Estudio de la complejidad en los espacios de Krylov: desde la integrabilidad al caos

Tesis de licenciatura

Para optar por el título de

Licenciado en Física

de la

Universidad de Buenos Aires

Presentación por

Bernardo Luciano Español

Dirección: Dr. Diego Ariel Wisniacki

Fecha de Presentación: 22.03.2023

TEMA:	Estudio de la complejidad en los espacios de Krylov: desde la integrabilidad al caos
ALUMNO:	Bernardo Luciano Español
L.U.N°:	768/17
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Diego Ariel Wisniacki
FECHA DE INICIACIÓN:	Marzo de 2022
FECHA DE FINALIZACIÓN:	Marzo de 2023
FECHA DE EXAMEN:	Marzo de 2023
INFORME FINAL APROBADO POR:	

Bernardo L. Español (Autor)	Dr. Diego A. Wisniacki (Director)
Dr. Augusto J. Roncaglia (Jurado)	Dr. Marcos Saraceno (Jurado)
Dr. Esteban A. Calzetta (Jurado)	Dra. Silvina M. Ponce Dawson (Porf. de Tesis de Licenciatura)

Resumen

En esta tesis trabajamos sobre un sistema Hamiltoniano y estudiamos la relación entre la dinámica de distintos operadores sobre la base de Krylov y la cantidad de caos presente en el mismo. La base de Krylov permite mapear la evolución de cualquier operador inicial en el espacio de Hilbert a un problema de *tight-binding* de una partícula ficticia en una cadena finita de una dimensión. En esta cadena la probabilidad de saltar entre sitios consecutivos está dada por los coeficientes b_n, que reciben el nombre de coeficientes de Lanczos. Dadas las características de la evolución en esta base, el valor medio de la posición de esta partícula sobre la cadena nos da una noción de qué tan esparcida está su función de onda, y puede ser interpretado como una noción de la complejidad del Hamiltoniano, llamada complejidad de Krylov.

Recientemente, se ha conjeturado que esta cantidad a tiempo largo está relacionada con la caoticidad del sistema. La idea es que la estadística de niveles asociada a los sistemas integrables influye en los b_n, generando cambios abruptos entre valores consecutivos y una secuencia de coeficientes mucho más ruidosa que la asociada a sistemas caóticos. Luego, esta estocacidad genera localización de Anderson en la cadena, y por lo tanto, una complejidad de Krylov menor. De este modo, sistemas integrables tendrían un mayor valor de la complejidad de Krylov a tiempo largo en comparación con los sistemas caóticos. Dado que los coeficientes de Lanczos, y en definitiva la complejidad de Krylov, dependen tanto del Hamiltoniano como del operador inicial sobre el que se construye la base de Krylov, en esta tesis vamos a estudiar el nivel de generalidad de estas hipótesis al evaluar cómo varía la dispersión de los b_n y la saturación de la complejidad de Krylov en la transición integrabilidad-caos cuando se expanden distintos operadores iniciales. Para hacer esto, trabajamos con una cadena de Ising con un campo magnético trasverso-longitudinal y comparamos el valor de saturación de la complejidad de Krylov con la medida espectral de caos habitual. Nuestros resultados numéricos muestran que la utilidad de esta cantidad como predictor del caos cuántico depende fuertemente del operador elegido, y que esta no tiene una relación directa con la dispersión de la los coeficientes de Lanczos.

Adicionalmente, en esta tesis mostramos cómo una medida alternativa de dispersión a la utilizada en trabajos anteriores permite relacionar la estadística de los coeficientes de Lanczos con la caoticidad del sistema mediante una ley de potencias con el mismo exponente para todos los operadores.

Índice general

1 Introducción 1

2 Marco teórico 5
- 2.1 Subespacio de Krylov y algoritmo de Lanczos . . . 5
- 2.2 Complejidad de Krylov . . . 9
- 2.3 Estadística de niveles y caos cuántico . . . 10
- 2.4 El efecto de la integrabilidad en el tiempo largo de la K-complexity . . . 11
  - 2.4.1 La integrabilidad y la dispersión de los coeficientes de Lanczos . 12
  - 2.4.2 Localización de Anderson y su efecto en la K-complexity . . . 13

3 Desde la integrabilidad al caos 17
- 3.1 Ising con campo magnético trasverso-longitudinal . . . 17
- 3.2 La evolución a través del espacio de Krylov . . . 19
- 3.3 K-complexity como función del operador . . . 22
- 3.4 Otra métrica de dispersión . . . 27

4 Conclusiones 31

Apéndices 33

A Algoritmos numéricos 35
- A.1 Lanczos simple . . . 35
- A.2 Full orthogonalization (FO) . . . 36
- A.3 Partial re-orthogonalization (PRO) . . . 36

I Introducción

A lo largo de este siglo, los avances en tecnología nos han permitido controlar sistemas cuánticos cada vez más complejos. Los dispositivos respaldados por estos sistemas se consideran el futuro próximo para la computación y el procesamiento de información. Por lo tanto, es esencial entender su robustez y sensibilidad ante perturbaciones. Caracterizar la complejidad y el caos de los sistemas cuánticos es un paso crucial en el desarrollo de tecnologías más eficientes.

El estudio del caos en los sistemas cuánticos comenzó en los años 80, con un enfoque centrado en sus propiedades espectrales. Dentro de este esquema, un sistema caótico se diferencia de uno integrable en función de cuán similar es su estadística de niveles a una matriz aleatoria [1–4]. Posteriormente, el enfoque se desvió ligeramente hacia una definición más dinámica del caos cuántico. Ejemplos de esto incluyen la propuesta del Echo de Loschmidt a principios de este siglo, que mide la irreversibilidad de un sistema luego de aplicar una pequeña perturbación [5], y más recientemente, el uso los Out-Of-Time Ordered Correlators (OTOCs), que miden la velocidad a la que un operador se extiende sobre el espacio de operadores mientras evoluciona en el tiempo [6–11].

Un acercamiento similar a este último, y central en esta tesis, es el de los subespacio de Krylov y la complejidad de Krylov (K-complexity de ahora en adelante) [12–17]. En este subespacio, cualquier sistema cuántico se puede expresar como un problema de *tight-binding* de una partícula en una cadena unidimensional, con coeficientes de salto dados por los llamados coeficientes de Lanczos. Estudiar la velocidad con la que un operador se extiende sobre esta base es equivalente a estudiar la velocidad con la que se extiende la función de onda de esta partícula ficticia sobre la cadena. La K-complexity es una medida cuantitativa de esta dinámica que ha llamado la atención de la comunidad recientemente. Se han realizado muchos trabajos que estudian esta métrica para una amplia variedad de sistemas [18–26].

En particular, en Refs. [25, 26] se ha sugerido, y observado en ciertos sistemas, que la K-complexity a tiempo largo tiene un valor de saturación más bajo para los sistemas integrables en comparación con los caóticos. Los autores sugieren que la distribución estadística Poissoniana de la separación de niveles de energía, característica de los sistemas integrables, influye en los coeficientes de Lanczos, dando a lugar valores más dispersos. Argumentan que estas irregularidades provocan localización de Anderson sobre la función de onda, impidiendo que ésta explore eficientemente toda la cadena, lo que se traduce en un valor de saturación más bajo de la K-complexity. Es importante identificar que esta conjetura se basa en dos supuestos: que la estadística Poissoniana genera coeficientes de Lanczos más erráticos, y que esta dispersión genera localización y una disminución de la saturación de la K-complexity. Si bien los resultados que exponen en sus trabajos están en acuerdo con las hipótesis que presentan, en todos los casos los resultados están calculados utilizando bases de Krylov construidas con operadores muy similares entre sí.

El objetivo de esta tesis es explorar la generalidad y universalidad de estas hipótesis. En particular, nos interesa estudiar cómo la dispersión de los coeficientes de Lanczos y la saturación a tiempo largo de la K-complexity dependen de la cantidad de caos presente en el sistema al expandir diferentes operadores en la base de Krylov. Para hacer esto utilizamos un sistema tipo Ising con transición caos-integrabilidad y estudiamos el valor de estas cantidades en función del caos. Para explorar el espacio completo de operadores locales expandimos la base de Krylov para los tres operadores de Pauli sobre cada uno de los espines y comparamos los resultados con operadores tomados al azar. Nuestros resultados muestran que la K-complexity y el caos tienen una relación subyacente, pero que el tipo de correlación entre estas cantidades es fuertemente dependiente del operador elegido para construir la base. Además, utilizando la noción de dispersión planteada en trabajos previos, esta dependencia con el operador también se observó en la dispersión de los coeficientes de Lanczos. En este trabajo proponemos una noción más natural de dispersión y mostramos que bajo esta métrica todos los sistemas son equivalentes y siguen una ley de potencias en función del caos, con el mismo exponente para todos los operadores. Que este resultado sea común tanto para operadores locales como para operadores tomados al azar (y fuertemente entrelazados) es un indicio de que debe existir una clase de universalidad subyacente que todavía no conocemos. Una versión resumida de estos resultados fue publicada en Physical Review E [27].

La tesis está organizada según se detalla a continuación. El capítulo 2 aborda el marco teórico sobre el que se construye esta tesis y se introducen las herramientas matemáticas que se van a utilizar a lo largo de ella. En particular, en la sección 2.1 se presentan los subespacios de Krylov y en la sección 2.2 se discute la noción de complejidad en este subespacio. En la sección 2.3 se explica la diferencia entre un sistema integrable y uno caótico en mecánica cuántica y se introduce la métrica con la que vamos a medir esta cualidad. En la sección 2.4 se discute en detalle la relación entre la integrabilidad, la dispersión de los coeficientes de Lanczos y la saturación a tiempo largo de la complejidad de Krylov. El el capítulo 3 se presentan los resultados más importantes obtenidos en el desarrollo de esta tesis. En la sección 3.1 se muestra el sistema hamiltoniano con el que vamos a construir los espacios de Krylov. En la sección 3.2 se muestran los resultados numéricos de las cantidades más relevantes de los espacios de Krylov. En la sección 3.3 se calculan estas cantidades variando paramétricamente el hamiltoniano desde la integrabilidad hasta el caos. En la sección 3.4 se presenta una alternativa a la forma de medir dispersión utilizada en la literatura hasta el momento. Finalmente, en el capítulo 4 se realiza un sumario de los resultados obtenidos, marcando las conclusiones del trabajo y las perspectivas a futuro. Adicionalmente, en el apéndice A se puede encontrar la deducción del algoritmo utilizado para construir la base de Krylov y las distintas implementaciones computacionales numéricamente estables.

2 Marco teórico

2.1. Subespacio de Krylov y algoritmo de Lanczos

El algoritmo de recursión de Lanczos fue presentado originalmente por Lanczos en 1950 como un método para resolver sistemas lineales y exponenciar matrices [28–30]. Esencialmente, el método consiste en generar subespacio, llamado subespacio de Krylov, en el que la matriz con la que se desea trabajar adopta una expresión tridiagonal. En 1981, Mattis mostró que en esta base se puede expresar la dinámica de cualquier operador unitario de dimensión arbitraria como un problema de hopping unidimensional [31]. Desde entonces, los métodos de Krylov se han utilizado principalmente para computar propiedades termodinámicas de sistemas altamente interactuantes [32–34], y recientemente, en problemas cuánticos de muchos cuerpos para estudiar el comportamiento y la complejidad que desarrolla un operador al evolucionar en el tiempo [12–17, 25, 26]. En esta subsección presentamos estos conceptos en un orden distinto. Comenzamos dando una idea intuitiva de qué es un subespacio de Krylov en cuántica, y luego mostramos cómo construirlo mediante el algoritmo de Lanczos y su equivalencia a un problema unidimensional.

Consideremos un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$, de dimensión $\dim(\tilde{\mathcal{H}}) = D$, con un espacio asociado de operadores $L(\tilde{\mathcal{H}}) \equiv \mathcal{H}$, que actúa sobre $\tilde{\mathcal{H}}$ y satisface $\dim(\mathcal{H}) = D^2$. Tomemos un sistema cuya dinámica está descripta por un cierto Hamiltoniano hermítico $H \in \mathcal{H}$ y un observable $\mathcal{O} \in \mathcal{H}$. Denominamos espacio de Krylov al mínimo subespacio de Hilbert que contiene la evolución de $\mathcal{O}$ para todo tiempo.

Por conveniencia, vamos a usar introducir la notación de *kets suaves* $|\mathcal{O})$ para denotar un elemento del espacio de operadores asociado a un operador $\mathcal{O}$; de modo de poder pensar al operador como un estado. Esto es, dado un operador $\mathcal{O} = \sum_{ij} \mathcal{O}_{ij} |i\rangle\langle j|$, donde

$|i\rangle$ y $|j\rangle$ son vectores de una base ortonormal del espacio de Hilbert, definimos $|\mathcal{O}) \equiv \sum_{ij} \mathcal{O}_{ij}|i\rangle|j\rangle$. Además, vamos a definir el producto interno entre dos operadores como

$$(\mathcal{O}_{\mathrm{A}}|\mathcal{O}_{\mathrm{B}}) \equiv \frac{\mathrm{Tr}[\mathcal{O}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathrm{B}}]}{\mathrm{Tr}[I]} \tag{2.1}$$

donde I es la identidad de dimensión $D \times D$.

En la representación de Heisenberg, la evolución temporal de $\mathcal{O}$ viene dada por

$$\mathcal{O}(t) = e^{iHt}\mathcal{O}e^{-iHt} = e^{i\mathcal{L}t}\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathcal{L}^n\mathcal{O}, \tag{2.2}$$

donde definimos el superoperador Liouvilliano como $\mathcal{L} \equiv [H, \cdot]$. Si abusamos un poco de la notación, y definimos $\mathcal{L}|\cdot) \equiv |[H, \cdot])$, podemos expresar la evolución de Heisenberg como

$$|\mathcal{O}(t)) = e^{it\mathcal{L}}|\mathcal{O}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathcal{L}^n\,|\mathcal{O}) \tag{2.3}$$

De esta ecuación vemos que podemos generar el espacio de Krylov tomando una combinación recursiva del Hamiltoniano con el operador,

$$\mathcal{K}_{\mathcal{O}} = \mathrm{span}\{\mathcal{L}^n|\mathcal{O})\}_{n=0}^{+\infty} = \mathrm{span}\{|\mathcal{O}), [H, |\mathcal{O})], [H, [H, |\mathcal{O})]], \cdots\}. \tag{2.4}$$

Equivalentemente, $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ es el subespacio más chico del Liouvilliano que contiene a $\mathcal{O}(t)$ para todo tiempo. Denominamos $\dim(\mathcal{K}_{\mathcal{O}}) \equiv K$. Si el $|\mathcal{O}(t))$ es de dimensión finita, entonces este valor está acotado por $1 \leq K \leq D^2 - D + 1$ y es máximo cuando el sistema no tiene ninguna simetría [14].

Para construir una base de este subespacio recurrimos al algoritmo de Lanczos (Algoritmo 1), que no es más que una particularización de la ortonormalización de Gram-Schmidt (el apéndice A.1 se pueden encontrar los detalles de su deducción). La idea es ir construyendo el subespacio iterativamente, anidando cada vez más conmutadores (siguiendo la ecuación 2.4) y ortogonalizando la base en cada iteración. El algoritmo termina cuando todas las direcciones independientes de $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ son cubiertas. Su resultado es una secuencia positiva de números $\{b_n\}_{n=1}^{K-1}$ llamados *coeficientes de Lanczos* y una secuencia de operadores $\{|\mathcal{O}_n)\}_{n=0}^{K-1}$, llamada *base de Krylov*. En esta base la representación matricial del

Algoritmo 1 Lanczos simple

Input: $|\mathcal{O})$; $\mathcal{L}$
Output: $\{b_n\}$, $\{|\mathcal{O}_n)\}$

Set $b_0 := 0$; $|\mathcal{O}_{-1}) := 0$; $|\mathcal{O}_0) := |\mathcal{O})$
$|\mathcal{O}_0) := \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0)}}\,|\mathcal{O}_0)$
for $n \geq 1$ **do**
  $|\mathcal{A}_n) := \mathcal{L}|\mathcal{O}_{n-1}) - b_{n-1}|\mathcal{O}_{n-2})$
  $b_n := \sqrt{(\mathcal{A}_n|\mathcal{A}_n)}$
  if $b_n = 0$ **then stop**
  else
    $|\mathcal{O}_n) := \frac{1}{b_n}\,|\mathcal{A}_n)$
  end if
end for

Liouvilliano adopta una forma tridiagonal, que depende únicamente de los coeficientes de Lanczos,

$$L_{nm} \equiv (\mathcal{O}_n|\mathcal{L}|\mathcal{O}_m) = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{K-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{K-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

o en representación de operadores-estado,

$$\mathcal{L}|\mathcal{O}_n) = b_n\,|\mathcal{O}_{n-1}) + b_{n+1}\,|\mathcal{O}_{n+1}), \tag{2.6}$$

donde podemos ver que los b_n tienen unidades de energía.

Dos aclaraciones importantes. Primero, tal como está planteado, este algoritmo es teóricamente correcto pero numéricamente inestable debido a la pérdida de ortogonalidad generada por los errores de punto flotante. En el apéndice A se presentan dos implementaciones numéricas estables. En esta tesis vamos a trabajar siempre con la versión *partial re-orthogonalization* a menos que se especifique lo contrario. Segundo, si bien la secuencia $\{|\mathcal{O}_n)\}$ forma una base completa para el espacio que contiene a $\mathcal{O}(t)$, no genera el espacio completo de operadores (no podemos expandir *cualquier* operador en esta base).

Si expandimos $|\mathcal{O}(t))$ en la base de Krylov,

$$|\mathcal{O}(t)) = \sum_{n=0}^{K-1} \varphi_n(t)|\mathcal{O}_n), \tag{2.7}$$

la ecuación 2.6 resulta en una ecuación discreta tipo Schrödinger para las φ_n,

$$-i\partial_t \varphi_n(t) = b_n\, \varphi_{n-1} + b_{n+1}\, \varphi_{n+1}, \tag{2.8}$$

con condiciones de contorno $b_0 = \varphi_{-1} = 0$. Notar que esta ecuación diferencial es la misma que la de un problema de tight-binding en una dimensión para una partícula con una "función de onda"$\varphi(t)$ y coeficientes de salto b_n entre los sitios φ_{n-1} y φ_n de la cadena. Y dado que tenemos $|\mathcal{O}(t=0)) = |\mathcal{O}_0)$, a $t = 0$ esta función de onda está completamente localizada en el primer sitio $\varphi_n(0) = \delta_{0n}$. Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos $\{\varphi_n(t)\}$, y mediante 2.7, la dinámica del operador para todo tiempo.

Algo que vale la pena destacar, aunque no lo vamos a trabajar en detalle en esta tesis, es que si bien necesitamos tanto los coeficientes de Lanczos como la base de Krylov para reconstruir completamente $|\mathcal{O}(t))$, existen cantidades físicas que se pueden obtener conociendo únicamente los b_n (y en consecuencia los $\varphi_n(t)$). Un ejemplo estudiado en detalle es el de la auto-correlación [12]:

$$C(t) = \frac{\mathrm{Tr}\left[\mathcal{O}(t)^\dagger \mathcal{O}(0)\right]}{\mathrm{Tr}[I]} = (\mathcal{O}_0|\mathcal{O}(t)) = \varphi_0(t). \tag{2.9}$$

A su vez, conociendo $C(t)$ podemos conocer la función de Green,

$$G(z) = \left(\mathcal{O}\left|\frac{1}{z-\mathcal{L}}\right|\mathcal{O}\right) = i\int_0^\infty e^{-izt} C(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

y la función espectral

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

A modo de resumen, en la Fig. 2.1 se esquematiza la relación entre la evolución de un operador y el problema de tight-binding 1D asociado. Nos gustaría destacar que este método no sirve exclusivamente para trabajar con la evolución de operadores cuánticos.

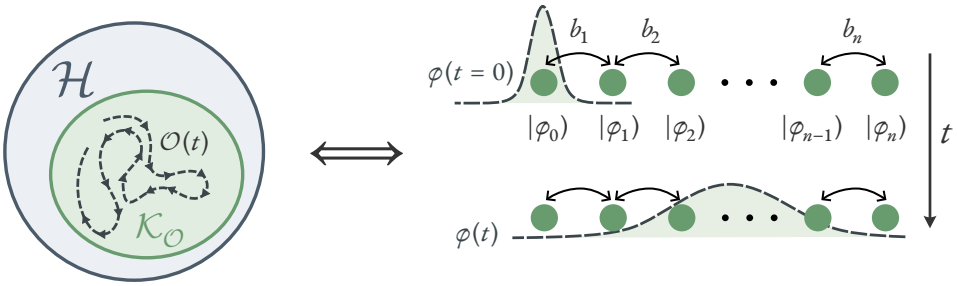

Figura 2.1: Esquema de la evolución de un operador en la base de Krylov. Dado un espacio de Hilbert de operadores $\mathcal{H}$, un hamiltoniano $H \in \mathcal{H}$ y un observable $\mathcal{O} \in \mathcal{H}$, definimos el subespacio de Krylov asociado a $\mathcal{O}$, $\mathcal{K}_\mathcal{O}$, como al mínimo subespacio que contiene a $\mathcal{O}(t)$ para todo tiempo. Construyendo la base de Krylov mediante el algoritmo de Lanczos, estudiar la evolución temporal de este operador (dada por la ecuación 2.3) es equivalente a estudiar la evolución de una función de onda ficticia $\varphi(t)$ sobre un problema de tight-binding 1D, con coeficientes de salto dados por los coeficientes de Lanczos (ecuación 2.8). La relación entre estas dos "representaciones.está dada por la ecuación 2.7.

Este formalismo fue primeramente utilizado en la evolución de estados y es extrapolable para estudiar cualquier problema que admita una expresión lineal del estilo

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\, f_k, \tag{2.12}$$

donde las f_k son funciones (u operadores) ortonormales para algún producto interno definido. Si se cumplen estas condiciones, dado un estado inicial A_0 y una ecuación de movimiento para $A(t)$, siempre es posible construir un problema unidimensional equivalente. La idea es utilizar el algoritmo de Lanczos para obtener la base ortonormal $\{f_k\}$, e insertando la expansión 2.12 en la ecuación de movimiento, obtener la ecuación diferencial para la dependencia temporal de los coeficientes $a_k(t)$.

2.2. Complejidad de Krylov

En la sección anterior vimos que la base de Krylov nos permite estudiar la dinámica de cualquier operador como un problema de tight-binding en una dimensión, con la función de onda completamente localizada en el primer sitio de la cadena en el instante inicial.

Estudiar cómo la información se propaga para $t > 0$ nos da una noción de cómo varía la complejidad del sistema en función del tiempo [12, 26].

La complejidad de Krylov (K-complexity) es una medida cuantitativa de esta dinámica y se define como la posición media de $\varphi_n(t)$ sobre la cadena,

$$C_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{n=0}^{K-1} n \left|\varphi_n(t)\right|^2. \tag{2.13}$$

Dado que en esta tesis nos interesa el tiempo largo de esta cantidad, vamos a definir

$$\overline{C_{\mathcal{K}}} = \sum_{n=0}^{K-1} n \, \overline{\left|\varphi_n(t > \tau)\right|^2}. \tag{2.14}$$

con τ un tiempo suficientemente largo, de modo que la K-complexity haya saturado.

Si en su evolución temporal el operador recorre un subespacio de Hilbert muy acotado, van a alcanzar unos pocos elementos de la base para describir toda su dinámica, y por lo tanto, unos pocos φ_n. Dado el ordenamiento temporal de la base, esto implica que la función de onda va a estar muy localizada cerca del principio de la cadena, y por lo tanto, la K-complexity va a ser pequeña. El caso diametralmente opuesto, en el que el operador se distribuye uniformemente por todo el espacio, los φ_n van a ser todos comparables entre si, y el valor medio de la posición $\varphi(t)$ va a ser el centro de la cadena. Esto es

$$\left|\varphi(t \geq \tau)\right|^2 \sim \frac{1}{K}, \tag{2.15}$$

y reemplazando en 2.14,

$$\overline{C_{\mathcal{K}}}^{\max} \sim \frac{1}{K} \frac{K(K-1)}{2} \sim \frac{K}{2}, \tag{2.16}$$

los que nos da una cota máxima sobre cuánto puede crecer esta cantidad.

2.3. Estadística de niveles y caos cuántico

Para medir el caos presente en un sistema al variar los parámetros del Hamiltoniano utilizamos la medida espectral habitual. Bajo este panorama, un sistema cuántico es considerado caótico si las distancias entre los niveles consecutivos del Hamiltoniano siguen

una distribución de Wigner-Dyson, y es considerado integrable si es Poissoniana. Dado un Hamiltoniano H en un subespacio de simetría, si agrupamos los niveles de energía en un conjunto ordenado e_n, podemos definir el espaciado a primeros vecinos como $s_n = e_{n+1} - e_n$. Para cuantificar la distancia entre la distribución de un sistema dado, y uno perfectamente caótico o integrable, es común definir el indicador

$$\tilde{r}_n = \frac{\text{mín}(s_n, s_{n-1})}{\text{máx}(s_n, s_{n-1})} = \text{mín}(r_n, 1/r_n) \tag{2.17}$$

donde $r_n = s_n / s_{n-1}$.

El valor medio de este indicador ($\mathcal{R} = \overline{\tilde{r}_n}$) es mínimo si la distribución de los s_n es Poissoniana ($\mathcal{R}_\text{P} = 0.386$) y máxima si es de Wigner-Dyson ($\mathcal{R}_\text{WD} = 0.536$), de modo que podemos normalizar esta cantidad como

$$\eta = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_\text{P}}{\mathcal{R}_\text{WD} - \mathcal{R}_\text{P}}. \tag{2.18}$$

Esto nos permite identificar un sistema como integrable si $\eta \simeq 0$ y como caótico si $\eta \simeq 1$. Notar que para calcular esta cantidad es necesario hacer estadística sobre las auto-energías del Hamiltoniano, por lo que es indispensable trabajar con espacios grandes.

2.4. El efecto de la integrabilidad en el tiempo largo de la K-complexity

En Refs. [14, 25, 26], Rabinovici et al. presentan y desarrollan la hipótesis de que es posible distinguir un sistema integrable de uno caótico viendo el tiempo largo de la K-complexity. Este es un argumento heurístico que se divide fundamentalmente en dos partes: relacionar la estadística Poissoniana en el espaciado de niveles (típica de los sistemas integrables) con una mayor dispersión de los coeficientes de Lanczos, e implicar que esta dispersión genera localización Anderson y una supresión de la K-complexity a tiempo largo. En esta sección vamos a ver en detalle la construcción de estos dos argumentos.

2.4.1. La integrabilidad y la dispersión de los coeficientes de Lanczos

La forma tridiagonal del Liouvilliano (ecuación 2.5) se puede diagonalizar en autovectores $|\omega_i)$ y autovalores (o frecuencias) ω_i,

$$\mathcal{L}|\omega_i) = \omega_i\,|\omega_i), \quad i = 0, \cdots, K-1. \tag{2.19}$$

En general, el Liouvilliano tiene D^2 frecuencias $\{\omega_{ab} = E_a - E_b,\ a, b \in D \times D\}$ y D^2 autoestados, pero en este caso nos estamos quedando solo con los autoestados que tienen proyección sobre el espacio de Krylov (que son K). La idea es escribir los coeficientes de Lanczos en función de estas frecuencias.

Dados los momentos

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{K-1} |O_i|^2 \omega_i^n, \tag{2.20}$$

donde $O_i = (\mathcal{O}_0|\omega_i)$ es la descomposición espectral del operador inicial, si tomamos los determinantes de Hankel

$$D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \tag{2.21}$$

podemos expresar a los b_n como

$$b_n^2 = \frac{D_{n-2}\, D_n}{D_{n-1}^2}, \quad n = 1, \cdots, K-1, \tag{2.22}$$

con $D_{-1} = 1$ y $D_0 = \mu_0 = 1$.

Estos determinantes se pueden escribir explícitamente en función de los O_i y los ω_i,

$$D_{n-1} = \sum_{\substack{\{i_1,\cdots,i_n\} \\ \subset\{0,\cdots,K-1\}}} \prod_{i\in\{i_1,\cdots,i_n\}} |O_i|^2 \prod_{\substack{a,b\in\{i_1,\cdots,i_n\} \\ a<b}} (\omega_a - \omega_b)^2, \tag{2.23}$$

donde la suma es sobre todas las formas posibles de elegir n frecuencias de las K frecuencias del espectro del Liouvilliano. Por ejemplo, para $n = 2$ y $K = 4$, la sumatoria

del principio tiene $\binom{4}{2} = 6$ términos, donde (i_1, i_2) toman valores $\{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$. Para $n = 3$ y $K = 4$, $\binom{4}{3} = 4$ términos: $\{(0,1,2), (0,1,3), (0,2,3), (1,2,3)\}$, etc. Para cada uno de estos términos se multiplican todos los solapamientos de los autoestados O_i y se multiplica el cuadrado de las diferencias de todas las frecuencias consideradas, sin repetir. Esta última productoria es el determinante de Vandermonde construido a partir de estas n frecuencias. Por ejemplo, para el caso de $n = 3$ y $K = 4$, el término de la suma con $(i_1, i_2, i_3) = (0,1,3)$ tiene la productoria

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \end{pmatrix}^2 = \prod_{\substack{a,b \in \{0,1,3\} \\ a<b}} (\omega_a - \omega_b)^2 = (\omega_0 - \omega_1)^2 (\omega_0 - \omega_3)^2 (\omega_1 - \omega_3)^2. \quad (2.24)$$

Las ecuaciones 2.22 y 2.23 relacionan analíticamente el espectro del Liouvilliano (y por lo tanto el espectro del Hamiltoniano) con los valores de los b_n. A partir de estas ecuaciones Rabinovici et al. relacionan la estadística de los sistemas integrables con la dispersión de los b_n. El argumento es el siguiente. Si la distribución del espaciado de niveles del Hamiltoniano sigue una estadística Poissoniana, es esperable que haya varias frecuencias del Liouvilliano que sean muy chicas, y por lo tanto, que estén muy cerca las unas de las otras. Esto hace que, para algunos n, todas las elecciones de n frecuencias de las K vayan a incluir valores de $\omega_a - \omega_b$ muy pequeños, reduciendo el valor de D_{n-1} respecto a D_{n-2} (este resultado también depende de las proyecciones O_i de ese conjunto particular de frecuencias). Reemplazando en la ecuación 2.22, vemos que en ese punto el b_n asociado va a sufrir una fluctuación, haciéndose más grande o más chico que b_{n-1}, dependiendo de si D_{n-1} está en el numerador o en el denominador. Consecuentemente, como en los sistemas caóticos hay un número menor de frecuencias chicas y cercanas, los coeficientes de Lanczos van a estar menos dispersos.

2.4.2. Localización de Anderson y su efecto en la K-complexity

Una vez vista la relación entre la integrabilidad y la dispersión de los coeficientes de Lanczos, queda por ver cómo esta dispersión afecta la K-complexity. Como se detalló en la sección 2.1, podemos pensar a la dinámica en la cadena de Krylov como un problema

de tight-binding en una dimensión, con amplitudes de salto dadas por b_n. El argumento que presenta Rabinovici et al. es que si los b_n tienen dispersión, entonces los autoestados del Liouvilliano se van a localizar, y por lo tanto, la K-complexity va a tener un valor de saturación menor. Repasemos esta idea.

Si el Hamiltoniano del que partimos no tiene degeneraciones, el Liouvilliano siempre tiene un (único) autovalor nulo. Llamemos $|\tilde{\omega})$ al autoestado asociado a este autovalor. Expandiendo este autoestado en la base de Krylov,

$$|\tilde{\omega}) = \sum_{n=0}^{K-1} \psi_n |\mathcal{O}_n) \tag{2.25}$$

y sustituyendo en 2.6, obtenemos

$$0 = \tilde{\omega}\, \psi_n = b_n\, \psi_{n-1} + b_{n+1}\, \psi_{n+1}, \quad n = 0, \cdots, K-1. \tag{2.26}$$

No confundir los ψ_n con los φ_n, los primeros son los coeficientes de la combinación lineal de la base de Krylov que forman $|\tilde{\omega})$, mientras que los segundos son los coeficientes que forman $|\mathcal{O}(t))$. El problema de tight-binding de la ecuación 2.26 tiene solución exacta, y en caso de que los b_n sean inhomogéneos, la solución está localizada. En Ref. [35] se demostró analíticamente que la longitud de localización es proporcional a $\frac{1}{\sigma_{\log}}$, donde

$$\sigma_{\log} = \mathrm{Std}\{X_n^{\log}\}, \quad X_n^{\log} = \log(b_n/b_{n+1}). \tag{2.27}$$

Es importante destacar que esta solución es un caso particular de localización de Anderson, en el que se tienen que cumplir tres condiciones: la interacción es a lo sumo a primeros vecinos (L_{nm} es tridiagonal), no hay potencial de sitio (la diagonal de L_{nm} es nula) y el autoestado que estamos estudiando es el fundamental ($\tilde{\omega} = 0$). En el caso de que algunas de estas condiciones no se cumplan no es posible asegurar que el estado esté localizado. Es razonable pensar que va a existir un valor de corte en la dispersión de los b_n a partir del cual el estado va a estar localizado a tiempo largo, pero este valor es desconocido.

Para cerrar el argumento completo, veamos ahora cómo se relaciona la K-complexity con los autoestados del Liouvilliano. Si escribimos las funciones de onda $\varphi_n(t)$ en la base del Liouvilliano y reemplazamos en la ecuación 2.7 obtenemos

$$|\mathcal{O}(t)) = \sum_{j=0}^{K-1} e^{i\omega_j t} |\omega_j)(\omega_j|\mathcal{O}_0) = \sum_{m=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{K-1} e^{i\omega_j t}(\omega_j|\mathcal{O}_0)(\mathcal{O}_m|\omega_j)|\mathcal{O}_m) \tag{2.28}$$

donde en la última igualdad expandimos los autovectores del Liouvilliano en la base de Krylov,

$$\omega_j = \sum_{m=0}^{K-1} |\mathcal{O}_m)(\mathcal{O}_m|\omega_j). \tag{2.29}$$

Si multiplicamos a izquierda la ecuación 2.7 por $(\mathcal{O}_n|$ y utilizamos la ortogonalidad de la base, obtenemos

$$\varphi_n(t) = (\mathcal{O}_n|\mathcal{O}(t)) = \sum_{j=0}^{K-1} e^{i\omega_j t}(\omega_j|\mathcal{O}_0)(\mathcal{O}_n|\omega_j). \tag{2.30}$$

De este modo podemos interpretar $\left|\varphi_n(t)\right|^2$ como la probabilidad de transición de $|\mathcal{O}_0)$ a $|\mathcal{O}_n)$ a tiempo t:

$$P_{0n} \equiv \left|\varphi_n(t)\right|^2 = \sum_{i,j=0}^{K-1} e^{i(\omega_j-\omega_i)t}(\omega_j|\mathcal{O}_0)(\mathcal{O}_n|\omega_j)(\omega_i|\mathcal{O}_n)(\mathcal{O}_0|\omega_i), \tag{2.31}$$

lo que nos permite pensar a la K-complexity como el valor medio de la posición en la cadena al que el operador va a transicionar en cada instante t,

$$C_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{n=0}^{K-1} n\left|\varphi_n(t)\right|^2 = \sum_{n=0}^{K-1} n\, P_{0n}(t). \tag{2.32}$$

Para estudiar el tiempo largo de esta cantidad, podemos tomar un promedio temporal a tiempo infinito sobre las funciones de onda,

$$\overline{\left|\varphi_n\right|^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left|\varphi_n(t)\right|^2 \mathrm{d}t, \tag{2.33}$$

y como el espectro de Liouvilliano es no degenerado por construcción, al tomar valor medio las fases con $i \neq j$ se cancelan entre sí. Como los únicos términos que sobreviven son los diagonales, finalmente obtenemos

$$\overline{\left|\varphi_n\right|^2} \equiv Q_{0n} = \sum_{i=0}^{K-1} |(\mathcal{O}_0|\omega_i)|^2 |(\mathcal{O}_n|\omega_i)|^2 \tag{2.34}$$

y la K-complexity queda

$$\overline{C_{\mathcal{K}}} = \sum_{i=0}^{K-1} |(\mathcal{O}_0|\omega_i)|^2 \sum_{n=0}^{K-1} n\, |(\mathcal{O}_n|\omega_i)|^2 \equiv \sum_{i=0}^{K-1} |(\mathcal{O}_0|\omega_i)|^2 C_{\mathcal{K}}^{(i)} \tag{2.35}$$

donde definimos $C_{\mathcal{K}}^{(i)}$ como la K-complexity del autoestado $|\omega_i)$, es decir, el valor medio de la posición de este estado sobre la cadena de Krylov. Para calcular $\overline{C_{\mathcal{K}}}$, se suma sobre cada uno de estos estados, pesados por su solapamiento con el estado inicial $\mathcal{O}_0$. Por definición, los estados con menor $C_{\mathcal{K}}^{(i)}$ van a estar más cerca del principio de la cadena y van a tener un mayor solapamiento, de modo que si los estados del Liouvilliano están localizados, la K-complexity va a ser menor.

En resumen, el argumento que presentan Rabinovici et al. es: i) Los sistemas integrables tienen un espectro Poissoniano en su separación de niveles, lo que hace que los autovalores del Liouvilliano ω_i sean chicos y estén cerca. ii) Esta cualidad de ω_i hace que los coeficientes de Lanczos tengan fluctuaciones frecuentemente, y que por lo tanto su dispersión aumente respecto a los sistemas caóticos. iii) La dispersión de los coeficientes genera localización de Anderson en los autoestados del Liouvilliano $|\omega_i)$. iv) La K-complexity se puede expresar en función de los $|\omega_i)$ y mostrar que si estos están localizados, entonces la saturación a tiempo largo de esta cantidad es más baja.

El problema de este argumento es el punto iii). El resultado que presentan vale solo para el autoestado $|\tilde{\omega})$, y no es extrapolable al resto de autoestados del Liouvilliano. Esto hace que a lo sumo se pueda argumentar que uno de los $C_{\mathcal{K}}^{(i)}$ es chico (el asociado a ese autovalor), pero no se puede afirmar nada sobre el valor total de $\overline{C_{\mathcal{K}}}$.

3 Desde la integrabilidad al caos

3.1. Ising con campo magnético trasverso-longitudinal

Para realizar los cálculos de esta tesis se trabajó principalmente con el Hamiltoniano de una cadena de espines con interacción a primeros vecinos y un campo magnético trasverso-longitudinal. Esta elección se debe a que éste es un sistema muy versátil, con una transición paramétrica entre los regímenes integrable y caótico ampliamente estudiada [36–38]. El Hamiltoniano está dado por

$$H_b = \sum_{k=1}^{L} \left(h_x \, \sigma_k^x + h_z \sigma_k^z \right) - J_z \sum_{k=1}^{L-1} \sigma_k^z \, \sigma_{k+1}^z, \tag{3.1}$$

donde h_x y h_z son la amplitud del campo magnético trasversal y longitudinal, respectivamente, J_z el factor de acople entre vecinos y L la cantidad de espines en la cadena. En la Fig. 3.1 se encuentra una representación esquemática de este sistema para $L = 6$.

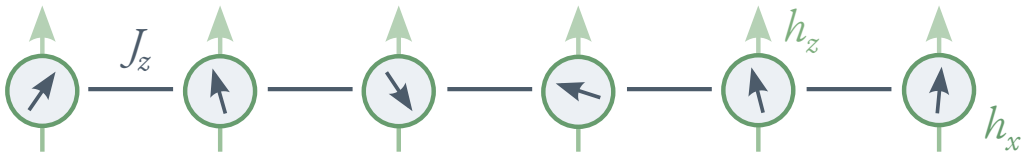

Figura 3.1: Esquema de un Hamiltoniano de 6 espines con interacción a primeros vecinos J_z y un campo magnético trasverso (h_x) y longitudinal (h_z)

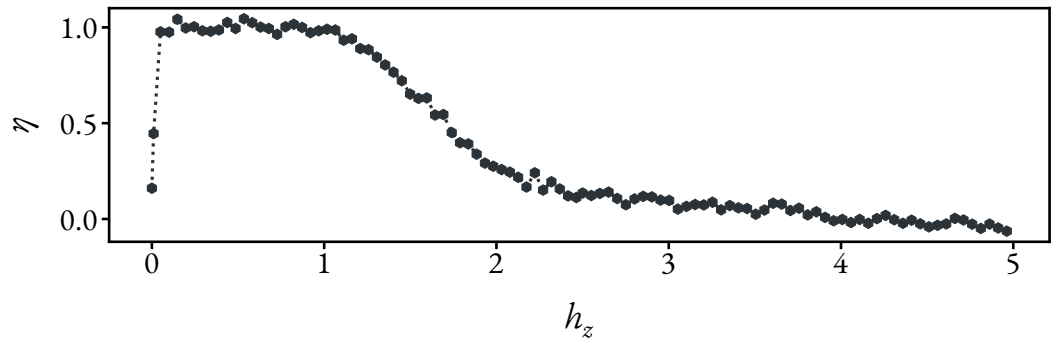

Figura 3.2: Cantidad de caos presente en el sistema al mantener un campo magnético trasverso constante y variar la potencia del campo magnético longitudinal.

Este modelo conserva la paridad, definida como la operación que intercambia los sitios n y $L+1-n$,

$$P = \prod_{n=1}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \mathcal{P}_{n,L+1-n} = \mathcal{P}_{1,L}\,\mathcal{P}_{2,L-1} \cdots \mathcal{P}_{L/2-1,L/2+1}, \tag{3.2}$$

donde $\mathcal{P}_{nm}$ es el operador permutación entre los sitios n y m. Bajo esta definición el operador P es la inversión respecto al centro de una cadena de largo L impar; la expresión para una cadena de largo par es análoga. Esto implica que el Hamiltoniano puede separarse en un subespacios par e impar, con dimensiones $D = D^{\text{par}} + D^{\text{impar}}$, con $D^{\text{par/impar}} \simeq D/2$.

El sistema es integrable en los límites en el que el campo magnético es completamente longitudinal ($h_z \gg h_x$) o completamente trasverso ($h_x \gg h_z$), y exhibe caos cuando h_x y h_z son comparables. En la Fig. 3.2 se muestra cómo varía el caos, medido por la cantidad espectral η descripta en la sección 2.3, en función de $h_z \in (0, 5]$, al mantener los demás parámetros del Hamiltoniano fijos, $L = 14$, $J_z = 1$ y $h_x = 1$. Dado que el Hamiltoniano para valores de campo $h_z = 0, h_x \neq 0$ tiene una simetría extra (conserva la magnetización en $\hat{z}$), no se consideró este punto para realizar los cálculos. Notar que como η es una cantidad estadística, y tiene fluctuaciones, su valor no se encuentra siempre perfectamente contenido en el intervalo $[0, 1]$. Esta imperfección es más notable cerca de los límites integrables debido a que la estimación de la media de una distribución Poissoniana con parámetro pequeño tiene una gran incerteza en comparación con distribuciones más anchas como la de Wigner-Dyson.

3.2. La evolución a través del espacio de Krylov

Con el objetivo de asentar las bases sobre qué es un subespacio de Krylov, cómo se construye, y cómo se calcula la K-complexity, en esta sección vamos a ver los resultados parciales que se obtienen en todo el proceso. A modo de ejemplo, vamos a utilizar el hamiltoniano de Ising con campo magnético trasverso-longitudinal que se describió en la sección anterior, con parámetros $L = 5$, $J_z = 1$, $h_x = 1$ y h_z variable en función de si queremos estar en un régimen integrable o en uno caótico. Como discutimos, este hamiltoniano tiene simetría de reflexión respecto al centro de la cadena, por lo es necesario desimetrizarlo. Quedándonos con el subespacio par, pasamos de un espacio de dimensión $(2^L)^2 = 1024$ a uno de dimensión $D = 400$. Para construir el espacio de Krylov esta sección vamos a utilizar el operador $\mathcal{O} = S^z_{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{2}\sigma^z_k$.

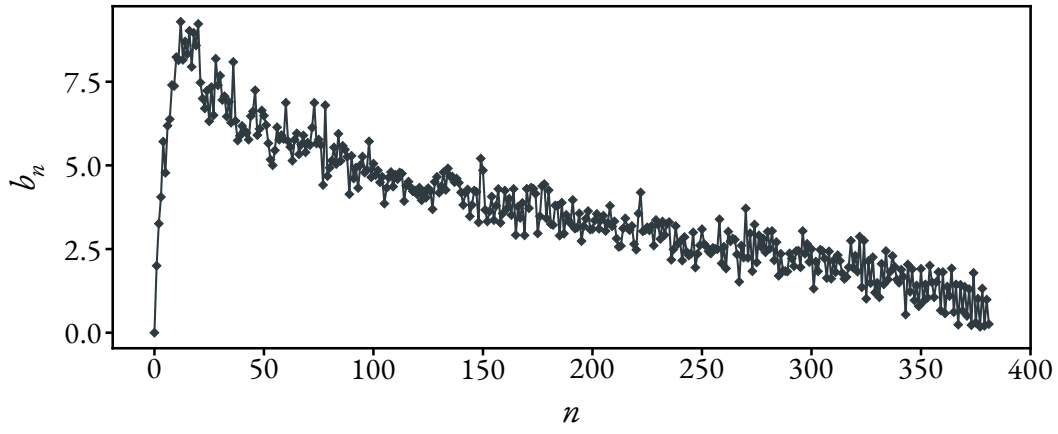

Figura 3.3: Ejemplo de coeficientes de Krylov para un sistema con $\dim(\mathcal{K}_{\mathcal{O}}) = 381$.

Aplicando el algoritmo de Lanczos (en alguna de sus versiones numéricamente estables), obtenemos los coeficientes de Lanczos b_n y la base de operadores $\mathcal{O}_n$. En la Fig. 3.3 se muestra una secuencia típica de los b_n . Notar que la cantidad de coeficientes coincide con la dimensión del nuevo espacio generado, $K = D^2 - D + 1 = 381$.

Utilizando estos valores podemos resolver la ecuación diferencial 2.8 y así obtener las funciones de onda $\varphi_n(t)$. En la Fig. 3.4 se pueden ver los primeros cuatro $\varphi_n(t)$ en función del tiempo. Vemos que a $t = 0$ la función de onda está completamente localizada en el primer sitio de la cadena ($\varphi_n(0) = \delta_{0n}$), y luego evoluciona hasta algún estado estacionario. Otra forma de visualizar estas funciones de onda es pararse en algún tiempo fijo y graficar

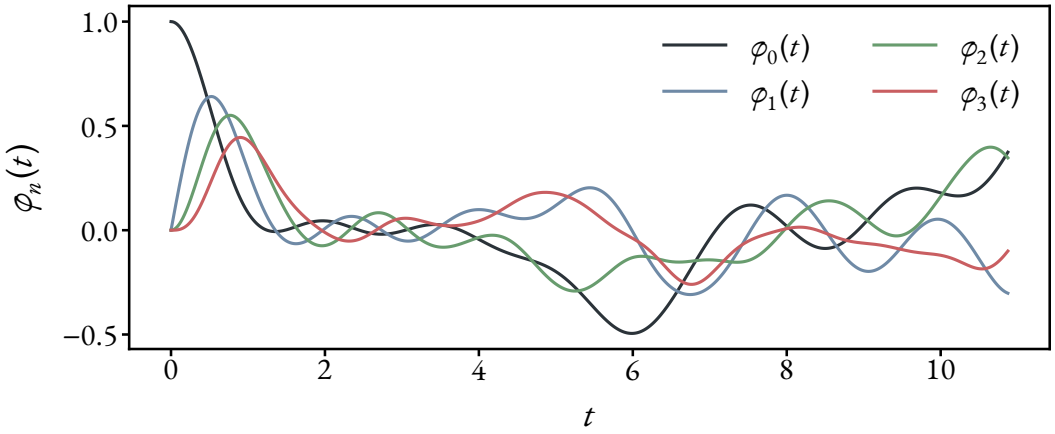

Figura 3.4: Ejemplo de las primeras funciones de onda de la cadena de Krylov en función del tiempo.

su módulo cuadrado en función de n, es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula ficticia en el sitio n a un tiempo dado t. En la Fig. 3.5 se muestra un esquema de esto para distintos tiempos. Nuevamente vemos que la cantidad de sitios en la cadena coincide con la dimensión del espacio de Krylov, $n = 0, 1, \cdots K - 1$. Para construir este gráfico se tuvieron dos consideraciones que vale la pena aclarar: i) Como los φ_n son discretos en n, e independientes entre sí, puede haber variaciones muy grandes entre un n y el siguiente, lo que dificulta ver la sistemática que siguen en su conjunto. Para solucionar este problema se interpolaron linealmente los φ_n y se aplicó un filtro Gaussiano sobre el interpolador. Esto permite obtener una curva más suave y visualmente representativa de la dinámica de la partícula ficticia sobre la cadena de Krylov. ii) La curva resultante está normalizada para cada tiempo, lo que implica que la escala que se muestra para cada tiempo es distinta. Para leer el gráfico se tiene que tener en cuenta que mientras más esparcida esté la función de onda sobre la cadena, más baja tiene que ser su amplitud en cada punto, de modo que se cumpla $\sum_n \phi_n(t) = 1$ para todo tiempo.

Para obtener las funciones de onda que se representan en la Fig. 3.5 se tomó $h_z = 0.7$, lo que se corresponde a un régimen caótico. Calculando la métrica de caos que presentamos en la sección 2.3 obtenemos $\eta = 1$. De manera similar, tomando $h_z = 0.01, \eta \simeq 0$ se realizó la Fig. 3.6, que corresponde al régimen integrable. Comparando estos resultados vemos que a tiempo largo podemos distinguir los regímenes en función de cuán extendida está la función de onda sobre la cadena. Esta propiedad de localización/deslocalización

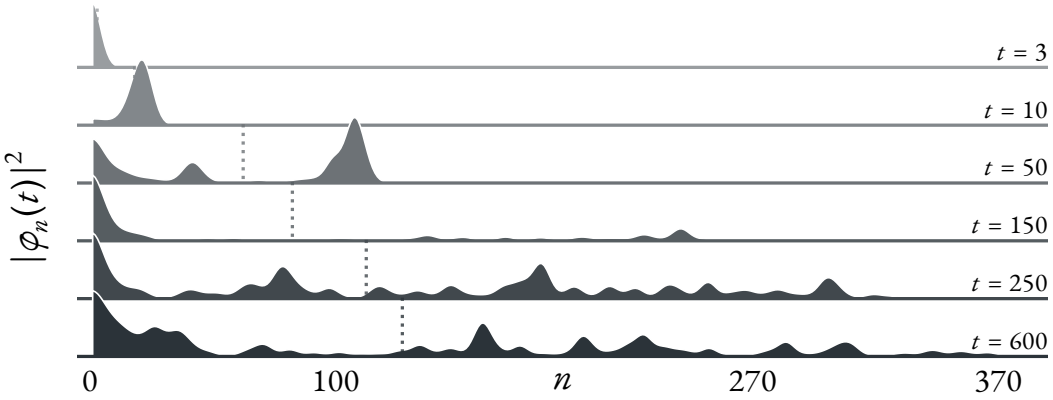

Figura 3.5: Probabilidad esquemática de encontrar a la partícula en el sitio n-ésimo de la cadena para distintos tiempos (u. a.). Los valores de $\varphi_n(t)$ están calculados expandiendo la base de Krylov en el régimen caótico ($h_z = 0.7, \eta = 1$).

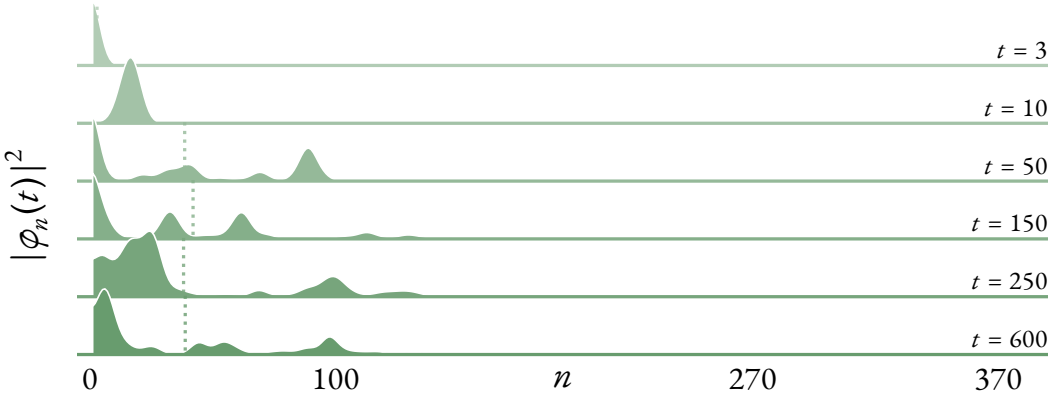

Figura 3.6: Esquema construido de manera similar al mostrado en la Fig 3.5 pero para el sistema en el régimen integrable ($h_z = 0, \eta = 0$).

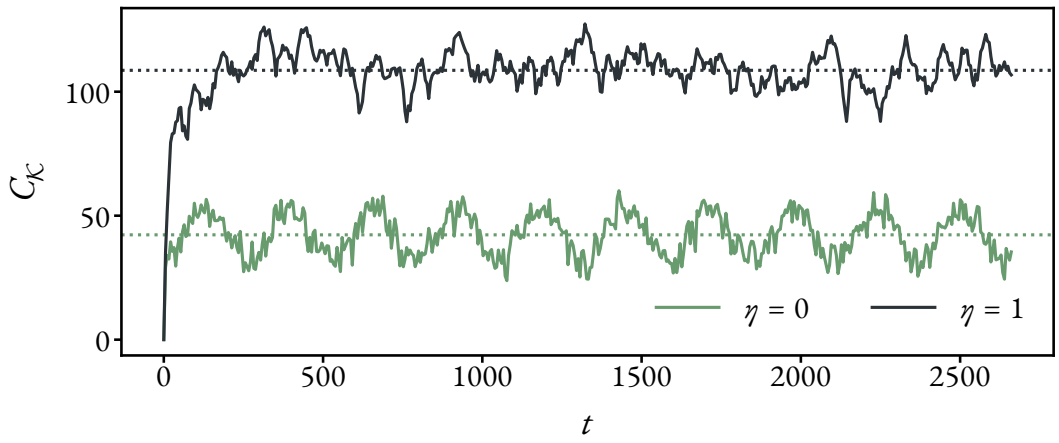

Figura 3.7: Ejemplo de la K-complexity en función del tiempo para un sistema típicamente integrable ($\eta = 0$) y otro típicamente caótico ($\eta = 1$). En lineas punteadas de marca el valor medio de la saturación de este valor a tiempo largo $\overline{C_{\mathcal{K}}}$.

motiva la definición de la K-complexity como el valor medio de la posición de la función de onda sobre la cadena, y viendo estas figuras es evidente que los valores que puede tomar van a ser siempre menores a $\frac{K}{2}$.

Introduciendo los $\varphi_n(t)$ en la ecuación 2.13 podemos calcular $C_{\mathcal{K}}$. En la Fig. 3.7 se puede ver esta cantidad en función del tiempo para ambos regímenes. Como ya se veía en las figuras anteriores, a tiempo muy corto los sistemas tienen una dinámica muy similar, pero luego de un tiempo el sistema caótico se esparce sobre la cadena mucho más rápido que su contraparte integrable, lo que resulta en un valor medio de saturación de la K-complexity comparativamente más alto. Como se discutió previamente, a diferencia de η, la K-complexity no depende solamente del Hamiltoniano, sino también del operador que expandamos, por lo que no está claro si esta propiedad es extrapolable a cualquier base de Krylov. En la siguiente sección discutimos en detalle este aspecto y estudiamos el sistema en toda la transición caos-integrabilidad.

3.3. K-complexity como función del operador

En esta sección vamos a estudiar cómo la dispersión de los coeficientes de Lanczos y la saturación de la K-complexity depende de la caoticidad del sistema. Para facilitar la discusión y comparación con resultados anteriores [25, 26], vamos a usar como medida de

dispersión la desviación estándar de la diferencia logarítmica entre coeficientes de Lanczos consecutivos (ecuación 2.27).

Nuevamente vamos a trabajar con el hamiltoniano de Ising con campo magnético trasverso-longitudinal H_b. Para calcular los coeficientes de Lanczos fijamos los parámetros $L = 6$, $J_z = 1$, $h_x = 1$ y estudiamos la transición caos-integrabilidad variando h_z. Los operadores con los que vamos a trabajar son,

$$S^{\alpha}_{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{2}\,\sigma^{\alpha}_{k}, \tag{3.3}$$

donde σ^{α}_{k} es el operador de Pauli en el sitio k con dirección $\alpha = \{x, y, z\}$, y RM, que es como vamos a notar a los operadores *random*. Estos operadores los vamos a construir como una matriz al azar, con valores tomados de una distribución gaussiana de media 0 y desviación estándar 1.

Comencemos expandiendo el operador $\mathcal{O} = S^{z}_{\mathrm{T}}$. En la Fig. 3.8a se muestran los coeficientes de Lanczos para tres valores distintos de h_z; uno en el régimen integrable ($h_z = 2.5$), otro en el régimen caótico ($h_z = 0.6$) y el tercero en un punto intermedio entre los otros dos ($h_z = 1.5$). La dispersión de los coeficientes en cada régimen se muestran en la Fig. 3.8b, y la K-complexity en función del tiempo en 3.8c. Utilizando la medida espectral de caos que introdujimos en la sección 2.3 vemos que para estos valores de campo el sistema presenta tres regímenes de caos distintos, con valores $\eta \simeq 1$, $\eta \simeq 0.7$ y $\eta \simeq 0.1$ para $h_z = 0.6$, $h_z = 1.5$ y $h_z = 2.5$ respectivamente. Para computar estos valores utilizamos $L = 14$. Observamos que para estos tres casos parece haber una relación entre la cantidad de caos presente en el sistema (η), $\sigma_{\log}$ y $C_{\mathcal{K}}$. Específicamente, mientras más caótico es el sistema, la dispersión de los b_n decrece y la saturación de la K-complexity aumenta.

Para estudiar la transición caos-integrabilidad en más detalle en la Fig. 3.9 mostramos $\sigma_{\log}$ y $C_{\mathcal{K}}$ comparada con η al variar h_z entre 0.01 y 2.5. Vemos que, como esperábamos, en los límites $h_z \ll h_x$ y $h_z \gg h_x$ el sistema es fundamentalmente integrable, y para valores de $h_z \sim h_x$ hay una transición anunciada por el valor de η en cada punto. Este gráfico muestra que, expandiendo S^{z}_{T}, tanto la dispersión de los b_n como $C_{\mathcal{K}}$ son sensibles a la transición, con un comportamiento similar a η. Estos resultados son consistentes con la conjetura discutida en la sección 2.4 y con los resultados mostrados en Ref. [26], donde trabajan con un sistema de espines distinto pero con un operador muy similar ($\mathcal{O} = \frac{1}{2}\sigma^{z}_{i} + \frac{1}{2}\sigma^{z}_{L-i+1}$).

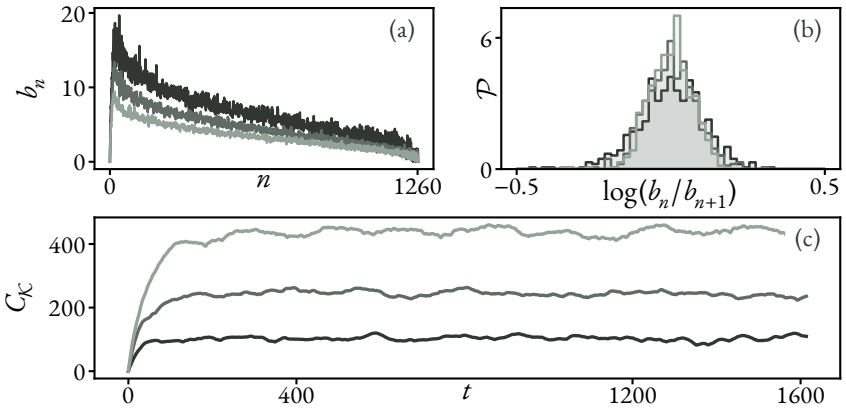

Figura 3.8: Expansión de Krylov para $H = H_b(h_z)$ y $\mathcal{O} = S^z_\mathrm{T}$ para distintos regímenes de caos. De más claro a más obscuro: $\eta \simeq 1$; $\eta \simeq 0.7$; $\eta \simeq 0.1$. **(a)** Secuencia de Lanczos como función de n. **(b)** Distribución logarítmica de la diferencia entre elementos consecutivos de los coeficientes. La media de estas distribuciones en prácticamente nula y su dispersión es $\sigma_\mathrm{log} \simeq 0.07$ para $\eta \simeq 1$, $\sigma_\mathrm{log} \simeq 0.09$ para $\eta \simeq 0.7$, y $\sigma_\mathrm{log} \simeq 0.1$ para $\eta \simeq 0.1$. **(c)** K-complexity como función del tiempo para las tres secuencias calculadas. Los valores de saturación a tiempo largo son $\overline{C_\mathcal{K}} = 439 \pm 7$ para $\eta \simeq 1$, $\overline{C_\mathcal{K}} = 241 \pm 7$ para $\eta \simeq 0.7$ y $\overline{C_\mathcal{K}} = 103 \pm 12$ para $\eta \simeq 0.1$

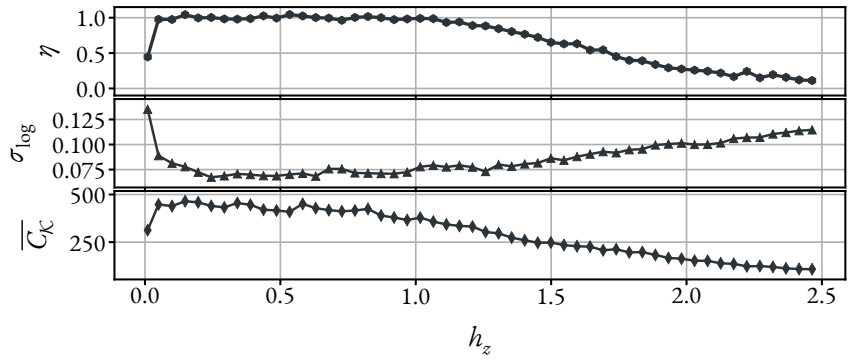

Figura 3.9: Comparación entre la cantidad de caos presente en el sistema (indicada por η), la dispersión de los coeficientes de Lanczos σ_log y la saturación de la K-complexity $\overline{C_\mathcal{K}}$, como función de h_z, para $H = H_b(h_z)$ y $\mathcal{O} = S^z_\mathrm{T}$.

Ahora consideremos el caso de $\mathcal{O} = S^x_\mathrm{T}$. La Fig. 3.10 fue contraída de la misma forma que la Fig. 3.8 pero generando la base de Krylov utilizando este operador. En este caso, la saturación de la K-complexity tiene un comportamiento notablemente diferente. Comparando estas dos figuras, vemos que aún cuando las secuencias de Lanczos son prácticamente iguales (tanto en valor medio como en dispersión), la sistemática que sigue $C_\mathcal{K}$ para

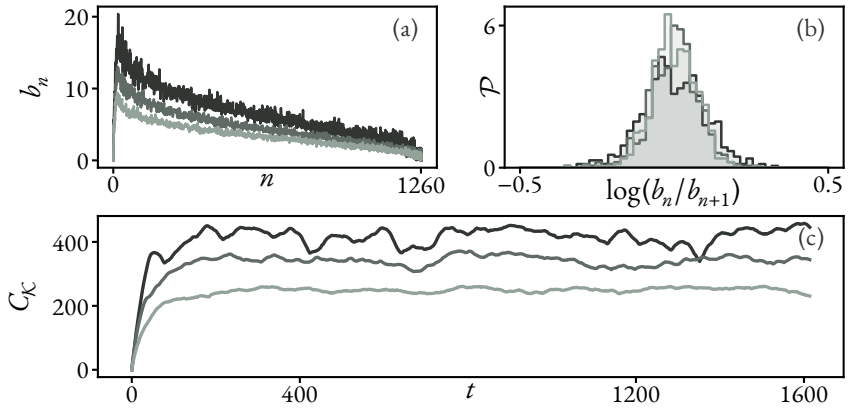

Figura 3.10: Expansión de Krylov para $H = H_b(h_z)$ y $\mathcal{O} = S^x_{\mathrm{T}}$ para distintos regímenes de caos. Los parámetros utilizados y la distribución de los paneles en la misma que en la Fig. 3.8. La dispersión de $\log(b_n/b_{n+1})$ es $\sigma_{\log} \simeq 0.07$ para $\eta \simeq 1$, $\sigma_{\log} \simeq 0.08$ para $\eta \simeq 0.7$ y $\sigma_{\log} \simeq 0.1$ para $\eta \simeq 0.1$. La saturación de la K-complexity es $C_\mathcal{K} = 251 \pm 7$ para $\eta \simeq 1$, $C_\mathcal{K} = 342 \pm 14$ para $\eta \simeq 0.7$ y $C_\mathcal{K} = 421 \pm 23$ para $\eta \simeq 0.1$.

S^x_{T} es la opuesta. Para este operador, cuando el sistema es caótico, la K-complexity satura más bajo que cuando es integrable. En la Fig. 3.11, se puede ver este comportamiento extendido para los mismos valores de h_z que en Fig. 3.9.

Para atacar directamente la pregunta que queremos responder, veamos estos mismos resultados desde otra perspectiva. Pensando h_z como un parámetro, en la Fig. 3.12 comparamos $\overline{C_\mathcal{K}}$ y $\sigma_{\log}$ en función de η para los operadores S^z_{T}, S^x_{T}, S^y_{T} y RM. En esta misma figura se agrega en línea rayada un ajuste lineal estimativo. Este ajuste tiene como única intención facilitar la visualización de la tendencia que siguen los valores; no hay ninguna razón para pensar que $\overline{C_\mathcal{K}}$ y $\sigma_{\log}$ siguen una relación lineal con η. Viendo la inclinación de las pendientes es claro que $\overline{C_\mathcal{K}}$ tiene una correlación positiva con η para S^z_{T} y S^y_{T}, una correlación negativa para S^x_{T} y ninguna correlación aparente para RM. Esto muestra que la segunda parte de la hipótesis planteada de Rabinovici et al. (subsec. 2.4.1), que dice que η correlaciona positivamente con $\overline{C_\mathcal{K}}$, solo puede ser cierta para algunos operadores y no es una propiedad general de los espacios de Krylov. Además, los resultados exponen que no hay una relación directa entre la dispersión de los b_n y $\overline{C_\mathcal{K}}$. Podemos ver esta misma idea cambiando a mano algunos de los primeros valores de los b_n. En la Fig. 3.13 vemos que modificando únicamente b_1, b_3 y b_5 de los b_n asociados a S^x_{T} podemos modificar completamente la sistemática de la K-complexity, incluso hasta el punto de revertir la relación original: con este cambio el punto de saturación más alto es en el régimen caótico, como

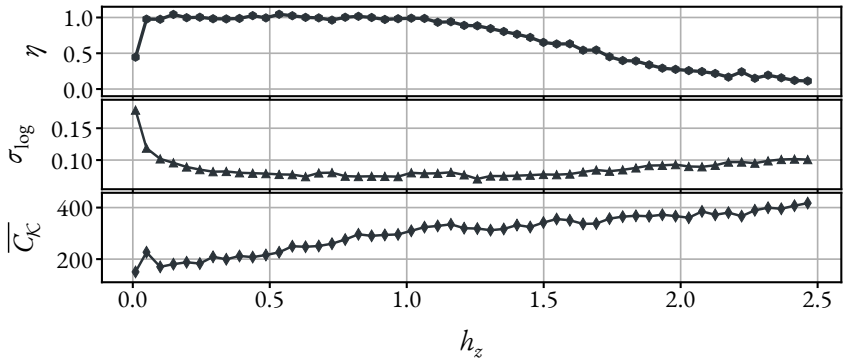

Figura 3.11: Comparación entre la cantidad de caos presente en el sistema (indicada por η), la dispersión de los coeficientes de Lanczos $\sigma_{\log}$ y la saturación de la K-complexity $\overline{C_{\mathcal{K}}}$, como función de h_z, para $H = H_b(h_z)$ y $\mathcal{O} = S^x_{\mathrm{T}}$.

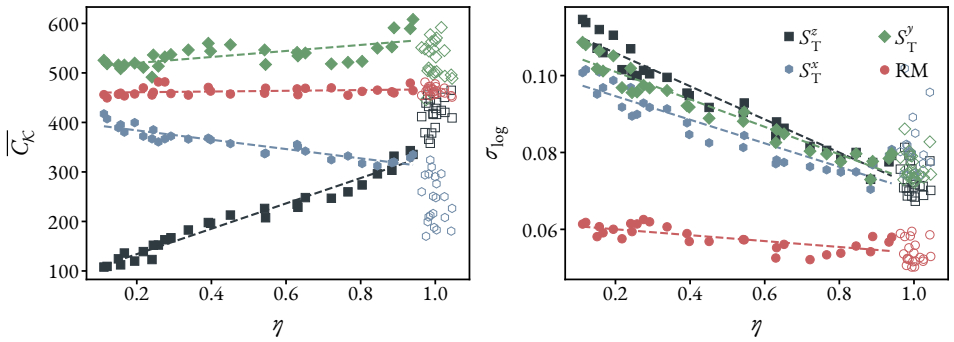

Figura 3.12: Expansión de Krylov para el hamiltoniano $H_b(h_z)$ y los operadores $S^z_{\mathrm{T}}, S^x_{\mathrm{T}}, S^y_{\mathrm{T}}$ y RM. Con marcadores se muestra la saturación de la K-complexity (panel **a**) y dispersión de los coeficientes de Lanczos (panel **b**) en función del caos presente en el sistema, y con linea rayada un ajuste lineal de estos valores. Para realizar el ajuste se descartaron los valores con $\eta > 0.95$, notados con marcadores sin rellenar.

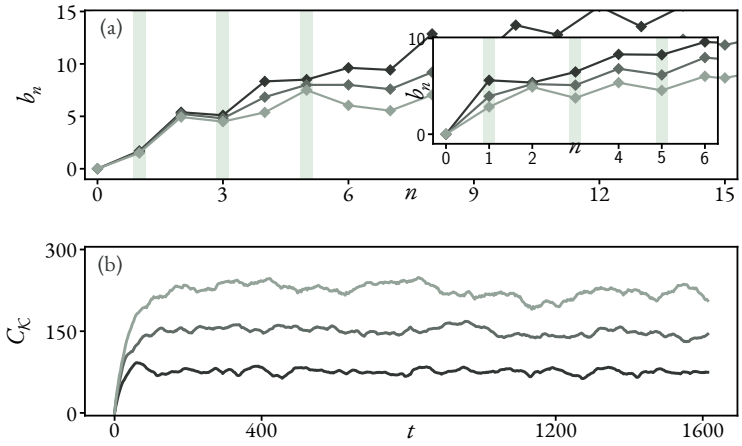

Figura 3.13: **(a) Inset**, primeros coeficientes de Lanczos de las cadena generadas al expandir $H = H_b(h_z)$ y $\mathcal{O} = S^z_{\mathrm{T}}$ para tres valores de h_z distintos (las cadenas completas están en el panel (c) de la Fig. 3.10). **(a) Principal**, los mismos coeficientes que se muestran en el inset pero seleccionando a mano los valores de b_1, b_3 y b_5. **(b)**, K-complexity de la cadena modificada.

cuando se expande S^z_{T}. Si bien no está claro qué valores son los que afectan al comportamiento general de la K-complexity, en nuestras pruebas numéricas encontramos que ésta es extremadamente sensible a los primeros valores de los coeficientes de Lanczos, y que se puede cambiar cualitativamente su comportamiento modificando solo unos pocos valores, sin modificar la estadística de la secuencia entera. Estos resultados son consistentes con la hipótesis planteada en Ref. [12], la cual conjetura que los primeros elementos de la base son los que dominan la dinámica del operador.

3.4. Otra métrica de dispersión

En la sección anterior estudiamos cómo varía la saturación de K-complexity y la dispersión de los coeficientes de Lanczos en la transición integrabilidad-caos. Para hacer el cálculo de la dispersión utilizamos la ecuación 2.27, dado que es la utilizada en trabajos anteriores [25, 26]. Pero como vimos en la subsección 2.4.2, el desarrollo de la propuesta solo justifica esta noción de dispersión para un único autoestado del Liouvilliano, y no para toda la cadena. Si nos desligamos de esta noción de dispersión y suponemos que el desarrollo heurístico que se detalla en la subsección 2.4.1 es correcto, es válido preguntar-

se cómo se comportan otras métricas cuando se va desde la integrabilidad hasta el caos, y si hay alguna ventaja en tomar una u otra.

La métrica más natural de dispersión es la desviación estándar respecto a la media. En este contexto, donde tenemos valores que cambian paramétricamente, la forma de obtener este valor es hacer una media móvil sobre los coeficientes de Lanczos y calcular la dispersión respecto de esta media. A esta forma de calcular la dispersión la vamos a identificar con σ_{std}. En el inset de la Fig. 3.14 se puede observar este métrica para los mismos valores de h_z que se utilizaron para calcular $\sigma_{\log}$ en la Fig. 3.12. Vemos que, a diferencia de $\sigma_{\log}$, para esta magnitud todos los operadores S^{α}_{T} son equivalentes, y que el operador random sigue la misma sistemática y solo se diferencia por un desplazamiento. Además, viendo los valores en escala logarítmica identificamos esta sistemática con la forma funcional de una ley de potencias, con exponente $-1/3$ para los cuatro operadores considerados. Que el exponente asociado a los operadores S^{α}_{T} (que son operadores que actúan de la misma forma sobre cada uno de los espines) sea el mismo que el de RM (que es un operador que entrelaza toda la cadena) es sorprendente y sugiere que existe una clase de universalidad subyacente. Si extendemos este resultado para valores arbitrariamente chicos de η esperaríamos que σ_{std} diverja, ya que $a\eta^{-1/3} \to \infty$ cuando $\eta \to 0$. Para comprobar esto, realizamos nuevamente los cálculo para un intervalo más amplio de h_z, yendo desde 0.1 hasta 5, de modo de cubrir una mayor proporción del régimen integrable. En el panel principal de la Fig. 3.14 se puede ver que el resultado obtenido es compatible con lo previsto. Debido a que el valor de η es un resultado estadístico, puede haber fluctuaciones que dejen a este valor por fuera del intervalo esperado, sobre todo cuando el resultado exacto está cerca de los límites. Por esto, para realizar el ajuste de a descartamos los valores de η mayores a 1 y menores a 0.

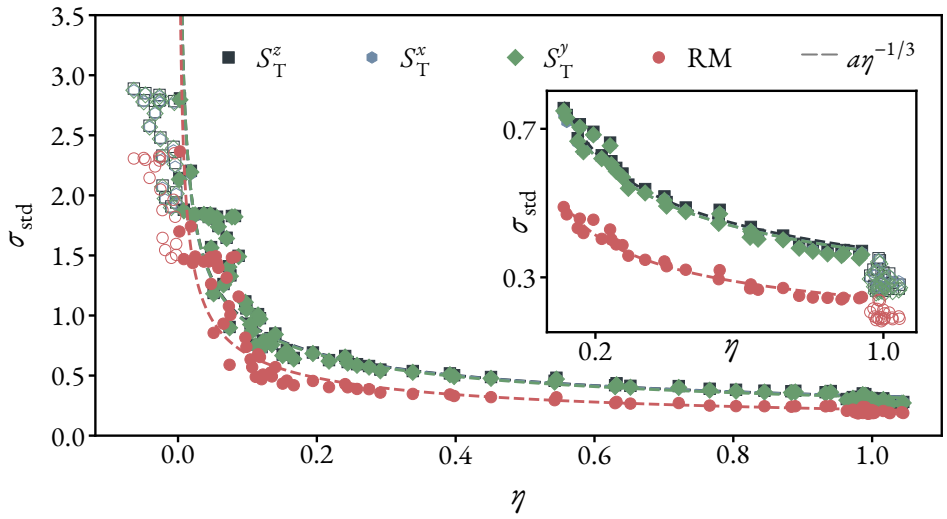

Figura 3.14: **Principal**, con marcadores se muestra la dispersión de los coeficientes de Lanczos calculada como la desviación estándar respecto a la media móvil, en función de la caoticidad del sistema. Para construir el espacio de Krylov se utilizó el hamiltoniano $H_b(h_z)$ variando h_z entre 0.1 y 5 y los operadores $S^z_{\text{T}}, S^x_{\text{T}}, S^y_{\text{T}}$ y RM. El linea rayada se muestra la función $a\eta^{-1/3}$, con a un parámetro ajustable. Para realizar el ajuste se descartaron los valores con $\eta < 0$, notados con marcadores sin rellenar. **Inset**, mismos valores que el panel principal pero restringido h_z entre 0.1 y 2.5.

4 Conclusiones

En esta tesis se exploró la relación entre el ruido en los coeficientes de Lanczos, la saturación a tiempo largo de la complejidad de Krylov y la cantidad de caos en un sistema de Ising con un campo magnético transverso-longitudinal. Para hacer esto se implementó una versión eficiente y numéricamente estable del algoritmo de Lanczos y se desarrollaron las herramientas numéricas necesarias para parametrizar el hamiltoniano y expandir al sistema en su transición integrabilidad-caos. Para comparar los resultados se utilizó la medida de caos espectral estándar en el área. Uno de los resultados principales de la tesis fue mostrar que la correlación entre la saturación de la K-complexity y la caoticidad del sistema depende del operador inicial utilizado para construir la base de Krylov. En particular se mostró que para un campo trasverso-longitudinal en el plano (x, z), y espines en en la dirección z, el operador inicial S^z_{T} correlaciona con el caos, mientras que S^x_{T} anticorrelaciona. Este trabajo es un primer paso para entender qué características deben tener estos operadores iniciales para ser buenos predictores del caos cuántico. Si bien se sabe que es necesario que los operadores tengan traza nula [26], esta cualidad no es suficiente. Incluso los casos en que se observa una correlación entre estas cantidades, no existen resultados teóricos o numéricos sólidos que demuestren que debe existir un relación causal. Además, los resultados de esta tesis sirven como contraejemplo de la relación esperada entre los coeficientes de Lanczos y la saturación de la K-complexity, ya que para todos los operadores estudiados los coeficientes de Lanczos son prácticamente equivalentes estadísticamente, mientras que la $\overline{C_{\mathcal{K}}}$ cambia cualitativamente entre un operador y otro.

Vale la pena mencionar que este tipo de problemas no fue observado en los OTOCs. De hecho se mostró que el tiempo largo de los OTOCs es un buen predictor de la transición integrabilidad-caos siempre que los operadores sean locales, aún sin desimetrizar el sistema [9, 10]. Comprender por qué estas cantidades tienen un comportamiento tan diferente en esta transición es fundamental para entender la relación entre la complejidad de Krylov y los OTOCs.

Finalmente, se propuso una métrica de dispersión para los coeficientes de Lanczos diferente de la utilizada en trabajos previos. Bajo esta métrica el ruido de los coeficientes de Lanczos de todos los operadores exhibe una dependencia idéntica en función del caos. Esta dependencia es una ley de potencia con exponente $-1/3$ en todos los casos, lo que sugiere una clase de universalidad subyacente.

Las observaciones de esta tesis hacen evidente que aún hay muchas cuestiones por comprender en el área. Es importante reproducir estos resultados utilizando otros hamiltonianos, generando la transición integrabilidad-caos utilizando otros parámetros y ampliando el rango de operadores considerados. En particular, se plantea como perspectiva a futuro estudiar en detalle si existe alguna relación entre las simetrías del Hamiltoniano y los operadores iniciales respecto de la sistemática que sigue la K-complexity con el caos. Además, aún queda pendiente comprender cuál es el efecto de los primeros coeficientes de Lanczos en la saturación de Krylov a tiempo largo. Estudiar la expansión de un mismo operador para distintos Hamiltonianos sería un gran avance en esta dirección.

Apéndices

A Algoritmos numéricos

A.1. Lanczos simple

En esta sección vamos a mostrar una idea de cómo se deduce el algoritmo que Lanczos planteó en 1950 (algoritmo 1, sección 2.1). La idea es escribir el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt y ver que éste se simplifica para el caso en que $(\mathcal{O}_i|\mathcal{O}_{i+1}) \propto (\mathcal{O}_i|\mathcal{L}|\mathcal{O}_i) \propto (\mathcal{O}_{i+1}|\mathcal{O}_i)$. Además, como estamos usando operadores observables, vale que $|\mathcal{O})$ y $\mathcal{L}|\mathcal{O})$ son ortogonales, lo que mata la diagonal del Liouvilliano.

Empecemos mostrando que $(\mathcal{O}|\mathcal{L}|\mathcal{O}) = \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger[H,\mathcal{O}]\big]/\,\mathrm{Tr}[I] = 0$ para todo $\mathcal{O}$ observable:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[I]\,(\mathcal{O}|\mathcal{L}|\mathcal{O}) &= \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger[H,\mathcal{O}]\big] = \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger(H\mathcal{O}-\mathcal{O}H)\big]\\ &= \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger H\mathcal{O}-\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}H\big] = \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger H\mathcal{O}-\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger H\big]\\ &= \mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}^\dagger H\mathcal{O}\big]-\mathrm{Tr}\big[\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger H\big] = 0\end{aligned} \tag{A.1}$$

donde en la última igualdad usamos que $\mathrm{Tr}[ABC] = \mathrm{Tr}[BCA]$.

Utilizando como condición inicial a $|\mathcal{O}) = |\mathcal{O}_0)$, las primeras tres iteraciones de Gram-Schmidt quedan

- $|\mathcal{O}_1) = \mathcal{L}|\mathcal{O}) - \alpha_0|\mathcal{O}_0)$
  $\implies (\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_1) = (\mathcal{O}_0|\mathcal{L}|\mathcal{O}_0) - \alpha_0(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0)$
  $= 0 - \alpha_0(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0$
- $|\mathcal{O}_2) = \mathcal{L}|\mathcal{O}_1) - \alpha_1|\mathcal{O}_1) - \beta_1|\mathcal{O}_0)$
  $\implies (\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_0|\mathcal{L}|\mathcal{O}_1) - \alpha_1(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_1) - \beta_1(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0)$
  $= (\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_1) - 0 - \beta_1(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = \dfrac{(\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_1)}{(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0)}$
  $\implies (\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1|\mathcal{L}|\mathcal{O}_1) - \alpha_1(\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_1) - \beta_1(\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_0)$
  $= 0 - \alpha_1(\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_1) - 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$

- $|\mathcal{O}_3) = \mathcal{L}|\mathcal{O}_2) - \alpha_2|\mathcal{O}_2) - \beta_2|\mathcal{O}_1) - c_2|\mathcal{O}_0)$
  $\implies (\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_3) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$
  $\implies (\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_3) = 0 \Leftrightarrow \beta_2 = \dfrac{(\mathcal{O}_2|\mathcal{O}_2)}{(\mathcal{O}_1|\mathcal{O}_1)}$
  $\implies (\mathcal{O}_2|\mathcal{O}_3) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$

De estas tres iteraciones se puede ver que

$$|\mathcal{O}_{n+1}) = \mathcal{L}|\mathcal{O}_n) - b_n^2|\mathcal{O}_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ \text{con } b_n^2 = \beta_n = \frac{(\mathcal{O}_n|\mathcal{O}_n)}{(\mathcal{O}_{n-1}|\mathcal{O}_{n-1})}. \tag{A.2}$$

Notar que para el caso general en el que $(\mathcal{O}|\mathcal{L}|\mathcal{O}) \neq 0$ la iteración queda

$$|\mathcal{O}_{n+1}) = \mathcal{L}|\mathcal{O}_n) - a_n|\mathcal{O}_n) - b_n^2|\mathcal{O}_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ \text{con } a_n = \alpha_n = \frac{(\mathcal{O}_n|\mathcal{L}|\mathcal{O}_n)}{(\mathcal{O}_n|\mathcal{O}_n)}, \quad b_n^2 = \beta_n = \frac{(\mathcal{O}_n|\mathcal{O}_n)}{(\mathcal{O}_{n-1}|\mathcal{O}_{n-1})}. \tag{A.3}$$

Este algoritmo es teóricamente correcto pero numéricamente inestable debido la pérdida de ortogonalidad ocasionada por la propagación de los errores de punto flotante en los productos de internos [30]. Existen diversas alternativas para solucionar este problema. En las siguientes secciones se presentan dos de ellas.

A.2. Full orthogonalization (FO)

La solución más simple al problema de la ortogonalidad fue propuesta por el mismo Lanczos, y consiste ortogonalizar explícitamente los elementos $|\mathcal{O}_n)$ respecto a todos los anteriores (ver algoritmo 2). Esta versión es considerablemente más lenta debido a la cantidad de productos internos que tiene que realizar, pero nos garantiza mantener la ortogonalidad de la base y nos permite comparar los resultados con algoritmos más complejos

A.3. Partial re-orthogonalization (PRO)

Este algoritmo es una combinación de Lanczos simple y FO. La idea realizar Lanczos simple hasta que la pérdida de ortogonalidad sea más grande que un cierto *threshold* , lue-

Algoritmo 2 Full orthogonalization

Input: $|\mathcal{O}); \ \mathcal{L}$
Output: $\{b_n\}, \{|\mathcal{O}_n)\}$

Set $b_0 := 0; \ |\mathcal{O}_{-1}) := 0; \ |\mathcal{O}_0) := |\mathcal{O})$
$|\mathcal{O}_0) := \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{O}_0|\mathcal{O}_0)}} |\mathcal{O}_0)$
for $n \geq 1$ **do**
  $|\mathcal{A}_n) := \mathcal{L}|\mathcal{O}_{n-1})$
  $|\mathcal{A}_n) := |\mathcal{A}_n) - \sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{O}_m)(\mathcal{O}_m|\mathcal{A}_n)$
  $b_n := \sqrt{(\mathcal{A}_n|\mathcal{A}_n)}$
  if $b_n = 0$ **then stop**
  else
    $|\mathcal{O}_n) := \frac{1}{b_n} |\mathcal{A}_n)$
  end if
end for

go, realizar FO una vez y continuar. De este modo la ortogonalización explícita respecto a todos los elementos anteriores solo se realiza cuando es necesario, y el error se mantiene acotado siempre por debajo de algún umbral. Hacer esto sin tener que comprobar la ortogonalidad en cada iteración (lo cual es muy ineficiente) requiere estimar los valores $(\mathcal{O}_k|\mathcal{O}_n)$ de alguna otra forma más económica. El cálculo de punto flotante detrás de este algoritmo está por fuera del alcance de esta tesis, por lo que solo se presentará el algoritmo (3). En nuestro caso vamos elegimos como valor de *threshold* al error de máquina ε_M.

Algoritmo 3 Partial re-orthogonalization

Input: $|\mathcal{O}); \ \mathcal{L}$
Output: $\{b_n\}, \{|\mathcal{O}_n)\}$

Set $b_0 := 0; \ |\mathcal{O}_{-1}) := 0; \ |\mathcal{O}_0) := |\mathcal{O})$
$|\mathcal{A}_1) := \mathcal{L}|\mathcal{O}_0)$
$|\mathcal{A}_1) := |\mathcal{A}_1) - |\mathcal{O}_0)(\mathcal{O}_0|\mathcal{A}_1)$
$b_1 := \sqrt{(\mathcal{A}_1|\mathcal{A}_1)}$
$|\mathcal{O}_1) := \frac{1}{b_1}|\mathcal{A}_1)$
Set $W_{00} := 1; W_{01} := \varepsilon_M; W_{11} := 1$
for $n \geq 2$ **do**

$|\mathcal{A}_n) \coloneqq \mathcal{L}|\mathcal{O}_{n-1}) - b_{n-1}|\mathcal{O}_{n-2})$
$b_n \coloneqq \sqrt{(\mathcal{A}_n|\mathcal{A}_n)}$
if $b_n < \sqrt{\varepsilon_M}$ **then break; else continue**
$|\mathcal{A}_n) \coloneqq |\mathcal{A}_n) - |\mathcal{O}_{n-1})(\mathcal{O}_{n-1}|\mathcal{A}_n)$
Set $W_{n,n} \coloneqq 1; W_{n-1,n} \coloneqq \varepsilon_M$
for $k \coloneqq 0, \cdots, n-2$ **do**
$\widetilde{W} \coloneqq b_{k+1} W^*_{k+1,n-1} + b_k W^*_{k-1,n-1} - b_{n-1} W_{k,n-2}$
$W_{kn} \coloneqq \frac{1}{b_n}\left[\widetilde{W} + \frac{\widetilde{W}}{|\widetilde{W}|}\, 2\varepsilon_M \|\mathcal{L}\|\right]$
end for
if there is some $k \leq n-2$ such that $W_{k,n} > \sqrt{\varepsilon_M}$ **then**
$|\mathcal{A}_n) \coloneqq |\mathcal{A}_n) - \sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{O}_m)(\mathcal{O}_m|\mathcal{A}_n)$
$|\mathcal{A}_{n-1}) \coloneqq |\mathcal{A}_{n-1}) - \sum_{m=0}^{n-2} |\mathcal{O}_m)(\mathcal{O}_m|\mathcal{A}_{n-1})$
$b_n \coloneqq \sqrt{(\mathcal{A}_n|\mathcal{A}_n)}$
$b_{n-1} \coloneqq \sqrt{(\mathcal{A}_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1})}$
if $b_n < \sqrt{\varepsilon_M}$ or $b_{n-1} < \sqrt{\varepsilon_M}$ **then break; else continue**
for all $a = 0, 1, \cdots, n-1$ **do**
Set $W_{a,n-1} \coloneqq \delta_{a,n-1} + (1 - \delta_{a,n-1})\, \varepsilon_M$
end for
for all $a = 0, 1, \cdots, n$ **do**
Set $W_{a,n} \coloneqq \delta_{a,n} + (1 - \delta_{a,n-1})\, \varepsilon_M$
end for
else
$|\mathcal{O}_n) \coloneqq \frac{1}{b_n}|\mathcal{A}_n)$
end if
end for

Bibliografía

[1] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1–4, jan 1984.

[2] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer New York, 1990.

[3] Fritz Haake. Quantum signatures of chaos. In *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, pages 583–595. Springer US, 1991.

[4] Hans-Jürgen Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press, 2000.

[5] Asher Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Physical Review A*, 30(4):1610–1615, oct 1984.

[6] Stephen H. Shenker and Douglas Stanford. Black holes and the butterfly effect. *Journal of High Energy Physics*, 2014(3), mar 2014.

[7] Igor L. Aleiner, Lara Faoro, and Lev B. Ioffe. Microscopic model of quantum butterfly effect: Out-of-time-order correlators and traveling combustion waves. *Annals of Physics*, 375:378–406, dec 2016.

[8] Yichen Huang, Yong-Liang Zhang, and Xie Chen. Out-of-time-ordered correlators in many-body localized systems. *Annalen der Physik*, 529(7):1600318, dec 2016.

[9] Ignacio García-Mata, Marcos Saraceno, Rodolfo A. Jalabert, Augusto J. Roncaglia, and Diego A. Wisniacki. Chaos signatures in the short and long time behavior of the out-of-time ordered correlator. *Physical Review Letters*, 121(21), nov 2018.

[10] Emiliano M. Fortes, Ignacio García-Mata, Rodolfo A. Jalabert, and Diego A. Wisniacki. Gauging classical and quantum integrability through out-of-time-ordered correlators. *Physical Review E*, 100(4), oct 2019.

[11] Ignacio García-Mata, Rodolfo A. Jalabert, and Diego A. Wisniacki. Out-of-time-order correlators and quantum chaos. *arXiv*, 2022, 2209.07965v1.

[12] Daniel E. Parker, Xiangyu Cao, Alexander Avdoshkin, Thomas Scaffidi, and Ehud Altman. A universal operator growth hypothesis. *Physical Review X*, 9(4), oct 2019.

[13] Anatoly Dymarsky and Alexander Gorsky. Quantum chaos as delocalization in krylov space. *Physical Review B*, 102(8), aug 2020.

[14] E. Rabinovici, A. Sánchez-Garrido, R. Shir, and J. Sonner. Operator complexity: a journey to the edge of krylov space. *Journal of High Energy Physics*, 2021(6), jun 2021.

[15] Niklas Hörnedal, Nicoletta Carabba, Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, and Adolfo del Campo. Ultimate speed limits to the growth of operator complexity. *Communications Physics*, 5(1), aug 2022.

[16] Budhaditya Bhattacharjee, Xiangyu Cao, Pratik Nandy, and Tanay Pathak. Krylov complexity in saddle-dominated scrambling. *Journal of High Energy Physics*, 2022(5), may 2022.

[17] Zhong-Ying Fan. Universal relation for operator complexity. *Physical Review A*, 105(6), jun 2022.

[18] J.L.F. Barbón, E. Rabinovici, R. Shir, and R. Sinha. On the evolution of operator complexity beyond scrambling. *Journal of High Energy Physics*, 2019(10), oct 2019.

[19] Jae Dong Noh. Operator growth in the transverse-field ising spin chain with integrability-breaking longitudinal field. *Physical Review E*, 104(3), sep 2021.

[20] Fabian Ballar Trigueros and Cheng-Ju Lin. Krylov complexity of many-body localization: Operator localization in krylov basis. *SciPost Physics*, 13(2), aug 2022.

[21] Aranya Bhattacharya, Pratik Nandy, Pingal Pratyush Nath, and Himanshu Sahu. Operator growth and krylov construction in dissipative open quantum systems. *Journal of High Energy Physics*, 2022(12), dec 2022.

[22] Budhaditya Bhattacharjee, Pratik Nandy, and Tanay Pathak. Krylov complexity in large-q and double-scaled syk model. *arXiv*, 2022, 2210.02474v2.

[23] Xiangyu Cao. A statistical mechanism for operator growth. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(14):144001, mar 2021.

[24] Robin Heveling, Jiaozi Wang, and Jochen Gemmer. Numerically probing the universal operator growth hypothesis. *Physical Review E*, 106(1), jul 2022.

[25] E. Rabinovici, A. Sánchez-Garrido, R. Shir, and J. Sonner. Krylov localization and suppression of complexity. *Journal of High Energy Physics*, 2022(3), mar 2022.

[26] E. Rabinovici, A. Sánchez-Garrido, R. Shir, and J. Sonner. Krylov complexity from integrability to chaos. *Journal of High Energy Physics*, 2022(7), jul 2022.

[27] Bernardo L. Español and Diego A. Wisniacki. Assessing the saturation of krylov complexity as a measure of chaos. *Physical Review E*, 107:024217, Feb 2023.

[28] Cornelius Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of lineal differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1950.

[29] Marlis Hochbruck and Christian Lubich. On krylov subspace approximations to the matrix exponential operator. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(5):1911–1925, 1997.

[30] Beresford N. Parlett. *The Symmetric Eigenvalue Problem (Classics in Applied Mathematics, Series Number 20)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

[31] Daniel C. Mattis. How to reduce practically any problem to one dimension. In *Springer Series in Solid-State Sciences*, pages 3–10. Springer Berlin Heidelberg, 1981.

[32] Netanel H. Lindner and Assa Auerbach. Conductivity of hard core bosons: A paradigm of a bad metal. *Physical Review B*, 81(5), feb 2010.

[33] Ilia Khait, Snir Gazit, Norman Y. Yao, and Assa Auerbach. Spin transport of weakly disordered heisenberg chain at infinite temperature. *Physical Review B*, 93(22), jun 2016.

[34] Assa Auerbach. Hall number of strongly correlated metals. *Physical Review Letters*, 121(6), aug 2018.

[35] L Fleishman and D C Licciardello. Fluctuations and localization in one dimension. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 10(6):L125–L126, mar 1977.

[36] Nicolás Mirkin and Diego Wisniacki. Quantum chaos, equilibration, and control in extremely short spin chains. *Physical Review E*, 103(2), feb 2021.

[37] Nicolás Mirkin, Diego A. Wisniacki, Paula I Villar, and Fernando C Lombardo. Sensing quantum chaos through the non-unitary geometric phase. *Quantum Science and Technology*, 6(4):045018, sep 2021.

[38] Julian M. Ruffinelli, Emiliano M. Fortes, Diego A. Wisniacki, and Martín Larocca. Loschmidt-echo approach to error estimation in krylov-subspace approximation. *Physical Review A*, 106(4), oct 2022.