Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física Juan José Giambiagi

Singularidad en modelo relativista con violación de condición fuerte de energía

Tesis de Licenciatura

Lorena Carolina Pereyra Gualda

Director: Dr. Osvaldo P. Santillán

Abril de 2023

TEMA: Relatividad General.

ALUMNA: Lorena Carolina Pereyra Gualda

LU: 228/04

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Osvaldo P. Santillán

FECHA DE INICIACIÓN: Septiembre 2020

FECHA DE FINALIZACIÓN: Diciembre 2022

FECHA DE EXAMEN: Abril 2023

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor: | Jurado:

Director: | Jurado:

Profesora: | Jurado:

A mi papá Domingo Roque Pereyra.
A mi mamá Leonor Amalia Gualda.

"Tal vez la misma ave cantó para ambos ayer, separados por el atardecer". R.M. Rilke.

Índice general

Resumen

En esta tesis estudiamos un sistema físico en el marco de la Teoría de la Relatividad General a fin de poder predecir la existencia de una singularidad bajo la violación de la denominada "condición fuerte de energía".

En primer lugar, abordamos los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose. Estos teoremas se centran en tres ejes principales: las condiciones de energía genéricas, el supuesto de generalidad, y la completitud de las geodésicas. Las condiciones de energía genéricas que se utilizan en los diferentes teoremas de singularidades son restricciones al tensor de energía-momento. En el supuesto de generalidad, debemos considerar las condiciones del espaciotiempo en términos de su estructura topólogica y de las propiedades geométricas que se derivan de ella, a saber, las superficies ácronas, la hipersuperficie de Cauchy, la estructura causal fuerte e hiperbolicidad del espacio. En referencia a la completitud de las geodésicas, analizamos el concepto de congruencia de geodésicas y sus propiedades.

En segundo lugar, se estudia la singularidad aparente de Landau, el sistema síncrono, y la ecuación de Raychaudhuri, que son herramientas claves para entender los teoremas de singularidades. La ecuación de Raychaudhuri es una ecuación precursora a los mencionados teoremas y describe la evolución de congruencias de geodésicas en el espaciotiempo. Además, permite inferir la presencia de puntos focales, o conjugados, correspondientes a estas geodésicas. En particular, esta ecuación junto con ciertos teoremas clásicos del siglo XIX sobre geodésicas nos permiten demostrar los teoremas de singularidades.

En tercer lugar, el sistema físico bajo estudio es un campo escalar acoplado a la gravedad. Dicho campo escalar viola la condición fuerte de energía (aún cuando se halla mínimamente acoplado a la gravedad) y se lo relacionará con el campo correspondiente al bosón de Higgs. Las ecuaciones de gravedad acopladas al campo escalar las suponemos con el potencial escalar que presenta una cantidad finita de mínimos. Suponemos además que la solución es globalmente hiperbólica y que el campo escalar evoluciona tomando valores acotados. Estas hipótesis nos permiten aplicar los teoremas de Fewster y Galloway sobre sistemas de ecuaciones diferenciales globalmente hiperbólicas.

Finalmente, siguiendo los teoremas de Jean Leray, Yvvone Choquet Bruhat, Robert Geroch y Hans Ringstrom, se puede demostrar que el sistema físico propuesto pertenece a la clase de problemas bien condicionados.

El resultado principal de esta tesis es la demostración de la existencia de una singularidad aparente analizando el lagrangiano asociado al campo escalar acoplado con la gravedad.

Índice de notación, símbolos y abreviaturas

El espaciotiempo está representado como una variedad lorentziana $\mathcal{M}$ (también la expresaremos como $\mathcal{M}^4_+$) de 4 dimensiones paracompacta conectada con un tensor métrico pseudo-riemanniano $g_{\mu\nu}$ (i.e no necesita ser definida positiva sino solamente no degenerada) y tomamos la signatura $(-+++)$, donde μ y ν hacen referencia a las coordenadas espaciotemporales (toman valores 0,1,2,3; siendo 0 la coordenada temporal).

Adoptamos las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci.
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico.
R	Escalar de Ricci, que es la perturbación comóvil de la curvatura.
Λ	Constante Cosmológica.
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento.
c	Velocidad de la luz.
G	Constante de gravitación

Las convenciones para los tensores de Riemann (tensor de Curvatura) y Ricci son:

$$\text{Riemann}: \; R^{\alpha}_{\rho\mu\nu}\mu^{\rho} = (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})\mu^{\alpha}$$

$$\text{Ricci}: \; R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

Por convención tomaremos las unidades naturales para las constantes c y G.

El espaciotiempo lo supondremos libre de singularidades si la métrica es un campo de clase C^2 y la variedad $\mathcal{M}$ es geodésicamente completa con respecto a la métrica.

Usamos la letra t para denotar el tiempo físico, mientras que τ denota el parámetro afín en el caso de que sean curvas nulas y tiempo propio para las curvas temporales.

Los paréntesis cuadrados entre los índices indican antisimetrización. Los paréntesis entre índices indican simetrización.

$\mathcal{M}$	Variedad lorentziana
$\mathcal{M}_+^4$	Variedad lorentziana de 4 dimensiones paracompacta conectada con un tensor métrico (desarrollo en tiempo futuro de una hipersuperficie de Cauchy).
$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$	Tensor de Riemann o Tensor de Curvatura.
$A_{;}u$	Diferenciación covariante está indicada por punto y coma ;.
$\frac{D}{DS}$	Diferenciación covariante a lo largo de una línea temporal.
$\mathcal{L}$	Diferenciación de Lie.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
$\delta(x)$	Delta de Dirac.
$\log(x)$	Logaritmo en base 10.
$\ln(x)$	Logaritmo neperiano.
D^j	La conexión de Levi-Civitta.
C^3	La hipersuperficie de Cauchy, donde se encuentra distribución inicial de la materia.
T^2	Superfice atrapada.

Para el modelo inflacionario consideramos que se halla en concordancia con las observaciones si el parámetro ξ toma un valor numérico del orden $\xi \approx 49000\sqrt{\lambda}$, siendo λ la constante de autointeracción de las partículas del campo consigo mismas.

M_p	Masa de Planck reducida.
ψ	Constante de acoplamiento no-mínima.

Para los extranjerismos, como *Cold Dark Matter* se usará fuente en cursiva.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Espaciotiempo: Teoría de la Relatividad General

La característica distintiva de la teoría de gravedad respecto a las demás interacciones fundamentales es que no es una teoría definida sobre el espaciotiempo, sino una teoría del espaciotiempo en sí. El fundamento físico de la Relatividad General es el principio de equivalencia, que establece que la gravedad se acopla uniformemente a todo tipo de densidad de energía. Matemáticamente el espaciotiempo se describe por una variedad $\mathcal{M}$ seudo-Riemanniana y el campo gravitacional por la métrica $g_{\mu\nu}$ sobre $\mathcal{M}$. La interacción gravitacional se manifiesta como una curvatura en el espaciotiempo.

Antes de introducir el sistema físico que nos interesa, el Lagrangiano del bosón de Higgs acoplado mínimimante a la gravedad, sería conveniente repasar, en forma sucinta, las ecuaciones que describen la Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein (1879-1955).

La interpretación geométrica de la gravedad como una curvatura del espaciotiempo de la Relatividad General sugiere que la acción gravitacional contiene información sobre la curvatura. La acción que se postula debe ser una funcional escalar. El escalar más simple que se puede formar del tensor de curvatura de Riemann, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, es el escalar de Ricci, R. El escalar de Ricci es una derivada de segundo orden del campo métrico $g_{\mu\nu}$.

Para un elemento general de volumen invariante $\sqrt{-g}d^4x$ la acción más simple está dada por

$$S_g = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \text{términos de superficie}, \tag{1.1}$$

con la constante cosmológica Λ y los términos de superficie que cancelaremos de ahora en más. Esta acción es denotada Einstein-Hilbert, y describe los grados de libertad geométricos. El contenido de la materia está codificado en la acción

$$S_m = \int d^4x\sqrt{-g}\mathscr{L}_m.$$

Definimos la acción total acoplada del campo gravitatorio y de materia como:

$$S = S_g + S_m. \tag{1.2}$$

La primera derivada funcional de (1.1) respecto al campo métrico $g_{\alpha\beta}(x)$ da por resultado:

$$\frac{\partial S_g(x)}{\partial g_{\alpha\beta}} = \int \frac{d^4(x)}{2\kappa}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha\beta}}(R-2\alpha) + \sqrt{-g}\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta}}. \tag{1.3}$$

Sabemos que la derivada de R respecto a la métrica es:

$$\frac{\partial R(x')}{\partial g_{\alpha\beta}(x)} = [-R^{\mu\nu} + \nabla^\nu\nabla^\mu - g^{\mu\nu}\Box]\partial^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\partial(x,x'). \tag{1.4}$$

Aplicando la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3) tenemos que:

$$\frac{\partial S_g[g(x')]}{\partial g_{\alpha\beta}(x)} = \int \frac{d^4(x)}{2\kappa}\sqrt{-g}(\frac{R}{2}g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} - \alpha g^{\mu\nu} + \nabla^\nu\nabla^\mu - g^{\mu\nu}\Box) = \partial^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\partial(x,x'). \tag{1.5}$$

Los últimos dos términos de la ecuación (1.5) son derivadas totales y pueden descartarse, dado que no aportan a las ecuaciones de movimiento. Integrando la función delta en la ecuación (1.5), la variación de la acción S de la ecuación (1.2):

$$\frac{\partial S}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(\frac{Rg^{\alpha\beta}}{2} - R^{\alpha\beta} - \Omega g^{\alpha\beta}) + \frac{\partial S_m}{g_{\alpha\beta}}. \tag{1.6}$$

Definimos el tensor energía-momento como:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial S_m}{\partial g_{\alpha\beta}}, \tag{1.7}$$

se obtiene entonces las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}R - \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \tag{1.8}$$

Definiendo el tensor de Einstein como $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}R - \Lambda g_{\alpha\beta}$, se tiene que la condición $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ da como resultado $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$.

1.2. Cosmología

La cosmología pretende explicar la estructura y dinámica del universo a gran escala. Sabemos que existen cuatro tipos de interacciones conocidas hasta ahora [1], de las cuales sólo el electromagnetismo y la gravedad tienen un alcance de alto rango. Las interacciones débil y fuerte son de corto rango, y no pueden ser responsables sobre el comportamiento a gran escala del universo. A pesar del largo alcance de la interacción electromagnética, esta no puede ser una fuerza dominante en un universo eléctricamente neutro. En consecuencia, la única interacción dominante es la gravedad, cuya fuente es la densidad de energía. De esta manera, una teoría del cosmos debe basarse en una teoría de gravedad, y la teoría más simple hasta el momento es la de Relatividad General mencionada en la sección 1.1, la cual es una teoría clásica de campos.

1.2.1. Modelo Cosmológico Estándar Clásico

En 1917 Einstein realiza la primera aplicación de la Teoría de la Relatividad General al universo como un todo. El problema que Einstein intentaba resolver al aplicar su teoría al universo era comprobar si el principio de Mach lograba ser compatible con su Teoría de la Gravitación.

El principio de Mach sostiene que el espacio, el tiempo y los efectos gravitacionales e inerciales se deben a la distribución de masas que hay en el universo. Einstein estaba interesado en mostrar que un universo con materia podía ser estable y su teoría podía dar un contexto general para entender la forma en la cual el universo se comportaba. Al hacer su aplicación, Einstein encuentra que si trata de describir el universo con su teoría no obtiene soluciones estáticas a menos que modifique sus ecuaciones con un nuevo término, que fue lo que se llamo el término de la constante cosmológica. Esto fue lo que le permitió introducir en la teoría de la gravitación una acción repulsiva del campo gravitacional sobre ciertas escalas espaciales. Einstein es capaz de reproducir un universo estático asumiendo una distribución homogénea e isotrópica de materia e introduciendo este término de la constante cosmológica que era el estado -según él consideraba- en que se encontraba el universo.

Al poco tiempo, Willem de Sitter (1872-1934), un astrónomo holandés, encuentra una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, lo que hoy llamamos el universo de Willem de Sitter, en este universo no hay materia. Einstein quedó perplejo por la posibilidad de la existencia de este tipo de soluciones, él pensaba que no era posible tener espacio y tiempo si no había materia.

Empezó una larga disputa entre Einstein y de Sitter, que se conoció como la controversia Einstein - de Sitter, de la cual surgiría la Cosmología Moderna.

A los pocos años, un matemático y meteorólogo ruso, Aleksandr Friedman (1988-1925), descubre soluciones de las ecuaciones de Einstein que son dinámicas, las famosas soluciones de Friedman, que describen un universo ya sea en expansión o en contracción. Friedman comunicó a Einstein sus resultados, y Einstein consideró que estos modelos de universos eran una especie de juego matemático que era posible dentro del contexto de sus ecuaciones, pero no pensó que esas soluciones describiesen un universo real.

Años después, las soluciones de Friedman fueron redescubiertas independientemente por George Lemaître (1894-1966), astrónomo y sacerdote belga: usando las matemáticas de la Relatividad General propone un universo en expansión sin centro, con galaxias aléjandose unas de otras y con un principio, un momento de la creación del universo.

George Lemaître propuso la idea de que el universo estaba en un estado dinámico de expansión y fue la primera persona en derivar que las galaxias se alejan con una velocidad proporcional a su distancia.

Aproximadamente por esas mismas épocas, observaciones del universo, en particular las realizadas por Edwin Hubble (1889-1953), mostraban que efectivamente las galaxias estaban alejándose unas de otras en una especie de movimiento de recesión, y el estado real del universo no era un estado estático como el que había postulado Einstein en 1917, sino un estado dinámico. Ese fue el descubrimiento de la expansión del universo, en 1928, que es uno de los grandes acontecimientos de la cosmología observacional.

Pocos años después, el astrónomo británico Arthur Eddington (1882-1944), el que había originalmente contrastado las primeras predicciones de la Relatividad General en el famoso eclipse en 1919, muestra que el modelo original de Einstein con constante cosmológica era inestable.

A partir de entonces, Einstein comprende que un estado estacionario para el universo no es posible, y en 1934 junto a de Sitter publican un artículo en el cual Einstein retira la constante cosmológica de sus ecuaciones, declarando que el haberla introducido fue el error más grande de su carrera científica.

En los años siguientes, la teoría de un universo en evolución adquiere cada vez más ímpetu. En 1946 George Gamow (1904-1968) postula la existencia de una posible radiación de fondo generada cuando el universo estaba en un estado extremadamente compacto. Por la misma época se propone una idea alternativa del universo en expansión: el modelo estacionario con creación continua de materia propugnada por Fred Hoyle (1915-2001), Hermann Bondi (1919-2005) y Thomas Gold (1920-2004) hacia 1946. Estas dos ideas nuevas, una que tiene un origen en el tiempo, y la otra, que asume un universo estacionario, pero que también está en expansión con una creación continua de materia, son los dos modelos cosmológicos alternativos que compiten entre sí durante unos veinte años. Esa competencia, históricamente culminó hacia mediados de los años sesenta, cuando se pudo establecer en forma fehaciente la existencia de una radicación de fondo cósmica que habría sido generada en una época temprana del universo; esa radiación sólo puede ser explicada en el marco de una teoría evolutiva como es la teoría llamada del Big Bang.

Este fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background*) fue predicho en 1948 por George Gamow (1904-1968) y Ralph Alpher (1921-2007). Ellos pudieron estimar que la temperatura del fondo de radiación de microondas era de 5 K, aunque dos años despúes, lo reestimaron a 2.8 K y calcularon que si el universo surgió de una gran explosión debería haber seguido una fase donde se formarían los átomos más ligeros. Producto de esta fase del universo debió quedar un remanente, una especie de radiación residual, lo que hoy conocemmos como CMB, una radiación que estaría viajando por el cosmos desde ese entonces.

En 1965, los ingenieros Penzias y Wilson, dieron por casualidad con esta radiación, sustentando la teoría del Big Bang (ver subsección 1.2.2).

Los Satélites como COBE (por sus siglas en inglés *Cosmic Background Explorer*) y Planck han estudiado con detalle este fondo de radiación, así como la Sonda WMAP (por sus siglas en inglés *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), nombrada así en honor de David Todd Wilkinson (1935-2002), miembro del equipo científico de la misión y pionero en el estudio de la radiación de fondo.

Se ha podido demostrar con el CMB la existencia de materia oscura en las galaxias. La hipótesis de materia oscura desempeña un papel central en la formación de estructuras y la evolución de galaxias y tiene efectos medibles en la anisotropía de la radiación de fondo cósmico de microondas. Todas estas pruebas sugieren que las galaxias, los cúmulos de galaxias y todo el universo contendría mucha más materia que la que interactúa con la radiación electromagnética.

Las mediciones precisas del CMB indican que la teoría cosmológica, que históricamente ha descrito mejor el universo, el Modelo Cosmológico Estándar Clásico (MCEC) - también conocida como Big Bang - está incompleta. En consecuencia, sumado a que este modelo no está exento de problemas, que o bien parecen insalvables dentro de su teoría, o se justifican con una explicación poco satisfactoria, no puede explicar en lo que concierne a estos cuatros detalles:

1. El problema del horizonte (también conocido como problema de homogeneidad o de causalidad): surge debido a la dificultad de explicar la homogeneidad a gran escala observada de regiones del espacio desconectadas causalmente en ausencia de un mecanismo que establezca las mismas condiciones iniciales en todas partes, Wolfgang Rindler lo señaló por primera vez en 1956.

2. El universo es uniforme: en un universo perfectamente uniforme no se habrían formado estructuras como galaxias, estrellas o planetas. Un universo como que el que vivimos

requiere pequeñas fluctuaciones que tendrían que estar patentes en el CMB. ¿Qué fue lo que produjo las fluctuaciones? ¿En qué momento de la historia del universo, este dejó de ser perfectamente simétrico y uniforme?

3. El problema de planitud (problema de vejez): el problema fue mencionado por primera vez por Robert Dicke en 1969. Según la Relatividad General, existen tres geometrías posibles para el universo. Puede que se comporte como una esfera, tendría entonces una extensión terminada y lo calificaríamos de cerrado. Es posible que el Universo sea similar a una silla de caballo, sería entonces infinito y lo designaríamos como abierto. O también, la geometría del universo podría ser similar a la de un plano, sería también infinito, pero hablaríamos de un universo plano o euclídeo. Nuestro conocimiento de la curvatura viene del análisis de la radiación fósil. Las observaciones del satélite WMAP, lanzado en 2001, mostraron que la curvatura del Universo es cero con una precisión cercana al 1 %. El Universo es, así pues, o plano o casi plano. La cuestión consiste en saber por qué. No hay en efecto razón para que la curvatura del Universo no sea ampliamente positiva o negativa.

4. Ausencia de monopolos magnéticos: las teorías de la gran unificación predicen defectos topológicos en el espacio que se manifestarían como monopolos magnéticos encontrándose en el espacio con una densidad mucho mayor a la observada. De hecho, hasta ahora no se ha dado con ningún monopolo.

Asimismo, las mediciones del corrimiento al rojo de las supernovas indican que la expansión del universo se está acelerando, y esa aceleración se la atribuye a la energía oscura.

Por ello, este MCEC se ha ampliado en las últimas décadas, y devino en el Modelo Cosmológico Estándar, también conocido como el modelo ΛCDM (*Lambda Cold Dark Matter*).

1.2.2. Fondo cosmológico de microondas

El Fondo cosmológico de microondas -*Cosmic Microwave Background* (CMB) - fue descubierto en 1965 por los ingenieros Arno Penzias (1933) y Robert Wilson (1936) por casualidad. Ellos construyeron una antena de microondas y detectaron que la antena siempre captaba un ruido de fondo. Los que identificaron la naturaleza de ese ruido fueron Robert Henry Dicke (1916-1997), Philip James Peebles (1935), Peter G. Roll (1933-2020) y David T. Wilkinson (1935-2002) que comprobaron que provenía del universo primitivo.

Esto dio sustento a la Teoría del Big Bang, que competía con otras teorías, principalmente con el Modelo del Estado Estacionario del universo que comentamos anteriormente.

El universo está lleno de un gas de fotones, es lo que se llama CMB. Estos fotones no fueron emitidos por la materia luminosa sino que provienen del universo primitivo, y son anteriores a la época de formación de estrellas y galaxias.

Por supuesto, también hay fotones de estrellas y galaxias, pero ocurre que el 99.97 % de la densidad de energía electromagnética en el universo se debe al CMB. Cada lugar del universo es alcanzado por fotones de ese fondo cósmico de microondas desde todas las direcciones y tiene un espectro de frecuencias que es el espectro de un cuerpo negro a la temperatura de 2.725 K. Esa radiación que llega a cada punto del universo desde todas las direcciones posee además una alta isotropía porque desde todas las direcciones el espectro se ve con esta temperatura, salvo por pequeñas fluctuaciones que empiezan en la siguiente cifra significativa.

Hoy en día la materia domina sobre la radiación, pero hacia el pasado debió dominar la radiación. La temperatura del gas de fotones aumenta hacia el pasado y disminuye hacia el futuro. A medida que el universo se expande, el gas de fotones se enfría y la materia también lo hace. En consecuencia, debió haber una época en el pasado en la que la temperatura del gas de fotones era de 3000 K; a esa temperatura, la cantidad de fotones que posean una energía de 13,6 eV o más, alcanza para ionizar todos los átomos de hidrógeno del universo.

Entonces, si vamos hacia al pasado hasta llegar a la temperatura de 3000 K para el gas de fotones, podemos decir que, desde ese momento y más atrás, los atómos no existían como tales, estaban totalmente ionizados: los electrones estaban libres.

Esto es así debido a que el universo contiene muchos más fotones que protones: hoy en día hay entre 400 y 500 fotones/cm^3, pero < 1 protón/m^3 (según resulta del valor de $\Omega^{\text{barión}}$). A temperaturas mayores que 3000 K, la materia estaba totalmente ionizada. En esas condiciones, el universo era opaco a la propagación de la luz porque los fotones eran dispersados por los electrones libres y no podían viajar grandes distancias.

En aquella etapa previa al desacople de los fotones y la materia, era donde estaban acoplados, por medio del Scattering de Thomson, los fotones con los electrones. El universo previo al desacople era tan opaco como el interior de una estrella; si volvemos hacia el presente cuando el universo se enfrió por debajo de los 3000 K, se desacoplaron los átomos de hidrógeno y helio y los fotones comenzaron a viajar libremente. Los fotones no tenían suficiente energía para impedir que los protones capturen electrones para formar átomos de hidrógeno y también, aunque en menor proporción, átomos de helio.

Antes del desacople, la materia tendía a aglutinarse gravitatoriamente, pero por otro lado, la presión que generaba la energía de los fotones, se lo impedía y se producían oscilaciones en la densidades de la materia y la radiación. Por eso la CMB no es totalmente isótropa: tiene pequeñas anisotropías.

1.2.3. Modelo Cosmológico Estándar ΛCDM

A mediados de 1960, la teoría del Big Bang se fue asentando cada vez más y el gran desafío eran explicar cómo se formó la estructura que se observaba en el universo, y la gran modificación que se introdujo fue la idea de que pudo haber un período de expansión acelerado: un período de expansión inflacionario en el universo temprano. Esta hipótesis fue introducida por Alexei Starobinsky (1948) y por Alan Guth (1947) en 1980, la llamada "inflación cósmica".

Se sucedieron algunas modificaciones muy importantes debido a las observaciones que establecieron que el estado del universo parecía ser de una expansión que no sólo va decelerando por la fuerza atractiva de la gravedad, sino una expansión que se va acelerando. Poder explicar cómo esta aceleración es posible, llevó a la reintroducción de la constante cosmológica Λ y a la formulación de la versión final del modelo ΛCDM (*Lambda Cold Dark Matter*), que es el Modelo Estándar de la cosmología actual.

En resumen, el Modelo Cosmológico ΛCDM es una ampliación del MCEC de las décadas de 1960, 1970 y 1980 y surge del descubrimiento de la expansión acelerada del universo en 1997. Es un modelo cosmológico para el universo en evolución, para un universo dinámico, que pasa por una fase de expansión primero desacelerada y después por una fase de expansión acelerada.

Este modelo se logra introduciendo las modificaciones mínimas a las teorías vigentes tanto para la gravitación como para la física de partículas. Es un modelo que incorpora la Relatividad General como teoría de la gravitación, y la teoría cuántica de campos como teoría de la materia, con las modificaciones mínimas necesarias para dar cuenta del estado observacional que se descubrió a partir de 1997.

La Relatividad General se modifica de la misma manera que la había modificado Einstein en 1917 introduciendo en las ecuaciones de campo un término con constante cosmológica Λ. El efecto de introducir este término en las ecuaciones de Einstein es dotar a la gravitación de la posibilidad de actuar en forma repulsiva sobre ciertas escalas espaciales muy grandes.

Cuando el universo es pequeño, en etapas tempranas de su evolución domina la fuerza atractiva de la gravedad, y en etapas posteriores, cuando la densidad de energía del universo cae significamente, domina la acción repulsiva de la gravitación, lo cual da lugar a una aceleración del universo.

Por otra parte, desde 1980, a través de los trabajos de Vera Florence Rubin (1928-2016) sabemos que además de la materia luminosa, tiene que haber una gran cantidad de materia que no emite luz y que llamamos materia oscura. Se infirió esto por la forma en que se movían los objetos en los halos galácticos. Al observar la relación entre la velocidad del movimiento del objeto astrónomico y el radio al centro de la galaxia, se llegó a notar que el objeto estaba moviéndose en un campo gravitatorio del cual no se podía explicar con la materia luminosa de la galaxia, sino que tenía que haber mucha más materia. Esa observación se verificó en estructuras más grandes, en cúmulos de galaxias, dando por resultado que debería haber mucha más materia que la materia luminosa existente. También los efectos de lente gravitatoria, la deflexión de la luz, debido a la materia no visible, confirmaron la existencia de materia oscura en gran cantidad. Esto implica que el 95 % de la materia en el universo es materia oscura. Lo que ocurre con el problema de la materia oscura es que es mayormente de naturaleza desconocida. Una parte de la materia oscura es materia ordinaria, materia bariónica, que se encuentra distribuida en agujeros negros, enanas blancas, protoestrellas como las enanas marrones, planetas, etc. La materia bariónica está constituida, justamente, por los bariones, que son una familia de partículas subatómicas formadas por tres quarks. Los más representativos, por formar el núcleo del átomo, son el neutrón y el protón; pero también existe otro gran número de bariones, aunque todos estos son inestables.

Actualmente, lo que sabemos es que toda la cantidad de materia existente no podría ser bariónica. Eso se conoce a raíz de que en algún momento de la historia del universo, se formaron los núcleos atómicos; a ese proceso lo denominamos nucleosíntesis (el proceso por el cual se crearon los elementos químicos en el universo primitivo); antes de ese momento, los elementos que forman los núcleos atómicos hoy en día, los protones y los neutrones, estaban separados. A medida que el universo se fue expandiendo, hubo un desbalance que hizo que distintos procesos que se mantenían en equilibro, finalmente terminaron dando la formación de núcleos atómicos. Si toda esa materia fuera de origen bariónico, deberían haberse formado mucho más núcleos de deuterio, deuterones, de los que se observan en el universo. En consecuencia, para dar una explicación a la cantidad de deuterio existente, la mayor parte de esta materia oscura debería ser de un origen distinto al de la materia bariónica. Para que esto no suceda el 85 %, de la materia del universo debería ser materia oscura no bariónica. La única contribución conocida a este 85 % es la de los neutrinos, pero es insuficiente para explicar las mediciones obtenidas, por lo que tenemos aún en día una cuestión abierta.

En consecuencia, la otra modificación que introduce el modelo ΛCDM, es el contenido de materia del universo; para poder dar cuenta de esa dinámica observada del universo, se debe agregar una componente nueva en la fuente del campo gravitacional, que es una componente de materia oscura. Es una materia cuyo origen no se especifica en el modelo, pero es una materia que interacciona en forma gravitacional. Es una hipótesis muy fuerte ya que postula una nueva componente en la ontología del mundo: hay una cierta componente del mundo cuyo naturaleza no conocemos.

1.3. El Big Bang y las fluctuaciones cuánticas

El Modelo ΛCDM es un modelo que no puede deshacerse de la presencia del Big Bang. Por Big Bang se entiende una singularidad, una incapacidad de la teoría para predecir qué es lo que sucedió en el comienzo de la expansión del universo; la razón por la cual la teoría no puede decir nada acerca del comienzo del universo es porque el espaciotiempo deja de estar definido, no es un momento en el tiempo, no es un lugar. El Big Bang es una expresión que utilizamos para decir que las ecuaciones de Einstein no son válidas más en un cierto rango de aplicación de la teoría. La teoría predice su propia falla al intentar ser extrapolada a densidades extremadamente grandes.

Este modelo con ciertas hipótesis respecto a la densidad y las condiciones de expansión actuales del universo obtiene una singularidad al comienzo de la expansión, por lo que no podemos obtener del modelo proposiciones de cómo se originó el universo. Lo que sí se puede obtener es información sobre cómo se formó la estructura del universo una vez que comenzó la expansión, y aquí es donde introducimos las fluctuaciones cuánticas.

Si poco tiempo después de que comenzó la expansión existía un campo con fluctuaciones cuánticas, entonces esas fluctuaciones habrían sido magnificadas por la expansión acelerada inicial del universo, conocido como el período inflacionario. En esa magnificación se habrían formado las primeras semillas de lo que después sería la estructura del universo.

1.4. Modelo Estándar de Partículas Elementales

El Modelo Estándar de Partículas es un modelo basado en la mecánica cuántica de campos para explicar las interacciones existentes entre partículas elementales. Postula la existencia de dos tipos de partículas indivisibles de la materia ordinaria: quarks y leptones, que en las proporciones adecuadas pueden constituir cualquier átomo y por lo tanto cualquier tipo de materia ordinaria en el universo. Postula también la existencia de un tipo de partícula, los bosones de gauge, que actúan como portadores de las interacciones fundamentales. Los bosones de gauge Z y W son portadores de la interacción débil; el fotón, es portador de la interacción electromagnética; y el gluón, portador de la interacción fuerte. Otro bosón, el bosón de Higgs, es portador de la masa de las partículas elementales. La gravedad, sin embargo, no se puede explicar de la misma forma, debido a que la existencia de un bosón portador de dicha fuerza, el hipotético "gravitón", no está confirmada.

1.4.1. Modelo de Inflación de Higgs

El hecho de que nuestro universo puede considerarse aproximadamente plano, homógeneo e isótropo se considera a menudo una indicación fuerte que el Modelo Estándar de Partículas Elementales no se halla completo.

Desde una perspectiva teórica, las escalas experimentales cubiertas hasta ahora se describen principalmente por los modelos que mencionamos anteriormente, que resumiendo son la Teoría de la Relatividad General, el Modelo Cosmológico ΛCDM, el Modelo Estándar de Partículas, y el que describiremos a continuación, que es el Modelo Inflacionario de Higgs.

Como mencionamos anteriormente, la cosmología pretende explicar la estructura y dinámica del universo a gran escala. En la actualidad, esta cimenta sus bases en explicar la expansión del universo, el fondo cósmico de microondas (CMB *Cosmic Microwave Brackground*) y las abundancias de elementos ligeros en el universo. Por ello, este MCEC se ha ampliado en las últimas décadas, en el Modelo Cosmológico Estándar, también conocido como modelo ΛCDM.

Una de estas extensiones del modelo clásico es el escenario inflacionario, ya que propone una solución a algunos de los principales problemas del MCEC, relacionados sobre todo con el Big Bang (ver la sección 1.2.1 problema de horizonte, etc). Los modelos inflacionarios proponen una etapa de expansión extraordinariamente rápida del universo poco después del Big Bang, que es capaz de dejar huella en el CMB.

Para resolver este problema del Big Bang, o sea el problema del MCEC, se crean los modelos inflacionarios, donde este modelo es precedido por otra era ya no dominada por la radiación. Una era anterior a la existencia misma de los fotones, donde lo que dominaba era un campo escalar cuántico que estaba en un estado inestable y cuya energía oficiaba de una suerte de constante cosmológica pero era el único constituyente, así que era el dominante porque era único y esa energía de este campo escalar cuántico que era un valor inestable y estaba en un punto máximo de un potencial, o a lo sumo en un punto de equilibro diferente, producía una expansión exponencial del universo, y en la expansión exponencial del universo los diferentes eventos del universo se empiezan a interconectar todos causalmente. El campo escalar cuántico finalmente decae de ese estado inestable que tenía y en ese decaimiento transforma su energía en partículas y radiación dando comienzo a una era dominada por la radiación, que después va a ser dominada por la materia, va a dar lugar al modelo estándar que conocemos hoy.

Entonces, lo que se hizo fue crear una etapa anterior a la que propone el MCEC para explicar por qué esos fotones, que van a crearse cuando decaiga el campo, van a estar conectados causalmente.

Los modelos inflacionarios dan respuesta también al problema de la planitud del universo. El cociente entre la densidad de energía ρ medida observacionalmente y la densidad crítica ρ_c es el parámetro de densidad Ω. En el modelo estándar la condición inicial $\Omega_i = 1$ tiende a perderse durante la evolución del universo. Por lo tanto, se requiere de un ajuste muy fino de condiciones iniciales para que en nuestra época tengamos $\Omega_{oi} = 1$. En cambio durante la era inflacionaria el universo evoluciona hacia la planitud dejando una condición inicial muy precisa para el comienzo de la era estándar.

En función de los estudios vigentes podemos considerar la posibilidad de que el bosón de Higgs del Modelo Estándar de Partículas Elementales pueda generar inflación primordial del tipo rodadura lenta, lo que resolvería los problemas clásicos de la cosmología estándar. El requisito crucial para hacer viable esta posibilidad, es que el campo escalar de Higgs presente un tipo particular de acoplamiento no mínimo a la gravedad.

1.5. Teoremas de Singularidades de Penrose y Hawking

Los Teoremas de Singularidades de Roger Penrose (1931) y Stephen William Hawking (1942-2018) predicen la ocurriencia de singularidades de colapso gravitacional y cosmológicas bajo ciertas condiciones de energía y estructura del espaciotiempo. El primer trabajo fue publicado por Roger Penrose en 1965, y estudia el colapso gravitacional relajando condiciones de simetría. El segundo trabajo fue publicado por Stephen Hawking en 1966 que introduciéndose en el estudio de la estructura causal analliza la ocurrencia de singularidades a nivel cosmológico.

Finalmente, en 1970, Hawking y Penrose centralizan un teorema con los resultados obtenidos hasta el momento, estableciendo que ningún espaciotiempo $\mathcal{M}$ puede satisfacer en simultáneo: que la variedad $\mathcal{M}$ no contenga curvas temporales cerradas, que toda geodésica causal inextensible en $\mathcal{M}$ contenga un par de puntos conjugados y que exista un conjunto futuro (o pasado) atrapado S, $S \subset \mathcal{M}$.

Tanto los resultados como las técnicas usadas en la demostración de los Teoremas de Singularidades, que involucran a la Teoría Causal -que analizamos en la presente tesis- marcan el origen de una nueva etapa en la Teoría de la Relatividad General.

1.6. Motivación y organización de la tesis

Estudiamos la generalización del Teorema de Singularidades de Hawking para el caso de la violación de la condición fuerte de energía, considerando la presencia de un campo escalar. Una situación interesante es el escenario del modelo de inflación de Higgs, y consideraremos el caso en que se halla mínimamente acoplado con la gravedad.

La tesis está organizada de la siguiente forma: en el capítulo 2 damos una breve reseña histórica de las singularidades y analizamos el concepto de las mismas. También, estudiamos las curvas en el espaciotiempo, las condiciones de energía genéricas y la Teoría Causal con definiciones claves para la comprensión y estudio de las singularidades. En el capítulo 3 estudiamos la singularidad aparente de Landau-Raychaudhuri y la ecuación de Raychaudhuri. Comenzamos con el estudio del sistema de referencia síncrono y la singularidad aparente de Landau-Raychaudhuri, luego el estudio geométrico de la completitud geodésica y los puntos conjugados. Asimismo analizamos, la primera y segunda variación de arco de las geodésicas.

En los capítulos 4 y 5 describimos el Teorema de Singularidades Cosmológicas y la estructura matemática que nos permitará su demostración. Contiene uno de los aportes de Landau que estudiamos en esta tesis: la demostración que la singularidad aparente de Landau-Raychaudhuri es una singularidad real. Específicamente, en el capítulo 4 abordamos el Teorema de Singularidades Cosmológicas en la teoría de la Relatividad General de Hawking. Mientras que en el capítulo 5 estudiamos las singularidades en el modelo inflacionario de Higgs aplicando la ecuación de Raychaudhuri y resolviendo ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, las ecuaciones de Riccati. Por último, en el capítulo 6 concluimos el estudio de la singularidad aparente en el modelo inflacionario. Por completitud, se incluye un apéndice en el cual se explica la transformación conforme.

Capítulo 2

Singularidades

2.1. Reseña sobre las singularidades

Las condiciones en las que los modelos cosmológicos se originan o terminan en una singularidad, proporcionaron un tema activo de investigación en las décadas anteriores a los avances realizados por Roger Penrose [2] y Stephen Hawking [3]. Algunos de los resultados obtenidos fueron:

1. La solución exacta para las ecuaciones de campo de Einstein para un cuerpo esférico, conocida como la métrica de Schwarzchild (1915) [4].
2. La solución exacta para las ecuaciones de campos de Einsten para un universo isótropo y homogéneo, métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [5, 6, 7, 8, 9, 10].
3. El desarrollo de la solución para una estrella que colapsa, con la hipotésis de distribución de la masa de forma simetricamente esférica, realizado por Oppenhaimer y Snyder (1939) [11].
4. La ecuación geométrica de Raychaudhury: fue precursor y representó un paso decisivo hacia adelante que contribuyó a la demostración de los teoremas de singularidades, porque pudo analizar modelos no homogéneos utilizando la ecuación que ahora lleva su nombre (1955) [12].

El descubrimiento de los cuásares (fuentes de radio cuasiestelares) en la década de 1960 impulsó al estudio del colapso gravitacional, entendiendo que la posible emisión intensa de energía de los mismos sería en forma de radiación gravitacional. Para llevar a cabo el estudio de dicha radiación se requieren al menos estructuras con cuadrupolos, y las soluciones exactas de colapso conocidas hasta ese momento eran únicamente las que respondían a altas simetrías.

Ante esta situación la pregunta natural qué surge es si la singularidad es una consecuencia de la alta simetría.

Con la publicación de Roger Penrose en 1965 [2] se produce un hito sobre el colapso gravitacional y la aparición inevitable de una singularidad junto a algunos de los sucesos posteriores:

1. Singularidades cosmólogicas de Hawking en 1966 [3, 13].
2. Primer intento de definición de Singularidad, proporcionado por Robert Geroch en 1968 [14].
3. Singularidades cosmólogicas y de colapso gravitacional, por Hawking y Penrose en 1970 [15].

Roger Penrose estudia el colapso gravitacional, inspirado en resultados anteriores donde había simetría, como aquello estudiado por Julius Robert Oppenheimer y Hartland Sweet Snyder [11], pero esta vez sobre el caso de que no existiera simetría esférica, llegando a la conclusión de que independientemente de la simetría, la singularidad es inevitable [2]. Su teorema se resume de la siguiente forma:

Teorema 2.1 (Penrose)**.** *Las siguientes cinco hipótesis son inconsistentes:*

1. *M_+^4 es una variedad de Riemann no singular (+ - - -) para los cuales los semiconos nulos forman dos sistemas separados (pasado y futuro).*
2. *Cada geodésica nula en M_+^4 puede extenderse al futuro a valores de parámetros afines arbitrariamente grandes (completitud nula).*
3. *Cada geodésica temporal o nula en M_+^4 puede extenderse hasta el pasado hasta que se encuentre con C^3(condición de la hipersuperficie de Cauchy).*
4. *En cada punto de M_+^4, todos los vectores temporal t^u cumplen $-R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}t^{\mu\nu} \geq 0$ (Energía local no negativa, Condición Nula de Energía Null Energy Condition NEC)*
5. *Existe una superficie atrapada T^2 en M_+^4.*

Penrose demuestra que para el colapso gravitacional, aún sin simetrías, sí existe una superficie atrapada. Esto implica que las singularidades se desarrollan necesariamente, y también demuestra que la hipersuperficie de Cauchy, donde se distribuye la materia de forma inicial, no es compacta. Si no se permitiera que ocurrieran singularidades físicas reales se cumpliría al menos uno de los siguientes sucesos:

- Habría presencia de energía negativa local.
- Se violarían las ecuaciones de Einstein.

- La variedad M_+^4 sería incompleta.

- El concepto de espaciotiempo perdería su significado en muy altos valores de curvatura.

En el nivel técnico, este avance fue logrado por el desarrollo significativo del aparato geométrico. En el nivel físico, sin embargo, la idea clave fue reemplazar los modelos de materia particulares por condiciones de energía genéricas, que implican que la congruencia de geodésicas converjan en puntos focales.

Hawking, inspirado en este primer teorema de singularidad, se introduce en el estudio de la estructura causal realizando así el análisis de la ocurrencia de singularidades a nivel cosmológico [3], también buscando una respuesta a la pregunta que plasma Penrose, inspirando en el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que también consideraba altas simetrías. Asimismo, se pregunta qué sucede con la existencia de hipersuperficies de Cauchy que son compactas, y si existe una hipersuperficie de Cauchy global que posea el universo. Hawking demuestra que las singularidades serán inevitables si se cumplen los siguientes requisitos:

- Las ecuaciones de Einstein permanecen válidas.

- La materia tiene propiedades normales.

- El universo satisface ciertas condiciones globales razonables, lo que se conoce como Teoría Causal.

En 1970 Hawking y Penrose centralizan un teorema con los resultados obtenidos hasta el momento, estableciendo que ningún espaciotiempo $\mathcal{M}$ puede satisfacer los siguientes tres requisitos simultáneamente:

1. La variedad $\mathcal{M}$ no contiene curvas temporales cerradas.

2. Toda geodésica causal inextensible en $\mathcal{M}$ contiene un par de puntos conjugados.

3. Existe un conjunto futuro (o pasado) atrapado S, $S \subset \mathcal{M}$.

Para el caso de estudio de la geodésica causal inextensible que contiene un par de puntos conjugados se requiere analizar la completitud de geodésicas nulas, el concepto de inxtensibilidad, las condiciones de energía y la estructura causal, también denominada el supuesto de generalidad. Esto es debido a que se solicita que se cumplan determinadas condiciones que abarcan estos ejes.

En consecuencia deberemos estudiar el comportamiento de las geodésicas, las condiciones de energía, supuestos de generalidad en el espaciotiempo y herramientas topológicas y geométricas para analizar las singularidades, sus teoremas y su aplicación a un sistema físico.

2.2. ¿Qué es una singularidad?

En el inicio del estudio de las singularidades en la década de 1960 Penrose, Geroch y Hawking las trataban como singularidades espaciotemporales [2, 3, 16, 15]. En la actualidad, nos referimos simplemente a singularidades, esto se debe a que antes intuitivamente se pensaba que la singularidad era una posición donde la curvatura se hacía infinitamente grande o existía algún comportamiento patológico de la métrica.

En todas las teorías físicas, excepto en la Relatividad General, sabemos que la estructura métrica del espaciotiempo y la variedad se conocen previamente. Sabemos el dónde y el cuándo de todos los eventos espaciotemporales y nuestra tarea es determinar los valores de la cantidades físicas en estos eventos.

Si una cantidad física es infinita o indefinida en un punto del espaciotiempo, se dice que hay una singularidad en ese punto (e.g. podemos dar un significado preciso al enunciado de que la solución de Coulomb de las ecuaciones de Maxwell en la Teoría de la Relatividad Especial tome una singularidad en los eventos etiquetados por $r = 0$) [17].

Sin embargo, la situación en la Teoría de la Relatividad General es diferente: estamos tratando de resolver para la variedad y la estructura métrica del espaciotiempo en sí mismo.

La noción de un evento (t, x_1, x_2, x_3) tiene sentido físico sólo cuando se define una variedad $\mathcal{M}$ y una métrica a su alrededor. El enfoque más natural en Relatividad General, es que el espaciotiempo consiste de una variedad $\mathcal{M}$ y una métrica $g_{\mu\nu}$ definida en todas partes de $\mathcal{M}$.

Entonces, la singularidad del Big Bang de la solución del modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, FLRW, no se considera que forme parte de la variedad espaciotemporal; no es un lugar o un tiempo. Análogamente, sólo en la región $r > 0$ se incorpora en el espaciotiempo de Schwarzschild; distinto al caso de Coulomb en la Relatividad Especial, la singularidad en $r = 0$ no es un lugar.

Sobre la base de los ejemplos de los modelos de FLRW y Schwarzshchild, podríamos esperar que todavía se pudiera definir la noción de un límite singular del espaciotiempo.

La idea aquí sería agregar puntos que representen la singularidad (e.g. los puntos $\tau = 0$ en el espaciotiempo de Robertson-Walker y $r = 0$ en el espaciotiempo de Schwarzschild) y definir un espacio topológico o quizás una variedad con estructura de límite en los puntos de colección resultantes (una variedad con frontera). Esto nos permitirá hablar en términos precisos de la singularidad como un lugar, aun si la métrica no está definida ahí. Sin embargo, mientras que esto se puede hacer "a mano" en algunos pocos casos como los espaciotiempo de FLRW o Schwarzschild, surgen muchas dificultades si uno trata de definir un límite singular.

En primer lugar, las definiciones basadas en expresiones de componentes de coordenadas para la métrica, no tienen posibilidades de éxito como una fórmula general ya que la estructura aparente de una singularidad se puede alterar fácilmente mediante una transformación de coordenadas (donde no hay una verdadera singularidad presente).

Han habido varios intentos para definir un borde singular, pero todos llevan a producir fronteras con propiedades topológicas patológicas.

Por lo que al presente, no hay una noción general completamente satisfactoria de la existencia del borde de una singularidad. Hasta que exista una definición que la pueda describir, tenemos que abandonar la idea de una singularidad como un lugar. Por supuesto, nuestra incapacidad para describir una singularidad como un lugar en términos matemáticos precisos no disminuye de ninguna manera el hecho de que las singularidades existen, digamos, en los espaciotiempos tales como FLRW (cosmológico) y Schwarzschild (colapso gravitacional). Existen varias formas de caracterizar una singularidad:

1. Notar que la curvatura diverge en el espaciotiempo en el que estamos trabajando, i.e $\lim \tau \to 0$ en el modelo de FLRW y $\lim r \to 0$ en el modelo de Schwarzchild.

2. Comportamiento patológico de la métrica espaciotemporal.

Podemos notar que para la primera forma encontramos una serie de dificultades si uno intenta usar la noción de que la curvatura diverge como un criterio general para las singularidades.

En primer lugar, la curvatura se describe por un campo tensorial $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$, y si usamos el mal comportamiento del tensor de Riemannn o de sus derivadas como un criterio para identificar singularidades podríamos calificar singularidades que no lo son, ya que la divergencia podría provenir del mal comportamiento de las bases coordenadas más que por la curvatura en sí (singularidad de la carta).

Para evitar este problema, podemos examinar escalares formados a partir de la curvatura como el escalar de Ricci $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, el escalar de Kretschmann $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, y los escalares similares formados por expresiones polinómicas en derivadas del tensor de curvatura.

Sin embargo, aun si el valor de algún escalar de la curvatura no es acotado en el espaciotiempo, la curvatura podría divergir solamente si las coordenadas divergen; en ese caso, no podemos afirmar que existe una singularidad en el espaciotiempo.

También podemos tener casos en que todos los escalares relacionados con la curvatura se anulan, pero el tensor de curvatura puede seguir siendo aún singular. Más aún, los espaciotiempos pueden ser singulares sin ningún mal comportamiento del tensor de curvatura.

La segunda forma, que implicaría establecer todos los posibles comportamientos patológicos de la métrica espacio temporal, es una tarea sin esperanza por la infinita cantidad de variedades de posibles comportamientos patológicos.

Entonces, ¿cómo caracterizamos una singularidad? Por lejos, la idea más satisfactoria es usar "huecos" que se dejan luego de remover singularidades como un criterio de su presencia. Estos "huecos" podrían detectarse por el hecho de que habrá geodésicas que tienen una longitud afín finita, es decir, específicamente deberían existir geodésicas que son inextensibles (*end-less* para Penrose en [18]) en al menos una dirección, futura o pasada, pero que tengan un rango finito de parámetro afín. A tales geodésicas se las denomina incompletas.

Entonces podemos definir un espaciotiempo singular, o sea que posee singularidades, si posee al menos una geodésica incompleta (en el caso de la variedad con métrica riemanniana, la completitud geodésica es equivalente a la completitud de Cauchy [19]). Podemos clasificar a la singularidad representada por una geodésica incompleta por algunos de los siguientes tipos:

- Tipo 1, "Singularidad manifestada por el escalar de curvatura": escalar construido polinomialmente de $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$ y sus derivadas covariantes divergen en las geodésicas.
- Tipo 2, "Singularidad manifestada por la propagación paralela de la curvatura" : no existe un escalar que diverja, pero sí una componente del tensor $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$ o una derivada covariante que diverge en la geodésica.
- Tipo 3, "Singularidad de no - curvatura": no diverge ningún escalar de la curvatura o componente de la curvatura.

Muchos ejemplos pueden surgir de la falla de la incompletitud de las geodésicas que corresponden a la noción intuitiva de quitar "huecos" singulares. En un espaciotiempo compacto, cada secuencia de puntos tiene un punto de acumulación, entonces en un sentido intuitivo fuerte, no puede tener "huecos". Aun así existen espaciotiempos compactos que son geodésicamente incompletos. Es interesante ver el ejemplo dado por Misner en 1963 [20].

Esta falla de la incompletitud de las geodésicas de corresponder propiamente a la existencia de un "hueco", está por supuesto relacionada muy cercanamente con la dificultad anteriormente discutida de "defender" una singularidad como un lugar.

Sin embargo, hay una patología física importante en cualquier espaciotiempo que es geodésicamente incompleto tanto temporal o nulamente: en tal espaciotiempo es posible al menos que una partícula libre o fotón termine su existencia dentro de un tiempo finito (parámetro afín) o haya empezado su existencia en un tiempo finito anterior. Entonces, aun cuando no tengamos completamente una noción general de las singularidades, estaría justificado considerar a esos espaciotiempos como físicamente singulares. Es esta propiedad que se demuestra a través de los teoremas de las singularidades en una amplia gama de espaciotiempos: dada la existencia de una geodésica causal incompleta, quisiéramos saber más sobre el carácter de la singularidad. Si es una singularidad que se manifiesta por la curvatura (ya sea del tipo 1 o tipo 2) o si es una singularidad que no se manifiesta por la curvatura (tipo 3) [17].

Desafortunadamente los teoremas que estudiaremos no dan información sobre la naturaleza de la singularidad de la cual prueban su existencia. Aun así, aclaramos que en el trabajo de Hawking y Penrose de 1970 definen un teorema de singularidad que contiene algo de información sobre la naturaleza de las singularidades en comparación al corolario [15].

Usar invariantes escalares tampoco sirve, ya que es posible que tiendan a infinito en un espacio no singular, o que se anulen en un espacio singular (cf. Geroch [16] y Senovilla [21]).

Entonces, para desarrollar los teoremas de singularidad deberemos centrarnos en tres ejes fundamentales que estamos describiendo a lo largo de la tesis. Un eje son las ecuaciones de Einstein (vistas en la sección 1.1) -también pueden aplicarse estos teoremas a otras teorías, como la Teoría de Brans-Dicke, si se llevan las ecuaciones a la forma de las de Einstein- considerando con sumo detalle y enfásis los conceptos de curvas que veremos en la sección 2.3 y el concepto de geodésicas y su comportamiento, como así también los puntos conjugados o focales que juegan un papel clave. El segundo eje a estudiar son las condiciones de energía genéricas que debe satisfacer la materia (ver sección 2.4). El tercer y último eje abarca las condiciones de causalidad del espaciotiempo (ver sección 2.5) que implican el desarrollo de la teoría causal, el estudio de las curvas causales y de las hipersuperficies topológicas como la hipersuperficie de Cauchy.

2.3. Curvas en espaciotiempos

Una curva suave $\mathcal{C}$ en una variedad $\mathcal{M}$ es un mapa C^∞ de $\mathcal{R}$ (o un intervalo de $\mathcal{R}$) en $\mathcal{M}$, $\mathcal{C} : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$. En cada punto $p \in \mathcal{M}$ que se encuentra en la curva $\mathcal{C}$, podemos asociar a la curva $\mathcal{C}$ con un vector tangente $T \in \mathcal{V}_p$ de la siguiente manera: para cada función $f \in \mathcal{F}$ definimos $\mathcal{T}(f)$ como la derivada de la función $f \circ \mathcal{C}$: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ evaluada en p, i.e., $T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathcal{C})$.

Las curvas son objetos geómetricos independientes de la base coordenada o carta. Las ecuaciones paramétricas de la representación de la curva en $\mathcal{R}^n$ son denotadas como $x^i(\lambda)$ y para cada carta que elijamos tendremos las ecuaciones paramétricas correspondientes a la misma.

Dada una curva diferenciable, podemos clasificarla según sea su vector tangente como:

- Cronológica o temporal (*time like*), si su vector tangente es temporal en todo punto de la misma.
- Nula o de tipo luz (*null like*), si su vector tangente es de tipo luz en todo punto de la misma.
- Espacial (*space like*), si su vector tangente es espacial en todo punto de la misma.

Si el espaciotiempo es orientable en el tiempo, para las curvas no espaciales puede distinguirse si son dirigidas hacia el futuro (pasado) si su vector tangente pertenece a la clase de equivalencia distinguida como futuro (pasado) en todo punto.

Para muchos propósitos prácticos basta con considerar sólo curvas diferenciables (o incluso C^∞). Sin embargo, cuando se tienen que tomar límites es esencial extender la atención a curvas continuas no diferenciables. Esto se debe a que en general, dada una sucesión de Cauchy $\lambda_n \to \lambda$ de curvas diferenciables, la condición de diferenciabilidad no necesariamente se extiende a la curva límite λ. A pesar que las curvas continuas y no diferenciables no son triviales de construir, existen muchos ejemplos en la literatura matemática.

Un ejemplo es el gráfico de la función de Cellérier:

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x), \qquad a > 1. \tag{2.1}$$

Otro ejemplo es la función de Riemann:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 x) \tag{2.2}$$

la cual sólo es diferenciable en el conjunto de puntos discretos

$$x = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \qquad p, q \in Z. \tag{2.3}$$

2.3.1. Geodésicas

Una geodésica es una curva cuya tangente se transporta paralelamente a lo largo de sí misma, es decir, es una curva que es lo "más recta posible". Un espacio será curvo si y solo si inicialmente las geodésicas paralelas no permanecen paralelas, es decir, el quinto postulado de Euclides falla.

Podemos visualizar a una congruencia como un "puñado" de curvas. Formalicemos la definición.

Definición 2.1. *Congruencia de Geodésicas:*

Una congruencia es un conjunto de curvas en una región abierta del espaciotiempo tal que cada punto en esa región es cruzado por una única curva. Formalmente, si $O \subset \mathcal{M}$ es un abierto, una congruencia en O es una familia de curvas tal que a través de cada $p \subset O$, pasa exactamente una curva de esta familia.

Los vectores tangentes a esta congruencia generan un campo vectorial en O (lo mismo vale para la inversa [17]), y la congruencia se dice suave si el campo vectorial correspondiente lo es. A su vez, si hay geodésicas que se cruzan en la congruencia, entonces la misma necesariamente llega a un punto final precisamente donde se cruzan las geodésicas.

2.3.2. Completitud geodésica

Necesitaremos generalizar el teorema de singularidad de Hawking para el caso de un campo escalar acoplado a la gravedad, y para ello necesitaremos desarrollar un aparato matemático especial. En particular, un concepto sumamente relevante para estudiar singularidades es el de completitud geodésica, concepto que describiremos a continuación.

La incompletitud de geodésicas temporales o nulas lo usaremos como indicador de la presencia de singularidades, como veremos en el capítulo 4.

Definición 2.2. *Un espacio se dice geodésicamente completo si toda curva geodésica $\lambda(t)$ se halla definida para todo valor del parámetro t.*

No debe, sin embargo, considerarse que un espacio geodésicamente completo no es singular. Cabe destacar la serie de espacios construídos por Geroch [14], los cuales son geodésicamente completos y con curvatura regular en toda su definición, pero sin embargo tienen curvas temporales *no geodésicas* cuyo tiempo propio es finito. Es decir que existe un observador que se mueve a lo largo de dichas curvas y muere en un tiempo finito. No queremos denominar este tipo de espacios como regulares. A pesar de ello, esta tesis se halla enfocada en problemas de completitud geodésica, pero este hecho debe ser tenido en cuenta de todos modos.

2.3.3. Puntos Conjugados o Puntos Focales

Requerimos el concepto de puntos conjugados, también llamados puntos focales, en una geodésica causal. Definimos los siguientes objetos y propiedades útiles que serán claves para entender el comportamiento de las geodésicas:

Definición 2.3. *Congruencia Irrotacional:*

La congruencia temporal es geodésicamente irrotacional si su vector unitario tangente v^a satisface $v_{[a;b]} = 0$

Definición 2.4. *Punto singular:*

Un punto p se dirá que es un punto singular en la geodésica γ de la congruencia si θ es infinita sobre γ en p: $\theta = \infty$.

Finalmente, podemos definir a los puntos conjugados o focales de las siguientes maneras:

Definición 2.5. *Punto conjugado o Punto focal:*

Un punto p se dirá conjugado a un punto q a lo largo de una geodésica γ desde q a p si p es un punto singular en la geodésica γ de la congruencia irrotacional de todos las geodésicas temporales que atraviesan a q.

Definición 2.6. *Un punto p se dirá conjugado a una hipersuperficie espacial H si p es un punto singular de la congruencia de geodésicas irrotacionales normales a H.*

Podemos tener una definición alternativa de los puntos conjugados [3]:

Definición 2.7. *El punto p es conjugado a q a lo largo de la geodésica γ si y sólo si hay un campo de Jacobi a lo largo de γ no idénticamente nulo que desaparece en p y en q. Esto también demuestra que los puntos singulares de las congruencias son puntos donde geodésicas vecinas infinitesimales se encuentran.*

La congruencia de geodésicas a través del punto p en la vecindad de la geodésica causal γ tiene al punto q como un punto focal, esto es, un punto donde la divergencia de la congruencia se vuelve infinita - este punto focal será en general un punto focal astigmático: es un punto de la caústica de la congruencia, encontraremos definiciones precisas de puntos conjugados en las publicaciones de Milnor (1963), Hicks (1965) y Hawking (1966) [3].

Una de las propiedades interesantes de los puntos conjugados se refeja en el siguiente lema:

Lema 2.1. *Si una geodésica causal γ de p a q contiene un par de puntos conjugados entre p y q, luego existe una curva temporal de p a q cuya longitud excede la de γ. Usamos el término longitud para una curva causal para denotar su integral de tiempo propio. Una geodésica temporal es localmente una curva de máxima longitud (esto es debido a la signatura).*

La expansión de una congruencia describe el cambio en un volumen de una esfera de partículas de prueba centradas en la geodésica y se define como $\theta = v^a_{;a}$ y es una de las varias propiedades que tiene la congruencia de geodésicas. También posee propiedades de distorsión (*shear*) y rotación (*twist*) $v_{[a;b]}$ que estudiaremos en el capítulo 3 con el análisis de la ecuación de Raychaudhuri.

2.4. Condiciones de Energía Genéricas

Recordemos que en principio las ecuaciones de campo de Einstein no ponen restricciones sobre qué tipos de materias o campos no gravitacionales son admisibles en un modelo de espaciotiempo. Esto permite una buena flexibilidad y se lo considera una fortaleza de la teoría, pero al mismo tiempo una debilidad, ya que una buena teoría general de gravitación debería ser máximamente independiente sobre cualquier suposición concerniente a la física gravitatoria, pero también las ecuaciones de campo de Einstein admiten soluciones posibles con propiedades que muchos físicos catalogan como no físicas. Las condiciones de energía genéricas representan un criterio para establecer sistemas físicos posibles. Describen propiedades comunes a todos o casi todos los estados de materia y todos los campos no gravitatorios que están bien determinados en física, siendo suficientemente fuertes para eliminar muchas de las soluciones no físicas de las ecuaciones del campo de Einstein.

Matemáticamente hablando, la característica distintiva más evidente de las condiciones de energía es que son esencialmente restricciones sobre los valores y autovectores propios del tensor de materia o del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$.

Sabemos que las ecuaciones de estado son idealizaciones que sólo son obedecidas aproximadamente por la materia real. Por lo tanto, una singularidad que dependiera de la forma exacta de una ecuación de estado particular no sería físicamente realista. Debido a esto, el teorema de singularidad no asume nada sobre la naturaleza en detalle del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ sino ciertas desigualdades físicamente razonables. Recordemos que la densidad de energía en el sistema de observación con velocidad u^a es $E = T_{ab}u^a u^b$. Las condiciones de energía que trataremos son las de energía nula, energía débil y energía fuerte. Estas son propiedades que cualquier materia normal debería tener. A continuación se detalla qué debe cumplir el tensor de energía-momento para cada uno de los casos.

Condición nula de energía (NEC del inglés *Null Energy Condition* NEC), siendo las curvas nulas γ^μ y γ^ν :

$$T_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \geq 0. \tag{2.4}$$

Condición débil de energía (WEC del inglés *Weak Energy Condition*) con u^μ y u^ν curvas temporales.:

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0. \tag{2.5}$$

Condición fuerte de energía (SEC del inglés *Strong Energy Condition*):

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq -\frac{1}{2}T^\mu_\mu, \tag{2.6}$$

siendo u^μ y u^ν la velocidad del sistema observador que implican que el Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ cumpla la desigualdad $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ para cualquier vector unitario temporal v^μ. Es decir, esta condición se pide cuando no queremos que el término altere el signo de $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$, ya que $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 8\pi[T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + \frac{1}{2}T]$.

Matemáticamente parece incorrecta la utilización de los nombres "fuerte" y "débil" de las condiciones anteriores; es más fuerte pedir que la densidad de energía no sea negativa, que lo sea un poco. La elección proviene de la intuición física. La condición débil es la base de la física clásica: no hay densidades negativas. Por eso, es de la condición fuerte de energía la que permite en la Teoría de la Relatividad General que existan densidades por debajo del cero, pero de forma tal que su módulo no altere el signo de $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$.

Para esta útima condición de energía, SEC, el significado es el siguiente: para cualquier congruencia de geodésica temporal irrotacional, la expansión θ obedece a la ecuación de Raychaudhuri (que veremos en la sección 3.2):

$$\theta_b v^b = -v_{a;b}v^{b;a} - R_{ab}v^a v^b, \tag{2.7}$$

ya que $v_{[a;b]} = 0$, quedando la siguiente desigualdad

$$v_{a;b}v^{b;a} \geq \frac{1}{3}\theta^2.$$

Por lo tanto, si la expansión θ es negativa irá a menos infinito en una distancia finita. Es decir, una congruencia de geodésicas que es convergente tendrá un punto de singularidad dentro de una distancia finita donde las geodésicas vecinas se cruzan.

Este resultado lo adelantamos aquí, ya que lo usaremos en el Teorema de Singularidades Cosmológicas de Hawking. Notemos que estamos utilizando la convención de Hawking y Penrose [15] donde la condición débil de energía es una implicancia de la condición fuerte de energía.

2.5. Condiciones de causalidad del espaciotiempo

Las condiciones de causalidad fueron propuestas para pensar en universos genéricos, es decir, universos que no se salen de lo observado y pueden ser generalizados a través de una condición u obstrucción geométrica.

El supuesto de generalidad que requerimos es que cada geodésica causal γ contenga algunos puntos para los cuales el vector unitario tangente k^a a γ sea tal que [15] :

$$k_{[a}R_{b]cd[e}k_{f]}k^c k^d \neq 0 \tag{2.8}$$

Para las curvas temporales se reduce a :

$$R_{abcd}k^a k^b \neq 0 \tag{2.9}$$

En cualquier modelo genérico que sea físicamente realista, esperamos que la ecuación 2.8 se cumpla para cada geodésica γ. Por ejemplo, la condición podría fallar para una geodésica temporal γ solamente si $R_{ab}k^a k^b$ se vuelve cero en cada punto de γ y luego sólo si el tensor de Weyl está relacionado de una forma muy particular a γ (i.e $C_{abcd}k^b k^c = 0$) en cada punto de γ (para un espaciotiempo genérico esto no ocurriría en ningún punto de γ)

La condición puede fallar para una geodésica nula γ sólo si $R_{ab}k^a k^b$ se convierte en cero en cada punto de γ y el tensor de Weyl tiene una dirección tangente a γ como una dirección nula principal en cada punto de γ.

2.5.1. Teoría Causal

La geometría diferencial es el lenguaje más adecuado para desarrollar los principios de la Teoría de la Relatividad General. Sin embargo, el lenguaje geométrico permite procesos que desde la interpretación de la física resultan incongruentes, e.g. los viajes en el tiempo. Por lo tanto, es necesario delimitar el lenguaje geométrico que emplearemos. Precisamente la Teoría Causal aplicada sobre la Relatividad General, permite elaborar los conceptos necesarios para delimitar el lenguaje geométrico y así desarrollar las condiciones que permiten modelar no sólo un universo plausible, sino uno que resulte genérico.

Desarrollaremos los conceptos básicos de la teoría causal para después poder construir las nociones y objetos necesarios que nos permitirán plantear las hipótesis de los teoremas de singularidad y con ello investigar la dinámica impuesta por la causalidad de las curvas.

Las relaciones de causalidad en una variedad lorentziana $\mathcal{M}$ son fundamentales para saber cómo distintos puntos en ella se pueden encontrar conectados causalmente, y así empezar a modelar un espaciotiempo.

2.5.2. Curvas causales

En la sección 2.3 vimos la noción de curva, ahora daremos definiciones observando el carácter causal de las curvas. Definimos una curva causal como aquella cuyos vectores tangentes no son espaciales (*space like*), es decir que pueden ser temporales (*time like*) o nulos (*null*). Podemos también dar una definicion determinista de la curva causal.

Definición 2.8. *Curva causal:*

Es una curva suave de a trozos, embebida en el espaciotiempo que representa la trayectoria espaciotemporal para una transferencia de energía/momento físicamente posible.

Las definiciones de curvas causales pueden extenderse a los casos continuos exigiendo que, localmente, pares de puntos en la curva puedan unirse por una curva causal diferenciable. Más precisamente, una curva continua λ se dice que es una curva causal (o respectivamente temporal) con dirección futuro si para cada $p \in \lambda$ existe una vecindad normal convexa U de p tal que si $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U$ con $t_1 < t_2$, luego existe una curva causal (o respectivamente temporal) diferenciable direccionada a futuro en U desde $\lambda(t_1)$ a $\lambda(t_2)$. La naturaleza causal (o respectivamente temporal) de una curva continua claramente no se modifica por una reparametrización uno a uno, y de aquí en adelante se considera que dos curvas son equivalentes si difieren en una reparametrización.

Luego, se define la noción de extensibilidad de una curva continua. Se necesita distinguir claramente entre las posibilidades de que una curva vaya al infinito o que se mueva en sí misma por siempre o vaya a una singularidad como opuesto a la posibilidad de que una curva se pare en algún punto porque simplemente uno no definió ir más lejos. Esta distinción puede hacerse precisamente a través de la noción de punto final de la curva. Sea $\lambda(t)$ una curva causal orientada a futuro. Se dice que $p \in \mathcal{M}$ es un punto final de la curva de λ si para cada vecindad de O de p existe un t_0 tal que $\lambda(t) \in O$ para todo $t > t_0$ (entonces por la propiedad de Hausdorff de $\mathcal{M}$, λ puede tener, como máximo, un punto final futuro).

Entonces las curvas pueden tener punto final, y de ser así, se las denomina curvas extensibles.

Definición 2.9. *Curva extensible:*

Una curva causal requirirá puntos finales si puede extenderse como una curva casual hacia el pasado o hacia el futuro [22].

Notar que también el punto final no necesita pertenecer a la curva, es decir, no es necesario que exista un valor de t tal $\lambda(t) = p$. La curva λ se define como inextendible a futuro si no tiene un punto final futuro. La noción de inextendibilidad al pasado se define en forma análoga.

Es importante que remarquemos que si λ es una curva causal diferenciable con un punto final futuro p, luego no es posible extender λ más allá del punto p como una curva diferenciable causal, pero λ siempre podrá extenderse como una curva causal continua agregando una curva causal continua a λ en p.

Definición 2.10. *Curva inextendible o inextensible:*

Si la curva causal, contrario a la definición 2.5.2, continúa indefinidamente en el pasado (respectivamente en el futuro) se llamará curva inextendible (del inglés endless [18]), i.e., si la curva continúa indefinidamente en el pasado (respectivamente futuro) se llamará curva pasado inextendible (futuro inextendible).

Ahora veamos las relaciones que pueden existir entre dos puntos p, $q \in \mathcal{M}$. Denotamos:

- p $\preceq$ q : Si existe una curva temporal con un punto final pasado p y punto final futuro q.
- p $\prec$ q : Si $p = q$ ó si hay una curva causal del punto p al punto q. (cf. Kronheimer and Penrose 1967)
- si p $\prec$ q pero no $\preceq$ q luego hay una geodésica nula del punto p al punto q ó $p = q$.

Si p $\preceq$ q y q $q \prec$ r (ó p $\prec$ q y q $\preceq$ r) $\Rightarrow$ p $\preceq$ r no tenemos p $\preceq$ p a menos que $\mathcal{M}$ contenga curvas temporales cerradas.

Un subconjunto de $\mathcal{M}$ se dice acronal si no contiene pares de puntos p,q con $p \preceq q$.

A continuación se mencionan las definiciones para futuro de un punto p y de un conjunto S unido a través de curvas temporales:

Definición 2.11. *El futuro abierto de un punto $p \in \mathcal{M}$ lo denotamos $\mathcal{I}^+(p)$ (futuro cronológico), i.e.*

$$\mathcal{I}^+(p) = x : p \preceq x.$$

Definición 2.12. *El futuro abierto de un conjunto $S \subset \mathcal{M}$ lo denotamos $\mathcal{I}^+(S)$, i.e.*

$$\mathcal{I}^+(S) = \cup \mathcal{I}^+(p).$$

Análogamente, definimos el futuro de un punto y conjunto que contemplan a las curvas causales de la siguiente forma:

Definición 2.13. *El futuro abierto de un punto $p \in \mathcal{M}$ lo denotamos $\mathcal{J}^+(p)$ (futuro causal), i.e.*

$$\mathcal{J}^+(p) = x : p \prec x.$$

Definición 2.14. *El futuro abierto de un conjunto $S \subset \mathcal{M}$ lo denotamos $\mathcal{J}^+(S)$, i.e.*

$$\mathcal{J}^+(S) = \cup \mathcal{J}^+(p).$$

Definimos el conjunto $\mathcal{E}^+(S)$ como:

$$\mathcal{E}^+(S) = \mathcal{J}^+(S) - \mathcal{I}^+(S). \tag{2.10}$$

Luego $\mathcal{E}^+(S)$ es parte de la frontera de $\dot{\mathcal{I}}^+$ de $\mathcal{I}^+$, pero no necesariamente toda la frontera.

Los conjuntos $\mathcal{I}^-(p)$,$\mathcal{I}^-(S)$, $\mathcal{J}^-(p)$, $\mathcal{J}^-(s)$ y $\mathcal{E}^-(S)$ se definen de manera similar, pero con el futuro y el pasado intercambiados.

Para cualquier conjunto $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ podemos dar las siguientes definiciones de dominio de dependencia y horizonte de Cauchy:

Definición 2.15. *El dominio (futuro) de dependencia denotado por $\mathcal{D}^+(S)$, $\mathcal{D}^+(S)$ = {x: cada curva temporal pasado inextendible a través de x se encuentra con S}.*

Definición 2.16. *El horizonte de Cauchy denotado por $\mathcal{H}^+(S)$,*

$$\mathcal{H}^+(S) = x : x \in \mathcal{D}^+(S),$$

$$\mathcal{I}^+(x) \cap \mathcal{D}^+(S) = \emptyset$$

Luego, podemos definir al Horizonte de Cauchy también de la siguiente forma:

Definición 2.17. *Horizonte de Cauchy, $\mathcal{H}^+(S)$:*

$$\mathcal{H}^+(S) = \mathcal{D}^+(S) - \mathcal{I}^- D^+(S)$$

Los conjuntos $\mathcal{D}^-(S)$ y $\mathcal{H}^-(S)$ se definen correspondientemente.

En esta tesis nos limitaremos de los casos cuando S es un conjunto cerrado acronal, por lo que $\mathcal{D}^+(S)$ es un conjunto cerrado y $\mathcal{H}^+(S)$ es un conjunto cerrado acronal.

2.5.3. Hipersuperfices de Cauchy

Podemos referirnos a una hipersuperficie de Cauchy tal que en una variedad lorentziana modela un conjunto de condiciones iniciales, pero esto no es del todo exacto, ya que la existencia de uno de estos objetos determina por completo la topología de la variedad de tal forma que las ecuaciones de Einstein pasan a segundo plano. Esto no implica que dichas ecuaciones pierdan importancia, pero nos dice que la condición topológica es tan fuerte que no existe necesidad alguna de conocer, por el momento, soluciones explícitas de las ecuaciones de Einstein para formular predicciones.

Definición 2.18. *Un subconjunto $\mathcal{S}$ de una variedad $\mathcal{M}$ cuya intersección con toda curva inextensible temporal consta de un solo punto, se conoce como una hipersuperficie de Cauchy.*

Lema 2.2. *Una hipersuperficie de Cauchy S es una hipersuperficie topológica cerrada de $\mathcal{M}$. Además, S es un conjunto no cronológico cuya intersección con toda curva causal de $\mathcal{M}$ es un conjunto no vacío.*

No todos los conjuntos no cronológicos de una variedad dada se pueden ver como una hipersuperficie de Cauchy. En $\mathcal{R}_1^n$ los hiperplanos de la forma $t = cte$ son hipersuperficies de Cauchy ya que su intersección con el futuro o pasado cronológico de cualquier punto fuera del hiperplano será diferente del vacío, sin embargo, espacios como H^{n-1} y el cono de luz $\Lambda^+(0)$, a pesar de ser conjuntos no cronológicos, no son hipersuperficies de Cauchy de $\mathcal{R}_1^n$ basta con pensar en una curva temporal orientada al futuro contenida en el espacio de Willem de Sitter S_1^{n-1}.

Si existieran dos hipersuperficies de Cauchy en una variedad, ¿cómo se podría ir de una a otra? Tomando en cuenta el flujo de un campo temporal que no se anula sobre $\mathcal{M}$, la condición sobre el número de elementos en la intersección nos proporciona una forma continua e inyectiva de ir de una hipersuperficie a otra.

Proposición 2.1. *Sea S una hipersuperficie de Cauchy de $\mathcal{M}$. Existe una función continua $\rho : \mathcal{M} \to S$ que es abierta.*

Esta proposición nos dota de la herramienta necesaria para probar la relación que existe entre las hipersuperficies de Cauchy de una misma variedad y cómo estas determinan la topología de la variedad ambiente.

Corolario 2.1. *Cualesquiera dos hipersuperficies de Cauchy de $\mathcal{M}$ son homeomorfas y, si S es una hipersuperficie de Cauchy de $\mathcal{M}$, existe un homeomorfismo entre $\mathcal{M}$ y el producto $S \times R$.*

Para un conjunto no cronológico A en $\mathcal{M}$ se define el dominio de dependencia de Cauchy $\mathcal{D}(A)$ como los puntos p en $\mathcal{M}$, tales que cualquier curva causal inextensible que pase por p también pasará por A. El interior del dominio de dependencia de Cauchy, como subconjunto de $\mathcal{M}$, es una región globalmente hiperbólica, y ocupa un lugar importante en la teoría causal.

Teorema 2.2. *Una variedad lorentziana es globalmente hiperbólica si y sólo si posee una hipersuperficie de Cauchy.*

La demostración depende de la construcción de funciones continuas estrictamente crecientes sobre curvas causales orientadas al futuro, que se conocen como funciones temporales.

Tal como lo hemos mencionado en las relaciones de causalidad de la definición anterior, si en la definición de dominio de dependencia de Cauchy se toman sólo los puntos por los cuales pasan curvas causales inextensibles al pasado, se obtiene el dominio de dependencia de Cauchy al futuro $D^+(A)$. A partir de este conjunto se define el horizonte de Cauchy al futuro de un conjunto A no cronológico como $\mathcal{H}^+(A) = \mathcal{D}^+(A) - \mathcal{I}^-\mathcal{D}^+(A)$; de igual forma se define el horizonte de Cauchy al pasado, y el horizonte de Cauchy $\mathcal{H}$ se define como la unión de lo horizontes futuro y pasado.

Proposición 2.2. *Una hipersuperficie topológica S de $\mathcal{M}$, que además resulta ser no cronológica y compacta, es también una hipersuperficie de Cauchy de $\mathcal{M}$.*

El horizonte de Cauchy $\mathcal{H}(S)$ funciona como una frontera de $\mathcal{D}(S)$, de tal forma que, si $\mathcal{H}(S)$ es vacío, cualquier curva causal inextensible alcanzará a S en algún punto.

2.5.4. Causalidad fuerte

El concepto de causalidad se generaliza de la manera más directa posible: el efecto debe pertenecer al cono de luz futuro de su causa.

Definición 2.19. *Se dice que una variedad $\mathcal{M}$ cumple con la condición cronológica si no contiene curvas cerradas temporales.*

Una variedad que cumpla con la condición cronológica representa un espaciotiempo en el cual no se observan viajes en el tiempo, en el sentido de que un observador no puede avanzar en el tiempo y regresar al punto de partida a presentarse consigo mismo antes de partir. Se puede probar que toda variedad lorentziana compacta no cumple con esta condición, como el toro lorentziano.

Definición 2.20. *Una variedad $\mathcal{M}$ cumple la condición causal si no contiene curvas cerradas causales.*

La condición causal implica la condición cronológica, pero no son equivalentes; considérese la variedad generada por la acción. Ambas condiciones se pueden definir para un punto de $\mathcal{M}$; por ejemplo, en el caso de la condición cronológica, se dice que esta se cumple en un punto p de $\mathcal{M}$ si no existen curvas cerradas temporales que pasen por p.

Definición 2.21. *Se dice que $\mathcal{M}$ cumple con la condición fuerte de causalidad alrededor de p si para todo abierto $\mathcal{U}$ alrededor de p en $\mathcal{M}$, existe otro abierto $V \subset U$ alrededor de p tal que toda curva causal con extremos en V está completamente contenida en $\mathcal{U}$.*

Esto quiere decir que toda curva causal con extremos cerca de p en $\mathcal{M}$, donde se cumple la condición fuerte de causalidad, se mantendrá cerca de p, o dicho de otra forma, no viajará lejos antes de regresar cerca de p. El siguiente lema es una forma interesante de entender esta condición de causalidad.

Lema 2.3. *Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{M}$ donde se cumple la condición fuerte de causalidad. Si α es una curva causal inextensible y orientada al futuro que empieza en $\mathcal{K}$, α saldrá eventualmente de $\mathcal{K}$ sin regresar.*

Recordemos que con inextensible queremos decir que la curva $\alpha : [0, \mathrm{B}) \to \mathcal{M}$ no se puede extender continuamente al extremo del intervalo, donde se considera que $\mathrm{B} \geq \infty$. Geométricamente, una curva inextensible es aquella que, a lo sumo, tiene un extremo.

Capítulo 3

La singularidad aparente de Landau-Raychaudhuri

Esta singularidad toma el nombre debido a la demostración de Lev Landau (1908-1968), y en paralelo de Amal Kumal Raychaudhuri (1923-2005), en la cual dado un determinado sistema de referencia con las características que a continuación detallaremos, tendremos una singularidad aparente. Estudiamos cómo se obtiene la singularidad aparente de Landau-Raychaudhuri, analizándola en el marco de un sistema de referencia síncrono.

El uso del marco sincrónico en problemas cosmológicos requiere un examen minucioso de su comportamiento asintótico. En particular, se debe saber si este marco puede extenderse al tiempo y al espacio infinito manteniendo siempre el etiquetado inequívoco de cada punto en términos de las coordenadas del mismo. Se demostró que la sincronización inequívoca de los relojes en todo el espacio no es posible debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes a lo largo de un contorno cerrado. En lo que respecta a la sincronización en un tiempo infinito, recordemos primero que las líneas de tiempo de todos los observadores son normales a la hipersuperficie elegida y, en este sentido, son “paralelas”.

Se demostró que las líneas de tiempo son geodésicas en un marco sincrónico.

El grupo Landau [23] ha descubierto que el marco sincrónico necesariamente forma una singularidad de tiempo, es decir, las líneas de tiempo se cruzan (y, respectivamente, el determinante del tensor métrico se vuelve cero) en un tiempo finito.

Esto se demuestra de la siguiente manera: el lado derecho de la ecuación 3.1, que contiene las componentes del tensor energía-momento de la materia y el campo electromagnético,

$$T_i^k = (p + \epsilon)u_i u^k + p\delta_i^k \tag{3.1}$$

es un número positivo debido a la condición fuerte de energía. Esto se puede ver fácilmente cuando se escribe en componentes por materia.

3.1. El sistema de referencia síncrono y la singularidad de Landau

Para un espaciotiempo arbitrario (M, g) el sistema de referencia síncrono siempre existe localmente [24].

Definición 3.1. *Dado un espaciotiempo arbitrario, se define como sistema de referencia síncrono aquel para el cual la métrica toma localmente la siguiente forma*

$$g = dt^2 - h_{ij}(t)dx^i dx^j. \tag{3.2}$$

Es decir que la métrica espacial $h_{ij}(t)$ depende del tiempo propio como un parámetro. Este sistema puede construirse de la siguiente manera: consideremos una superficie espacial, es decir, una superficie cuyo vector normal es temporal. Tomemos ahora las geodésicas normales a esta superficie y parametrizemos dichas geodésicas mediante su longitud de arco. Esto constituye un sistema de referencia síncrono. Cabe destacar que un cambio de coordenadas $x^i \to y^i$ independientes del tiempo propio conduce a otro sistemas síncronos.

Claramente, la existencia local de un sistema síncrono es independiente del modelo. Sin embargo, el modelo gravitatorio en cuestión puede impedir que dicho sistema exista globalmente.

Para ver esto, consideremos la Teoría de Relatividad General pura. Definiendo la derivada temporal de la métrica espacial h_{ij}

$$\gamma_{ij} = \partial_t h_{ij},$$

la ecuación de Einstein 00 toma la siguiente forma

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial_t \gamma_i^i}{\partial t} - \frac{1}{4}\gamma_i^j \gamma_j^i = 8\pi(T_0^0 - \frac{1}{2}T).$$

En aplicaciones físicas, un tensor energía momento razonable satisface la condición que $T_0^0 - \frac{1}{2}T$ es una cantidad positiva. Esta es la llamada condición de energía fuerte mencionada anteriormente (ver sección 2.4). En general, esta condición suele ser expresada como

$$2T_{ab}\xi^a\xi^b \geq T.$$

Si tenemos un tensor de energía momento diagonalizable,

$$T_{ab} = (\rho, p_i),$$

la condición fuerte de energía implica que

$$\rho + p_i \geq 0, \qquad \rho + \sum_i p_i \geq 0.$$

Si la densidad de energía ρ es positiva, entonces las presiones p_i pueden ser negativas, pero acotadas inferiormente.

Este tipo de condición se satisface para muchos sistemas físicos, como por ejemplo polvo, campo electromagnético. Sin embargo, se viola para campos escalares.

Ahora bien, la ecuación 00 de Einstein junto con la condición de energía fuerte implican que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial_t \gamma_i^i}{\partial t} + \frac{1}{4}\gamma_i^j \gamma_j^i \leq 0.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad matricial

$$(\gamma_i^i)^2 < 3\gamma_i^j \gamma_j^i,$$

se obtiene de la última ecuación que

$$\frac{\partial_t \gamma_i^i}{\partial t} + \frac{1}{6}(\gamma_i^i)^2 \leq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{6} \leq \partial_t \left(\frac{1}{\gamma_i^i} \right).$$

Por lo tanto obtenemos

$$\frac{1}{(\gamma_0)_i^i} + \frac{t}{6} \leq \frac{1}{\gamma_i^i}.$$

En lo que sigue asumimos que la condición inicial es tal que $(\gamma_0)_i^i \leq C < 0$ en toda la superficie espacial $t = 0$. No se supone que la condición sea isótropa y homogénea, sino que en todos lados sea negativa. Bajo esta hipótesis se sigue que $\gamma_i^i \to \infty$ en un tiempo futuro con longitud inferior a $\tau = 6/C$. Teniendo en cuenta que

$$\gamma_i^i = \partial_t \log(\det h),$$

se sigue que el determinante de la métrica espacial tiende a cero, $\det h \to 0$, dentro de ese intervalo de tiempo. Esta es la singularidad aparente de Landau.

Al descubrirse este resultado, existió una discusión acerca de que si esta es una singularidad real o que simplemente implica que el sistema síncrono no se halla definido globalmente. La respuesta correcta es que la singularidad es real, sin embargo, se necesita desarrollar un formalismo matemático adecuado para probarlo. Las secciones siguientes se hallan dedicadas a este tema.

3.2. La ecuación de Raychaudhuri

En forma independiente a la aparición de la singularidad aparente de Landau, en la década del 50, un físico matemático indio había desarrollado un formalismo matemático que permite interpretar este problema de la singularidad. Para ello es conveniente usar la definición intrínseca del sistema síncrono [12], tal como la referimos en la sección anterior.

Consideremos ahora una congruencia de geodésicas temporales parametrizadas por el tiempo propio τ. Esto significa que el campo vectorial V^a de vectores tangentes a cada geodésica de la congruencia satisface la normalización $g_{ab}V^aV^b = -1$. Por analogía con lo discutido sobre el sistema de referencia síncrono, se define la métrica espacial como el tensor dado por

$$h_{ab} = g_{ab} + V_aV_b. \tag{3.3}$$

Esta métrica h_{ab} cumple las siguientes propiedades

$$h^a{}_a = g^a{}_a + V^aV_a = 3, \tag{3.4}$$

$$h_{ab}V^a = g_{ab}V^a + V_aV^aV_b = V_b + (-1)V_b = 0, \tag{3.5}$$

$$h_{ab}h^a{}_c = (g_{ab} + V_aV_b)(g^a{}_c + V^aV_c) = g_{ac} + V_aV_c = h_{ac}. \tag{3.6}$$

Es decir que $h^a{}_b$ es un operador de proyección al subespacio (del espacio tangente) perpendicular a V^a, en cada punto de la variedad. Considerando al campo de velocidades como un fluido, se pueden definir, por analogía con hidrodinámica, los siguientes tensores:

- El tensor de vorticidad o de rotación antisimétrica (*twist*), dado por $\omega_{ab} = V_{[c;d]}h^c{}_ah^d{}_b$.
- El tensor de expansión, dado por $\theta_{ab} = V_{(c;d)}h^c{}_ah^d{}_b$.
- El escalar de expansión, dado por $\theta = \theta_{ab}g^{ab}$.
- El tensor de corte o distorsión (*shear*), definido por $\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$.

Estos tensores "viven" en el espacio ortogonal a V^a dado que

$$\theta_{ab}V^a = \sigma_{ab}V^a = \omega_{ab}V^a = 0.$$

El escalar de expansión es igual a la divergencia de V^a

$$\theta = \theta_{ab}g^{ab} = \theta_{ab}h^{ab} = \frac{1}{2}(V_{(a;b)} + V_{(b;a)})(g^{ab} + V^aV^b) = V^c{}_{;c} + V_aV^b\nabla_bV^a = V^c{}_{;c}.$$

Finalmente, se tiene la descomposición

$$V_{a;b} = V_{k;l}h^k{}_ah^l{}_b = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab},$$

esto es, las derivadas $V_{a;b}$ pueden expresarse como una suma de un tensor antisimétrico, uno simétrico sin traza, y uno diagonal que lleva la traza. Ahora bien, tomando la derivada ∇_V a $V_{a;b}$ se tiene la siguiente identidad

$$V^c\nabla_c\nabla_b V_a = V^c\nabla_b\nabla_c V_a + R^d{}_{abc}V_d V^c$$

$$= \nabla_b(V^c\nabla_c V_a) - (\nabla_b V^c)(\nabla_c V_a) + R^d{}_{abc}V_d V^c$$

$$= -V^c{}_{;b}V_{a;c} + R^d{}_{abc}V_d V^c.$$

La traza de esta identidad resulta

$$V^c\nabla_c V^a{}_{;a} = -V^{c;a}V_{a;c} - R_{dc}V^d V^c.$$

Finalmente, reemplazando $V_{a;c}$ por su descomposición en los tensores definidos previamente, y usando sus propiedades, se obtiene la identidad de Raychaudhuri

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -R_{ab}V^aV^b - \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab}, \tag{3.7}$$

donde τ es el parámetro afín asociado a la congruencia geodésica.

Por otro lado, trabajando con las partes antisimétrica de la ecuación para $V^c\nabla_c\nabla_b V_a$, se puede probar que

$$\nabla_V\omega_{ab} = V^c\nabla_c\omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma^c{}_{[b}\omega_{a]c}.$$

Esta última ecuación es de primer orden y se sigue que, cuando el tensor de vorticidad ω_{ab} es inicialmente 0, entonces $\nabla_V\omega_{ab}$ es nulo a lo largo de toda la congruencia. En lo que sigue asumiremos esta condición inicial, es decir, que la congruencia es ortogonal a la hipersuperficie.

Por lo que la ecuación 3.7 queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - R_{ab}V^aV^b. \tag{3.8}$$

La identidad de Raychaudhuri (3.7) es una relación puramente geométrica, es decir, que no involucra física alguna. Sin embargo, si se asume que la curvatura viene descripta por alguna teoría de gravedad específica, entonces el término $R_{ab}V^aV^b$ depende de la distribución de materia y de las ecuaciones de Euler-Lagrange de dicha teoría. En particular, si se asume que el modelo subyacente es la Relatividad General, entonces

$$R_{ab} = 8\pi\left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right].$$

En estos términos se tiene que

$$R_{ab}V^aV^b = 8\pi\left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right]V^aV^b,$$

y si se introduce la última expresión en la ecuación (3.7), dicha identidad pasa a convertirse en una ecuación concreta para la expansión escalar θ.

La condición utilizada en el capítulo anterior (ver sección 2.4) es que $(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})\xi^a\xi^b \geq 0$ para todo ξ^a temporal. Si se satisfacen las ecuaciones de Einstein, la condición fuerte de energía implica que $R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$ para todo ξ^a temporal.

Teniendo en cuenta estas hipótesis, y asumiendo que la congruencia es ortogonal a una hiperficie espacial $\omega_{ab} = 0$, se sigue de la ecuación

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0,$$

de donde podemos deducir que

$$\frac{d\left(\theta^{-1}\right)}{d\tau} = \frac{-1}{\theta^2}\frac{d\theta}{d\tau} \geq \frac{1}{3}.$$

La integración de esta última expresión conduce a

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau\,, \qquad \text{con} \qquad \theta_0 = \theta(0).$$

Si $\theta_0 < 0$, entonces de la ecuación anterior se deduce que θ^{-1} pasa por un cero en un tiempo finito, es decir, θ diverge en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$.

Un mismo razonamiento aplica si $\theta_0 > 0$, reemplazando futuro por pasado.

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea V^a el campo tangente de una congruencia geodésica temporal orientada a futuro, con $\omega_{ab} = 0$. Si $R_{ab}V^aV^b \geq 0$, y el escalar de expansión alcanza un valor negativo θ_0 en algún punto de una geodésica en la congruencia, entonces θ tiende a $-\infty$ a lo largo de esa geodésica, en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$.*

Nuevamente, no sabemos si esta singularidad es aparente o real. Para dilucidar este aspecto, es necesario repasar algunos resultados matemáticos clásicos sobre geodésicas, primera y segunda variación de las mismas y puntos conjugados.

3.3. La singularidad de Landau-Raychaudhuri como indicador de puntos conjugados

En geometría riemanniana, las geodésicas son curvas que localmente minimizan la distancia espaciotemporal entre dos puntos (y maximizan el tiempo propio entre dos puntos). Sin embargo, esta afirmación puede no ser válida globalmente. Este hecho es intuitivo pensando en un viaje alrededor de la tierra. Un viaje desde Buenos Aires a Nueva York puede realizarse a lo largo de una geodésica mínima y otra geodésica que cruza ambos polos. Claramente, esta segunda geodésica no es una curva de longitud mínima. El hecho clave que hace que dicha curva pierda su propiedad minimizante es cruzar ambos polos. Los polos sur y norte de la tierra son ejemplos de los llamados puntos conjugados. En forma coloquial, dos puntos p y q se dicen conjugados si dada una congruencia de curvas emanando de p, dichas curvas (o algunas de ellas) convergen en q. Los teoremas que describimos a continuación se basan en el libro de Lee [25], y demuestran que las geodésicas dejan de ser minimizantes una vez cruzado un punto conjugado.

3.4. Las geodésicas como curvas extremales

Consideremos una variedad $\mathcal{M}$ Lorenziana. Sean $p, q \in \mathcal{M}$, $\epsilon > 0$, consideremos una congruencia de curvas temporales $\Gamma_s(t) : [-\epsilon, +\epsilon] \times [a, b] \to \mathcal{M}$ donde el parámetro t de curva se elige tal que $\Gamma_s(a) = p$ y $\Gamma_s(b) = q$. Asumimos que existen finitos puntos $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = b$ tales que la familia Γ restringida a $[-\epsilon, +\epsilon] \times [a_i, a_{i+1}]$ consiste en curvas suaves. Nuestra atención se centra en la curva particular $\gamma(t) = \Gamma_0(t)$, y definimos los vectores tangentes $T^a = (\partial/\partial t)^a$ y los vectores de desviación $S^a = (\partial/\partial s)^a$ de la familia. La longitud temporal o tiempo propio en cada segmento $[a_{i-1}, a_i]$ de cada curva viene dada por

$$\tau(\Gamma_s) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (-T^a T_a)^{1/2} dt.$$

La primera variación de esta funcional es

$$\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds} = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial(-T^a T_a)^{1/2}}{\partial s} dt = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} (-T^a T_a)^{-1/2} (S^b \nabla_b T_c) T^c dt$$
$$= -\int_{a_{i-1}}^{a_i} (-T^a T_a)^{-1/2} (T^b \nabla_b S_c) T^c dt.$$

En el último paso se tuvo en cuenta que si parametrizamos a la familia como

$$\Gamma = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t), x_4(s,t)),$$

se tiene que

$$\nabla_s \partial_t \Gamma = \nabla_t \partial_s \Gamma,$$

esta identidad es consecuencia directa de la propiedad $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ de los símbolos de Christofell.

Evaluando la identidad obtenida en $s = 0$ y parametrizando $\gamma(t)$ tal con el tiempo propio

$$(-\gamma'^a\gamma'_a)^{1/2} = 1, \quad \text{siendo} \quad \gamma'^a = T^a \mid_{s=0} \quad \text{tangente a} \quad \gamma,$$

y definiendo $X^a = S^a \mid_{s=0}$, entonces se deduce que

$$\left.\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} (\gamma'^b\nabla_b X_c)\gamma'^c dt = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{d}{dt}(X^c\gamma'_c) - (X^c\gamma'^b\nabla_b\gamma'_c)\right) dt$$

$$= -X_a(a_i)\gamma'^a(a_i^-) + X_a(a_{i-1})\gamma'^a(a_{i-1}^+) + \int_{a_{i-1}}^{a_i} (X^c\gamma'^b\nabla_b\gamma'_c)dt.$$

Luego, sumando sobre todo i, se tiene que

$$\left.\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = +\int_a^b X^c(T^b\nabla_b T_c)dt + \sum_{i=1}^{k-1} X^a(a_i)(\Delta_i T)_a, \tag{3.9}$$

donde se ha renombrado γ' como T, y $\Delta_i T = T(a_i^+) - T(a_i^-)$. Además, se tuvo en cuenta que la variación es a extremos fijos.

A partir de estas identidades, puede demostrarse el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Toda curva temporal de tangente unitario que extremice el tiempo propio debe ser una geodésica sin quiebres, es decir, con tangente continua.*

Demostración:

Veamos primero a partir de la ecuación (3.9) que $T^b\nabla_b T_c = 0$ en todo subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$. Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una función “chichón” no nula, tal que vale 0 fuera del intervalo (a_{i-1}, a_i). Si consideramos una variación $X^c = \phi Y^c$, con Y^c arbitrario, entonces se tiene que

$$\int_a^b \phi Y_c(T^b\nabla_b T^c)dt = 0.$$

Como esto vale para todo Y^c, debe ser entonces $T^b\nabla_b T_c = 0$. Lo mismo vale sobre los demás subintervalos. Veamos ahora que $\Delta_i T = T(a_i^+) - T(a_i^-) = 0$. Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ otra función “chichón”, tal que $\psi(a_i) \neq 0$, $\psi(a_j) = 0$ para $i \neq j$. Si consideramos la variación $X^c = \psi Y^c$, con Y^c arbitrario, entonces se tiene que

$$Y_a(a_i)(\Delta_i T)^a = 0.$$

Por lo que, $(\Delta_i T)^a = 0$ para cada i. Esto completa la demostración del resultado. (Q.E.D.)

3.4.1. Segunda variación de arco y puntos conjugados

El teorema demostrado en la sección anterior hace intuitivo el siguiente hecho: consideremos dos puntos conjugados p y q. Viajemos desde p a q eligiendo una geodésica particular γ^1 y sigamos hasta un punto r más allá de q siguiendo dicha geodésica. Denotemos al tramo pq por γ^1_{pq} y lo análogo para qr. Se tiene que $\gamma_{pr} = \gamma^1_{pq} \cup \gamma^1_{qr}$ es una geodésica diferenciable.

Ahora tomemos otra geodésica γ^2_{pq} cuya longitud es igual a la de γ^1_{pq}. Entonces $\gamma^2_{pq} \cup \gamma^1_{qr}$ no es suave en q y tiene la misma longitud que γ^1_{pr}. Si γ^1_{pr} fuera de longitud mínima, entonces también lo sería $\gamma^2_{pq} \cup \gamma^1_{qr}$. Pero esta última no cumple el requisito de ser suave.

Entonces γ^1_{pr} debería perder la propiedad de minimizar la longitud (o maximizar el tiempo propio) si contiene dos puntos conjugados. Esta afirmación es intuitiva, pero habría que demostrar que γ^1_{pq} y γ^2_{pq} tienen la misma longitud. Esto parece intuitivo, pero no es del todo obvio. Por ese motivo suele darse la siguiente, una demostración más rigurosa de este hecho fundamental, que describimos a continuación.

Demostración:

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una geodésica de tangente unitario, y sea Γ una familia de geodésicas que la contiene como la definida previamente. Calculemos la segunda variación de τ en un subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$. Luego de un cálculo algo tedioso se tiene que

$$\frac{d^2\tau(\Gamma_s)}{ds^2} = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s} \left((-T^aT_a)^{-1/2}(T^b\nabla_b S_c)T^c\right) dt$$

$$= -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{(S^b\nabla_b T^c\nabla_c S^d)T_d}{(-T^aT_a)^{1/2}} + \frac{(T^b\nabla_b S^d)(S^c\nabla_c T_d)}{(-T^aT_a)^{1/2}} + \frac{(T^b\nabla_b S^d)T_d(S^c\nabla_c T^e)T_e}{(-T^aT_a)^{3/2}} dt$$

$$= -\int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{(T^b\nabla_b S^c\nabla_c S^d)T_d + (S^aT^bT^cS_dR_{abc}{}^d)}{(-T^aT_a)^{1/2}} + \frac{(T^b\nabla_b S^d)(T^c\nabla_c S_d)}{(-T^aT_a)^{1/2}}$$

$$+ \frac{((T^b\nabla_b S^d)T_d)^2}{(-T^aT_a)^{3/2}} dt.$$

Especificando en $s = 0$ se obtiene a partir de la última expresión que

$$\left.\frac{d^2\tau(\Gamma_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} (T^b\nabla_b S^c\nabla_c S^d)T_d + (S^aT^bT^cS_dR_{abc}{}^d)$$

$$\left.+(T^b\nabla_b S^d)(T^c\nabla_c S_d) + ((T^b\nabla_b S^d)T_d)^2 dt\right|_{s=0}.$$

Dado que $T^b\nabla_b T^a = 0$, el primer término se puede escribir como

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} (T^b\nabla_b S^c\nabla_c S^d)T_d dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial((S^c\nabla_c S^d)T_d)}{\partial t} dt = [(S^c\nabla_c S^d)T_d]\Big|_{a_{i-1}}^{a_i}$$

Estos términos de borde se anulan al sumar, ya que Γ es una variación a extremos fijos. Luego, sumando los términos restantes, se obtiene

$$\left.\frac{d^2\tau(\Gamma_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = -\int_a^b (S^aT^bT^cS_dR_{abc}{}^d) + (T^b\nabla_bS^d)(T^c\nabla_cS_d) + ((T^b\nabla_bS^d)T_d)^2dt\Big|_{s=0}$$

$$= -\int_a^b (X^aT^bT^cX_dR_{abc}{}^d) + (T^b\nabla_bX^d)(T^c\nabla_cX_d) + ((T^b\nabla_bX^d)T_d)^2dt$$

Ahora bien, si X se descompone en la norma

$$(X^T)^a = X_aT^aT^a, \qquad (X^\perp)^a = X^a - (X^T)^a$$

entonces puede demostrarse directamente que

$$X^aT^bT^cX_dR_{abc}{}^d = (X^\perp)^aT^bT^c(X^\perp)_dR_{abc}{}^d$$

$$(T^b\nabla_bX^d)(T^c\nabla_cX_d) + ((T^b\nabla_bX^d)T_d)^2 = (T^b\nabla_b(X^\perp)^d)(T^c\nabla_c(X^\perp)_d).$$

Esto prueba que para la segunda variación, lo que importa son las variaciones propias ortogonales al campo tangente, por lo que podemos despreciar el tercer término en la variación, si nos restringimos a variaciones ortogonales.

El segundo término se puede reescribir como

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} (T^b\nabla_bX^d)(T^c\nabla_cX_d)dt = -\int_{a_{i-1}}^{a_i} (T^c\nabla_cT^b\nabla_bX^d)(X_d)dt + [(T^b\nabla_bX^d)X_d]\Big|_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Luego, sumando sobre el índice i se tiene que

$$\left.\frac{d^2\tau(\Gamma_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = -\int_a^b (X^aT^bT^cX_dR_{abc}{}^d) - (T^c\nabla_cT^b\nabla_bX^d)(X_d)$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}(\Delta_i(T^b\nabla_bX))^cX_c(a_i).$$

Si definimos la cantidad $I(X,Y)$ como

$$I(X,Y) = -\int_a^b (T^c\nabla_cT^b\nabla_bX^a + X^bT^cT^dR_{cbd}{}^a)Y_adt - \sum_{i=1}^{k-1}(\Delta_i(T^b\nabla_bX))^cY_c(a_i),$$

entonces las fórmulas obtenidas pueden ser reexpresadas como

$$\left.\frac{d^2\tau(\Gamma_s)}{ds^2}\right|_{s=0} = -I(X,X).$$

Observemos que el término integral en $I(X,X)$ es justamente el operador de Jacobi, y que para que γ sea un máximo de τ, debe ser $I(X,X) > 0$ para todo campo normal X. En estos términos, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ una geodésica, de tangente unitario, que une $p, q \in \mathcal{M}$. La condición necesaria para que γ maximize localmente el tiempo propio entre p y q, sobre todas las variaciones uniparamétricas, es que γ no tenga puntos conjugados.*

Demostración : Veamos que si existe un punto $q \in \mathcal{M}$ conjugado a p, interior a γ, entonces existe un campo normal Z^a tal que $I(Z,Z) < 0$. Sea $t_o \in (a,b)$ tal que $\gamma(t_0) = q$. Como q es un punto conjugado a p, existe un campo de Jacobi no trivial J a lo largo de $\gamma|_{[a,t_0]}$ tal que $J(a) = J(t_0) = 0$. Definimos un campo X como J en $[a, t_0]$, y 0 en $[t_0, b]$. Este campo es normal, y suave a trozos. Sea Y un campo normal a lo largo de γ tal que

$$Y^a = \psi(\Delta(\gamma'^c\nabla_c X)^a) = -\psi(\gamma'^c\nabla_c J^a)$$

donde $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ es una función que es no nula sólo en un entorno de t_0, y que vale 1 en t_0. $(\gamma'^c\nabla_c J^a)(t_0)$ es distinto de 0, ya que si no, el campo J debería ser idénticamente cero. Tomamos $Z_\epsilon = X + \epsilon Y$. Luego

$$I(Z_\epsilon, Z_\epsilon) = I(X + \epsilon Y, X + \epsilon Y) = I(X,X) + 2\epsilon I(X,Y) + \epsilon^2 I(Y,Y).$$

Como X satisface la ecuación de Jacobi en $[a,t_0]$ y $[t_0,b]$, entonces

$$I(X,X) = -(\Delta(\gamma'^b\nabla_b X))^c X_c(t_0) = 0$$

$$I(X,Y) = -(\Delta(\gamma'^b\nabla_b X))^c Y_c(t_0) = -Y^c(t_0)Y_c(t_0).$$

Obteniendo

$$I(Z_\epsilon, Z_\epsilon) = -2\epsilon Y^c(t_0)Y_c(t_0) + \epsilon^2 I(Y,Y).$$

Si se escoge ϵ suficientemente chico, será $I(Z_\epsilon, Z_\epsilon) < 0$. Esto implica que γ no maximiza la longitud temporal, como queríamos demostrar. (Q.E.D.)

3.5. El teorema de la divergencia geométrico

En las secciones anteriores, demostramos que una curva temporal que maximiza el tiempo propio entre dos puntos dados es una geodésica sin puntos conjugados. En esta sección relacionaremos estos teoremas con los resultados de Landau-Raychaudhuri para demostrar que la singularidad aparente $\theta \to -\infty$ que surge en estos modelos se corresponde precisamente con la presencia de puntos conjugados.

En lo que sigue, denotamos por γ a una geodésica temporal, con tangente V^a, y sea $p \in \gamma$. Consideremos la congruencia de todas las geodésicas temporales que pasan por p. Esta congruencia es claramente singular en p. Sean e_1^a, e_2^a, e_3^a una base ortonormal de vectores espaciales, paralelamente propagados a lo largo de γ (i.e. $V^a\nabla_a e_k^a = 0$). Sea η^a un vector de desviación de la congruencia. El vector de desviación satisface la ecuación de Jacobi, por lo que a lo largo de γ vale

$$\frac{d^2\eta^a}{d\tau^2} = -R_{cbd}{}^a\eta^b T^c T^d. \tag{3.10}$$

El valor de η^a en un valor del parámetro τ (tiempo propio) viene dado por las condiciones iniciales

$$\eta_0^a = \eta^a(0), \qquad \eta_0'^a = \frac{d\eta^a}{d\tau}(0).$$

Claramente $\eta^a(0) = 0$, dado que las geodésicas se tocan en el punto p, por lo que podemos describir η^a en términos de una matriz $A^a_{\ b}(\tau)$ mediante la siguiente fórmula

$$\eta^a(\tau) = A^a_{\ b}(\tau)\frac{d\eta^b}{d\tau}(0).$$

La ecuación de Jacobi para η^a implica que $A^a_{\ b}$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 A^a_{\ b}}{d\tau^2} = -R_{cfd}{}^a A^f_{\ b} T^c T^d$$

De las condiciones iniciales para η^a se deduce que

$$A^a_{\ b}(0) = 0, \qquad \frac{A^a_{\ b}}{d\tau}(0) = \delta^a_{\ b}.$$

Ahora bien, un punto $q \in \gamma$ es conjugado a p si y sólo si el vector de desviación se anula en q, y no es idénticamente nulo. Esto sólo ocurrirá si y sólo si $\det A = 0$ en q, y distinto de cero entre p y q. Podemos relacionar la matriz $A^a_{\ b}$ como el tensor $\nabla_b V_a$ de la siguiente manera. Por un lado

$$\frac{d\eta^\mu}{d\tau} = V^b\nabla_b\eta^\mu = V^b\nabla_b(e^\mu)_a\eta^a = (e^\mu)_a V^b\nabla_b\eta^a = (e^\mu)_a\eta^b\nabla_b V^a = \eta^b\nabla_b V^\mu.$$

En estos pasos, se tuvo en cuenta que $\mathcal{L}_V\eta = [V,\eta] = 0$. Por otro lado,

$$\frac{d\eta^a}{d\tau} = \frac{dA^a_{\ b}}{d\tau}\frac{d\eta^b}{d\tau}(0).$$

Entonces, igualando ambas expresiones, se tiene que

$$\frac{dA^a_{\ b}}{d\tau} = \nabla_c V^a A^c_{\ b}.$$

Esto implica que matricialmente

$$\nabla V = \frac{dA}{d\tau}A^{-1}.$$

En consecuencia,

$$\theta = \mathrm{Tr}\nabla V = \mathrm{Tr}[\frac{dA}{d\tau}A^{-1}] = \frac{d}{d\tau}(\log|\det A|)$$

De esta última ecuación se concluye que el determinante de A tiende a 0 en q si y sólo si $\theta \to -\infty$ en q. Esto implica que $\theta \to -\infty$ en q si y solo si q es un punto conjugado a p.

La noción descripta en el párrafo anterior involucra a dos puntos p y q de un espaciotiempo dado. Sin embargo, esta noción puede extenderse a la de un punto conjugado q a una hipersuperficie espacial Σ.

Definición 3.2. *Se dice que un punto q en una geodésica γ que pertenece a la congruencia de geodésicas ortogonales a una hipersuperficie espacial Σ es conjugado a Σ si existe un vector desviación η que no es cero en Σ pero se anula en q.*

Intuitivamente, un punto q es conjugado a Σ si dos geodésicas infinitesimalmente cercanas se tocan en q. Un argumento análogo al anterior muestra que $\theta \to -\infty$ en q. Esto nos lleva a la siguiente afirmación.

Teorema 3.3. *Teorema de Landau-Raychaudhuri:*

Dado un espaciotiempo (M, g) cuyo tensor de Ricci satisface la condición $R_{ab}V^aV^b \geq 0$ para todo vector temporal V^a y dada Σ una hipersuperficie espacial con $\theta = K < 0$ en un punto p pertenciente a Σ, entonces en un tiempo propio $\tau \leq 3/|K|$ existe un punto q conjugado a Σ a lo largo de la geodésica γ ortogonal a Σ y que conecta a q con p, asumiendo que dicha geodésica puede extenderse entre estos dos puntos.

Esta afirmación logra darle un significado geométrico a la singularidad de Landau-Raychaudhuri, sin embargo, no muestra en absoluto la presencia de una singularidad. En el siguiente capítulo, demostraremos que la singularidad tiene lugar si el espacio es globalmente hiperbólico, un concepto que describimos anteriormente y profundizaremos a continuación con el estudio de las superficies ácronas.

Capítulo 4

Teorema de singularidades en Relatividad General

4.1. Superficies ácronas

Un rol importante en la demostración de los teoremas de singularidad en la teoría de relatividad general es el concepto de superficie ácrona [15], tal como mencionamos en el capítulo 2. Recordemos que por definición, una superficie tridimensional es ácrona si dados dos puntos p y q arbitrarios en dicha superficie, no existe ninguna curva temporal conectando dichos puntos. Un ejemplo clásico de superficies ácronas es el siguiente.

Afirmación:

Sea $(M, g_{\mu\nu})$ una espaciotiempo orientable temporalmente y sea $S \subset \mathcal{M}$. Luego el borde del futuro cronológico de S, $\dot{I}^+(S)$ (si no es vacío) es una subvariedad C^0 ácrona, 3 dimensional, embebida en $\mathcal{M}$.

Demostración:

Sea $q \in \dot{I}^+(S)$. Pensando en términos del espacio tiempo de Minkowski, es intuitivo suponer que $I^+(q) \in I^+(S)$ y $I^-(q) \in M - I^+(S)$. Si esto fuera cierto, entonces asumamos que $\dot{I}^+(S)$ no es ácrono y nos conduce a una contradicción.

En efecto, si fuera no ácrono entonces existirían los puntos q y r conectados por una curva temporal, por lo cual $r \in I^+(q)$. Pero esto es claramente imposible dado que $I^+(S)$ es abierto y $\dot{I}^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset$. Es decir que la afirmación que S es ácrona sería cierta si pudiera probarse que $I^+(q) \in I^+(S)$ y $I^-(q) \in M - I^+(S)$.

Pero esto no es difícil de probar. Para ello, consideremos un punto p que se halla en el futuro de q, es decir, $p \in I^+(q)$. Entonces claramente q se halla en el pasado de p, es decir

$q \in I^-(p)$. Como $I^-(p)$ es abierto, entonces existe un entorno O de q contenido en $I^-(p)$. Dado que por definición q se halla en el borde de $I^+(S)$, tenemos $O \cap I^+(S) = \emptyset$ y entonces $p \in I^+[O \cap I(S)] \subset I^+(S)$. Esto demuestra que $I^+(q) \subset I^+(S)$. Similarmente, tenemos $I^-(q) \subset M - I^+(S)$, como queríamos demostrar. Se sigue entonces que S es ácrona.

Para obtener la estructura de la variedad de $\dot{I}^+(S)$, se introducen las coordenadas normales riemannianas x^0, x^1, x^2, x^3 en $q \in \dot{I}^+(S)$ y consideramos un entorno de q lo suficientemente chico tal que $\frac{\partial}{\partial x^0}^a$ es todo lugar temporal y cada una de las curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial x^0}^a$ entra en $I^+(q) \subset I^+(S)$ y $I^-(q) \subset M - I^+(S)$.

Pero esto implica que cada una de esas curvas integrales interseca $\dot{I}^+(S)$ y ya que $\dot{I}^+(S)$ es ácrono, tiene que intersecar precisamente un solo punto. Entonces, en cada vecindad, conseguimos una asociación uno a uno de los puntos de $\dot{I}^+(S)$ con coordenadas (x^1, x^2, x^3) caracterizando la curva integral del campo vectorial

$$\tau^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^a.$$

Más aún, dado que $\dot{I}^+(S)$ es ácrona, el valor de x^0 en el punto de intersección tiene que ser una función continua (en realidad C^1) de las coordenadas (x^1, x^2, x^3) y entonces el mapa mencionado desde una vecindad de q en $\dot{I}^+(S)$ en R^3 es un homeomorfismo en la topología inducida en $\dot{I}^+(S)$.

Repitiendo esta construcción para todo $q \in \dot{I}^+(S)$ se obtiene una familia C^0 compatible con los gráficos que cubren $\dot{I}^+(S)$ que hace que $\dot{I}^+(S)$ sea una subvariedad embebida. (Q. E. D.)

En la discusión que sigue, nos centraremos en los espaciotiempos globalmente hiperbólicos, dado que estos están en armonía con el concepto de predictibilidad.

Definición 4.1. *Dominio futuro de dependencia:*

Dado un conjunto ácrono sin borde S en un espaciotiempo (M, g) definimos el dominio futuro de dependencia, $D^+(S)$,como el conjunto de todos los puntos de M tal que toda curva causal inextensible que pase por p intersecta S.

De forma análoga se define el dominio pasado de dependencia $D^-(S)$.

Definición 4.2. *Se dice que un conjunto ácrono sin borde Σ en (M, g) es una* superficie de Cauchy *cuando $M = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$.*

Definición 4.3. *Espaciotiempo globalmente hiperbólico:*

Un espaciotiempo (M, g) se dice globalmente hiperbólico si existe una superficie de Cauchy Σ para el mismo.

Afirmación: Dado un espaciotiempo globalmente hiperbólico (M, g), una superficie de Cauchy Σ y un punto q no incluído en Σ, siempre existe una curva que maximiza el tiempo propio entre q y Σ.

Es necesario mencionar que, si bien estas hipótesis son razonables desde un punto de vista físico, existen soluciones que las violan. Dos ejemplos conocidos son el universo Anti de de Sitter y el de Godel. En particular, el universo Anti de Sitter contiene curvas temporalmente cerradas.

4.2. Teorema de Singularidades Cosmológicas

Trabajaremos en el siguiente teorema de singularidades cosmológicas [3]:

Teorema 4.1. *Dado un espacio tiempo (M, g) cuyo tensor de Ricci satisface la condición $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$ para todo vector temporal V^μ y dada Σ una hipersuperficie espacial con $\theta = K < 0$ en cualquier punto p perteneciente a Σ, entonces ninguna geodésica temporal se extiende al pasado más allá de un tiempo $\tau \leq 3/|K|$. Es decir que el espacio es geodésicamente incompleto con respecto a las geodésicas temporales.*

Cuasi-demostración:

Supongamos que la afirmación es falsa. Es decir que existe una curva λ que conecta Σ con un punto r más allá de dicho tiempo. Entonces por la afirmación anterior existe una curva de longitud máxima que conecta Σ con r. Esta es entonces una geodésica sin puntos conjugados entre Σ y r. Pero el teorema de Landau-Raychaudhuri implica que dicho punto conjugado existe en ese intervalo de tiempo. Por lo tanto, la curva λ no existe. (Q.E.D.)

4.3. El Teorema de Singularidades Cosmológicas es verdadero

La demostración expuesta anteriormente sobre el Teorema de Singularidades Cosmológicas en la Relatividad General tiene una falencia importante. Como demostramos en el capítulo 3, las geodésicas temporales sin puntos conjugados son aquellas que maximizan el tiempo propio entre todas las curvas diferenciables (al menos C^2). Surge entonces la posibilidad de que esta afirmación deje de ser válida si se consideran curvas solamente continuas y nunca diferenciables. Un ejemplo de dicha curva es el gráfico de la función de Cellerier (mencionada en la sección 2.1).

Sin embargo, demostraremos a continuación que las geodésicas sin puntos conjugados son las maximales aun dentro de este conjunto ampliado. Para tratar con este tipo de curvas en un espaciotiempo globalmente hiperbólico, es conveniente definir el siguiente espacio topológico:

definimos por $C(p,q)$, el espacio de todas las curvas causales futuras que comienzan en p y terminan en q. Tal como mencionamos en el ánalisis de las curvas en la sección 2.3, las curvas que difieren en una reparametrización son consideradas la misma curva (invariancia de "gauge"). Se puede dotar de una topología a $C(p,q)$ definiendo para cada abierto $U \in M$

$$O(U) = \{\lambda \in C(p,q), \lambda \subset U\}.$$

Claramente si U no contiene a p y q entonces $O(U) = \emptyset$. Un conjunto O se llama abierto si

$$O = \cup O(U)$$

Se puede demostrar que con estos ingredientes puede construirse una topología Haussdorf numerable. Pero el punto importante es el que contiene la siguiente definición.

Proposición 4.1. *Si (M, g_{ab}) es globalmente hiperbólico, entonces $C(p,q)$ es compacto para todo par $p,\ q \in M$.*

Interpretación: Esto equivale a decir que para toda sucesión infinita de curvas continuas λ_n en $C(p,q)$ se tiene una subsucesión convergente a una curva (punto) λ continua. Es decir, que $C(p,q)$ como espacio topológico contiene a todos sus puntos de acumulación. Dicho de otra forma, una sucesión de curvas continuas causales futuras converge a una curva continua causal futura.

Definición 4.4. *Definimos por $\widetilde{C}(p,q)$ el subconjunto de $C(p,q)$ cuyos elementos son suaves a trozos.*

Si se requiere trabajar con curvas nunca diferenciables, entonces es necesario definir la noción de longitud o tiempo propio para dichas curvas. El primer problema que surge es que la función tiempo propio $\tau(\lambda)$

$$\tau(\lambda) = \int \sqrt{-T_a T^a} dt,$$

no es continua en $\widetilde{C}(p,q)$. Si dicha función fuera continua y nunca diferenciable, entonces la propiedad de compacidad recién mencionada implica que para una curva continua μ podría considerarse una sucesión de curvas diferenciables $\lambda_n \to \mu$, y a partir de ello, definir el tiempo propio de esta curva continua mediante la fórmula

$$\tau(\mu) = \lim_{n\to\infty} \tau(\lambda_n).$$

Sin embargo, esto no es posible. Esto se debe a que existen curvas zigzag con valor $\tau(\gamma) \sim 0$ en cualquier entorno infinitesimal alrededor de μ en $C(p,q)$.

Sin embargo $\tau(\lambda)$ es una función semicontinua superior. Eso quiere decir que dado cualquier ϵ tan chico como deseemos se tiene que existe un $O \in \widetilde{C}(p,q)$ tal que para todo λ' in O vale

$$\tau(\lambda') < \tau(\lambda) + \epsilon.$$

Este hecho es algo técnico y se demostrará al final de esta sección. Sin embargo, tomando esta afirmación como cierta, la función tiempo propio puede extenderse a $C(p,q)$ mediante la definición

$$\overline{\tau}(c) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup\{\tau(\gamma) : \gamma \in B_\epsilon(c) \cap \widetilde{C}(p,q)\}.$$

Esta norma es semicontinua superior también. Dada $c \in C(p,q)$ podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que

$$\tau(\gamma) < \overline{\tau}(c) + \delta,$$

para toda $\gamma \in B_\epsilon(c) \cap \widetilde{C}(p,q)$.

Además si $c' \in B_\epsilon(c)$ con la definición se puede demostrar que

$$\overline{\tau}(c') < \tau(\gamma) + \delta, \qquad \gamma \in B_{\epsilon'}(c) \cap C(p,q),$$

por lo que

$$\tau(c') - \delta < \tau(\gamma) < \tau(c) + \delta, \qquad \tau(c') < \tau(c) + 2\delta,$$

lo que prueba la semicontinuidad superior.

En estos términos, puede probarse que las geodésicas temporales sin puntos conjugados maximizan el tiempo propio, de la siguiente manera. Las geodésicas son las que maximizan la distancia entre las curvas suaves a trozos. Sea esta geodésica γ. Ahora bien, asumamos que λ es no diferenciable y estrictamente superior

$$\tau(\gamma) + \epsilon_d = \tau(\lambda), \qquad 0 < \epsilon_d.$$

Pero entonces, achicando $\epsilon < \epsilon_d$ convenientemente elijamos curvas diferenciales h en las inmediaciones topológicas de λ tales que

$$\tau(\lambda) < \tau(h) + \epsilon.$$

Entonces,

$$\tau(\gamma) < \tau(h),$$

lo que contradice que γ sea geodésica.

Nos vemos forzados a admitir que a lo sumo

$$\tau(\lambda) = \tau(\gamma).$$

Ahora bien, sea q no perteneciente a γ pero si a λ. Si tomamos la geodésica γ_1 conectando r y q junto con γ_2 conectando q y s vale que

$$\tau(\gamma_1) + \tau(\gamma_2) \geq \tau(\lambda) = \tau(\gamma).$$

Pero γ es geodésica y esto es imposible.

Corolario 4.1. *El teorema de singularidad cosmológica es cierto, dado que las geodésicas son maximales incluso dentro de $C(p,q)$.*

Finalmente, consideremos ahora la demostración de la hipótesis fundamental sobre semicontinuidad superior.

Afirmación:

La función tiempo propio $\tau(p,q)$ definida anteriormente, es semicontinua superior.

Demostración:

Tomemos una curva arbitraria λ, la cual parametrizamos por su tiempo propio τ. Denotamos su vector tangente por u_a. Al parametrizarla por el tiempo propio vale que

$$u_a u^a = -1.$$

Las geodésicas espaciales ortogonales a u^a constituyen una superficie tridimensional. En un abierto suficientemente chico $U \in \mathcal{M}$ conteniendo a λ estas superficies van a constituir una foliación en U.

Definimos en cada superficie una función $F(p)$ como el valor del tiempo propio de λ en la intersección de la hipersuperficie con λ. Entonces $u_a = \nabla_a F$ y en λ vale la condición de norma uno. En general

$$g^{a,b} F_{;b} = (\partial_\tau)^a.$$

Ahora parametrizamos cualquier otra geodésica γ por F. Si descomponemos su vector tangente v^a de la forma

$$v^a = g^{a,b} F_{;b} + k^a, \qquad k^a f_{;a} = 0,$$

siendo k^a espacial, se sigue que

$$g(v^a, v^a) = g^{ab} F_{;a} F_{;b} + g^{ab} k_a k_b,$$

y por lo tanto

$$\sqrt{-g(v^a, v^a)} \leq \sqrt{-g^{ab} F_{;a} F_{;b}}.$$

Como en λ vale $g^{ab} F_{;a} F_{;b} = -1$, en un entorno podemos $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}$ suficientemente chico vale

que
$$\sqrt{-g^{ab}F_{;a}F_{;b}} < 1 + \epsilon/\tau(\lambda).$$

Por lo tanto, tenemos que en ese entorno $\mathcal{M}'$
$$\tau(\gamma) \leq \tau(\lambda) + \epsilon,$$
lo que prueba que $\tau(c)$ es semicontinua por arriba. (Q. E. D.)

Capítulo 5

Singularidades en el Modelo Inflacionario de Higgs

5.1. El lagrangiano del modelo estándar de partículas

En esta primera sección estudiremos el lagrangiano del modelo inflacionario en detalle a fin de poder aplicar el Teorema de Singularidades Cosmológicas.

Como es sabido, el lagrangiano del Modelo Estándar de Partículas L_{SM} viene dado por

$$L_{SM} = L_F + L_G + L_{SSB} + L_Y. \tag{5.1}$$

Aquí L_F es el lagrangiano fermiónico, L_G es el lagrangiano para los campos de gauge, L_{SSB} es el lagrangiano de ruptura espontánea de simetría y L_Y contiene los acoplamientos de Yukawa, los cuales dan lugar a los términos de masa para los fermiones. En el modelo inflacionario de Higgs se agrega la componente L_{HG} que describiremos a continuación, es decir, la acción completa de la teoría viene dada por

$$L_{SMG} = L_{SM} + L_{HG}. \tag{5.2}$$

El término L_{HG} describe el acoplamiento del Higgs con la gravedad y la acción tiene la forma siguiente

$$S_{HG} + S_{SSB} \supset \int d^4x\sqrt{-g}\left[f(h)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h - U(h)\right]. \tag{5.3}$$

Para el lagrangiano del modelo estándar, existe el denominado gauge unitario mediante el cual puede parametrizar al Higgs como $H = \frac{h}{\sqrt{2}}$. Esta acción se halla escrita en el llamado sistema de referencia de Jordan, donde podemos agrupar los términos acoplados al escalar de Ricci como

$$f(h) = (M_P^2 + \xi h^2)/2,$$

donde M_p es la masa de Planck y ξ es un parámetro.

El potencial del Higgs es el clásico:

$$U(h) = \frac{\lambda}{4}(h^2 - v^2)^2,$$

siendo λ la constante de autointeracción de las partículas del campo consigo mismas y v el valor de expectación del vacío, vev, $v = 246$ GeV. Este modelo se halla en concordancia con las observaciones si el parámetro ξ toma un valor numérico del orden $\xi \approx 49000\sqrt{\lambda}$. Un resultado conocido para acoplamientos mínimos con la curvatura es que existe siempre una transformación conforme local mediante la cual el término gravitatorio puede reducirse a uno de la forma estándar $\frac{M_p^2}{2}R$. Recordemos que se define como transformación conforme una transformación de la metrica de la forma

$$g_{\mu\nu} \to \widetilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \tag{5.4}$$

para la cual

$$\Omega^8 \det(g_{\mu\nu}) = \det(\widetilde{g}_{\mu\nu}), \qquad \Omega^4\sqrt{-g} = \sqrt{-\widetilde{g}}.$$

Los términos de la acción (5.3) se transforman de la siguiente manera. El término proporcional a la curvatura R viene transformado como

$$\sqrt{-g}f(h)R = \sqrt{-\widetilde{g}}\frac{f(h)}{\Omega^2}\left(\widetilde{R} + 3\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\widetilde{\nabla}_\nu \log\Omega^2 - \frac{3}{2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu \log\Omega^2\widetilde{\nabla}_\nu \log\Omega^2\right).$$

Por otro lado, se tiene que los términos cinéticos y potenciales para el Higgs se convierten en

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h = \frac{1}{\Omega^2}\sqrt{\widetilde{g}}\,\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h, \qquad \sqrt{-g}U(h) = \frac{\sqrt{-\widetilde{g}}\,U(h)}{\Omega^4}$$

donde los elementos con la tilde se refieren al sistema de referencia de Einstein. Teniendo en cuenta estas transformaciones, se tiene que los términos de acoplamiento entre el Higgs y la curvatura se convierten en

$$S^E_{HG} + S^E_{SSB} \supset \int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\Bigg\{\frac{f(H)}{\Omega^2}\left[\widetilde{R} + 3\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu\widetilde{\nabla}_\nu \log\Omega^2 - \frac{3}{2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}_\mu \log\Omega^2\widetilde{\nabla}_\nu \log\Omega^2\right]. \tag{5.5}$$
$$-\frac{\widetilde{\partial}_\mu h\widetilde{\partial}^\mu h}{2\Omega^2} - \frac{U(H)}{\Omega^4}\Bigg\}.$$

El segundo término de esta acción es una derivada total que puede ser descartada, dado que no afecta las ecuaciones de movimiento.

Hasta aquí, la transformación conforme es completamente arbitraria. Sin embargo, si se requiere que el término de curvatura sea canónico, entonces la transformación conforme viene dada en forma unívoca por

$$\frac{f(h)}{\Omega^2} \equiv \frac{M_P^2}{2},$$

lo que implica que

$$\Omega^2(h) = 1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2}. \tag{5.6}$$

En estos términos, la acción (5.5) viene dada por

$$S^E_{HG} + S^E_{SSB} \supset \int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\left(\frac{M_P^2}{2}\widetilde{R} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2/M_p^2}{\Omega^4}\right]\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu h \partial_\nu h - \frac{1}{\Omega^4}U(h)\right). \tag{5.7}$$

A partir de ahora obviaremos el tilde, dado que se trabajará únicamente en el sistema de referencia de Einstein.

La acción recién descripta se corresponde con la Relatividad General acoplada a un campo h con un término cinético no canónico. Sin embargo, puede hacerse una redefinición $h = h(\chi)$ tal que para el nuevo campo χ dicho término tome una forma estándar. A partir de la relación

$$\partial_\mu \chi = \frac{d\chi}{dh}\partial_\mu h,$$

puede verse inmediatamente que si se elige χ tal que

$$\frac{d\chi}{dh} = \sqrt{\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2/M_p^2}{\Omega^4}}, \tag{5.8}$$

entonces la energía cinética de este nuevo campo es canónica. La acción en el sistema de referencia de Einstein con este nuevo campo toma la forma simple

$$S^E_{HG} + S^E_{SSB} \supset \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_p^2}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - V(\chi)\right]. \tag{5.9}$$

El nuevo potencial $V(\chi)$ escrito en términos de χ resulta

$$V(\chi) = \frac{U(h(\chi))}{\Omega^4}. \tag{5.10}$$

La ecuación (5.8) puede resolverse de forma exacta, de donde se obtiene la evolución temporal del Higgs. El resultado final es

$$\frac{\sqrt{\xi}}{M_p^2}\chi(h) = \sqrt{1+6\xi}\sinh^{-1}(\sqrt{1+6\xi}u) - \sqrt{6\xi}\sinh^{-1}\left(\sqrt{6\xi}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right), \tag{5.11}$$

con $u = \frac{\sqrt{\chi}}{M_P}h$. Dado que $1 \ll \chi$, es válida la aproximación

$$1 + 6\chi \approx 6\chi.$$

Además se puede utilizar la igualdad $\sinh^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ reduciendo en estos términos a la ecuación (5.11) en la siguiente

$$\frac{\sqrt{\xi}}{M_p^2}\chi(h) \approx \sqrt{6\xi}\log(1+u^2)^{1/2}. \tag{5.12}$$

Entonces, definiendo $\alpha = \sqrt{2/3}$ y $\kappa = M_P^{-1}$, el factor conforme toma la forma

$$\Omega^2 = e^{\alpha\kappa\chi}. \tag{5.13}$$

El potencial del Higgs para el nuevo campo es entonces

$$V(\chi) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2}\left[e^{\alpha\kappa\chi} - \left(1 + \xi\frac{v^2}{M_p^2}\right)\right]^2 e^{-2\alpha\kappa\chi}. \tag{5.14}$$

Siendo que $v \ll M_P$, puede considerarse que

$$1 + \xi\frac{v^2}{M_P^2} \approx 1,$$

y entonces el potencial toma la forma final

$$V(\chi) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2}(1 - e^{-\alpha\kappa|\chi|})^2. \tag{5.15}$$

Es importante notar que este potencial alcanza un máximo

$$V_m = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2}. \tag{5.16}$$

Este hecho jugará un rol fundamental para el estudio de las singularidades cosmológicas del modelo.

5.2. ¿Cómo aplicamos los teoremas de singularidad al modelo inflacionario de Higgs?

Como vimos en la sección anterior 5.1, la acción del modelo inflacionario de Higgs puede mediante una transformación conforme adecuada ser expresada como

$$S_{HG}^E + S_{SSB}^E \supset \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_p^2}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - V(\chi)\right]. \tag{5.17}$$

Es decir, que se corresponde con un modelo de teoría de la relatividad general ordinaria acoplada mínimamente a un campo escalar con un potencial, cuya forma explícita fue hallada en la ecuación (5.15) y es

$$V(\chi) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2}(1 - e^{-\alpha\kappa|\chi|})^2. \tag{5.18}$$

Es importante notar que este potencial alcanza un máximo en

$$V_m = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2}, \tag{5.19}$$

y este máximo será fundamental en la exposición siguiente.

Ahora bien, el teorema de singularidades expuesto anteriormente no tiene validez alguna en este contexto. Esto se debe a que dicho teorema asume que se cumple la condición fuerte de energía (ver sección 2.4):

$$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0, \qquad V_\mu V^\mu = -1, \tag{5.20}$$

la cual se satisface en el contexto de la Relatividad General, dado que el tensor energía de momento de la materia $T_{\mu\nu}$ satisface

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq -\frac{1}{2}T, \qquad V_\mu V^\mu = -1.$$

Ahora bien, esta propiedad no es válida para este modelo. De hecho, el tensor energía momento para un campo escalar viene dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2}(g^{ab}\partial_a \chi \partial_b \chi + V(\chi)),$$

de donde se deduce, a partir de las ecuaciones de Einstein, que

$$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 8\pi \left[(\nabla_V \chi)^2 - \frac{V(\chi)}{2} \right].$$

Claramente, la presencia del potencial $V(\chi)$ en la última expresión hallada demuestra que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ no satisface la condición (5.20). De hecho, la última expresión puede tomar valores negativos, con valor mínimo V_m, siendo V_m el máximo valor que puede tomar el potencial. De acuerdo con el modelo con el que se trabaje, V_m puede estar acotado o no.

A pesar de estos inconvenientes, la presencia de singularidades puede ser analizada en presencia de campos escalares, teniendo en cuenta resultados clásicos sobre ecuaciones diferenciales [26], que serán mencionados a continuación.

5.3. Aspectos formales de la ecuación de Raychaudhuri en sistemas que violan la condición fuerte de energía

La ecuación de Raychaudhuri puede ser llevada a la forma descripta por los teoremas matemáticos de Fewster y Galloway [26]. Primero describiremos las consecuencias de dichos teoremas, que implica el estudio de la no existencia de soluciones globales de la ecuación de Riccati, que es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal de primer orden, inventada y desarrollada en el siglo XVIII por el matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), y luego identificaremos dicha ecuación con la de Raychaudhuri.

Proposición 5.1. *Dada la ecuación diferencial no lineal de primer orden y las condiciones iniciales siguientes*

$$\dot{z} = \frac{z^2}{q(t)} + p(t), \qquad z(0) = z_0, \tag{5.21}$$

siendo $p(t)$ y $q(t)$ continuas en $[0,\infty)$, y $q(t)>0$ en $[0,\infty)$, si además se satisface que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{q(t)} = +\infty \quad y \quad \lim_{T\to\infty} inf \int_0^T p(t)dt > -z_0$$

entonces esta ecuación no tiene solución en el intervalo $[0,\infty)$.

Demostración:

Supongamos que hay una solución $z(t)$ en $[0,\infty)$. Por hipótesis, existe un $t_1 \geq 0$ tal que

$$\int_0^t p(t')dt' > -z_0,$$

para todo t en el intervalo $[t_1,\infty)$. Al integrar la ecuación diferencial se obtiene que

$$z(t) = \int_0^t \frac{z(t')^2}{q(t')}dt' + \int_0^\infty p(t')dt' + z_0 > \int_0^t \frac{z(t')^2}{q(t')}dt', \quad \text{para} \quad t \geq t_1.$$

Introduciendo la función asociada

$$R(t) = \int_0^t \frac{z(t')^2}{q(t')}dt',$$

vemos que la última desigualdad puede expresarse como

$$z(t) \geq R(t). \tag{5.22}$$

Dado que por hipótesis $q(t)>0$ se deduce inmediatamente a partir de su definición que $R(t)$ es no negativo. Además, a partir de su definición y teniendo en cuenta la desigualdad (5.22), puede observarse directamente que

$$\dot{R} = \frac{z(t)^2}{q(t)} > \frac{R^2}{q}, \tag{5.23}$$

para $t \geq t_1$. Por consiguiente, tenemos $R(t)>0$ para todo $t>t_1$. Fijando cualquier $t_2>t_1$, se sigue al integrar (5.23)

$$\frac{1}{R(t_2)} \geq \frac{1}{R(t_2)} - \frac{1}{R(t)} = \int_{t_2}^t \frac{R}{R^2}dt > \int_{t_2}^t \frac{dt}{q}$$

para todo $t>t_2$.

Sin embargo, la parte derecha de la ecuación no tiene límite a medida que $t\to\infty$ y obtenemos una contradicción.(Q.E.D.)

Aquí, que no haya solución significa que $z(t)\to\infty$ a medida que $t_* < \infty$.

Proposición 5.2. *Dada la ecuación diferencial no lineal de primer orden y las condiciones iniciales siguientes*

$$\dot{y} = \frac{y^2}{s} + r(t), \qquad y(0) = y_0, \tag{5.24}$$

siendo $r(t)$ *continua en* $[0, \infty)$*, y* $s > 0$ *una constante. en* $[0, \infty)$*, si además se satisface que*

$$\lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T e^{-\frac{2ct}{s}} r(t)dt > -y_0 + \frac{c}{2}$$

entonces esta ecuación no tiene solución en el intervalo $[0, \infty)$.

Demostración:

Hagamos la siguiente transformación:

$$y(t) = e^{\frac{2ct}{s}} z(t) + c, \tag{5.25}$$

entonces la ecuación (5.24) se convierte

$$\dot{z} = \frac{z^2}{q(t)} + p(t), \qquad z(0) = z_0,$$

siendo

$$q(t) = se^{-\frac{2ct}{2}}, \qquad p(t) = \left(\frac{c^2}{s} + r(t)\right) e^{-\frac{2ct}{s}}.$$

Claramente, esta ecuación es de la forma de la ecuación (5.21) y además $\int_0^\infty \frac{dt}{q(t)} = \infty$. Por lo tanto la proposición 5.1 aplica si vale la condición

$$\lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T p(t)dt > -z_0,$$

la cual, expresada en términos de $y(t)$ mediante (5.25) resulta en

$$\lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T e^{-\frac{2ct}{s}} \left(\frac{c^2}{s} + r(t)\right) dt > -y_0 + c.$$

Resolviendo la integral proporcional a c^2/s esta condición se convierte en

$$\lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T e^{-\frac{2ct}{s}} r(t)dt > -y_0 + \frac{c}{2},$$

que es la hipótesis de nuestra proposición. La proposición 5.1 asegura entonces que no hay solución en el intervalo $[0, \infty)$, que es lo que queríamos demostrar. (Q.E.D.)

5.3.1. Generalización del Teorema de Singularidades Cosmológicas

Procedemos a estudiar la generalización del Teorema de Singularidades Cosmológicas de Hawking.

Afirmación: Sea $(\mathcal{M}, g)$ globalmente hiperbólico y para cualquier geodésica γ con velocidad unitaria, tal que $\gamma : [0, \infty) \to \mathcal{M}$, sea $r_\gamma(t) = R_{ab}V^aV^b$ siendo V_i el vector tangente a la geodésica. Si existe una superficie de Cauchy Σ tal que las geodésicas emanan ortogonalmente, y si tiene lugar la condición

$$\lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T e^{-ct/n-1} r(t)dt > \theta + c, \tag{5.26}$$

entonces todas las geodésicas temporales dirigidas al futuro son incompletas.

Demostración: Identificamos la ecuación de Raychaudhuri vista en la sección 3.8

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\theta^2}{2} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - r(t),$$

determinando $r(t)$ como $R_{ab}V^aV^b$, y si hacemos el cambio $\theta \to -y$ se transforma en la ecuación (5.24) de la proposición 5.2 de la sección anterior. La aplicación directa de esta proposición indica la presencia de puntos conjugados a tiempo finito, cuando se satisface la ecuación (5.26). Entonces, un razonamiento análogo al de la demostración del teorema de Hawking demuestra la afirmación. (Q.E.D.)

Basados en esta afirmación, consideremos el tensor de energía-momento, T_{ab}, en un modelo en el cual el potencial $V(\chi)$ alcanza un máximo V_m

$$T_{ab} = \nabla_a\chi\nabla_b\chi - \frac{g_{ab}}{2}(\nabla^c\chi\nabla_c\chi + V(\chi)).$$

De la ecuación de Einstein

$$R_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}R = 8\pi T_{ab},$$

puede deducirse que $r(t)$ es

$$r(t) = 8\pi\left((\nabla_\gamma\chi)^2 - \frac{V(\chi)}{2}\right).$$

Esta función $r(t)$ no necesariamente satisface la condición débil de energía ni tampoco la condición fuerte de energía (ver sección 2.4) debido a la negatividad de la contribución del potencial, ya que el tensor de Ricci puede ser negativo.

Tenemos la siguiente desigualdad:

$$-\frac{c}{2} + \lim_{T\to\infty} \inf \int_0^T e^{-ct/n-1} r(t)dt > -\frac{c}{2} - \frac{K}{c}, \quad \text{siendo} \quad K = V_m/2.$$

Como el miembro de la izquierda tiene un máximo en $c = \sqrt{K}$ vale que si $\theta < -K$ entonces es geodésicamente incompleto.

Entonces estamos en condiciones de realizar la siguiente afirmación sobre el modelo inflacionario de Higgs acoplado a la Relatividad General.

Afirmación:

Dado un universo globalmente hiperbólico descripto por el modelo inflacionario de Higgs tal que, en el sistema de referencia de Einstein, existe una superficie de Cauchy Σ de forma tal que en todo punto correspondiente a dicha superficie, se tiene que la expansión θ es tal que

$$\theta < -\frac{\lambda M_p^4}{2\xi^2},$$

entonces, dicho universo es geodésicamente incompleto para geodésicas temporales.
Notar que esta afirmación es una consecuencia directa de que el potencial mínimo cumple la igualdad $V_m = \lambda M_p^4/\xi^2$ para el modelo inflacionario de Higgs.

En consecuencia, dada la existencia de geodésicas incompletas podemos afirmar que existe una singularidad en el sistema de referencia de Einstein.

5.4. Formulación de valores iniciales

Una de las formas más usadas de modelar sistemas físicos es mediante una formulación de valores iniciales. Esto es: dadas las condiciones iniciales y una ecuación de evolución, se puede determinar únicamente el comportamiento de la evolución, si tal formulación existe. Otro punto de interés es si la evolución determinada, frente a pequeñas variaciones en sus condiciones iniciales, varía de forma pequeña en entornos cercanos a las condiciones iniciales. Si esto ocurre, se dice que la formulación de valores iniciales está bien condicionada. Esto es de interés físico, ya que, como las mediciones tienen precisión neta, se perdería el poder predictivo de la teoría si esta no fuese bien condicionada.

Una formulación de valores iniciales bien condicionada se da, por ejemplo, en la resolución de la trayectoria de una partícula que cumple las ecuaciones de Newton, tenemos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial dt^2} = F(x, \frac{\partial x}{\partial t}).$$

Sabemos por los teoremas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que dados valores iniciales arbitrarios x_0 y v_0 para un tiempo t_0 , existe una solución única x(t) en un intervalo finito alrededor de t_0 tal que la solución cumple $x(t_0) = x_0$ y $\frac{\partial x}{\partial t}(t_0) = v_0$. Más aún, la solución x(t) es una función continua respecto a los valores iniciales, esto es, pequeñas variaciones de x_0 y

v_0 dan pequeñas variaciones en la solución x(t), suficientemente cerca de t_0, es decir, está bien condicionado.

Un ejemplo de ecuación que no admite una formulación de valores iniciales bien condicionada es la ecuación de Laplace. Nos interesa saber si la Relatividad General admite una formulación de valores iniciales bien condicionada. Para el caso que estamos estudiando, sí. Enunciamos a continuación los teoremas ([27], [28], [29]) de Jean Leray (1906-1998), Yvonne Choquet-Bruhat (1923), Robert Geroch (1942)y Hans Ringstrom (1972) que nos permite realizar tal afirmación.

5.5. Teoremas sobre campos escalares en espacios curvos

Siguiendo a Leray, Choquet-Bruhat, Geroch y Ringstrom, podemos implementar varios de sus teoremas para mostrar que el sistema físico es un problema bien condicionado.

En los capítulos anteriores hemos considerado, para las ecuaciones de Einstein, problemas intrínsecos y globales en el espacio pero locales en el tiempo.

En esta sección damos las propiedades generales de la geometría Lorentziana global que usamos en el tiempo dinámica de Einstein. La mayoría de estos resultados generales se conocen desde hace mucho tiempo.

El uso de la geometría lorentziana global en la solución del problema de Cauchy para sistemas diferenciales hiperbólicos generales en variedades, fue introducido por Jean Leray en 1952 [27], donde definió la hiperbolicidad global estudiada en el Capítulo 2 de la presente tesis.

Posteriormente se introdujeron varias definiciones geométricas relacionadas con la causalidad (ver Capítulo 2) para estudiar los problemas globales en la dinámica relativista, especialmente por Penrose y por Hawking. Estas definiciones se han utilizado para demostrar el teorema de singularidades cosmológicas en el Capítulo 5 de la tesis.

Robert Geroch definió la noción fundamental de una superficie de Cauchy, estudiada en el Capítulo 2 de la tesis. Se ha discutido el impacto en la física de estas definiciones y se han formulado conjeturas para remediar la posible falta de causalidad exhibida por las soluciones de las ecuaciones de Einstein clásicas (no cuantificadas). La más importante de estas conjeturas, la conjetura de la fuerte censura cósmica, sigue siendo un tema de investigación activa.

Dados los datos iniciales de las ecuaciones de Einstein, existe un desarrollo hiperbólico global máximo. Este es un hecho fundamental sobre el problema de Cauchy en la teoría de la Relatividad General.

5.5.1. El campo escalar como única componente de materia.

Consideremos la formulación inicial de la Relatividad General acoplada a un campo escalar.

La data inicial consiste en una variedad tridimensional ácrona Σ dotada de una métrica riemanniana g_0 junto con un tensor covariante k_{ij}, y dos funciones φ_0 y φ_1 en Σ, que satisfacen

$$r - k_{ij}k^{ij} + (\mathrm{Tr}_g k)^2 = (\varphi_1)^2 + D_i\varphi_0 D^i\varphi_0 + 2U(\varphi_0), \tag{5.27}$$

$$\text{y} \quad D^j k_{ji} - D_i \mathrm{Tr}_g k = \varphi_1 D^i\varphi_0. \tag{5.28}$$

Aquí D^j es la conexión de Levi-Civita en Σ y r es la curvatura escalar (g_0, Σ), y los índices se suben y bajan con ayuda de la métrica g_0.

Puede pensarse a φ_0 como el valor del campo escalar en la superficie Σ y φ_1 como la derivada temporal del campo.

Ya que las ecuaciones son de segundo orden, estos valores deberían determinar la evolución del escalar. Dado el conjunto de datos, el problema que surge es hallar una variedad $\mathcal{M}$ en 4 dimensiones dotada de una métrica g y un mapeo $C^\infty(M)$ φ, tal que se satisfacen las ecuaciones de Einstein, junto con un mapeo $i : \Sigma \to M$ tal que $i^* : g \to g_0$ y $\varphi\, o\, i = \varphi_0$. Si en adición N es un vector temporal dirigido a futuro en Σ y K es la segunda forma fundamental $i(\Sigma)$, entonces $i^*(K) = k$ y $(N\varphi)\; o\; i = \varphi_1$.

El triple (M, g, φ) se conoce como el desarrollo de la condición inicial.

Si además $i(\Sigma)$ es una hipersuperficie de Cauchy en (M, g) entonces (M, g, φ) se dice que es un desarrollo globalmente hiperbólico de la data incial.

Surge entonces la pregunta de si dicho desarrollo existe. La respuesta viene dada por los siguientes teoremas obtenidos por Ringstrom [29].

Teorema 5.1. *Siempre existe un desarrollo globalmente hiperbólico* $(\Sigma, k, g_0, \varphi_0, \varphi_1)$ *que satisface los vínculos:*

$$r - k_{ij}k^{ij} + (Tr_g k)^2 = (\varphi_1)^2 + D_i\varphi_0 D^i\varphi_0 + 2U(\varphi_0),$$

$$y \quad D^j k_{ji} - D_i Tr_g k = \varphi_1 D^i\varphi_0.$$

El siguiente teorema de Ringstrom muestra que dos desarrollos hiperbólicos diferentes son subconjuntos de un mismo desarrollo.

Teorema 5.2. *Consideremos una data* $(\Sigma, k, g_0, \varphi_0, \varphi_1)$ *y dos desarrollos globalmente hiperbólicos* (M_a, g_a, φ_a) *y* (M_b, g_b, φ_b) *con las inclusiones* $i_a : \Sigma \to M_a$ *y* $i_b : \Sigma \to M_b$*. Entonces existe un desarrollo globalmente hiperbólico* (M, g, φ) *con una inclusión* $i : \Sigma \to M$ *y con mapeos suaves que preservan la orientación* $\psi_a : M \to M_a$ *y* $\psi_b : M \to M_b$*, que son difeomorfismos sobre sus imágenes, tales que* $\psi_a^* g_a = g$, $\psi_a^*\varphi_a = \varphi$ *y* $\psi_b^* g_b = g$, $\psi_b^*\varphi_b = \varphi$*. Además se tiene que* $\psi_a\, o\, i = i_a$ *y* $\psi_b\, o\, i = i_b$*.*

Un desarrollo globalmente hiperbólico (M, g, φ) se dice maximal si, para cualquier otro desarrollo globalmente hiperbólico (M', g', φ'), hay una inclusión $i' : \Sigma \to M'$ y un mapa suave que preserva la orientación $\psi : M' \to M$ tal que $\psi^* g = g'$, $\psi^* \varphi = \varphi'$ y $\psi \, o \, i' = i$.

La siguiente afirmación muestra que estos desarrollos maximales existen [29].

Teorema 5.3. *Dada una data (Σ, k, g_0, φ_0, φ_1) existe un desarrollo globalmente hiperbólico maximal, a menos de una isometría.*

La última afirmación se refiere a la estabilidad de la solución con respecto a cambios infinitesimales en las condiciones iniciales [29].

Afirmación: Sea ($M = \Sigma \times I$, g, φ) una solución de la Relatividad General acoplada a un campo escalar. Denotemos por (Σ, k, g_0, φ_0, φ_1) la data inicial inducida sobre $\{0\} \times \Sigma$ por la solución completa, y consideremos una secuencia (k_j, g_{0j}, φ_{j0}, φ_{1j}) de condiciones iniciales que convergen a (Σ, k, g_0, φ_0, φ_1) en la norma de Sobolev H^{l+1}, con $2l > n+2$ y $n+1$ la dimensión del espacio tiempo, las cuales satisfacen los vínculos inciales. Entonces existen dos valores de t_{1j} y t_{2j} tales que en $M_j = \Sigma \times (t_{1j}, t_{2j})$ existe una métrica lorenziana h_j y un escalar φ_j que satisfacen las ecuaciones de Einstein, y tales que la data inicial es (k_j, g_{0j}, φ_{j0}, φ_{1j}). Cuando $\tau \in I$, la sucesión (h_j, φ_j) converge a (g, φ) para j suficientemente largo.

Estas afirmaciones muestran que el problema de valores iniciales del sistema Einstein más un campo escalar, se halla bien condicionado.

Capítulo 6

Conclusiones

La presente tesis tiene por objeto el estudio de la presencia de singularidades cosmológicas en el modelo inflacionario de Higgs.

Partimos del estudio del lagrangiano del mencionado modelo para verificar que al resolver las ecuaciones de Einstein con el lagrangiano obtenemos que la condición fuerte de energía se viola: ya que detectamos un máximo en el potencial escalar. Este valor máximo del potencial implica que el tensor de Ricci puede ser negativo y eso no nos permite en principio poder aplicar el Teorema de Singularidades Cosmológicas de Hawking.

Estudiamos la generalización del Teorema de Singularidades Cosmológicas considerando el trabajo de Fewster y Galloway [1]. Este involucra las ecuaciones de Riccati, que son las ecuaciones diferenciales no lineales, y las asociamos con la ecuación de Raychaudhuri encontrando que la expansión de la congruencia es infinita, es decir, hay incompletitud de las geodésicas. Este resultado es un indicio de la presencia de una singularidad. Asumimos, que hay hiperbolicidad global (globalmente hiperbólico) por lo que se cumple la condición de causalidad fuerte. Aplicando los teoremas de Leray, Ringstrom, Choquet-Bruhat y Geroch: vemos que el sistema de Einsten junto con el campo escalar está bien condicionado.

En este intento de la generalización del Teorema de Singularidades Cosmológicas vemos que se permite aplicar los mismos a diversas teorías en donde, pareciera a simple vista, no se cumplen las condiciones de energía [15].

Cabe aclarar que indicamos que existe una singularidad en el escenario del sistema físico del lagrangiano cosmológico transformado conformemente (Frame de Einstein), y esta es aparente. Al aplicarse la transformación conforme al Frame original (Frame de Jordan), se aplica un cambio conforme que implica que no podemos demostrar que la singularidad ocurra también en el frame de Jordan [30]. Ya que, como sabemos, esto podría significar que las transformaciones conformes cambien la física a diferencia de las transformaciones de coordenadas: el campo escalar puede tener un mal comportamiento y el espaciotiempo ser regular.

Si el campo escalar no diverge hay una singularidad real, pero no podemos realizar tal afirmación si el campo escalar diverge en algún punto. Debido a esto, podemos concluir que existe una singularidad aparente ya que con estas hipotésis no nos alcanza para demostrar que sea una singularidad real, y que se encuentre también en el sistema de referencia original, es decir, el Frame de Jordan.

Cabe destacar que paralelamente al desarrollo de la presente tesis fue publicada una demostración de Fewster y Galloway, que agregando hipótesis adicionales y usando técnicas matemáticas más avanzadas, demuestran para un lagrangiano análogo que existe una singularidad real [31].

Por último, luego de resumir lo desarrollado en el presente trabajo, apoyado en los trabajos y herramientas matemáticas citados, queda pendiente para investigaciones futuras el estudio de aspectos que involucran campos escalares no acoplados mínimamente, como así también en la teoría de Brans-Dicke.

Apéndice A

Transformación Conforme

Dado un espaciotiempo $(\mathcal{M};\, g_\mu \nu)$, un reescaleo de la métrica de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \widetilde{g}_{\mu\nu} = \alpha^2 g_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

Se dice que es una transformación conforme, donde $\alpha = \alpha(x)$ es una función de las coordenadas, y está en el rango $0 < \alpha < \infty$. Esta transformación modifica la norma de los vectores tangentes, y por ende modifica longitudes; pero preserva la estructura causal del espacio, es decir, no modifica los conos de luz. Cabe aclarar que, en general, una transformación conforme no es un difeomorfismo. Esto es, la métrica $g_a b$ no es simplemente una escritura de $g_{\mu\nu}$ en otro sistema de coordenadas.

Se puede probar que para un espaciotiempo de dimensión N, valen las siguientes propiedades de transformación para el tensor de Riemann y sus contracciones.

$$\widetilde{R}^d_{abc} = R^d_{abc} - 2\nabla_{[a} C^d_{b]c} + 2C^e_{c[a} C^d_{b]e} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^d_{abc} =& R^d_{abc} + 2\delta^d_{[a} \nabla_{b]} \nabla_c \ln\alpha - 2g^{de} g_{c[a} \nabla_{b]} \nabla_e \ln\alpha + 2(\nabla_{[a} \ln\alpha)\delta^d_{b]} \nabla \ln\alpha \\ & - 2(\nabla_{[a} \ln\alpha) g_{b]c} g^{df} \nabla_f \ln\alpha - 2g_{c[a}\delta^d_{b]} g^{ef} (\nabla_e \ln\alpha)(\nabla_f \ln\alpha) \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{ac} =& R_{ac} - (n-2)\nabla_a \nabla_c \ln\alpha - g_{ac} g^{de} \nabla_d \nabla e \ln\alpha + (n-2)(\nabla_a \ln\alpha)\nabla_c \ln\alpha \\ & - (n-2) g_{ac} g^{de} (\nabla_d \ln\alpha)\nabla_e \ln\alpha \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\widetilde{R} = \alpha^{-2} R - 2(n-1) g^{ac} \nabla_a \nabla_c \ln\alpha - (n-2)(n-1) g^{ac} (\nabla_a \ln\alpha)\nabla_c \ln\alpha \tag{A.5}$$

Finalmente, por la definición del tensor de Weyl, vemos que C_{abc} no cambia por una tranformación conforme de la métrica

$$\widetilde{C}^d_{abc} = C^d_{abc} \tag{A.6}$$

Notar que esta última igualdad depende crucialmente de la posición de los índices. Por ejemplo, para el caso

$$\widetilde{C}^{d}_{abc} = \widetilde{g}_{de}\widetilde{C}^{e}_{abc} = \alpha^2 g_{de} C^{e}_{abc} = \alpha^2 C_{abcd} \tag{A.7}$$

Una ecuación para un campo Ψ se dice conformemente invariante si existe un número s $\in \mathcal{R}$ (llamado el peso conforme del campo) tal que Ψ es una solución con una métrica g_{ab} si y sólo si $\widetilde{\Psi} = \alpha^2 \Psi$ es una solución de la métrica $\widetilde{g}_{ab} = \alpha 2 g_{ab}$.

Bibliografía

[1] Stephen W. Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge University Press, 1973.

[2] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57, 1965.

[3] Stephen William Hawking. The occurrence of singularities in cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 294(1439):511–521, 1966.

[4] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pages 189–196, 1916.

[5] Alexander Friedman. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.

[6] Georges Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. In *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, volume 47, pages 49–59, 1927.

[7] Howard Percy Robertson. Kinematics and world-structure. *The Astrophysical Journal*, 82:284, 1935.

[8] Howard P Robertson. Kinematics and world-structure ii. *The Astrophysical Journal*, 83:187, 1936.

[9] Howard P Robertson. Kinematics and world-structure iii. *The Astrophysical Journal*, 83:257, 1936.

[10] Arthur Geoffrey Walker. On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):90–127, 1937.

[11] J Robert Oppenheimer and Hartland Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455, 1939.

[12] Amalkumar Raychaudhuri. Relativistic cosmology. i. *Physical Review*, 98(4):1123, 1955.

[13] Stephen William Hawking. The occurrence of singularities in cosmology. iii. causality and singularities. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 300(1461):187–201, 1967.

[14] Robert Geroch. Local characterization of singularities in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 9(3):450–465, 1968.

[15] Stephen William Hawking and Roger Penrose. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):529–548, 1970.

[16] Robert P Geroch. Singularities in closed universes. *Physical Review Letters*, 17(8):445, 1966.

[17] Robert M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, 1984.

[18] Roger Penrose. *Techniques in differential topology in relativity.* SIAM, 1972.

[19] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.

[20] Charles W Misner. The flatter regions of newman, unti, and tamburino's generalized schwarzschild space. *Journal of Mathematical Physics*, 4(7):924–937, 1963.

[21] José MM Senovilla. Singularity theorems in general relativity: Achievements and open questions. *arXiv preprint physics/0605007*, 2006.

[22] Roger Penrose. Structure of space-time. In *Battelle Rencontres*, pages 121–235, 1968.

[23] IM Khalatnikov, EM Lifshiftz, and VV Sudakov. Singularities of the cosmological solutions of gravitational equations. *Physical Review Letters*, 6(6):311, 1961.

[24] Lev Davidovich Landau and Eugenii Mikhailovich Lifshitz. *Teoría clásica de campos*, volume 2. Reverté, 1992.

[25] Dan A Lee. *Geometric relativity*, volume 201. American Mathematical Soc., 2019.

[26] Christopher J Fewster and Gregory J Galloway. Singularity theorems from weakened energy conditions. *Classical and Quantum Gravity*, 28(12):125009, 2011.

[27] Jean Leray. *Hyperbolic differential equations.* Institute for advanced study, 1953.

[28] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 14(4):329–335, 1969.

[29] Hans Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*, volume 6. European Mathematical Society, 2009.

[30] Salvatore Capozziello, Prado Martin-Moruno, and C Rubano. Physical non-equivalence of the jordan and einstein frames. *Physics Letters B*, 689(4-5):117–121, 2010.

[31] Peter J. Brown, Christopher J. Fewster, and Eleni-Alexandra Kontou. A singularity theorem for einstein–klein–gordon theory. *General Relativity and Gravitation*, 50(10):121, 2018.