1-\epsilon)\epsilon(1-x)} [2 - 3\epsilon(1+\epsilon) + 4(-1+\epsilon)\epsilon x + 2(1+\epsilon)x^2] \quad (5.93)$$

Que es lo mismo que obtuvimos con la cuenta clásica.

Resultados a orden ε

En el capítulo anterior calculamos las correcciones gluónicas virtuales y reales a NLO de las funciones de estructura partónicas polarizadas y no polarizadas. En este capítulo vamos a desarrollar estas expresiones a orden 0 en ε . Para hacer esto primero debemos notar que en las expresiones para las contribuciones reales aparecen términos de la forma $(1-x)^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon}$ que tiene divergencias cuando ε tiende a 0 y x tiende a 0 o 1. Por lo que esta expresión es una distribución. En la sección 6.1, realizamos esta expansión con cuidado. En el resto del capítulo vamos a recopilar los resultados obtenidos y expandirlos a orden 0. Luego, realizaremos la factorización correspondiente para sustraer las divergencias colineales que aparecen como polos en ε .

6.1. Expansión en serie

Como ya mencionamos debemos tratar a los términos de la forma $(1-x)^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon}$ como distribuciones van a aparecer distribuciones δ :

$$\int dy g(y) \delta(y-a) = g(a) \quad (6.1)$$

y distribuciones plus que denotamos f_+ y actúa sobre una función test g vía:

$$\int_0^1 dy f_+(y) g(y) = \int_0^1 f(x) (g(x) - g(1)) \quad (6.2)$$

En términos de estas distribuciones podemos expandir a orden ε [18]:

$$\boxed{x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)_+ - \varepsilon \left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_+ + \varepsilon \frac{\log(x)}{1-x} - \frac{\delta(x-1)}{\varepsilon}} \quad (6.3)$$

Vamos a necesitar tener $x^{\varepsilon+a}(1-x)^{-\varepsilon-1}$ para $a = 0, 1, 2$. Notemos que $x^a \delta(x-1) = \delta(x-1)$ ya que, si tomamos una función test f :

$$\int dx f(x) x^a \delta(x-1) = f(1) = \int \delta(x-1). \quad (6.4)$$

Por lo que:

$$x^{\varepsilon+a}(1-x)^{-\varepsilon-1} = x^a \left(\frac{1}{1-x}\right)_+ - \varepsilon x^a \left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_+ + \varepsilon \frac{x^a \log(x)}{1-x} - \frac{\delta(x-1)}{\varepsilon} \quad (6.5)$$

Una propiedad útil es que:

$$x \left(\frac{1}{1-x}\right)_+ = \left(\frac{1}{1-x}\right)_+ - 1 \quad (6.6)$$

Podemos probar esto viendo como actúa una función test:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx x f(x) \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ &= \int_0^1 dx (x-1) f(x) \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ + \int_0^1 dx f(x) \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1-x} (x-1) f(x) + \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \\
 &= \int_0^1 dx f(x) \left[\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Ahora, podemos multiplicar esta identidad por x :

$$\begin{aligned}
 x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ &= x \left(\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ - 1 \right) \\
 &= x \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ - x \\
 &= \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ - x - 1
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.2. Núcleos de Altarelli-Parisi

Luego de sumar las contribuciones reales y virtuales, vamos a tener únicamente divergencias del tipo colineal, que van a aparecer como polos simples en ϵ . Estas divergencias las vamos a poder sustraer mediante factorización, pero para eso necesitamos introducir los núcleos de Altarelli-Parisi (o *splitting functions*). Para el caso no polarizado tenemos [18]:

$$P_{qq}(x) = C_F \left(\frac{3}{2} \delta(1-x) + 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ + 1-x \right) = C_F \left(\frac{3}{2} \delta(1-x) + \frac{(1+x^2)}{(1-x)_+} \right) = C_F \tilde{P}_{qq} \tag{6.9}$$

Esta función describe la probabilidad de un quark emita un gluon y se transforme en un quark [6].

Para el caso polarizado se define el núcleo de la misma manera por lo que [18]:

$$\Delta P_{qq} = P_{qq} \tag{6.10}$$

6.3. Resultados: \mathcal{F}_L

En el caso de \mathcal{F}_L la expresión no tiene divergencias y sólo tiene contribución real por lo que el resultado es únicamente la contribución real:

$$\mathcal{F}_L = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} 2(a^2 + b^2)x. \tag{6.11}$$

Podemos factorizar, que es únicamente dividir por la normalización $\frac{\alpha_s}{2\pi}$:

$$\boxed{C_L = C_F 2(a^2 + b^2)x} \tag{6.12}$$

6.4. Resultados: \mathcal{F}_1

Recordemos que teníamos que la contribución real era

$$\mathcal{F}_1 = A + B + \frac{1}{2(1-\epsilon)} \mathcal{F}_L \tag{6.13}$$

Desarrollamos cada uno por separado. Como queremos quedarnos a orden 0, nos interesan los términos de orden menor a ε ya que la expansión de $x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon}$ tiene polos simples.

El término más sencillo de estudiar es \mathcal{F}_L ya que no tiene polos. Notamos que:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (6.14)$$

Por lo que el término asociado a \mathcal{F}_L contribuye en:

$$\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2 + b^2)x \quad (6.15)$$

Veamos que sucede con A a orden ε :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{(a^2+b^2)(x^2+1)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(3a^2+b^2-8a^2x-8b^2x+2a^2x^2) + \frac{1}{2}(5a^2-b^2-6a^2x-6b^2x)\varepsilon \right] \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{-b^2+a^2(\varepsilon-1)}{\varepsilon-1} \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(3-8x+2x^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5a^2-3b^2-12a^2x-4b^2x}{2(a^2+b^2)}\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

veamos como actúa la expansión sobre el paréntesis:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(3-8x+2x^2) + \frac{5a^2-3b^2-12a^2x-4b^2x}{2(a^2+b^2)}\varepsilon \right] \\ &\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(3-8x+2x^2) \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

Para el término de orden ε :

$$\begin{aligned} &\left(-\varepsilon \left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ + \varepsilon \frac{\log(x)}{1-x} \right) \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(3-8x+2x^2) + \frac{5a^2-3b^2-12a^2x-4b^2x}{2(a^2+b^2)}\varepsilon \right] \\ &= \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Falta el término con la δ :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon}\delta(1-x) \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(3-8x+2x^2) + \frac{5a^2-3b^2-12a^2x-4b^2x}{2(a^2+b^2)}\varepsilon \right] \\ &= \delta(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{7}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Para B recordamos que:

$$B = \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{16b^2(1-x)(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(2-2\varepsilon)} \quad (6.20)$$

Notamos que esta expresión no tiene polos en ε , entonces sólo debemos considerar dos de los factores de la expansión de $x^\varepsilon(1-x)^{-\varepsilon-1}$. Más aún, notemos que:

$$\frac{-\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \frac{(1-x)(2-3x+\varepsilon(3x-4))}{(2-2\varepsilon)} \frac{(\varepsilon-1)}{a^2(-1+\varepsilon)-b^2} = \frac{(1-x)(-2+3x)\varepsilon}{2(a^2+b^2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.21)$$

por lo que el único factor que contribuye es la δ , pero $\delta(x-1)(1-x) = 0$, luego este término no contribuye a este orden.

Finalmente, sumamos las contribuciones reales y virtuales para obtener el resultado final:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{a^2(\epsilon-1) - b^2}{(\epsilon-1)} \left[\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{1+x^2}{\epsilon} + \frac{1}{2} (3-8x+2x^2) \right) \right. \\ & + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{2\epsilon} + \frac{7}{2} \right) \\ & \left. + \delta(1-x) \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - \frac{1}{3} (24 + \pi^2) \right) \right] + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2 + b^2)x \end{aligned} \quad (6.22)$$

Notemos que esta expresión se puede simplificar más y se cancelan los polos dobles. Simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{a^2(\epsilon-1) - b^2}{(\epsilon-1)} \left[-\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right) + \frac{1}{2} \frac{3-8x+2x^2}{(1-x)_+} \right. \\ & \left. + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) - \delta(1-x) \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \right] + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2 + b^2)x \end{aligned} \quad (6.23)$$

Notamos que el término que acompaña al polo es proporcional al núcleo \tilde{P}_{qq} y si expandimos el primer factor obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{a^2(\epsilon-1) - b^2}{(\epsilon-1)} \left[-\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) \right) \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{3-8x+2x^2}{(1-x)_+} + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) - \delta(1-x) \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \left. \right] \\ & + \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2 + b^2)x \end{aligned} \quad (6.24)$$

En el esquema \overline{MS} , debemos restar:

$$\frac{a^2(\epsilon-1) - b^2}{(\epsilon-1)} P_{qq} \left(-\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log(4\pi) \right) \quad (6.25)$$

Por lo que al sustraer este factor, dividir por la normalización $\frac{\alpha_s}{2\pi}$ y evaluar en $\epsilon = 0$, el coeficiente finito a NLO vale:

$$\boxed{C_1^{q,1} = C_F (a^2 + b^2) \left[\log \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \tilde{P}_{qq}(x) + \frac{1}{2} \frac{3-8x+2x^2}{(1-x)_+} + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) - \delta(1-x) \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) + x \right]} \quad (6.26)$$

Podemos comparar este resultado con el obtenido en [18]. Podemos ver que ambos resultados son iguales si notamos que:

$$\frac{1}{2} \frac{3-8x+2x^2}{(1-x)_+} + x = \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{(1-x)_+} + 6 - 2x \right) + x = -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)_+} + 3 \quad (6.27)$$

6.5. Resultados: \mathcal{F}_3

Podemos expandir a orden ε el factor A_3 ya que recordemos que:

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} ab \left[40 - \frac{16}{\varepsilon} - 8\varepsilon - 16x + 16x^2 - \frac{16x^2}{\varepsilon} \right] \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} ab \left[\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) + (1-4x-4x^2)\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

Veamos el corchete multiplicado por cada factor de la expansión:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) + (1-4x-4x^2)\varepsilon \right) \\ &= \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

El segundo factor queda:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) \left(\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) + (1-4x-4x^2)\varepsilon \right) \\ &= \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) 2(1+x^2) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Finalmente, el factor con la δ :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon} \delta(1-x) \left(\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) + (1-4x-4x^2)\varepsilon \right) \\ &= \delta(1-x) \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 7 \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Para expandir B_3 notemos que podemos escribir:

$$B_3 = \frac{\alpha_s C_F}{2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{16ab(1-x)\varepsilon^2}{(\varepsilon-1)} \quad (6.32)$$

Pero como,

$$\frac{\varepsilon^2}{(1-2\varepsilon)(\varepsilon-1)} = -\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (6.33)$$

por lo que a orden ε este término no contribuye. Sumando la contribución real y la virtual,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} ab \left[\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(\frac{-2-2x^2}{\varepsilon} + (1-2x-2x^2) \right) \right. \\ &\quad + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) 2(1+x^2) + \delta(1-x) \left(\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + 7 \right) \\ &\quad \left. + \delta(1-x) \left(-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{6}{\varepsilon} - \frac{2}{3}(24 + \pi^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} 2ab \left[-\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{x^2+1}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(x-1) \right) \right. \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}-x-x^2}{(1-x)_+} + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(x-1) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \left. \right] \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} 2ab \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) \right) \tilde{P}_{qq} + \frac{\frac{1}{2}-x-x^2}{(1-x)_+} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(x-1) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

En el esquema \overline{MS} sustraemos:

$$2ab \left(-\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) \tilde{P}_{qq} \quad (6.36)$$

y dividiendo por el factor de normalización $\frac{\alpha_s}{2\pi}$:

$$\boxed{C_1^{q,3} = 2abC_F \left[\log \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \tilde{P}_{qq}(x) + \frac{\frac{1}{2} - x - x^2}{(1-x)_+} + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log x}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(x-1) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right]} \quad (6.37)$$

6.6. Resultados: g_L

Al igual que en el caso de \mathcal{F}_L , no tenemos contribuciones virtuales y la contribución real no tiene polos por lo que:

$$g_L = \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} 16abx = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} 4abx \quad (6.38)$$

Para factorizar dividimos por el factor $\frac{\alpha_s}{2\pi}$:

$$\boxed{\Delta C_1^{q,L} = C_F 4abx} \quad (6.39)$$

6.7. Resultados: g_1

Hacemos lo mismo que antes para C_1 y D_1 :

$$C_1 = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon x^\epsilon (1-x)^{-\epsilon-1} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left[\frac{(-1)(a^2+b^2)(x^2+1)}{\epsilon} - \frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2) + \left(-\frac{5a^2}{2} - \frac{9b^2}{2} + 5a^2x + 7b^2x - 6a^2x^2 - 6b^2x^2 \right) \epsilon \right] \quad (6.40)$$

Veamos como actúa el paréntesis sobre los distintos términos de la expansión:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left((-1) \frac{(a^2+b^2)(x^2+1)}{\epsilon} - \frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{5a^2}{2} - \frac{9b^2}{2} + 5a^2x + 7b^2x - 6a^2x^2 - 6b^2x^2 \right) \epsilon \right) \\ & = \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left((-1) \frac{(a^2+b^2)(x^2+1)}{\epsilon} - \frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2) \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para el segundo término:

$$\begin{aligned} & \left(-\epsilon \left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ + \epsilon \frac{\log(x)}{1-x} \right) \left(\frac{(-1)(a^2+b^2)(x^2+1)}{\epsilon} - \frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2) \right. \\ & \left. + \left(-\frac{5a^2}{2} - \frac{9b^2}{2} + 5a^2x + 7b^2x - 6a^2x^2 - 6b^2x^2 \right) \epsilon \right) \\ & = \left(-\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ + \frac{\log(x)}{1-x} \right) (-1)(a^2+b^2)(x^2+1) \end{aligned} \quad (6.42)$$

y para la δ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-1)\left(\frac{(-1)(a^2+b^2)(x^2+1)}{\varepsilon}-\frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2)\right. \\
 & \left.+\left(-\frac{5a^2}{2}-\frac{9b^2}{2}+5a^2x+7b^2x-6a^2x^2-6b^2x^2\right)\varepsilon\right) \\
 & =\delta(1-x)(a^2+b^2)\left(\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{7}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Para D_1 :

$$\begin{aligned}
 D_1 = & \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{4}{\varepsilon} \left(2a^2+2b^2-a^2\varepsilon+3b^2\varepsilon-a^2\varepsilon^2\right. \\
 & \left.+b^2\varepsilon^2+(-2a^2-2b^2-2b^2\varepsilon+2a^2\varepsilon^2)x\right)
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Notamos que esta expresión no tiene polos en ε . Al expandir a orden ε obtenemos:

$$-8(a^2+b^2)(x-1)^2-4(x-1)(-5a^2-9b^2+6a^2x+8b^2x)\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon) \tag{6.45}$$

La contribución de este factor es simplemente:

$$\frac{-8(a^2+b^2)(1-x)^2}{(1-x)_+} \tag{6.46}$$

Finalmente, sumamos las contribuciones reales y virtuales:

$$\begin{aligned}
 g_1 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{1-x}\right)_+ \left(\frac{(-1)(a^2+b^2)(x^2+1)}{\varepsilon}-\frac{3}{2}(a^2+b^2)(1-2x+2x^2)\right)\right. \\
 & \left.+\left(-\left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_+ + \frac{\log(x)}{1-x}\right)(-1)(a^2+b^2)(x^2+1)+\delta(1-x)(a^2+b^2)\left(\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{7}{2}\right)\right. \\
 & \left.+\frac{-2(a^2+b^2)(1-x)^2}{(1-x)_+}+(a^2+b^2)\left(-\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{3}{\varepsilon}-\frac{1}{3}(24+\pi^2)\right)\delta(1-x)\right] \\
 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} (a^2+b^2) \left[\frac{1}{-\varepsilon}\left(\frac{x^2+1}{(1-x)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-x)\right)\right. \\
 & \left.+\left(\frac{1}{1-x}\right)_+ \left(-\frac{7}{2}+7x-5x^2\right)+\left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x}\right)(x^2+1)\right. \\
 & \left.+\delta(1-x)\left(-\frac{9}{2}-\frac{\pi^2}{3}\right)\right] \\
 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2+b^2) \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E-\log\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)\right)P_{qq}(x)\right. \\
 & \left.+\left(\frac{1}{1-x}\right)_+ \left(-\frac{7}{2}+7x-5x^2\right)+\left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x}\right)(x^2+1)\right. \\
 & \left.+\delta(1-x)\left(-\frac{9}{2}-\frac{\pi^2}{3}\right)\right]
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

En el caso de las funciones de estructura polarizadas, es estándar sustraer el factor [18, 11]:

$$\Delta C_0^q \Delta f_{qq} \left(-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma_E-\log 4\pi\right) \tag{6.48}$$

donde

$$\Delta f_{qq} = C_F \Delta \tilde{f}_{qq} = P_{qq} + 4C_F \varepsilon(1-x) \tag{6.49}$$

Esto se debe a que en el esquema $HBVM$ un vértice de la forma qqg no conserva helicidad por la definición de γ^5 en este esquema [11].

En términos de $\Delta\tilde{f}_{qq}$:

$$\begin{aligned} g_1 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} (a^2 + b^2) \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \log(4\pi) \right) \Delta f_{qq} + \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) P_{qq} + 4(1-x) \right. \\ & + \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{7}{2} + 7x - 5x^2 \right) + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (x^2 + 1) \\ & \left. + \delta(1-x) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta C_1^{1,q} = & C_F (a^2 + b^2) \left[\log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \tilde{P}_{qq}(x) + 4(1-x) + \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{7}{2} + 7x - 5x^2 \right) \right. \\ & \left. + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (x^2 + 1) + \delta(1-x) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

Como antes, podemos notar que:

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{7}{2} + 7x - 5x^2 \right) = -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)_+} - 2 + 5x \quad (6.52)$$

Por lo que recuperamos el resultado obtenido en [18].

6.8. Resultados: g_3

Finalmente, calculamos la expansión para g_3 . Podemos escribir C_3 a orden ε :

$$\begin{aligned} C_3 = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon-1} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{(-2)ab}{\varepsilon-1} \left[-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(1+4x-12x^2)\varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Veamos como actúa el paréntesis sobre cada sumando:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) + \frac{1}{2}(1+4x-12x^2)\varepsilon \right) \\ = & \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) \right) \end{aligned} \quad (6.54)$$

Sobre el segundo término:

$$\begin{aligned} & \left(-\varepsilon \left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ + \varepsilon \frac{\log(x)}{1-x} \right) \left(-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) + \frac{1}{2}(1+4x-12x^2)\varepsilon \right) \\ = & \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Y finalmente sobre la δ queda:

$$\delta(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{7}{2} \right) \quad (6.56)$$

Para D_3 tenemos que:

$$D_3 = \alpha_s C_F \frac{1}{8\pi} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon x^\varepsilon (1-x)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{8ab}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left[(2-\varepsilon^2)x + (-2+2\varepsilon^2)x^2 \right] \quad (6.57)$$

Si expandimos el factor:

$$\begin{aligned} & \frac{1-x}{4} \frac{(-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \frac{8ab}{\varepsilon(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \frac{(\varepsilon-1)}{(-2ab)} \left[(2-\varepsilon^2)x + (-2+2\varepsilon^2)x^2 \right] \\ &= -2x(x-1)^2 + 6x(x-1)^2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (6.58)$$

Notemos que al evaluar en $x = 1$ los factores se anulan y por lo tanto el único término que debemos considerar es:

$$\frac{-2x(x-1)^2}{(1-x)_+} \quad (6.59)$$

Juntando todo queda:

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{(-2)ab}{\varepsilon-1} \left[\left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(-\frac{1+x^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) \right) \right. \\ &+ \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{7}{2} \right) \\ &+ \left. \frac{-2x(x-1)^2}{(1-x)_+} + \delta(1-x) \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - \frac{1}{3}(24+\pi^2) \right] \right] \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{(-2)ab}{\varepsilon-1} \left[-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{P}_{qq}(x) + \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(\frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) \right) \right. \\ &+ \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(1-x) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \\ &+ \left. \frac{-2x(x-1)^2}{(1-x)_+} \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

Como antes sustraemos:

$$\frac{-2ab}{\varepsilon-1} \Delta \tilde{f}_{qq} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{(-2)ab}{\varepsilon-1} \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} \tilde{P}_{qq}(x) + 4(1-x) + \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ \left(\frac{1}{2}(-1+4x-6x^2) \right) \right. \\ &+ \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(1-x) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \\ &+ \left. \frac{-2x(x-1)^2}{(1-x)_+} \right] \end{aligned} \quad (6.62)$$

Notando que:

$$4(1-x) + \frac{1-1+4x-6x^2}{2(1-x)_+} = 4-4x - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)_+} - 1+3x = -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)_+} + 3-x \quad (6.63)$$

Además, podemos ver que:

$$\frac{x(1-x)^2}{(1-x)_+} = x(1-x) \quad (6.64)$$

ya que si multiplicamos por una función test:

$$\int_0^1 f(x) \frac{x(1-x)^2}{(1-x)_+} = \int_0^1 \frac{f(x)x(1-x)^2}{(1-x)} = \int_0^1 f(x)x(1-x) \quad (6.65)$$

Usando estas dos identidades, dividiendo por $\frac{\alpha_s}{2\pi}$ y evaluando en $\varepsilon = 0$ obtenemos:

$$C_1^{q,3} = C_F 2ab \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} \tilde{P}_{qq}(x) - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)_+} + 3 - 3x + 2x^2 \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_+ - \frac{\log(x)}{1-x} \right) (1+x^2) + \delta(1-x) \left(-\frac{9}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \quad (6.66)$$

Conclusiones

En este trabajo calculamos las contribuciones finitas a NLO para las funciones de estructura partónicas polarizadas y no polarizadas.

Para eso fue necesario primero aprender sobre la teoría de QCD perturbativa y cómo calcular amplitudes a partir de diagramas de Feynman. En particular fue necesario aprender como realizar correcciones a un loop. Además, introdujimos el esquema HVBM en el que realizaremos los cálculos e introducimos el método de IBP.

Luego, describimos el proceso DIS e introdujimos el modelo de partones y sus principales propiedades. Esto nos permitió definir las funciones de estructura polarizadas y no polarizadas hadronicas y mediante el teorema de factorización, introdujimos las funciones estructura partónicas (polarizadas y no polarizadas) que son las que podemos calcular de manera perturbativa y luego convolucionar con las distribuciones de partones para obtener las funciones de estructura hadronicas.

Describimos como podemos calcular las funciones de estructura a partir de proyectar las amplitudes usando 3.29 y 3.30.

Luego, nos concentramos en calcular las funciones de estructura en el esquema HVBM. Primero realizamos el calculo a LO usando un vértice genérico y en segundo lugar, calculamos correcciones gluonicas a un loop en el caso de un gluón virtual y en el caso de un gluón real. Estas contribuciones las escribimos en función de los propagadores adecuados y los productos escalares que corresponden en cada caso para poder plantear el método de IBP. También escribimos estos valores en función de las variables cinemáticas x y y para poder comparar con los resultados de [18] en el caso de un fotón incidente.

El siguiente paso fue usar el método de IBP para las integrales que calculamos en el capítulo 4. En el caso virtual, usamos como base de propagadores los tres propagadores reales del diagrama de un loop. Implementamos la reducción en FIRE [21] separando en el caso en que la función tiene un factor proporcional a \hat{k}^2 y el caso en el que no. En el caso en que \hat{k}^2 , fue necesario cambiar la dimensionalidad de la integral antes de hacer la reducción. Obtuvimos que tanto en el caso polarizado como en el no polarizado luego de renormalizar se reproduce el resultado teórico esperado de que se puede escribir la contribución virtual como un factor de forma independiente de los parámetros a y b por la contribución a LO.

Para las contribuciones reales, fue necesario construir propagadores fantasma para poder con-

vertir las δ^+ que aparecen en el espacio de fases en propagadores. Con esta visión pudimos aplicar el método de IBP para el caso real. De la misma manera que en el caso real, fue necesario cambiar la dimensionalidad del espacio dependiendo de si el factor a reducir era proporcional a \hat{k}^2 o no. Finalmente, obtuvimos que la única integral maestra relevante es el espacio de fases en $4 - 2\varepsilon$ dimensiones o en $6 - 2\varepsilon$ dimensiones según la dimensión de la reducción. Esto nos permitió realizar los cálculos de manera mucho más corta que en el caso clásico. También se realizó la integral de forma clásica para poder comparar que se estuvieran obteniendo los mismos resultados.

Finalmente, se realizó la expansión en serie a orden ε de las distribuciones que aparecieron en las contribuciones reales. Para esto fue necesario introducir las distribuciones plus. Luego, sumamos las contribuciones reales y virtuales para obtener la corrección a NLO. Notamos que como esperábamos los polos dobles se cancelaron y el resultado tuviera únicamente polos simples. Estos se deben a las divergencias colineales que deben ser sustraídos por factorización, por lo que realizamos esta sustracción en el esquema \overline{MS} para el caso no polarizado y en una variación de este esquema para el caso polarizado.

Con todo esto pudimos obtener la contribución finita a NLO y LO para las funciones de estructura polarizadas y no polarizadas.

Proyectores y funciones de estructura

En este apéndice vamos a calcular explícitamente las proyecciones de los tensores partónicas y veremos que recuperamos las funciones de estructura partónicas. Todas las deducciones se realizan en $d = 4 - 2\varepsilon$ dimensiones y el cálculo de las contracciones del tensor ε se realizan con Tracer.

Proposición A.1

$$P_L^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^j = \mathcal{F}_L = \mathcal{F}_2^j - \mathcal{F}_1^j$$

Demostración. Por cálculo directo:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu w_{\mu\nu}^j &= \left(-p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} + p^\mu p^\nu \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\mathcal{F}_1^j(x', Q^2)}{2} \\ &\quad + p^\mu p^\nu \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j(x', Q^2)}{2(p \cdot q)^2} \\ &\quad - i p^\mu p^\nu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{2p \cdot q} \mathcal{F}_3^j(x', Q^2) \\ &= \left(-p^2 + \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} \right) \frac{\mathcal{F}_1^j(x', Q^2)}{2} + \left(p^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} \right)^2 \frac{Q^2}{2(p \cdot q)^2} \mathcal{F}_2^j(x', Q^2) \\ &= - \left(\frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} \right) \left[\frac{\mathcal{F}_1^j(x', Q^2)}{2} - \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} \frac{Q^2}{2(p \cdot q)^2} \mathcal{F}_2^j(x', Q^2) \right] \\ &= \frac{Q^2}{8} \frac{1}{x'^2} \left[-\mathcal{F}_1^j(x', Q^2) + \mathcal{F}_2^j(x', Q^2) \right] = \frac{Q^2}{8x'^2} \mathcal{F}_L(x', Q^2) \end{aligned}$$

donde usamos que $p^2 = 0$ Reordenando obtenemos el resultado. \square

Proposición A.2

$$P_1^{\mu\nu} w_{\mu\nu}^j = \mathcal{F}_1$$

Demostración. De manera análoga:

$$\begin{aligned}
 (1 - \varepsilon)P_1^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j &= \frac{1}{2}P_L^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j - g^{\mu\nu} \left[\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\mathcal{F}_1^j(x', Q^2)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j(x', Q^2)}{2(p \cdot q)^2} - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{2p \cdot q} \mathcal{F}_3^j(x', Q^2) \right] \\
 &= \frac{\mathcal{F}_L^j}{2} - \left[(-4 + 2\varepsilon) \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2(p \cdot q)^2} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{F}_L^j}{2} - \left[(-3 + 2\varepsilon) \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2(p \cdot q)^2} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{F}_L^j}{2} - \left[(-4 + 2\varepsilon) \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2(p \cdot q)^2} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{F}_L^j}{2} - \left[(-3 + 2\varepsilon) \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \left(p^2 + \frac{2(p \cdot q)^2}{Q^2} - \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2(p \cdot q)^2} \right] \\
 (1 - \varepsilon)P_1^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j &= \frac{\mathcal{F}_L^j}{2} - \left[(-1 + \varepsilon) \mathcal{F}_1^j - \frac{\mathcal{F}_1^j}{2} + \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j}{2} \right] = (1 - \varepsilon)\mathcal{F}_1^j
 \end{aligned}$$

donde usamos de nuevo que $p^2 = 0$ y la proposición anterior. \square

Proposición A.3

$$P_3^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j = \mathcal{F}_3$$

Demostración. Por cálculo directo:

$$\begin{aligned}
 P_3^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{p \cdot q} \left[\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\mathcal{F}_1^j(x', Q^2)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{Q^2 \mathcal{F}_2^j(x', Q^2)}{2(p \cdot q)^2} - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{2p \cdot q} \mathcal{F}_3^j(x', Q^2) \right] \\
 &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{p \cdot q} \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} \frac{q^{\alpha'} p^{\beta'}}{2p \cdot q} \mathcal{F}_3^j(x', Q^2)
 \end{aligned}$$

Si intentamos calcular esta expresión con Tracer en $4 - 2\varepsilon$ dimensiones, aparecen términos \hat{p}, \hat{q} . Sin embargo, podemos considerar que estas partículas no tienen momento en esta dimensión pues son las partículas incidentes de la interacción. Entonces,

$$P_3^{\mu\nu}w_{\mu\nu}^j = \frac{1}{2(p \cdot q)^2} 2(p \cdot q)^2 \mathcal{F}_3^j = \mathcal{F}_3^j.$$

\square

Pasemos a las proyecciones para obtener las funciones g:

Proposición A.4

$$\tilde{P}_1^{\mu\nu}\tilde{w}_{\mu\nu}^j = g_1^j$$

Demostración. Por cálculo directo

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_1^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j &= i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{2p \cdot q} \left[-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} \frac{q^{\alpha'} p^{\beta'}}{p \cdot q} g_1^j + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_3^j \right. \\
 &\quad \left. \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha p_\beta}{2p \cdot q} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha p^\beta}{p \cdot q} g_1^j \\
 &= g_1^j
 \end{aligned}$$

□

Proposición A.5

$$\tilde{P}_3^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j = g_3^j$$

Demostración. El calculo es directo usando que $p^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_3^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{4x'^2}{Q^2} p^\mu p^\nu \right) \left[-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} \frac{q^{\alpha'} p^{\beta'}}{p \cdot q} g_1^j + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_3^j \right. \\
 &\quad \left. + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 \tilde{P}_3^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \left[(3-2\varepsilon) g_3^j + \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) g_4^j \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4x'^2}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} g_3^j + \frac{4x'^2}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^3}{q^4} \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \left[(3-2\varepsilon) g_3^j + \left(\frac{(p \cdot q)}{q^2} \right) g_4^j - g_3^j + \frac{4x'^2}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^3}{q^4} g_4^j \right] \\
 &= g_3^j
 \end{aligned}$$

□

Proposición A.6

$$\tilde{P}_4^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j = g_4^j$$

Demostración. Por calculo directo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_4^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j &= \frac{x'}{1-\varepsilon} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{4x'^2(3-2\varepsilon)}{Q^2} p^\mu p^\nu \right) \left[-i\epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} \frac{q^{\alpha'} p^{\beta'}}{p \cdot q} g_1^j + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_3^j \right. \\
 &\quad \left. + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{x'}{1-\varepsilon} \left[\left((3-2\varepsilon) + \frac{4x'^2(3-2\varepsilon)}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} \right) g_3^j \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{(p \cdot q)^2}{q^2} + \frac{4x'^2(3-2\varepsilon)}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^4}{q^4} \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{x'}{1-\varepsilon} \left[\left(\frac{(p \cdot q)^2}{q^2} - \frac{(3-2\varepsilon)(p \cdot q)^2}{q^2} \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{x'}{1-\varepsilon} \left[\left(-\frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} + \frac{(3-2\varepsilon)(p \cdot q)^2}{Q^2} \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{x'}{1-\varepsilon} \left[\frac{2(-\varepsilon)(p \cdot q)^2}{Q^2} \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] = g_4^j
 \end{aligned}$$

□

Proposición A.7

$$\tilde{P}_L^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j = g_L^j$$

Demostración. Por calculo directo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_L^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}^j &= \frac{4x'^2}{Q^2} p^\mu p^\nu \left[-i\epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} \frac{q^{\alpha'} p^{\beta'}}{p \cdot q} g_1^j + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_3^j \right. \\
 &\quad \left. + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{g_4^j}{p \cdot q} \right] \\
 &= \frac{4x'^2}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} g_3^j + \frac{4x'^2}{Q^2} \frac{(p \cdot q)^4}{q^4} \frac{g_4^j}{p \cdot q} \\
 &= -g_3^j + \frac{1}{2x'} g_4^j = g_L^j
 \end{aligned}$$

□

Integrales útiles

En este apéndice incluimos algunas integrales útiles a lo largo de este trabajo y otras que si bien no usamos incluimos por completitud.

En este apéndice haremos un pequeño cambio de notación para usar la misma que [16], y vamos a denotar $4 - 2\epsilon$ a la dimensión y guardar ϵ para la prescripción de las reglas de Feynman para propagadores.

En general vamos a adoptar la siguiente notación: μ es una constante de escala, $q_i = \sum_{i=1}^n p_i$ y

$$r_\Gamma = \frac{\Gamma^2(1 - \epsilon)\Gamma(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)}. \quad (\text{B.1})$$

B.1. Integrales tadpole

El primer tipo de integral que necesitaremos son las de un loop con una única pata externa[16]:

$$I_1^D(m_1^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^{D/2}r_\Gamma} \int d^D l \frac{1}{(l^2 - m_1^2 + i\epsilon)} \quad (\text{B.2})$$

donde,

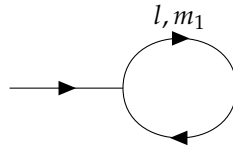


Figura B.1: Esquema sobre la notación usada para las integrales tadpole.

Se obtiene que [16]:

$$\begin{aligned} I_1^D(m_1^2) &= -\mu^{2\epsilon}\Gamma(\epsilon - 1)(m_1^2 - i\epsilon)^{1-\epsilon} \\ &= m_1^2 \left(\frac{\mu^2}{m_1^2 - i\epsilon} \right)^\epsilon \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde el polo corresponde a una divergencia ultravioleta.

B.2. Integrales burbuja

Si tenemos dos propagadores vamos a obtener integrales de la forma:

$$I_2^D(p_1^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^{D/2}r_\Gamma} \int d^D l \frac{1}{(l^2 - m_1^2 + i\epsilon)((l + q_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon)} \quad (\text{B.4})$$

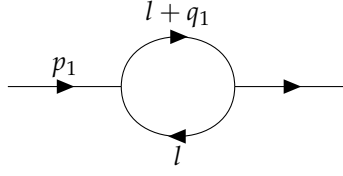


Figura B.2: Esquema sobre la notación usada para las integrales burbuja.

En este caso, m_1 y m_2 corresponden a las partículas con momentos l y $l + q_1$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
 I_2^D(s, m_1^2, m_2^2) &= \frac{\mu^{2\epsilon} \Gamma(\epsilon)}{r_\Gamma} \int_0^1 d\gamma \left(\gamma(1-\gamma)s + \gamma m_2^2 + (1-\gamma)m_1^2 - i\epsilon \right)^{-\epsilon} \\
 &= \mu^{2\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \ln(s - i\epsilon) + \sum_i = 1^2 \gamma_i \ln \left(\frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} - \ln(\gamma_i - 1) \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

donde $\gamma_{1,2}$ son:

$$\gamma_{1,2} = \frac{s - m_2^2 + m_1^2 \pm \sqrt{(s - m_2^2 + m_1^2)^2 - 4s(m_1^2 - i\epsilon)}}{2s} \tag{B.6}$$

Un caso particular es cuando ambas masas son nulas, en cuyo caso la expresión se reduce a:

$$I_2^D(s, 0, 0) = \left(\frac{\mu^2}{-s - i\epsilon} \right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{B.7}$$

También se puede obtener una fórmula explícita [15]:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (k - p_1 - p_2)^2} = S_\Gamma (-q^2)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(1+\epsilon) \Gamma^3(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{i}{\epsilon} \tag{B.8}$$

donde

$$S_\Gamma = \frac{(4\pi)^\epsilon}{16\pi^2 \Gamma(1-\epsilon)} \tag{B.9}$$

B.3. Integrales de triangulo

Las integrales de triangulo son las que aparecen en diagramas donde hay dos patas externas y una interna que une dos patas distintas. La forma más general de escribir integrales de este tipo es [16]:

$$\begin{aligned}
 I_3^D(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^{\frac{D}{2}} r_\Gamma} \\
 &\times \int d^D l \frac{1}{(l^2 - m_1^2 + i\epsilon)((l+q_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon)((l+q_2)^2 - m_3^2 + i\epsilon)}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

donde,

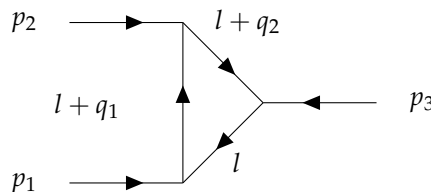


Figura B.3: Esquema sobre la notación usada en las integrales de triangulo.

donde además, m_1 , m_2 y m_3 corresponden a las partículas con momentos $l + q_1$, $l + q_2$ y l respectivamente.

En nuestro caso, m_1, m_2 y m_3 son siempre nulas. Además, como de las tres partículas incidentes hay dos on-shell, necesitaremos obtener las integrales $I_3^D(p^2, 0, 0, 0, 0, 0)$, $I_3^D(0, p_2, 0, 0, 0, 0)$ y $I_3^D(0, 0, p^2, 0, 0, 0)$. Cabe destacar que estas tres integrales son iguales ya que vales las siguientes relaciones [16]:

$$I_3^D(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = I_3^D(p_2^2, p_3^2, p_1^2, m_2^2, m_3^2, m_1^2) \quad (\text{B.11a})$$

$$I_3^D(p_1^2, p_2^2, p_3^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = I_3^D(p_1^2, p_3^2, p_2^2, m_2^2, m_1^2, m_3^2) \quad (\text{B.11b})$$

La integral que nos va a interesar es [16]:

$$\begin{aligned} I_3^D(0, 0, p_3^2, 0, 0, 0) &= \frac{\mu^{2\epsilon}}{\epsilon^2} \left[\frac{(-p_3^2)^{-\epsilon}}{p_3^2} \right] \\ &= \frac{1}{p_3^2} \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \ln \left(\frac{-p_3^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-p_3^2}{\mu^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

B.4. Integral con \hat{k}

Al realizar las integrales nos encontraremos con integrales que contengan factores \hat{k}^2 . Para poder trabajar con estas, usaremos la siguiente identidad [17]:

$$\int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} (\hat{k}^2)^\alpha f(k^\mu, k^2) = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{D}{2} - 2)} \int \frac{d^{D+2\alpha} k}{i\pi^{D/2+\alpha}} f(k^\mu, k^2) \quad (\text{B.13})$$

o equivalentemente para que queden las constantes que nos van a servir,

$$\frac{2^D \pi^{D/2}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (\hat{k}^2)^\alpha f(k^\mu, k^2) = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{D}{2} - 2)} \frac{2^{D+2\alpha} \pi^{D/2+\alpha}}{i} \int \frac{d^{D+2\alpha} k}{(2\pi)^{D+2\alpha}} f(k^\mu, k^2)$$

Simplificando, queda:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (\hat{k}^2)^\alpha f(k^\mu, k^2) = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{D}{2} - 2)} 2^{2\alpha} \pi^\alpha \int \frac{d^{D+2\alpha} k}{(2\pi)^{D+2\alpha}} f(k^\mu, k^2) \quad (\text{B.14})$$

Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann. «A schematic model of baryons and mesons». En: *Physics Letters* 8 (3 feb. de 1964). DOI: [10.1016/s0031-9163\(64\)92001-3](https://doi.org/10.1016/s0031-9163(64)92001-3).
- [2] C. G. Bollini y J. J. Giambiagi. «Dimensional renormalization : The number of dimensions as a regularizing parameter». En: *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 12 (1 nov. de 1972). DOI: [10.1007/bf02895558](https://doi.org/10.1007/bf02895558).
- [3] G. 't Hooft y M. Veltman. «Regularization and renormalization of gauge fields». En: *Nuclear Physics B* 44 (1 jul. de 1972). DOI: [10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9).
- [4] P. Breitenlohner y D. Maison. «Dimensional renormalization and the action principle». En: *Communications in Mathematical Physics* 52 (1 feb. de 1977). DOI: [10.1007/bf01609069](https://doi.org/10.1007/bf01609069).
- [5] K.G. Chetyrkin y F.V. Tkachov. «Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops». En: *Nuclear Physics B* 192 (1 nov. de 1981). DOI: [10.1016/0550-3213\(81\)90199-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90199-1).
- [6] F. Halzen y A. D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [7] J.C. Collins D.E. Soper y G.F Sterman. «Factorization of Hard Processes in QCD». En: *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* 5 (1989), págs. 1-91. DOI: [10.1142/9789814503266_0001](https://doi.org/10.1142/9789814503266_0001). arXiv: [hep-ph/0409313](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0409313).
- [8] M. Jamin y M. E. Lautenbacher. «TRACER version 1.1: A mathematica package for ϵ -algebra in arbitrary dimensions». En: *Computer Physics Communications* 74.2 (1993), págs. 265-288. ISSN: 0010-4655. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(93\)90097-V](https://doi.org/10.1016/0010-4655(93)90097-V).
- [9] Raymond Brock et al. «Handbook of perturbative QCD: Version 1.0». En: *Rev. Mod. Phys.* 67 (1995), págs. 157-248. DOI: [10.1103/RevModPhys.67.157](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.157).
- [10] D. de Florian y R.Sassot. «O (α -s) spin dependent weak structure functions». En: *Phys. Rev. D* 51 (1995), págs. 6052-6058. DOI: [10.1103/PhysRevD.51.6052](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.6052). arXiv: [hep-ph/9412255](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9412255).
- [11] D. de Florian y W. Vogelsang. «Next-to-leading order QCD corrections to inclusive-hadron photoproduction in polarized lepton-proton collisions». En: *Physical Review D* 57 (7 abr. de 1998). DOI: [10.1103/PhysRevD.57.4376](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.4376).

- [12] M. L. Mangano. «Introduction to QCD». En: *1998 European School of High-Energy Physics*. 1998, págs. 53-97.
- [13] S. Laporta. «High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations». En: *Int. J. Mod. Phys. A* 15 (2000), págs. 5087-5159. DOI: [10.1142/S0217751X00002159](https://doi.org/10.1142/S0217751X00002159). arXiv: [hep-ph/0102033](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0102033).
- [14] A. Charalampos y M. Kirill. «Higgs boson production at hadron colliders in NNLO QCD». En: *Nuclear Physics B* 646 (1-2 dic. de 2002). DOI: [10.1016/s0550-3213\(02\)00837-4](https://doi.org/10.1016/s0550-3213(02)00837-4).
- [15] T. Huber y D. Maître T. Gehrmann. «Two-loop quark and gluon form factors in dimensional regularisation». En: *Physics Letters B* 622.3 (2005), págs. 295-302. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.07.019>.
- [16] R.K. Ellis y G. Zanderighi. «Scalar one-loop integrals for QCD». En: *Journal of High Energy Physics* 2008 (02 feb. de 2008). DOI: [10.1088/1126-6708/2008/02/002](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/02/002).
- [17] G. Heinrich. *Introduction to Loop Calculations*. 2010. URL: <https://www.ippp.dur.ac.uk/~gudrun/teaching/ILC.pdf>.
- [18] Y. V. Rotstein Habarnau. *Estudio de funciones de estructura semi-inclusivas*. 2012. Tesis de Licenciatura - FCEyN UBA.
- [19] G. Puhlfürst. «The evaluation of loop integrals via differential equations». 2012. Masterarbeit-Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I Institut für Physik Humboldt-Universität zu Berlin.
- [20] P. Skands. «[World Scientific Proceedings of the 2012 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics - Boulder, Colorado (4-29 June 2012)] Searching for New Physics at Small and Large Scales - Introduction to QCD». En: (sep. de 2013). DOI: [10.1142/9789814525220_0008](https://doi.org/10.1142/9789814525220_0008).
- [21] A.V. Smirnov. «FIRE5: a C++ implementation of Feynman Integral REduction». En: *Comput. Phys. Commun.* 189 (2015), págs. 182-191. DOI: [10.1016/j.cpc.2014.11.024](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2014.11.024). arXiv: [1408.2372](https://arxiv.org/abs/1408.2372).
- [22] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). «Review of Particle Physics». En: *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 083C01 (2020).
- [23] R.L. Workman et al. (Particle Data Group). «Review of Particle Physics». En: *to be published in Prog. Theor. Exp. Phys.*,083C01 (2022).
- [24] I. Pedrón I. Borsa D. de Florian. «Dijet production in neutral current and charged current polarized deep inelastic scattering». En: *Phys. Rev. D* 105 (7 abr. de 2022), pág. 074025. DOI: [10.1103/PhysRevD.105.074025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.074025).
- [25] M. Anselmino A. Efremov y E. Leader. «The theory and phenomenology of polarized deep inelastic scattering». En: *Physics Reports* 261 (1-2). DOI: [10.1016/0370-1573\(95\)00011-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00011-5).