

Conectividad de las unidades de flujo hidráulico y upscaling en la simulación de reservorios de agua y hidrocarburos bajo la aproximación de flujos monofásicos

Justo Andrés González Litardo

Tesis de licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2023

TEMA: Conectividad de las unidades de flujo hidráulico y upscaling en la simulación de reservorios de agua y hidrocarburos bajo la aproximación de flujos monofásicos

ALUMNO: Justo Andrés González Litardo

L.U. N°: 35/17

LUGAR DE TRABAJO: Grupo de Medios Porosos, FIUBA, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Alejandro Boschan

CODIRECTOR: Dr. Ing. Alejandro Otero

FECHA DE INICIACIÓN: Marzo de 2022

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo de 2023

Resumen

La simulación de reservorios es una herramienta esencial para estudiar los fenómenos de flujo y transporte en el subsuelo, siendo muy utilizada para aplicaciones en energía y medio ambiente. En general, es computacionalmente demasiado costoso realizar las simulaciones directamente sobre la malla fina, conocida también como modelo estático. Por ello es necesaria una etapa de cambio de escala (upscaling), que convierte la conductividad hidráulica de la malla fina $k(\mathbf{r})$ en una conductividad hidráulica efectiva K_{eff} definida sobre una malla gruesa de simulación (\mathbf{r} es el vector posición) o modelo dinámico. Como la conectividad de las componentes del subsuelo (unidades de flujo) que tienen mayor conductividad hidráulica es la que determina predominantemente la estructura de flujo en el reservorio, es crucial entender cómo varía la conductividad hidráulica efectiva en diferentes escenarios de conectividad. En esta tesis estudiamos, utilizando un enfoque estocástico, reservorios sintéticos 3D isótropos de 128^3 celdas, en los cuales $k(\mathbf{r})$ tiene una distribución lognormal, con media geométrica $K_g = 1$ y función de covarianza gaussiana. La implementación se realizó en el entorno de cómputo de alto desempeño TUPAC.

Los reservorios están caracterizados por los siguientes parámetros asociados a la conectividad: la varianza de la malla fina σ_f^2 (que define el contraste entre zonas de alta y baja conductividad hidráulica), la longitud de correlación espacial l_c (que define el granulado o “textura” de la heterogeneidad), y una estructura de conectividad (baja, intermedia, alta), que define la organización espacial de $k(\mathbf{r})$.

Analizamos cómo varían la función densidad de probabilidad de K_{eff} y sus momentos gaussianos, con la escala espacial utilizada para el upscaling, en función de estos parámetros de conectividad. Los resultados permiten extender, numéricamente, resultados teóricos previos para medios multigaussianos a un rango mucho más amplio de escenarios de conectividad.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores Alejandro Boschan y Alejandro Otero por darme la oportunidad de realizar mi tesis de licenciatura en su grupo, como así también a Iván y Cristian. Entre todos me proporcionaron sus conocimientos y experiencia en esta área de investigación, manteniendo siempre el mejor de los tratos.

Agradezco especialmente a mis padres Mónica y Justo, a mi hermano Víctor y al resto de mi familia, que me apoyaron desde el principio de mi carrera universitaria. En particular, sin la ayuda de mis padres el camino hubiera sido mucho más difícil. No puedo dejar de mencionar a mi novia Candela, que me acompañó tanto en los momentos de felicidad como en los duros, y a su familia, que también considero como mía.

Agradezco también a los amigos que conocí en la facultad, en especial a los que cursaron gran parte de la carrera conmigo. Ellos me ayudaron a no bajar los brazos y a alegrar las infinitas juntadas de estudio. Tampoco puedo olvidar a los amigos que formé hace varios años atrás y a día de hoy continuamos juntándonos. Gracias a ellos pude transcurrir todos estos años sin que mi día a día fuera únicamente el estudio.

Índice

Resumen	2
1. Introducción	6
1.1 Motivación	6
1.2 Aplicaciones	9
1.2.1 Medio ambiente y recursos hídricos: flujos en el subsuelo, contaminación y acuíferos	9
1.2.2 Explotación de reservorios de hidrocarburos	10
1.3 Estructura de la tesis	11
2. Elementos teóricos	12
2.1 Conductividad hidráulica	12
2.1.1 Definición - Ecuación de Darcy	12
2.2 Modelización de la heterogeneidad en el subsuelo	13
2.2.1 Distribución de probabilidad de conductividades hidráulicas asociada a la heterogeneidad	14
2.2.2 Correlación espacial de las conductividades hidráulicas: Variograma y longitud de correlación	18
2.3 Conectividad	20
2.4 Upscaling. Obtención de parámetros representativos.	22
2.4.1 Upscaling: Parámetros equivalentes, efectivos y pseudo-efectivos	23
2.4.2 Analogía entre la conductividad hidráulica efectiva (K_{eff}) y la conductividad eléctrica equivalente	24
2.4.3 Upscaling en medios multigaussianos lognormales	25
2.4.4 Upscaling global y local	27
2.4.5 Dependencia de K_{eff} con la escala de agregación λ que caracteriza la malla gruesa	28
2.5 Métodos numéricos para el upscaling	32
2.6 Objetivos	33
2.6.1 Preguntas abiertas en función de los resultados previos	33

3. Metodología	35
3.1 Generación de los reservorios sintéticos	36
3.1.1 Generación de medios multigaussianos	36
3.1.2 Obtención de las diferentes estructuras de conectividad	39
3.2 Cálculo de conductividad hidráulica efectiva K_{eff} (upscaling)	39
3.2.1 Refinamiento y error de truncamiento	41
3.3 Implementación en tupac	43
3.4 Diagrama de flujo de la simulación	44
4. Resultados	46
4.1 Distribuciones de K_{eff} (función de densidad de probabilidad de K_{eff})	46
4.2 Medias de K_{eff}	49
4.3 Varianza de K_{eff}	51
5. Discusión y conclusiones	52
6. Perspectivas	58
Bibliografía	59
Glosario	64

1. Introducción

1.1 Motivación

La estructura y composición de las formaciones subterráneas resultan de diversos procesos geológicos, mecánicos, y químicos, que pueden tener escalas espaciales muy diferentes. Los geólogos, a partir de ciertos datos, proyectan un mapa de las propiedades petrofísicas del reservorio (en particular de la conductividad hidráulica) con una alta resolución espacial y temporal. Este mapa está definido sobre una escala espacial soporte, que lo denominaremos malla fina o modelo estático. Resolver el flujo mono o multifásico en el reservorio utilizando esta malla fina suele ser demasiado costoso en términos de tiempos de cálculo de los simuladores, y es entonces necesario realizar un cambio de escala (upscaling en inglés) para transferir las propiedades petrofísicas a una malla gruesa de simulación (o modelo dinámico), en la cual sea factible realizar las simulaciones de flujo. Nos referiremos a la conductividad hidráulica definida sobre esta segunda malla como conductividad hidráulica efectiva, que será definida formalmente en la sección 2.4.

Por otro lado, los diferentes tipos de mediciones que se pueden realizar para caracterizar el reservorio (sísmica, testigos coronas/registros de pozo, ensayos de presión y producción, afloramiento) producen información que a veces no es continua, lo cual complejiza la caracterización en detalle de la heterogeneidad. En general, esta información se completa usando técnicas geoestadísticas en el marco de un enfoque estocástico que permite la estimación de incertidumbres. Los métodos multi y pluri-gaussianos permiten generar realizaciones de reservorios sintéticos a partir de parámetros geoestadísticos simples (varianza, variograma, longitud de correlación) [1]. Para una descripción más realista es necesario considerar las diversas unidades de flujo que componen el reservorio: en este trabajo nos referimos a unidad de flujo como un dominio o zona del reservorio que posee una conductividad hidráulica característica, por ejemplo, una arenisca puede ser una unidad de flujo y una arcilita otra diferente. Típicamente se asigna a cada unidad de flujo un valor característico de conductividad hidráulica, o bien una distribución de conductividades hidráulicas centrada en un valor característico de esa unidad de flujo. En la figura 1.1 se observa una distribución de conductividad hidráulica para un reservorio con dos unidades de flujo, una con una distribución de conductividad hidráulica alrededor de un valor característico más bajo (pico mayor de la izquierda, en azul) y otra con una distribución de conductividad hidráulica alrededor de un valor característico más alto (pico menor de la derecha, en negro).

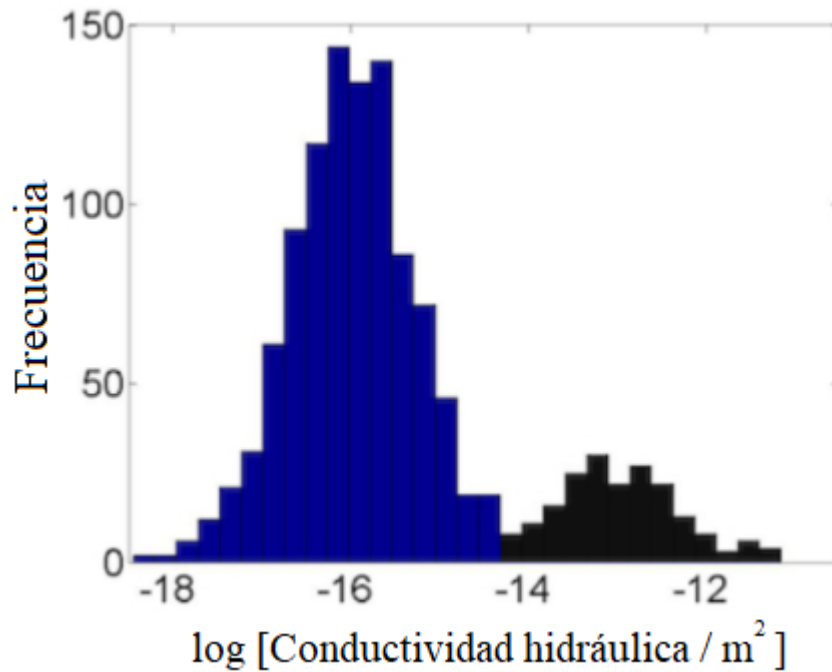


Figura 1.1: Distribución bimodal de conductividad hidráulica de un reservorio formado por dos unidades de flujo. Cada unidad de flujo presenta una distribución centrada alrededor de un valor característico [2].

Por otro lado, los métodos basados en imágenes de entrenamiento (MPS), que permiten replicar texturas realistas en múltiples unidades de flujo a partir de imágenes de muestra, han ganado atención debido al advenimiento de técnicas de inteligencia artificial [3]. Sin embargo, los métodos mencionados en general no tienen en cuenta la conectividad de las unidades de flujo de más alta conductividad hidráulica, entendiéndose por conectividad a la conexión espacial de conductividades hidráulicas altas y si éstas forman un canal preferencial para el flujo. En la figura 1.2 se ilustra el rol central de la conectividad: allí se observan dos mapas de conductividad hidráulica, para los cuales los indicadores geoestadísticos tradicionales no permiten distinguir diferencias (i.e. la existencia de canales tortuosos de alta conductividad hidráulica en el b), pero en los cuales el flujo y el transporte serán muy diferentes dada la existencia de dichos canales. En particular, en el cambio de escala desde la malla geológica fina a la malla gruesa de simulación, no se suele tener en cuenta la conectividad de las unidades de flujo de mayor conductividad hidráulica característica, produciéndose una pérdida de información que conlleva un aumento de incertidumbre en los pronósticos de flujo y transporte en el reservorio, y en particular en los pronósticos de producción.

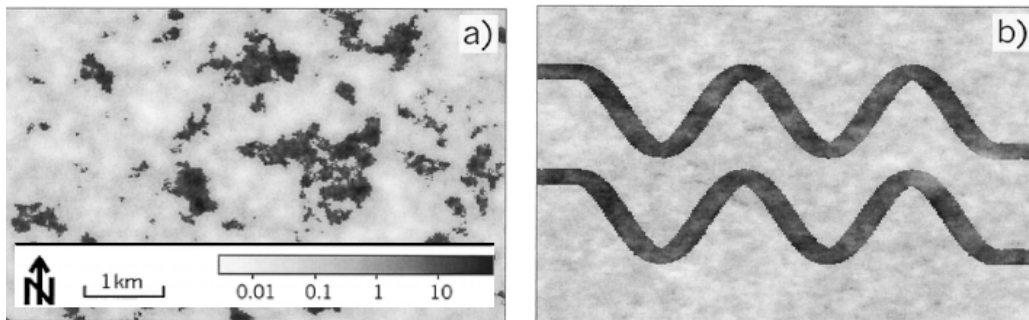


Fig. 1.2: Dos mapas de conductividad hidráulica en niveles de gris (en unidades de 100 mD) con histogramas y variogramas idénticos pero con conectividades de la unidad de flujo de alta conductividad hidráulica muy diferentes, lo cual impacta en propiedades de flujo y transporte muy diferentes. (a) Modelo en el cual las unidades de flujo de alta conductividad hidráulica están agrupadas en nódulos aislados (modelo multigaussiano). (b) Modelo con unidades de flujo de alta conductividad hidráulica formando canales tortuosos [4].

Por ejemplo, en un reservorio de uso comercial con una distribución de conductividad hidráulica como la de la figura 1.1, será la organización espacial de la unidad de flujo indicada en color negro (pico de la derecha), y en particular su conectividad, la que determine primordialmente flujo y transporte en el reservorio.

En los últimos años se ha buscado caracterizar la relación de la conductividad hidráulica efectiva con diferentes indicadores y métricas de conectividad [5]. Zarlenga y otros [6] estudiaron la influencia de la conectividad sobre la conductividad hidráulica efectiva usando una transformada [7] que permite modificar la estructura de conectividad manteniendo intactos el histograma y el variograma (por ejemplo permutar espacialmente conductividades hidráulicas intermedias con altas). En este marco de caracterización de conectividad, se han estudiado diferentes indicadores o métricas de conectividad tanto estáticas como dinámicas, y para flujo o transporte [5,8]. El equipo de trabajo en el cual se desarrolló esta tesis, compuesto por investigadores del Grupo de Medios Porosos FIUBA y del Centro de Simulación Computacional (CSC-CONICET), ha investigado esta temática desde 2010.

En trabajos previos de este grupo [9] se ha estudiado la dependencia de las distribuciones de conductividad hidráulica efectiva con la resolución espacial del modelo en reservorios heterogéneos lognormales y binarios. Se mostró que, para estos últimos medios, la distribución de conductividad hidráulica depende fuertemente de la escala, y que puede incluso ser bimodal. Entonces no es trivial asumir que su valor medio es representativo para caracterizar la distribución, como se hace frecuentemente en la literatura; como así también que su convergencia a una distribución unimodal (en la cual el valor medio es realmente representativo) depende mucho de la cercanía al umbral de percolación de las unidades de flujo o componentes de mayor conductividad hidráulica, cuestión íntimamente ligada al tema de la conectividad. En otro trabajo [10], se estudiaron diferentes formulaciones de conductividad hidráulica efectiva con enfoque multiescala [10], y en un tercer trabajo [11], se analizó la interrelación entre percolación y conectividad en 2D y 3D, generando diferentes estructuras de conectividad y utilizando la identificación de clusters de CONNEX3D [12].

Por los motivos expuestos, caracterizar la influencia de la conectividad en el proceso de obtención de la conductividad hidráulica efectiva (upscaling) es de central importancia para cualquier aplicación que requiera la resolución de flujo y transporte en un reservorio, lo cual motiva el presente trabajo de tesis.

1.2. Aplicaciones

1.2.1 Medio ambiente y recursos hídricos: flujos en el subsuelo, contaminación y acuíferos

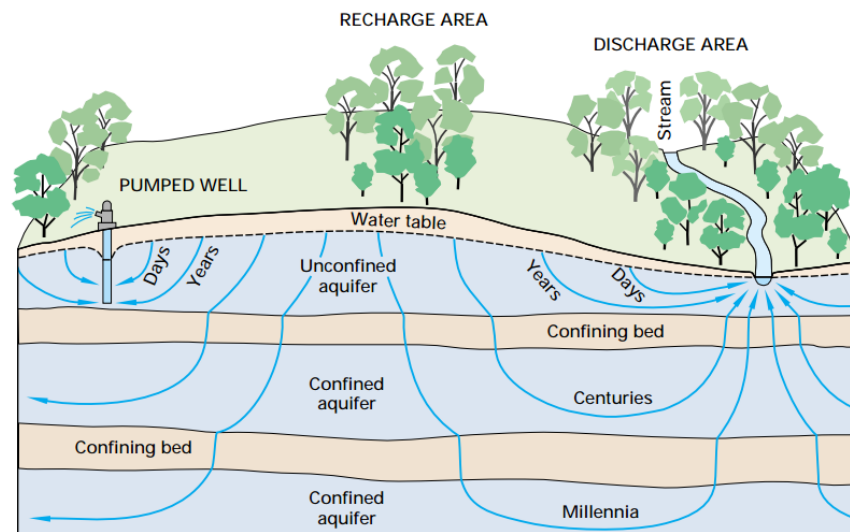


Figura 1.3: El flujo en sistemas acuíferos varía ampliamente en longitud, profundidad y tiempos, desde los puntos de recarga a los puntos de descarga [13]. Caracterizar el flujo con baja incerteza es importante para varias actividades sanitarias, las cuales influyen en la vida cotidiana. Tomado de Winter y otros (1998) [73].

El agua subterránea representa una fracción significativa de la masa total de agua existente en los continentes, y se aloja en general en los acuíferos bajo la superficie del terreno. Los acuíferos más extensos pueden alcanzar un millón o más de kilómetros cuadrados (como el Acuífero Guaraní). El flujo en el subsuelo depende fuertemente de la heterogeneidad del medio, presente en escalas espaciales y temporales muy diferentes (Fig 1.3). La caracterización de la heterogeneidad es una tarea difícil y costosa debido a la muy limitada información que se posee sobre el subsuelo. Al mismo tiempo, resulta crucial en cuestiones sanitarias predecir con baja incerteza el flujo y transporte (por ejemplo de un contaminante dañino para la salud) para salvar vidas. Respecto al almacenaje de desechos contaminantes (búsqueda de repositorios seguros para residuos nucleares o secuestro de dióxido de carbono), suelen utilizarse sitios subterráneos rocosos de conductividad hidráulica extremadamente baja (Fig 1.4a). Estos sitios pueden fracturarse (Fig 1.4b), produciéndose filtraciones riesgosas para las poblaciones cercanas. Caracterizar las estructuras de flujo en el subsuelo, cuantificar la conectividad y estimar conductividades hidráulicas efectivas, es central para cuantificar riesgos y consecuencias de este tipo de almacenamiento, como así también para estimar tiempos de respuesta requeridos para resolver eventos peligrosos.

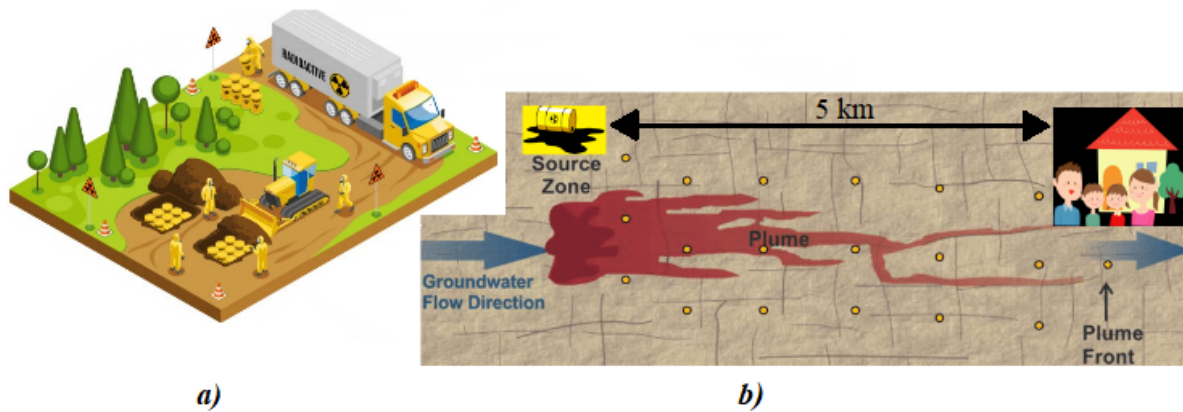


Figura 1.4: a) Almacenamiento de residuos peligrosos o radioactivos (arsénico, mercurio) en un entorno profundo subterráneo. b) Si bien las estructuras geológicas que contienen estos entornos se asumen geológicamente estables durante mucho tiempo, las barreras artificiales (barreras formadas por el hombre) que los constituyen podrían fracturarse, permitiendo la filtración y generando entonces riesgos para poblaciones cercanas.

Un ejemplo más concreto de la importancia de la caracterización de la heterogeneidad es el de los acuíferos kársticos. Se estima que estos acuíferos proveen el 25% del suministro mundial de agua potable. En particular, los sistemas kársticos dan lugar a acuíferos extremadamente heterogéneos. El agua en los conductos puede llegar a fluir con velocidades de hasta varios kilómetros al día, por lo tanto pueden ser afectados rápidamente por precipitaciones y sequías, volviéndose extremadamente vulnerables a la contaminación. Las consecuencias de estos factores pueden ser desastrosas para la vida e infraestructura. Como casos reales se menciona el de la ciudad de Walkertown, Canadá, en la cual se distribuyó agua desde un acuífero kárstico sin tener en cuenta a qué velocidad estaba fluyendo el agua en el subsuelo. La subestimación de los riesgos involucrados resultó en la contaminación del agua de la canilla, que llevó a la intoxicación de más de 2000 personas y al fallecimiento de 7. Esto es una cantidad no despreciable, considerando que Walkertown tenía aproximadamente 5000 habitantes durante la contaminación. Otro accidente es el del subterráneo de Engelberg, Suiza. El túnel del mismo se inundó con agua de un acuífero kárstico debido a una mala predicción del flujo, causando daños importantes en varios niveles.

1.2.2 Explotación de reservorios de hidrocarburos

Los softwares comerciales como Eclipse, PumaFlow o TNavigator, que se utilizan para la simulación de reservorios de hidrocarburos, no incluyen en sus cálculos información sobre la conectividad de las unidades de flujo [14]. En particular, dichos simuladores no la tienen en cuenta en el procedimiento de upscaling, lo cual introduce incertidumbre en la determinación de los parámetros petrofísicos efectivos, y, por ende, en los pronósticos de producción, y finalmente, en la eficiencia de recuperación. Preux [15] propuso una metodología para cuantificar la pérdida de información de conectividad al pasar de la malla fina a la gruesa durante el upscaling. Este método permite seleccionar el procedimiento de upscaling más eficiente para un modelo de reservorio dado dentro de un cierto abanico de posibilidades, y se basa en hallar el camino de “menor resistencia” entre un pozo inyector y

uno productor que tenga aproximadamente las mismas características geométricas en la malla fina que en la malla gruesa.

1.3 Estructura de la tesis

La presentación de la tesis está organizada de la siguiente forma:

- En el capítulo 2 se introducen los elementos teóricos que sirven de base en el presente trabajo. Se presentan las magnitudes relacionadas con el fenómeno de flujo en el subsuelo, con elementos de estadística, de modelización de la heterogeneidad y de caracterización de la conectividad. Se describe el proceso de upscaling, junto con la obtención de parámetros efectivos y se enuncian las ecuaciones utilizadas. A continuación se desarrollan los métodos numéricos comúnmente utilizados para la resolución del flujo. Finalmente, se presentan los objetivos de la tesis.
- En el capítulo 3 se desarrolla la metodología numérica, en particular, los métodos numéricos utilizados para generar reservorios sintéticos, bajo un enfoque estocástico, el cálculo de la conductividad hidráulica efectiva, y la implementación numérica en el entorno de alto desempeño (cluster) TUPAC.
- En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones. Dichos resultados se comparan con predicciones teóricas previamente expuestas en el capítulo 2.
- En el capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones del trabajo.
- Finalmente, en el capítulo 6 se discuten las perspectivas del trabajo.

2. Elementos teóricos

Inicialmente se presentan algunos de los elementos característicos para la descripción del flujo en el subsuelo, como la conductividad hidráulica, que es la propiedad de mayor interés en este trabajo. La variabilidad espacial de la conductividad hidráulica da lugar a la heterogeneidad, que es analizada a continuación. Luego se presenta una descripción de la conectividad, junto con sus tipos de estructuras y cómo éstas afectan al flujo del subsuelo. Se describe el proceso de upscaling con algunos de los principales enfoques y métodos de obtención de propiedades efectivas. Los métodos numéricos utilizados para la obtención de estos parámetros son explicados en la siguiente sección. Por último, se presentan los objetivos de la tesis.

2.1 Conductividad hidráulica

2.1.1 Definición - Ecuación de Darcy

Dos propiedades petrofísicas fundamentales para la caracterización de reservorios son la porosidad y la permeabilidad. La primera es la relación volumétrica entre el volumen de poros ocupado por fluidos (hidrocarburos, agua y otros) y el volumen total de roca considerado (por ejemplo el volumen total del reservorio: volumen de fluido más volumen de roca sólida). La porosidad se utiliza para determinar el volumen de hidrocarburos y la saturación de fluidos. En cambio, la permeabilidad (a veces tratada en la forma de conductividad hidráulica) es una propiedad dinámica que se define como la capacidad de un medio (homogéneo o heterogéneo) para permitir el paso de fluidos.

La permeabilidad relaciona la velocidad media del fluido que circula por un medio heterogéneo con la diferencia de presiones entre dos puntos mediante la ecuación experimental de Darcy. En su versión diferencial más simple, para un flujo horizontal (exento del efecto gravitatorio) unidimensional, estacionario y con viscosidad y densidad constante en un medio isótropo, se puede escribir como:

$$q = - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.1)$$

donde

- q : es la velocidad media del fluido (relación entre el caudal y el área normal a la dirección del flujo).
- k : la permeabilidad intrínseca.
- μ : la viscosidad del fluido.
- p : la presión.
- x : la coordenada axial.

Cuando la permeabilidad varía según la dirección espacial que se considere, se dice que el medio es anisótropo y la ecuación de Darcy toma la forma tensorial:

$$\bar{q} = - \frac{1}{\mu} \bar{K} \cdot \bar{\nabla} p \quad (2.2)$$

donde \bar{K} es el tensor de permeabilidades.

La permeabilidad tiene unidades de $[L]^2$. En la industria petrolera, generalmente se utiliza el Darcy. Por ejemplo, un reservorio tiene una permeabilidad de 1 Darcy si un fluido de 1 centipoise (cp) de viscosidad se mueve a una velocidad constante de 1 cm/seg cuando se aplica un gradiente de presión de 1 atm/cm. Como el Darcy es una unidad muy grande para tener un uso práctico se suele utilizar el mili-darcy. Para areniscas, se considera como permeabilidad alta un valor de 1000 mD, y como baja un valor de 10 mD, mientras que en el caso de rocas carbonáticas los valores son 1 mD y 0.01 mD, respectivamente [16].

Otra característica importante en el flujo de fluidos subterráneos, es lo que se conoce como altura piezométrica (hydraulic head en inglés), y se define como la elevación de la superficie del fluido en un pozo en relación con un punto de elevación de referencia, por ejemplo el nivel del mar. La relación entre la altura piezométrica (análoga a la presión) y la conductividad hidráulica (análoga a la permeabilidad), determina el flujo. Si se tiene en cuenta la altura piezométrica, la ecuación de Darcy queda expresada de la siguiente forma:

$$Q = -K' \frac{dh}{dL} A \quad (2.3)$$

y expresa que el caudal volumétrico Q [L^3/T] es proporcional a: la diferencia de la altura hidráulica dh [L] a través del intervalo de longitud dL [L]; al área de la sección transversal perpendicular a la dirección del flujo [L^2]; y al coeficiente de proporcionalidad, K' [L/T], conocido como la conductividad hidráulica, que tiene en cuenta la restricción al flujo por el medio sólido, la densidad y la viscosidad del fluido que lo atraviesa. El signo negativo mantiene la consistencia de la ecuación si se considera al flujo como positivo en la dirección del decrecimiento de la altura piezométrica.

2.2 Modelización de la heterogeneidad en el subsuelo

A raíz de que en muchos casos no se obtiene información exacta del subsuelo, se ha adoptado mucho, en los últimos años, un enfoque estocástico [1], en el cual la distribución de propiedades petrofísicas del reservorio, en particular la conductividad hidráulica, está definida a través de la realización de un proceso aleatorio. Se le llama “realización”, entonces, a una imagen del reservorio (lo llamaremos también “medio”) que se genera estocásticamente, y que respeta ciertos parámetros geoestadísticos (media, varianza, longitud de correlación) en una escala soporte definida previamente como malla fina o modelo estático, conformadas por celdas de dimensión lineal Δ . Esta realización puede ser luego modificada con datos de campo obtenidos a través de diversas técnicas de prospección geofísica, con el objetivo de reproducir condiciones físicas reales del reservorio.

Cada una de las realizaciones generadas será una “muestra” del reservorio o medio (Fig 2.1). Este enfoque evita generar una única imagen del subsuelo (que sería probablemente incorrecta debido a que la información es muy escasa), brindando una descripción estadística que permite, como característica principal, estimar el grado de incerteza en la determinación de las propiedades efectivas (conductividad hidráulica efectiva). En general se acepta que cuanto mayor es el número de realizaciones que se utiliza, menor es dicha incerteza. Para esto, los modelos de reservorio pueden ser generados sintéticamente a partir de diferentes algoritmos numéricos con el objetivo de reproducir la heterogeneidad del subsuelo.

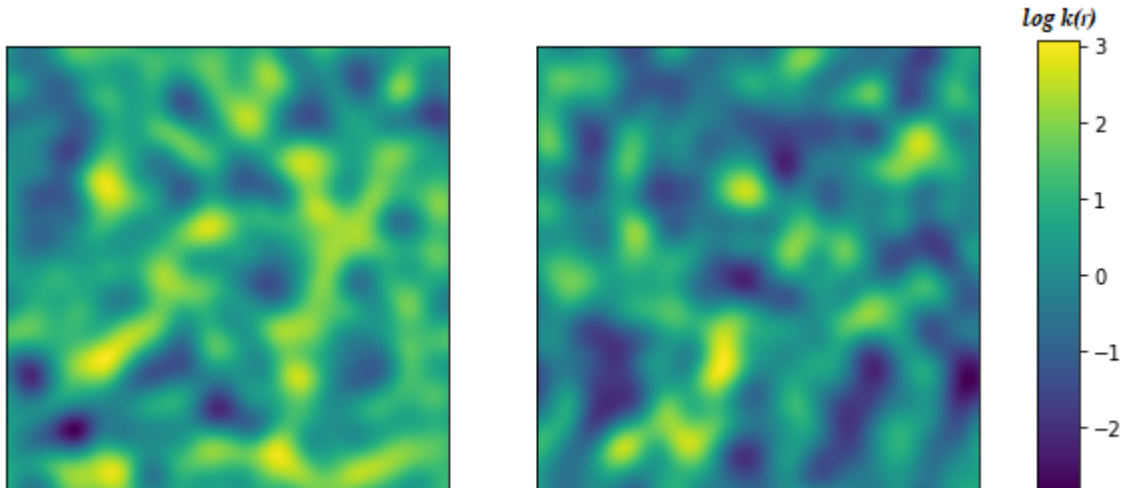


Figura 2.1: Ilustración del método estocástico. Los dos mapas de conductividad hidráulica, graficados utilizando el logaritmo de la conductividad hidráulica, corresponden a dos realizaciones (de tamaño lineal 128Δ) de un medio heterogéneo con iguales parámetros geoestadísticos. Este método permite tener en cuenta la incertidumbre asociada a la imposibilidad de conocer la composición exacta del subsuelo, y estimar una incerteza asociada en la determinación de las propiedades efectivas.

Los métodos principales pueden clasificarse en tres tipos:

- Modelos basados en píxeles, donde las propiedades del reservorio son asignadas a cada punto del espacio del reservorio, o píxel, individualmente [17, 18].
- Modelos basados en objetos, donde el modelo es generado al ubicar cuerpos geológicos [18], u objetos, dentro del dominio.
- Modelos basados en la replicación de los procesos geológicos sedimentarios a través de métodos numéricos [19][20].

En esta tesis se utilizaron modelos basados en píxeles.

Se pueden utilizar distintos algoritmos para generar medios aleatorios discretos o continuos. Los métodos varían en versatilidad, flexibilidad, precisión y costo de procesamiento y almacenamiento. Los medios generados con estos métodos tienen distintos parámetros de entrada y difieren en el grado de aleatoriedad logrado. Los métodos numéricos asociados a la generación de medios en estos modelos se discutirán en el capítulo 3.

2.2.1 Distribución de probabilidad de conductividades hidráulicas asociada a la heterogeneidad

Law [21] fue uno de los primeros en analizar estadísticamente la distribución espacial de conductividades hidráulicas y, a partir de analizar reservorios formados por areniscas, determinó que la función de densidad de probabilidad de la conductividad hidráulica (PDF por sus siglas en inglés) era aproximadamente lognormal (o log-gaussiana) (Fig 2.2a), es decir, el logaritmo de la conductividad hidráulica tiene una distribución gaussiana (Fig 2.2b). En esta tesis se describe a las distribuciones de conductividad hidráulica en todas las escalas (la conductividad hidráulica $k(\mathbf{r})$, con \mathbf{r} el vector posición, definida sobre la malla fina; y la

conductividad hidráulica efectiva K_{eff} definida sobre la malla gruesa de simulación) utilizando la PDF. Nótese que al ser una función de densidad de probabilidad entonces es un histograma normalizado de los valores de conductividad hidráulica (o bien de su logaritmo), o sea, su integral sobre todos los valores de conductividad hidráulica posibles equivale a la unidad.

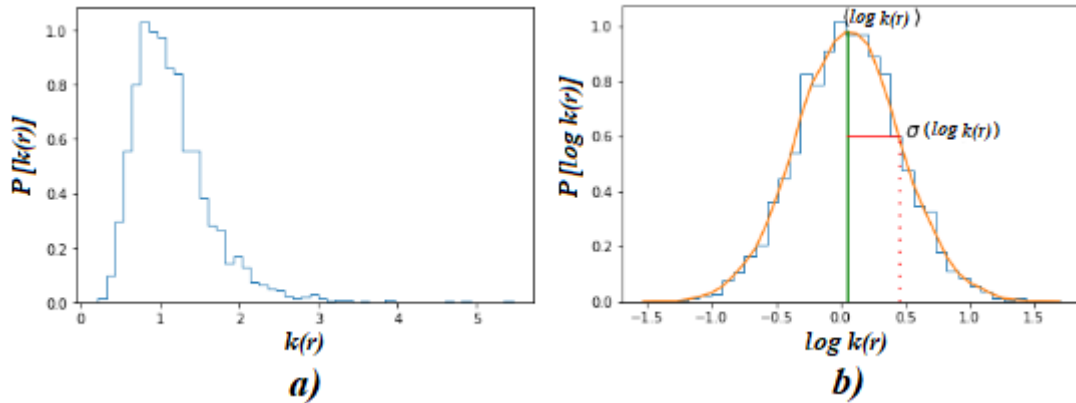


Figura 2.2: PDF de conductividad hidráulica (a) y de su logaritmo (b). La media aritmética del logaritmo de la conductividad hidráulica se simboliza por $\langle \log k(r) \rangle$, mientras que $\sigma[\log k(r)]$ representa la desviación estándar de $\log(k(r))$ (más del 68% de los valores de $\log(k(r))$ están dentro del rango $[-\sigma, +\sigma]$), siendo que $\sigma^2[\log k(r)] \equiv \sigma_f^2$ es su varianza.

Al trabajo de Law [21] le siguieron otras investigaciones y se corroboró que en general la función lognormal se aproxima a los datos experimentales [22] (Fig 2.3), aunque también se encontraron muchos casos de distribuciones de otros tipos [23].

El modelado de la PDF de conductividad hidráulica sobre la malla fina es determinante para poder caracterizar correctamente el flujo en el reservorio. Existen trabajos en que se estudia el efecto de la PDF para funciones de probabilidad de la familia de funciones ya nombradas [24- 28].

Los geólogos suelen modelar los reservorios identificando un número de unidades de flujo, entendiendo por unidad de flujo a un dominio que posee las mismas características en función de un cierto objeto de análisis. Así por ejemplo se suelen utilizar hidrofacies (asociada al flujo de agua), biofacies (facies con asociación de fósiles), sismofacies (facies con respuesta sísmica característica), u otras.

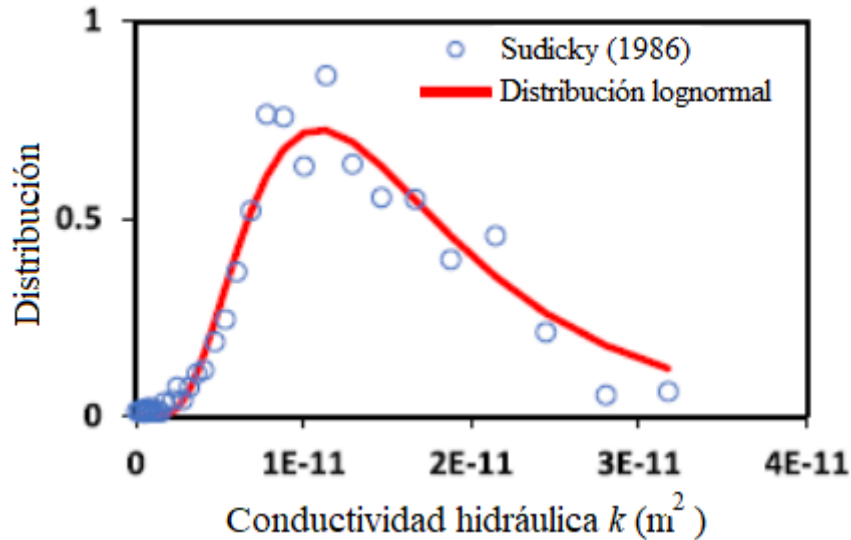


Figura 2.3: Muestras experimentales de conductividad hidráulica obtenidas en el acuífero Borden (Canadá). Los resultados se ajustaron a una distribución lognormal. La distribución tiene una media geométrica de $K_g=1.5 \times 10^{-11} \text{ m}^2$ y una desviación estándar de $\sigma_r=0.56$, siendo $6.1 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ y $3.2 \times 10^{-11} \text{ m}^2$ los valores mínimos y máximos de conductividad hidráulica, respectivamente. Tomado de Sudicky (1986) [22].

En principio, para el modelado de la PDF de conductividad hidráulica, se puede considerar una distribución unimodal (como la que se observa en la figura 2.2b, en este caso una distribución lognormal, o sea, en la cual $P[\log(k(r))]$ es una PDF normal), descrita por un valor medio $\langle \log k(r) \rangle$ y un cierto ancho de distribución dado por la varianza σ_r^2 (estos parámetros serán definidos más formalmente al final de esta subsección). También se pueden tener distribuciones binarias, que tienen dos valores característicos y que son formas simplificadas de representar medios con múltiples unidades de flujo, como los que típicamente componen los reservorios del subsuelo. Finalmente, se pueden tener representaciones bimodales, en las cuales existen dos distribuciones centradas en dos valores característicos. Ejemplo de los últimos dos casos podría ser un reservorio compuesto de areniscas y arcilitas, siendo que cada una de estas dos unidades de flujo puede representarse ya sea por un valor característico de conductividad hidráulica (medio binario) o bien por una distribución centrada en un valor característico (medio bimodal). La organización espacial de las unidades de flujo de más alta conductividad hidráulica afectará marcadamente las propiedades de flujo y transporte en el reservorio [29, 30]. El contraste entre componentes muy permeables y muy poco permeables puede llegar hasta los doce órdenes de magnitud [31].

La caracterización de la conductividad hidráulica se realiza mediante el uso de elementos de geoestadística, como es el caso del histograma, variograma, momentos gaussianos y medidas multipunto. El histograma normalizado muestra gráficamente la PDF de conductividad hidráulica. La PDF puede ser descompuesta en momentos gaussianos de orden sucesivo. El primer momento gaussiano es la media. En esta tesis consideraremos la media aritmética:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_i^N x_i \quad (2.4)$$

la media geométrica:

$$x_g = \sqrt[N]{\prod_i x_i} = \exp(\langle \log x \rangle) \quad (2.5)$$

y la media armónica:

$$\frac{1}{x_H} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{x_i}, \quad (2.6)$$

siendo x_i los valores del conjunto de datos que caracterizan a la PDF y $\langle \log x \rangle$ la media aritmética del logaritmo de x . Se sabe que la media aritmética siempre es mayor o igual a la media armónica y a la media geométrica, siendo ésta última útil para caracterizar distribuciones lognormales. En la literatura, se ha considerado muy frecuentemente que la media aritmética es representativa de los medios. Aparte de la media, se suele utilizar la moda y la mediana en el estudio de las PDF de conductividad hidráulica. La moda corresponde al valor más frecuente en la distribución, mientras que la mediana representa al valor que divide a la distribución en dos partes con igual cantidad de datos. En la figura 2.4 se ilustran gráficamente las diferencias entre media, mediana y moda.

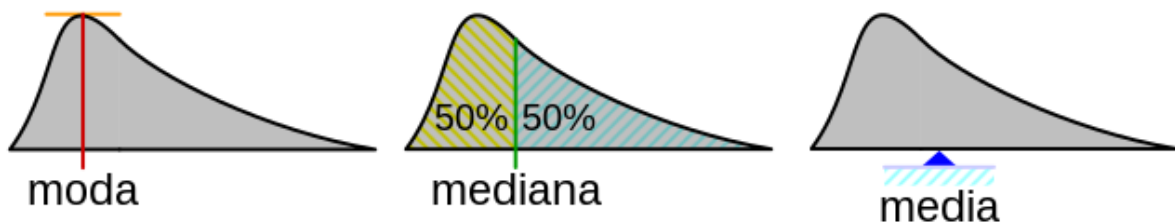


Figura 2.4: Esquema de la moda, mediana y media.

El segundo momento gaussiano es la varianza, que es el promedio aritmético de la desviación cuadrática entre cada valor y la media, lo que da la dispersión del histograma. La varianza se define como

$$\sigma^2 = \sum_i \frac{(x_i - \langle x \rangle)^2}{N}, \quad (2.7)$$

conociéndose σ como la desviación estándar (σ es la raíz cuadrada de la varianza).

La oblicuidad (*skewness* en inglés) o tercer momento gaussiano, es una medida de asimetría de la PDF. Su fórmula es

$$S = \sum_i \frac{(x_i - \langle x \rangle)^3}{(N-1)\sigma^3} \quad (2.8)$$

Las distribuciones de la izquierda y de la derecha de la figura 2.5 presentan un estrechamiento hacia la derecha e izquierda, respectivamente. Este estrechamiento se define como “cola” y está directamente relacionado con el valor de la oblicuidad. Si su valor es nulo, la distribución es simétrica y no se observa una cola. Si es negativa, la cola se ubicará a la izquierda de la distribución y la densidad de valores de la distribución se concentrará en el lado derecho. En este caso se dice que la distribución es asimétrica hacia la izquierda. Si la

oblicuidad es positiva, ocurre el caso inverso al anterior (cola a la derecha y mayor densidad de datos a la izquierda) y la distribución es asimétrica hacia la derecha.

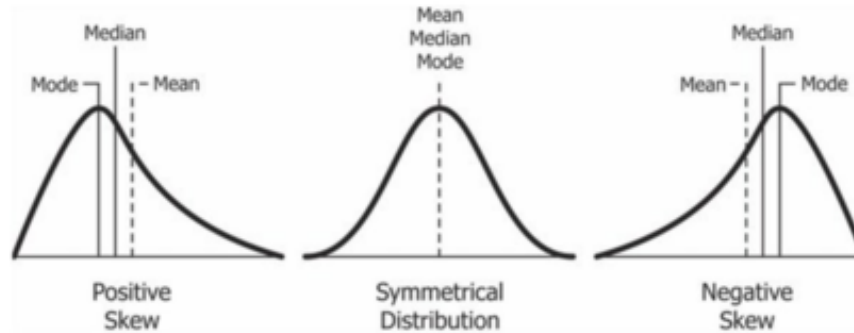


Figura 2.5: PDF's con distintas oblicuidades. Si la oblicuidad es 0, la distribución es simétrica, mientras que si es positiva (negativa), la distribución es asimétrica hacia la derecha (izquierda).

2.2.2 Correlación espacial de las conductividades hidráulicas: Variograma y longitud de correlación

La PDF indica con qué frecuencia está presente cada valor de conductividad hidráulica en un medio, pero no contiene información sobre cómo están organizadas espacialmente dichas conductividades hidráulicas. La correlación espacial indica en qué medida es probable que la conductividad hidráulica de una celda dada se asemeje a la de una celda cercana. A mayor correlación espacial, mayor es la probabilidad de que dos celdas cercanas tengan valores similares de conductividad hidráulica. Por otro lado, la forma funcional en la que decae la correlación está dada por la función de covarianza espacial.

El variograma es una herramienta geoestadística que se usa para analizar la correlación espacial de las conductividades hidráulicas en el reservorio, y que representa en forma gráfica a la función de covarianza. El variograma se obtiene considerando la conductividad hidráulica de dos puntos cercanos separados por una distancia h , y graficando el promedio de la diferencia al cuadrado de los valores de la conductividad hidráulica (que llamaremos función γ_h), en función de la distancia (h), considerando una dirección espacial dada:

$$\gamma_h = \frac{1}{2} \langle [k(\bar{r}) - k(\bar{r} + h)]^2 \rangle \quad (2.9)$$

donde los "brackets" representan la media aritmética y $k(\mathbf{r})$ es la conductividad hidráulica en función de la posición (siendo $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$ el vector posición). La variable γ_h depende del módulo y dirección del vector h . Dicho de otra forma, el variograma consiste en posicionarse en todos los puntos posibles y evaluar cuánto cambia el valor de la función $k(\mathbf{r})$ al desplazarse una distancia h .

A partir de los datos de conductividad hidráulica en distintos puntos del espacio es posible construir variogramas experimentales que luego son ajustados mediante modelos analíticos. Algunos modelos típicos de variogramas (o de función de covarianza) usados en la caracterización espacial de reservorios son el exponencial, el gaussiano y el esférico (Fig 2.6). El variograma gaussiano presenta un decaimiento más suave que el esférico y el exponencial. Estas características se ven reflejadas al graficar los mapas de conductividad

hidráulica. El medio con variograma gaussiano presenta un mapa más difuminado, mientras que los medios con variograma exponencial y esférico tienen contornos más definidos entre valores de conductividad hidráulica, dado que en estos últimos dos casos las transiciones de conductividad hidráulica son más abruptas. Estos modelos pueden ser calculados en varias direcciones para capturar la anisotropía del reservorio y sus parámetros son utilizados en la interpolación de datos al generar el modelo geológico del reservorio [32].

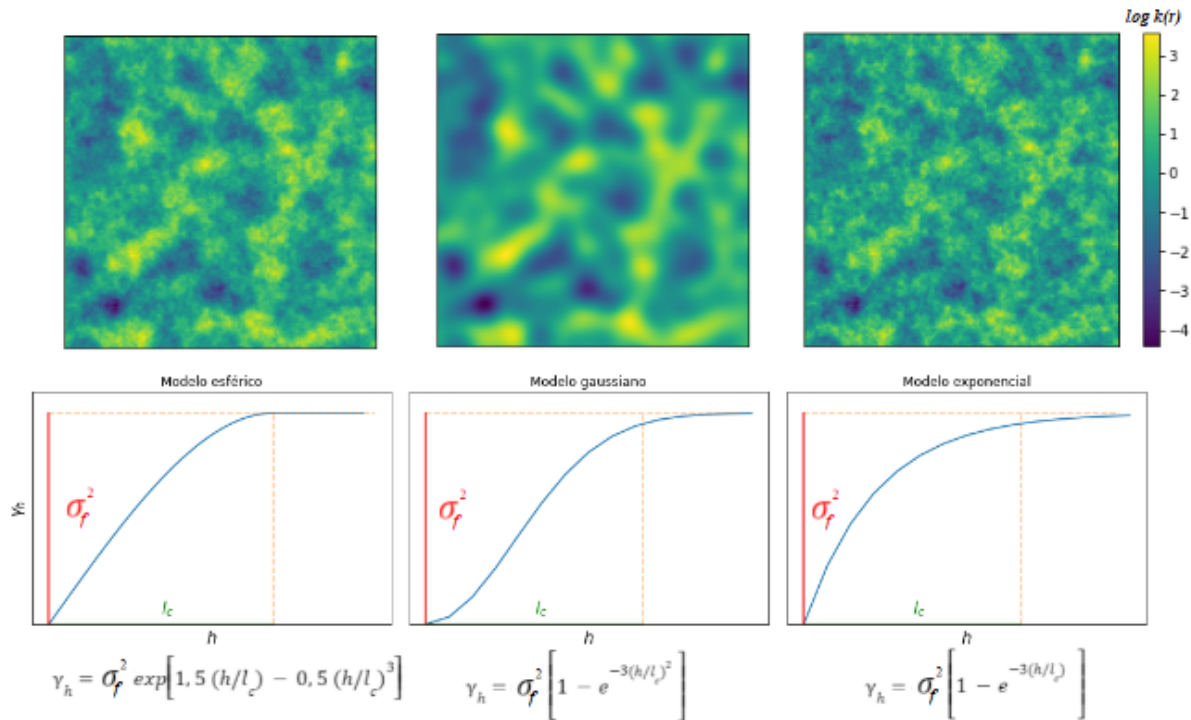


Figura 2.6: Medios lognormales con función de covarianza espacial esférica (izquierda), gaussiana (centro) y exponencial (derecha), con igual σ_f^2 y l_c . La amplitud l_c es el valor para el cual γ_h permanece aproximadamente constante. σ_f^2 es la varianza de la PDF y además es el valor asintótico al cual tiende la función de covarianza espacial para valores grandes de la distancia h .

Mediante la distancia para la cual se alcanza el valor asintótico de γ_h , indicada en la figura 2.6, se define la longitud de correlación l_c como la distancia a partir de la cual se pierde la correlación espacial, que además corresponde al umbral a partir del cual se puede considerar que el variograma se vuelve constante. Los valores relativos de una propiedad en dos puntos separados por una distancia mayor a la longitud de correlación pueden considerarse descorrelacionados o independientes. Un medio con una distribución lognormal de conductividades hidráulicas y un variograma como los descritos arriba, se conoce como un medio multigaussiano (por ejemplo los medios de las Figs. 2.1 y 2.6 son medios multigaussianos). Los medios multigaussianos han sido utilizados en la literatura durante muchos años como referencia para numerosos estudios de flujo y transporte en medios heterogéneos.

En la Fig 2.7 se observan dos mapas de conductividad hidráulica de medios multigaussianos con una función de covarianza espacial gaussiana pero con distinta longitud de correlación: una muy pequeña y otra moderada en relación al tamaño del medio.

Visualmente, la longitud de correlación define el tamaño del “granulado” o “textura” que presenta la heterogeneidad.

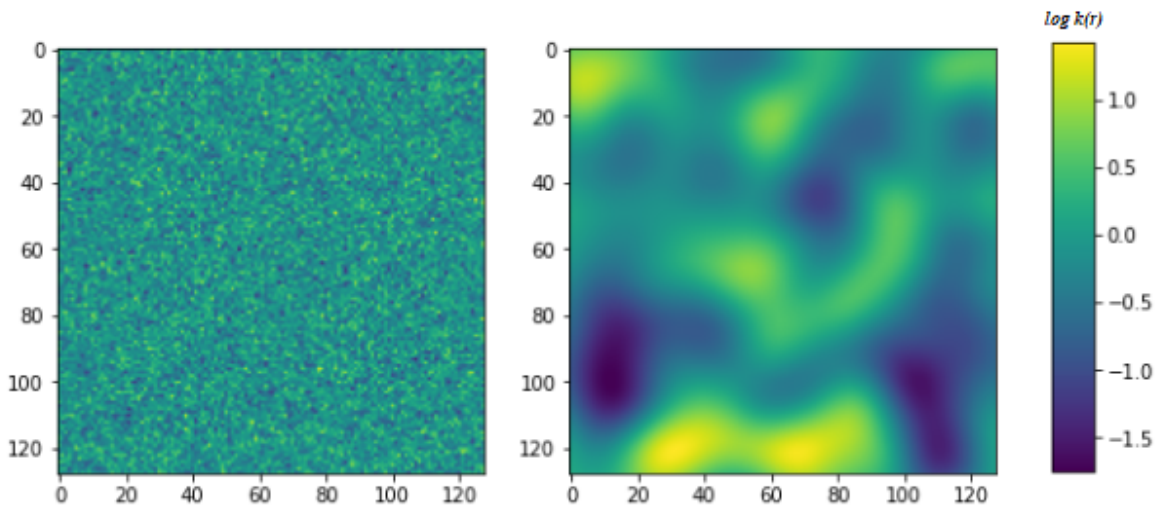


Figura 2.7: Mapas de conductividad hidráulica (representación en colores para el logaritmo de $k(\mathbf{r})$) para dos medios bidimensionales de 128^2 celdas (cada celda tiene dimensión lineal Δ) con la misma PDF de conductividad hidráulica y variograma gaussiano. El medio de la izquierda presenta una correlación espacial despreciable $l_c \rightarrow 0$ (el tamaño de la malla sobre la cual se genera impone una cota inferior al l_c real de la muestra), mientras que en el de la derecha, la correlación espacial es significativa ($l_c = 32\Delta$).

Una característica de los medios multigaussianos es que los valores extremos (muy altos o muy bajos) de conductividad hidráulica (las dos “colas” de la distribución gaussiana, en términos de $\log(k(\mathbf{r}))$ que se observan en la Fig 2.2b) tienden a formar nódulos aislados espacialmente, mientras que los valores intermedios (cerca del pico de la gaussiana de la Fig 2.2b) tienden a formar una red conectada. Las implicancias de esta característica en cuanto a la conectividad se discuten en la siguiente sección.

2.3 Conectividad

El modelado de la heterogeneidad del reservorio utilizando medios multigaussianos no siempre logra capturar todos los escenarios de conectividad que es posible encontrar en la naturaleza [5]. La formación de canales o deltas determina fuertemente el flujo en el reservorio [33]. Si bien la conectividad es una magnitud relativamente sencilla de caracterizar conceptualmente (incluso el ojo humano distingue conectividad a simple vista), no existe una visión unificada de cómo cuantificarla. En la bibliografía existe una gama muy amplia de definiciones de la conectividad, con orientación a diferentes fenómenos [5].

En este marco, Zinn y Harvey [7] estudiaron medios aleatorios isotrópicos con la misma PDF de conductividad hidráulica (lognormal) y variogramas casi idénticos, modificándolos de forma tal que tuvieran propiedades de conectividad muy contrastantes. Se desarrolla aquí brevemente el método utilizado por estos autores dado que es central en la presente tesis:

Se definen ciertas estructuras de conectividad en un medio lognormal, las cuales son: conectividad intermedia (ECI) (que corresponde al modelo multigaussiano), conectividad alta (ECA) y conectividad baja (ECB). La característica de los medios con ECI es que los valores

de conductividad hidráulica más extremos de la PDF están agrupados en nódulos aislados o clusters [26]. Las conductividades hidráulicas intermedias (más cercanas al valor promedio de la PDF de conductividad hidráulica) tienden a formar redes conectadas a lo largo del medio (Fig 2.8a). En la estructura conectada ECA, en cambio, los valores de conductividad hidráulica altos tienden a formar las redes conectadas, mientras que los valores de conductividad hidráulica bajos tienden a formar los nódulos aislados (Fig 2.8b). La ECB corresponde al caso inverso de la ECA, con redes de conductividades hidráulicas bajas y nódulos aislados de conductividades hidráulicas altas. Cuando $l_c \rightarrow 0$, no existe estructura de conectividad (medio sin estructura o SE). Para generar las distintas estructuras de conectividad, Zinn y Harvey [7] proponen generar un medio con ECI a partir de un algoritmo de simulación gaussiano, utilizando una función de covarianza gaussiana. Los medios con ECA y ECB se generan a partir de una transformación del medio con ECI, denominada Normal Score Transform (NST), que mantiene la misma PDF de conductividad hidráulica y variograma. La transformación se divide en dos pasos:

1. Se calcula el valor absoluto de la PDF de la conductividad hidráulica del medio multigaussiano. Esta operación cambia los valores extremos a valores altos y los valores originalmente cercanos a la media pasan a ser valores bajos.
2. El histograma de valores se convierte nuevamente en una distribución gaussiana univariada, usando la transformación:

$$Y' = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left(2 \operatorname{erf} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right) - 1 \right), \quad (2.10)$$

donde Y' son los valores transformados de $\log(k(r))$ e Y son los valores originales. Esta transformación genera un medio en el cual los valores de conductividad hidráulica bajos forman redes conectadas y los valores altos se agrupan en nódulos aislados, o sea que se obtiene la ECB. Hay que tener en cuenta que al aplicar esta transformación, se reduce el valor de l_c , aunque el variograma es el mismo.

3. La ECA se genera utilizando la ECB obtenida en el paso anterior. Se reflejan los valores de conductividad hidráulica del medio con ECB alrededor de la media. Entonces las redes conectadas de baja conductividad hidráulica se convierten en redes conectadas de alta conductividad hidráulica y viceversa.

Resumiendo, hay cuatro procedimientos distintos para generar las distintas estructuras de conectividad:

- a) $l_c \ll \Delta$, es decir $l_c \rightarrow 0$. (SE)
- b) $l_c > \Delta$, sin aplicar la NST. (ECI)
- c) $l_c > \Delta$, aplicando la NST. (ECB)
- d) $l_c > \Delta$, aplicando la NST y luego reflejando los valores de conductividad hidráulica del medio alrededor de la media. (ECA)

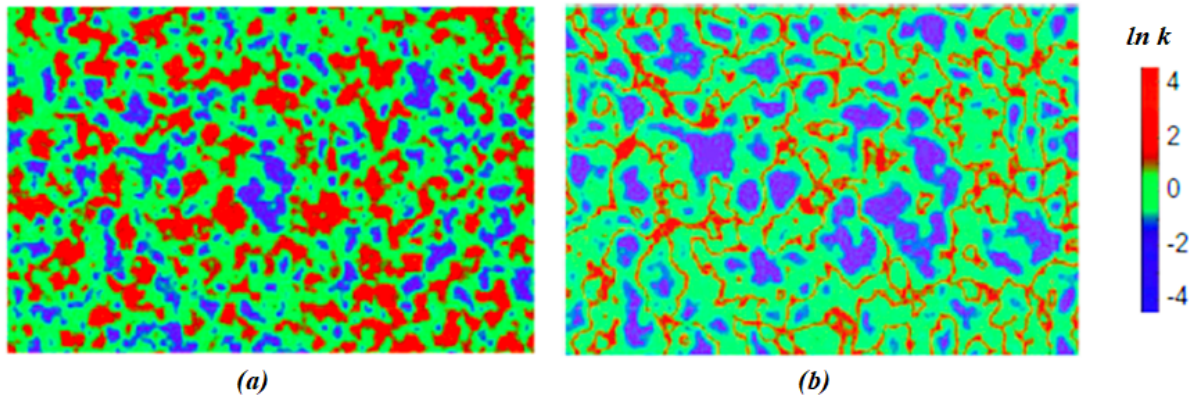


Figura 2.8: Medios con ECI (a) y ECA (b) (tomado de Zinn y Harvey (2003) [7]). El medio con ECA se generó al aplicar una NST a la ECI, por lo que ambos tienen un variograma casi idéntico. En la ECI, las redes conectadas tienden a estar formadas por los valores de conductividad hidráulica cercanos al valor medio de la PDF de conductividad hidráulica. En la ECA los valores de conductividad hidráulica altos tienden a formar las redes conectadas, mientras que los valores de conductividad hidráulica bajos tienden a formar nódulos aislados. La ECB corresponde al caso inverso de la ECA.

Los autores encontraron propiedades efectivas de flujo y transporte muy diferentes según la estructura de conectividad. Este resultado de Zinn y Harvey [7], retomado luego por un gran número de autores que desarrollaron la técnica de modificar la conectividad usando la transformada NST, extendiéndola a 3D, y comparando con otros modelos clásicos [6, 34], es central en la presente tesis. El estudio de las estructuras de conectividad fue, y es, analizado desde diferentes enfoques. Jankovic y otros [34] estudiaron el impacto de las estructuras de conectividad para el flujo y transporte en 3D, mientras que Colecchio y otros [11] aplicaron las estructuras de conectividad para estudiar otros parámetros, como la percolación, en medios binarios 2D y 3D.

2.4 Upscaling. Obtención de parámetros representativos.

Como se explicó más arriba, los modelos geológicos proveen una descripción detallada de la heterogeneidad del reservorio, que se obtienen de diferentes técnicas de prospección (ensayos de pozo, interpretación de coronas, análisis sísmico, etc.), y de la interpretación geológica, sobre la malla fina o geológica. En términos de costo computacional, no resulta factible realizar simulaciones de flujo directamente sobre la malla fina (menos aún en el caso multifásico asociado a hidrocarburos). A través del upscaling se pasa de la malla fina a una malla gruesa de simulación o modelo dinámico, cuyo tamaño dependerá de varios factores, existiendo un compromiso entre la capacidad de mantener una descripción detallada de la heterogeneidad y el consumo de CPU de la simulación (Fig 2.9).

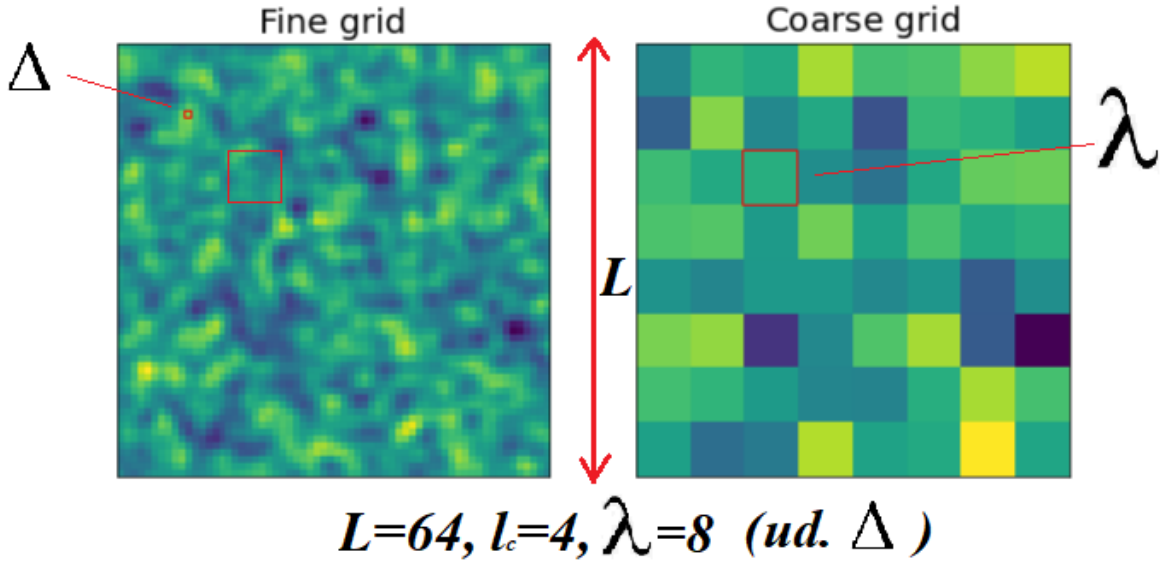


Figura 2.9: Escalas espaciales involucradas en el procedimiento de upscaling. El upscaling es un proceso mediante el cual se transforma una propiedad petrofísica (i.e. la conductividad hidráulica) definida sobre la malla fina geológica (caracterizada por una escala lineal Δ) para describirla sobre la malla gruesa para el modelo de simulación (caracterizada por una escala lineal λ). El mapa de la izquierda tiene un tamaño lineal $L=64\Delta$, con una longitud de correlación $l_c=4\Delta$. En este caso, $\lambda=8\Delta$.

Para algunas propiedades como la porosidad o nivel de saturación este procedimiento es trivial, ya que las propiedades pueden ser obtenidas a partir de un promedio directo. En cambio, para la conductividad hidráulica, esto no es posible, ya que no es aditiva por naturaleza. La complejidad de la dependencia del flujo con esta variable heterogénea hace que en este cambio de escala siempre se pierda información, por lo que tiene un costo en términos de precisión a la hora de resolver flujo y transporte en el reservorio.

A continuación se recopilan las escalas espaciales involucradas en el procedimiento de upscaling:

- L : Tamaño lineal del medio entero
- Δ : Tamaño lineal de la celda de la malla fina o escala geológica soporte (ver sección 2.2).
- l_c : Longitud de correlación geológica o escala integral (ver sección 2.2.3)
- λ : Tamaño lineal del bloque de la malla gruesa o escala de agregación (coarsening scale)

2.4.1 Upscaling: Parámetros equivalentes, efectivos y pseudo-efectivos

Cuando el valor representativo obtenido en el upscaling es el promedio sobre un conjunto de realizaciones de campos de conductividad hidráulica (un promedio de ensamble), éste es llamado conductividad hidráulica efectiva (K_{eff}). La definición de K_{eff} se obtiene de la generalización de la ecuación de Darcy, resultante de relacionar los valores esperados de velocidad de flujo y gradiente de presión, que puede escribirse como [35]:

$$\langle \bar{q} \rangle = - \frac{1}{\mu} K_{eff} \cdot \langle \bar{\nabla} p \rangle \quad (2.11)$$

donde los paréntesis angulares indican promedios del conjunto en el espacio probabilístico de conductividades hidráulicas, esto es, promediando todas las posibles presiones y velocidades que pueden obtenerse del conjunto de campos de conductividad hidráulica.

El término efectivo se utiliza entonces cuando la propiedad es una característica intrínseca del medio. Si las condiciones de contorno o la presencia de fuentes o sumideros en la región de interés influyen en el resultado, en ese caso la propiedad es en realidad pseudo-efectiva y no efectiva. De todas formas, cuando se puede establecer que el valor es de todas formas estadísticamente representativo, en la práctica suele usarse la propiedad como efectiva (como se hace en la presente tesis).

Otro enfoque utilizado habitualmente es promediar las mismas variables en el espacio (en volúmenes o bloques) con lo que se obtiene otro parámetro representativo denominado conductividad hidráulica equivalente:

$$\langle \bar{q} \rangle = -\frac{1}{\mu} K_{eq} \cdot \langle \bar{\nabla} p \rangle \quad (2.12)$$

Donde los promedios son calculados con las ecuaciones:

$$\langle \bar{\nabla} p \rangle = \frac{1}{V} \int_V \bar{\nabla} p \, dV \quad (2.13a)$$

$$\langle \bar{q} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \bar{q} \, dV \quad (2.13b)$$

2.4.2 Analogía entre la conductividad hidráulica efectiva (K_{eff}) y la conductividad eléctrica equivalente

Debido a la similitud de las ecuaciones que rigen a la conducción eléctrica e hidráulica, se puede establecer una analogía entre K_{eff} y la conductividad equivalente de un circuito eléctrico (aunque con frecuencia nos referimos más a su inversa, la resistencia equivalente, por ejemplo en el teorema de Thevenin). Esta analogía permite utilizar herramientas provenientes de la física estadística, como la teoría de campo medio o la renormalización para calcular la K_{eff} [36]. En este marco, es posible modelar a cada celda de conductividad hidráulica del reservorio como una red de resistencias. Como se ilustra en la Fig 2.10a, consideremos que la resistencia equivalente en el punto medio entre los ejes de una celda de conductividad hidráulica k es $1/k$. En 2D, esto es equivalente a colocar dos resistencias de $1/(2k)$ en serie y dos más en dirección transversal a las primeras, por lo que la celda queda descrita por una cruz de resistencias. En la Fig 2.10b se ilustra la analogía electrónica para calcular K_{eff} en cuatro celdas. Al considerar medios isótropos, se calcula K_{eff} en la dirección del flujo. Las caras de entrada y salida del flujo tienen una presión uniforme, mientras que las caras paralelas al flujo tienen condición de flujo nulo. De esta manera, se desprecian las ramas que no se conectan a ningún nodo y se unen los nodos de entrada y de salida del flujo (Fig 2.10c).

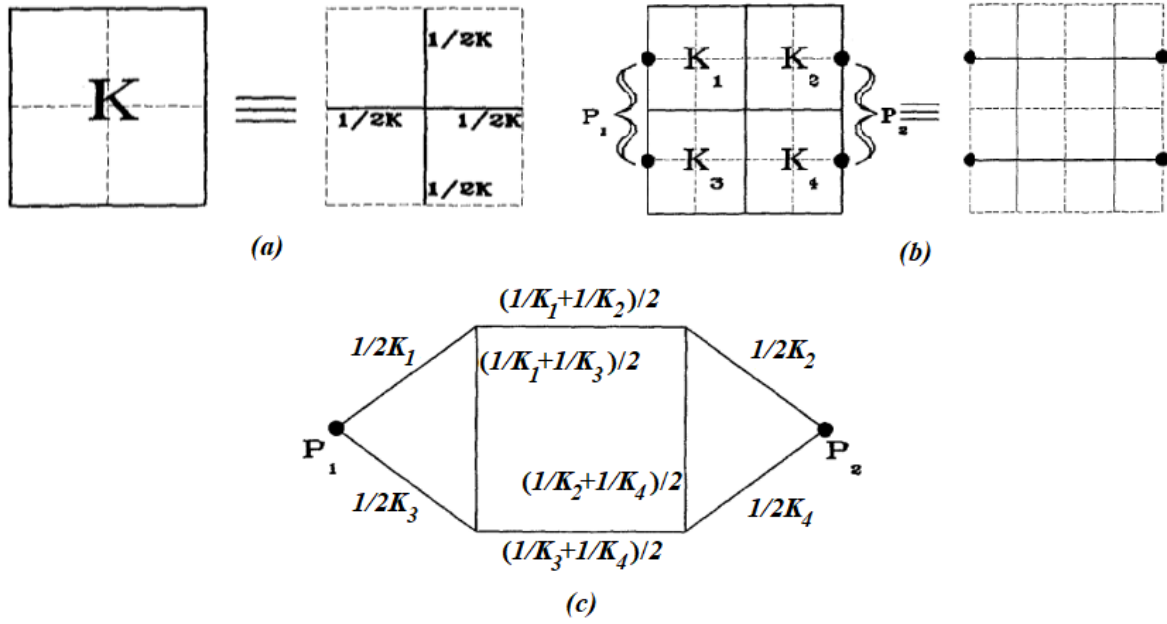


Figura 2.10: Los medios pueden interpretarse como una red de resistencias. (a) Analogía de una celda de conductividad hidráulica como cuatro resistencias de $1/(2k)$. Estas resistencias conforman la conductividad hidráulica de la celda. (b) Analogía de cuatro celdas como una red de resistencias. Al considerar un flujo unidireccional en la dirección horizontal, las caras de entrada y salida tienen una presión uniforme, mientras que se impone flujo nulo a las caras paralelas al flujo. (c) Circuito resultante con los valores de resistencias en cada rama. Al juntar todas las resistencias, se obtiene K_{eff} .

Para el caso 3D, si bien también es posible representar al medio como una red de resistencias, no se obtiene una solución analítica para calcular la resistencia equivalente. Por lo tanto, K_{eff} en 3D se obtiene de forma numérica. Además, el costo computacional es más alto, lo que lleva a realizar upscaling en los medios a estudiar.

2.4.3 Upscaling en medios multigaussianos lognormales

Existen pocos resultados exactos válidos para medios particulares, como por ejemplo el obtenido por Matheron [37] para medios isótropos lognormales de una o dos dimensiones, resultado extendido a tres dimensiones por Gutjahr [38] (Ec 2.14).

$$K_{eff} = K_g \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D} \right) \sigma_f^2 \right] \quad (2.14)$$

Donde:

- K_{eff} : Conductividad hidráulica efectiva
- K_g : Media geométrica de la conductividad hidráulica de malla fina
- D : Dimensión (2D o 3D)
- σ_f^2 : Varianza de la PDF del logaritmo natural de la conductividad hidráulica de la malla fina.

Matheron [37] conjeturó que la ecuación 2.14 es la suma de los dos primeros términos de la expansión en series de:

$$K_{eff} = K_g \exp\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D}\right)\sigma_f^2\right] \quad (2.15)$$

Entonces, la conjetura de Matheron coincide con la Ec 2.14 para σ_f^2 pequeña. La ecuación 2.15 es equivalente a la media en potencia [39], con la siguiente expresión para el parámetro w :

$$K_{eff} = \left[\frac{1}{V} \int_V k^w dV \right]^{\frac{1}{w}} ; \quad w = \frac{1}{2} - \frac{1}{D} \quad (2.16)$$

Notar que si $w = -1$ se obtiene la media armónica, si $w = 1$ se obtiene la aritmética y si $w \rightarrow 0$ se obtiene la media geométrica. Si bien estos resultados son exactos para $D=2$, De Wit [40] y Abramovich e Indelman [41] probaron que estas expresiones no son exactas para $D=3$, aunque resultan buenas aproximaciones. Noetinger [42, 43] probó que ambas expresiones son válidas cuando los medios tienen una longitud de correlación l_c despreciable.

Por otro lado, Eberhard [44] estudió el comportamiento de la media aritmética de K_{eff} ($\langle K_{eff} \rangle$) al variar la escala de agregación λ . Conceptualmente, la idea de su trabajo fue “filtrar” espacialmente la heterogeneidad (utilizando transformadas de Fourier) en las escalas más finas, con una cierta función de corte que puede ser suave o abrupta, dejando inalteradas las componentes en la escala más gruesa (en analogía con un filtro pasabajos utilizado en electrónica para procesar una señal.). Utilizando teoría de perturbaciones obtuvo:

$$\langle K_{eff}(\lambda) \rangle = K_g + \sigma_f^2 \frac{K_g}{D} \left[\frac{D}{2} - 1 + \left(\operatorname{erf}\left(\frac{l_c a_s}{\sqrt{2}\lambda}\right) \right)^D \right] \quad (2.17)$$

donde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ es la función error y a_s es un parámetro constante mayor o igual

a 1. Para el caso en que $\lambda \rightarrow 0$, $\langle K_{eff} \rangle$ tiende a la media aritmética de la conductividad hidráulica de la malla fina (K_a) y en particular, para medios lognormales con ECI se cumple

$$K_a = K_g \exp(\sigma_f^2/2) \quad (2.18)$$

En ese caso, cada celda de la malla gruesa coincide con una celda de la malla fina. Para valores intermedios de la escala, $\langle K_{eff} \rangle$ decrece monótonamente desde K_a hasta el valor asintótico para $\lambda \rightarrow \infty$, dado por la aproximación de la Ec 2.14 (a primer orden en la varianza) o bien por la Ec 2.15 (conjetura de Matheron). Mediante un análisis de grupos de renormalización, Eberhard obtiene la expresión:

$$\langle K_{eff}(\lambda) \rangle = K_g \exp\left[\frac{\sigma_f^2}{6} + \frac{\sigma_f^2}{3} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{l_c a_s}{\sqrt{2}\lambda}\right) \right)^3 \right] \quad (2.19)$$

la cual describe la transición entre $\langle K_{eff} \rangle = K_a = K_g \exp(\sigma_f^2/2)$ para $\lambda \rightarrow 0$ y $K_g(1 + \sigma_f^2/6)$ (o bien, $K_g \exp(\sigma_f^2/6)$), considerando la conjetura de Matheron para $\lambda \rightarrow \infty$ y $D = 3$.

Utilizando también teoría de perturbaciones, se obtiene una fórmula para la varianza del logaritmo de K_{eff} ($\sigma_{\log(K_{eff})}^2$) [44]

$$\sigma_{\log(K_{eff})}^2(\lambda) = K_g^2 \sigma_f^2 \prod_{i=1}^D \operatorname{erf}\left(\frac{l_{c,i} a_s}{\sqrt{2\lambda}}\right), \quad (2.20)$$

donde el subíndice i representa cada coordenada espacial. La ecuación se simplifica si se considera que el medio es isótropo, es decir, que tiene la misma longitud de correlación en las tres coordenadas espaciales. Entonces, para $D = 3$:

$$\sigma_{\log(K_{eff})}^2(\lambda) = K_g^2 \sigma_f^2 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{l_{c,s} a_s}{\sqrt{2\lambda}}\right) \right)^3. \quad (2.21)$$

Para valores de λ grandes, la última igualdad puede aproximarse por

$$\sigma_{\log(K_{eff})}^2(\lambda) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} K_g^2 \sigma_f^2 \left(\frac{l_{c,s} a_s}{\sqrt{2\lambda}} \right)^3. \quad (2.22)$$

2.4.4 Upscaling global y local

Existen dos métodos para calcular el flujo en el reservorio, que son el upscaling global y el upscaling local. En el upscaling global (Fig 2.11b) **se imponen las condiciones de contorno en las caras de todo el medio o dominio** (de tamaño lineal L). Se establece un gradiente de presiones entre las caras de entrada y salida del mismo (condiciones de contorno de Dirichlet), mientras que se impone flujo nulo en las caras laterales (condiciones de contorno de Neumann). Las presiones y velocidades se calcularán a partir de la conservación de masa y la ley de Darcy, considerando flujo estacionario incompresible en un medio poroso saturado. Una vez resuelto el flujo, se realiza un post-procesamiento en el cual se evalúan promedios de presiones y caudales en las caras de entrada y salida de cada bloque de la malla gruesa, obteniéndose K_{eff} (en este método, los caudales en la cara de entrada y salida de cada bloque de la malla gruesa pueden ser diferentes). En el upscaling local (Fig 2.11a) **las mismas condiciones de contorno se imponen directamente sobre las caras de cada bloque de la malla gruesa** sobre el que se calcula K_{eff} , de tamaño lineal λ . Este esquema es conocido como permeámetro, y los caudales en la cara de entrada y salida de cada bloque de la malla gruesa deben ser iguales por conservación de masa. De esta manera se obtiene el flujo en cada bloque y se utiliza la ecuación de Darcy para calcular K_{eff} . Esta magnitud es en principio un tensor: permutando las direcciones espaciales en las que se aplican las condiciones de borde de permeámetro es posible obtener las componentes diagonales del tensor de conductividad hidráulica. En el caso de la figura 2.11a, se observa cómo se aplican las condiciones de contorno de permeámetro para obtener la componente K_{yy} del tensor de conductividad hidráulica. Para medios isótropos y flujo unidimensional (que son las

condiciones de trabajo para la presente tesis), la conductividad hidráulica se convierte en un escalar.

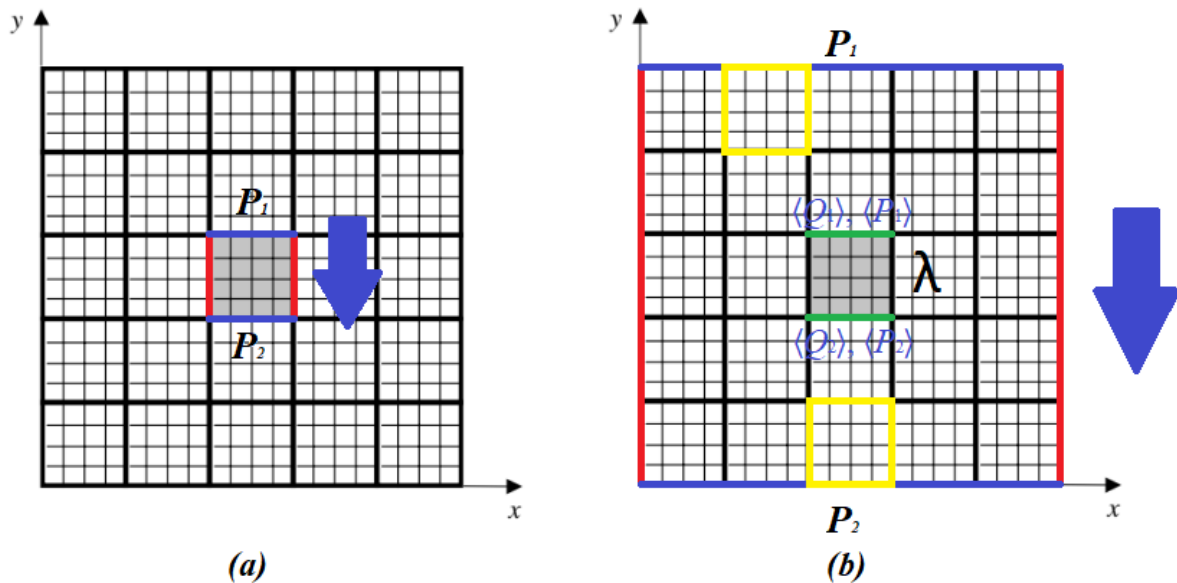


Figura 2.11: Esquemas de upscaling local (a) y upscaling global (b). En el upscaling local se imponen las condiciones de contorno sobre cada bloque de la malla gruesa de tamaño lineal λ (ver líneas rojas para flujo nulo (Neumann) y azules para presión fija (Dirichlet)). Luego se resuelve el flujo, surgiendo K_{eff} de dividir el caudal obtenido por el gradiente de presión aplicado. En el upscaling global, las condiciones de contorno se imponen sobre el reservorio completo (de tamaño lineal L), se resuelve el flujo en el mismo, y luego, en una etapa de post-procesamiento, se evalúan las presiones y los caudales en las caras de entrada y de salida de cada bloque de la malla gruesa para obtener K_{eff} (o bien, el caudal se promedia volumétricamente sobre cada bloque de la malla gruesa).

La diferencia entre ambos métodos es que el upscaling global permite realizar un tratamiento del medio en múltiples escalas, ya que implica calcular el flujo en todo el medio, sin importar la elección de la escala de agregación λ de la malla gruesa. En el upscaling local es necesario definir el tamaño λ de la malla gruesa antes, ya que las condiciones de contorno se imponen sobre cada bloque de la malla, por lo que el flujo obtenido se podría utilizar únicamente en esa escala. Entonces, si se quisiera obtener K_{eff} para distintas escalas mediante upscaling local, habría que ir resolviendo el flujo para los distintos valores de λ . De estas observaciones se deduce que, para un tratamiento multiescala, el upscaling global es un método más rápido que el local.

2.4.5 Dependencia de K_{eff} con la escala de agregación λ que caracteriza la malla gruesa

La relación entre el volumen elemental representativo (REV por sus siglas en inglés) y la escala de agregación λ de la malla gruesa es crucial en el proceso de upscaling. El REV es el menor volumen en el cual se puede realizar una medición de una propiedad cuyo valor sea representativo del todo, o sea, el menor volumen para el cual el material se puede comenzar a considerar homogéneo. En el caso de materiales con estructura espacio-temporal cíclica, determinar un REV puede ser relativamente sencillo, pero en medios aleatorios es

mucho más complejo. Para este tipo de medios la definición del REV no está formalizada y tiene un carácter relativamente subjetivo en la literatura. Sin embargo, es fácil notar que si λ^D (siendo D la dimensionalidad) es mayor que el REV (Fig 2.12a), la heterogeneidad presentará fluctuaciones suaves en la escala λ y el proceso de upscaling no presentará dificultades. Por el contrario, si λ^D es menor que el REV (Fig 2.12b), las fluctuaciones en la heterogeneidad pueden comprometer la representatividad de K_{eff} calculada en la escala λ .

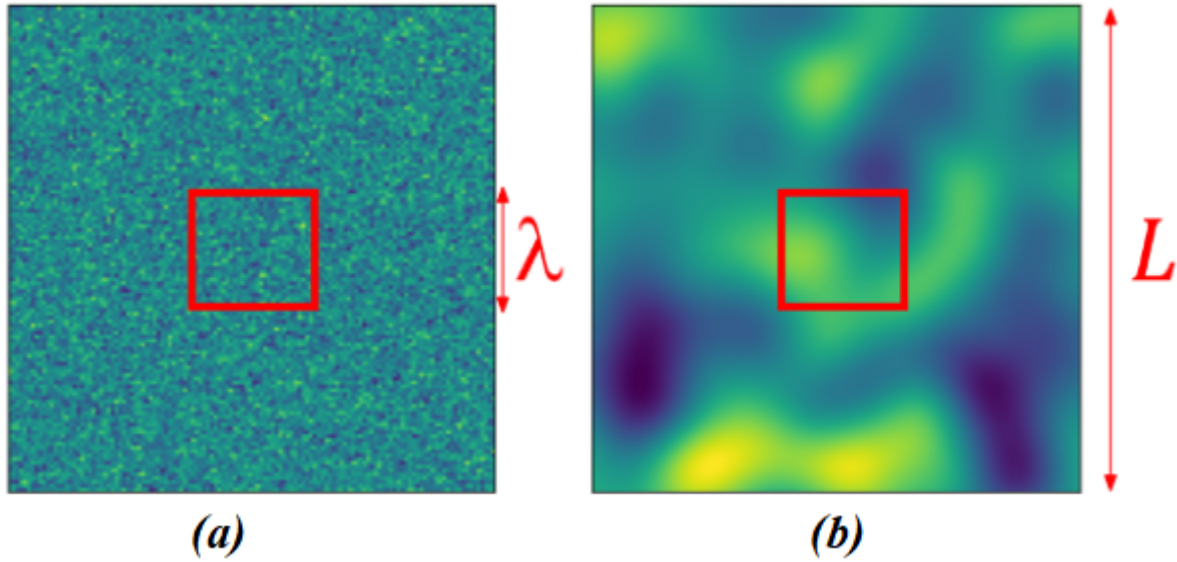


Figura 2.12: (a) Medio con $l_c = \Delta$ que presenta $\Delta^D < \text{REV} < \lambda^D < L^D$, por lo que las fluctuaciones en la heterogeneidad son pequeñas y el proceso de upscaling es controlado, estando K_{eff} bien definida. (b) Medio con $l_c = 32\Delta$, en el cual podría ocurrir que se cumpla $\Delta^D < \lambda^D < \text{REV} < L^D$. Esto comprometería la representatividad de K_{eff} . Esta relación puede implicar fluctuaciones en el proceso de upscaling que hagan que K_{eff} no esté bien definida.

Boschan y Noetinger [9] estudiaron numéricamente la variación de K_{eff} con λ en 3D al realizar el upscaling en medios lognormales y binarios. Para medios lognormales, caracterizaron la PDF de K_{eff} , expresándola a través de la función $P[\log(K_{eff})]$ o sea, la distribución de valores del logaritmo de K_{eff} sobre un número de realizaciones o muestras.

Posteriormente, Colecchio y otros [10] realizaron un estudio similar en medios lognormales 2D utilizando diferentes formulaciones locales y globales para calcular K_{eff} . En ambos trabajos se observó, notablemente, que $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ es lognormal, entonces $P[\log(K_{eff})]$ también lo es, prácticamente para todas las escalas λ (ver Figs. 2.13 y 2.14), con la varianza $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ reduciéndose conforme la escala λ aumentaba (ver Fig. 2.16) (la distribución $P[\log(K_{eff})]$ se va haciendo más fina y más alta, centrada en el valor asintótico de K_{eff}). Los autores encontraron que en 2D, la media geométrica de la conductividad hidráulica efectiva ($\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$) se mantiene constante con λ , mientras que en 3D, $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ crece desde K_g (para $\lambda \rightarrow 0$) hasta $K_g \exp(\sigma_f^2/6)$ (para $\lambda \rightarrow \infty$), valor dado por la conjetura de Matheron (Ec 2.15 con $D = 3$). En 3D, la media aritmética de K_{eff} ($\langle K_{eff} \rangle$) decrece desde la Ec 2.18, para $\lambda \rightarrow 0$, hasta la conjetura de Matheron para $\lambda \rightarrow \infty$ (ver Fig 2.15).

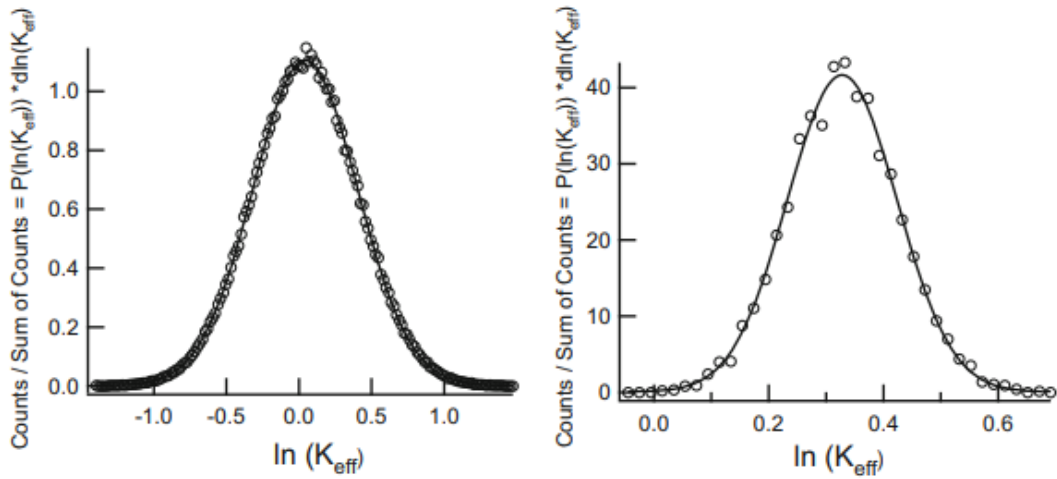


Figura 2.13: Distribución $P[\log(K_{eff})]$ para medios lognormales 3D. La escala de agregación es $\lambda=4\Delta$ (Izq.) y $\lambda=64\Delta$ (Der.). Se observa que se mantiene el carácter lognormal de la PDF al aumentar λ . Tomado de Boschán y Noetinger (2012) [9].

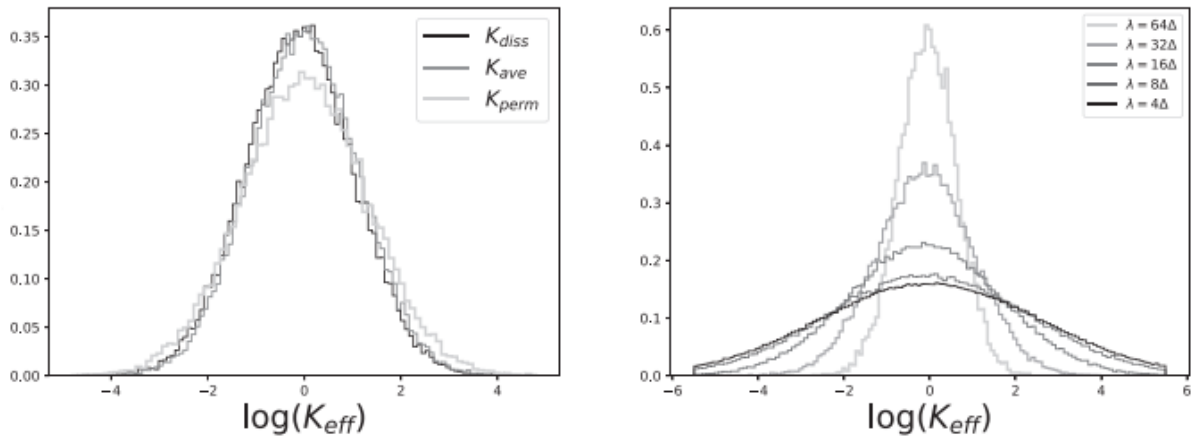


Figura 2.14: Distribución $P[\log(K_{eff})]$ para $\sigma_f^2=7$, $l_c=16\Delta$. Izquierda: tres estimadores de K_{eff} para en $\lambda=32\Delta$. Derecha: Distribución $P[\log(K_{eff})]$ para $\lambda=4, 8, 16, 32$ y 64 (unidades de Δ). Se observa que se mantiene el carácter lognormal de la PDF al aumentar λ . Tomado de Colecchio y otros (2020) [10].

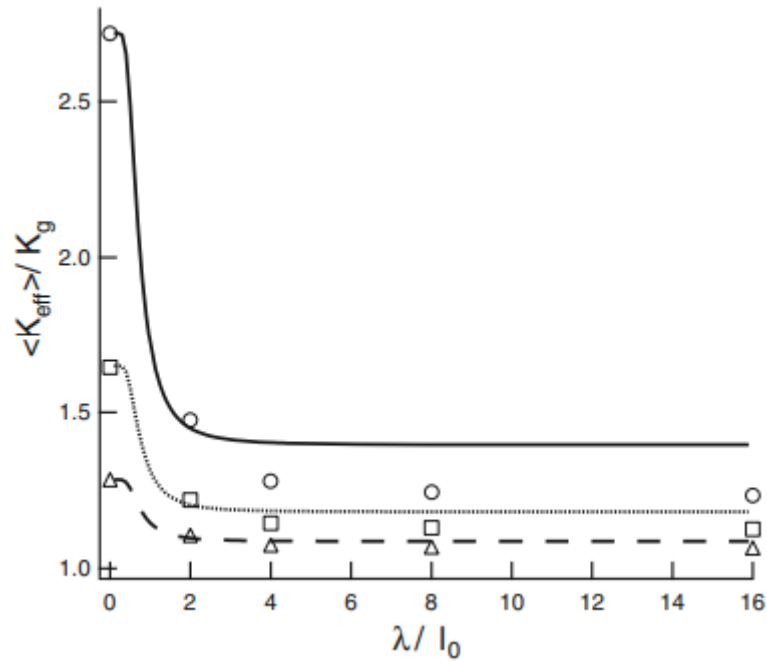


Figura 2.15.: Variación de $\langle K_{eff} \rangle / K_g$ con λ / l_0 (con $l_0 \equiv l_c$) para $\sigma_f^2 = 0.5$ (\triangle), 1 (\square) y 2 (\circ). Símbolos: Resultados numéricos obtenidos por Boschan y Noetinger 2012. Línea llena: Predicción teórica de Eberhard y otros 2004 (Ec. 2.19) para los valores correspondientes de σ_f^2 ($a_s=1, D=3$). Tomado de Boschan y Noetinger (2012) [9].

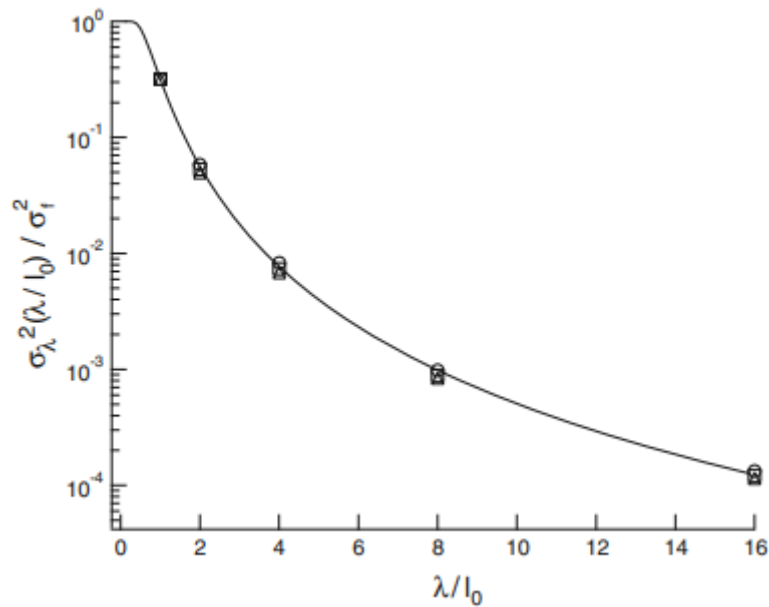


Figura 2.16: Varianza del logaritmo de K_{eff} en la malla gruesa en función de λ / l_0 (con $l_0 \equiv l_c$). Símbolos: Resultados numéricos obtenidos por Boschan y Noetinger 2012 para $\sigma_f^2 = 0.5$ (\triangle), 1 (\square) y 2 (\circ). Línea llena: Predicción teórica de Eberhard y otros 2004 (Ec. 2.21) [44]. Se observa el colapso sobre todas las varianzas de la malla fina σ_f^2 . Tomado de Boschan y Noetinger (2012) [9].

2.5 Métodos numéricos para el upscaling

Los métodos numéricos, a diferencia de los analíticos, suelen tener en cuenta la física del flujo en medios porosos, pero son por lo general mucho más complejos y más costosos, implicando mayor tiempo de cálculo. Su objetivo es resolver el flujo, lo cual permite obtener K_{eff} . El cálculo de K_{eff} se realiza obteniendo el flujo en una porción del dominio y dividiéndolo por la diferencia de presiones:

$$K_{eff} = \frac{q}{\frac{(p_{en} - p_{sal})}{\mu L}} \quad (2.23)$$

Para calcular el flujo de un fluido incompresible en un reservorio es necesario resolver la ecuación de Darcy junto con la ecuación de continuidad. Como la solución analítica para medios complejos no existe en general, se recurre a métodos numéricos que aproximan la solución. Algunos de los métodos numéricos utilizados son:

- **Diferencias finitas:** Este método es particularmente útil para la resolución de problemas unidimensionales [45, 46] o multidimensionales formados por grillas rectangulares [47-49]. La malla numérica es definida a partir de un número de líneas paralelas a los ejes de las coordenadas espaciales del sistema, con los nodos ubicados en las intersecciones. Como las conductividades hidráulicas de los nodos adyacentes pueden diferir en varios órdenes de magnitud, la elección del método para promediarlas y obtener el valor internodal puede influenciar significativamente la precisión de los resultados [50].
- **Elementos finitos:** es un método ampliamente utilizado en varias áreas de investigación y es posible encontrar una descripción general en varios libros, por ejemplo [51, 52]. Ejemplos de aplicaciones a la resolución de flujo en el subsuelo pueden encontrarse en [53, 54]. El método se basa en dividir el dominio en un número de sub-dominios denominados elementos finitos. Cada elemento puede ser caracterizado por un conjunto diferente de propiedades que pueden o no variar dentro del mismo. Los valores de las funciones desconocidas (por ejemplo el flujo) pueden ser buscados en un número de puntos (nodos). El conjunto global de nodos consiste, típicamente, en los vértices de la malla y, si es requerido un mayor orden de aproximación, pueden ubicarse puntos adicionales en los lados de la malla y dentro de los elementos.
- **Volúmenes finitos:** Debido a sus propiedades conservativas inherentes, los métodos de volúmenes finitos son ampliamente usados para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que representan principios de conservación de varias propiedades físicas. En este grupo de métodos, existen muchos esquemas de discretización disponibles. Algunos de estos pueden considerarse como un desarrollo del método de diferencias finitas, mientras que otros como casos especiales del enfoque de elementos finitos. Se basa en dividir el dominio en un número de celdas (volúmenes finitos o volúmenes de control), donde cada nodo puede estar ubicado en el centro del volumen o en sus vértices. Los esquemas de discretización están basados en la forma integral de las ecuaciones de conservación en cada volumen de control.

Una discusión general está disponible en [55, 56]. Las aplicaciones al flujo en el subsuelo son numerosas, algunas de las cuales pueden verse en [57, 59].

Tanto el método de volúmenes finitos como el de elementos finitos parten de la reformulación de las ecuaciones diferenciales del problema a resolver en su forma integral o débil, dando lugar a ecuaciones tratables mediante métodos de álgebra lineal sobre un espacio funcional. Generalmente se utilizan con mallas irregulares y dominios complejos, dando lugar a un gran sistema de ecuaciones cuyo tamaño es del orden de la cantidad de puntos o nodos de la grilla multiplicada por la cantidad de incógnitas de cada nodo. El sistema de ecuaciones será lineal si la ecuación diferencial lo es. Si la ecuación diferencial es no lineal puede hacer falta un paso intermedio de linealización. En cambio, en el método de diferencias finitas, se discretiza la ecuación diferencial directamente, utilizándose normalmente con grillas regulares y dominios simples.

2.6 Objetivos

En este trabajo se busca analizar, empleando un enfoque estocástico [60] y trabajando sobre reservorios sintéticos multi-gaussianos, la dependencia de la PDF de K_{eff} , y de sus momentos (media, varianza y oblicuidad) con la escala espacial de agregación λ , considerando un rango amplio de escenarios de conectividad [7, 34], que se recorre al variar los siguientes parámetros de conectividad:

1. La longitud de correlación l_c del campo de conductividades hidráulicas de la malla fina (la cual modifica el granulado o “textura” de la heterogeneidad).
2. La varianza σ_f^2 definida en la malla fina (la cual modifica el contraste de conductividades hidráulicas características entre zonas de conductividad hidráulica alta y baja).
3. El tipo de estructura de conectividad (ECA, ECI, ECB) (la cual hace que más conductividades hidráulicas altas tiendan a formar una red conectada o bien un conjunto de nódulos desconectados).

2.6.1 Preguntas abiertas en función de resultados previos

El presente trabajo de tesis busca, entre otras cosas, responder a las siguientes preguntas claves:

1. El resultado previo que indica que al realizar upscaling en un medio multigaussiano (ECI) se obtiene también una distribución lognormal de K_{eff} (Figs. 2.13 y 2.14), o puesto en términos matemáticos, que si $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ es lognormal, entonces $P[\log(K_{eff})]$ también lo es, ¿aplica a medios lognormales pero con estructuras de conectividad diferentes a la de un medio multigaussiano?
2. La predicción de Eberhard (Ec. 2.19) sobre el decrecimiento de $\langle K_{eff} \rangle$ con λ para medios multigaussianos (Fig 2.15), ¿es extensible a medios lognormales con estructuras de conectividad diferentes?

3. El colapso de $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ observado para medios multigaussianos (Fig 2.16), ¿se mantiene para medios lognormales con estructuras de conectividad diferentes?

3. Metodología

Como se explicó en los objetivos, en la presente tesis se estudia la influencia de las estructuras de conectividad, la longitud de correlación l_c y la varianza en la malla fina σ_f^2 en el cálculo de la conductividad hidráulica efectiva K_{eff} de reservorios heterogéneos, en función de la escala espacial de agregación λ . Se utiliza un método estocástico, generando muestras aleatorias de medios heterogéneos (realizaciones) que son condicionados, buscando representar un rango amplio de situaciones de conectividad. La fortaleza de los métodos estocásticos, reside en que el muestreo estadístico permite caracterizar la incertidumbre (típicamente cuantificada por la varianza de ensamble de la propiedad estudiada), y provee valores medios representativos. Por otro lado, si bien la mayoría de la bibliografía estudia medios heterogéneos bidimensionales (2D), principalmente porque son mucho más accesibles en términos de tiempos de cómputo, los medios 3D representan de una manera más realista al subsuelo. En este trabajo se estudiaron medios 3D únicamente.

A continuación se describe la metodología utilizada, la cual puede dividirse en tres etapas:

- Generación de modelos de reservorios aleatorios.
- Resolución del flujo.
- Obtención de las conductividades hidráulicas efectivas.

En la primera etapa, se generan medios lognormales, cuyos parámetros a controlar son l_c , σ_f^2 y la estructura de conectividad, con el fin de observar el comportamiento de la conductividad hidráulica efectiva K_{eff} al cambiar sus valores. Se realiza una descripción del funcionamiento y características del algoritmo FFTMA, el cual es utilizado para la generación de los medios. A continuación se da una explicación sobre la elección del tamaño lineal del medio y de las longitudes de correlación, y se presenta un análisis que justifica el uso de 63 realizaciones para reproducir un modelo estocástico. Luego se explica la utilización de los medios generados por el algoritmo FFTMA para obtener las distintas estructuras de conectividad.

La siguiente etapa involucra resolver el flujo en los medios con las condiciones de contorno de permeámetro y calcular K_{eff} para las diferentes escalas de agregación λ . Se detallan algunas cuestiones relacionadas al uso del método de diferencias finitas y a las matrices ralas que se forman para resolver numéricamente el sistema. Debido al costo computacional necesario para aplicar un enfoque estocástico (1701 realizaciones), se trabajó con la supercomputadora TUPAC ubicada en el centro de simulación computacional (CSC) del Conicet. Se describen las características y funcionamiento de la supercomputadora y la implementación del procedimiento numérico en la misma.

3.1 Generación de los reservorios sintéticos

3.1.1 Generación de medios multigaussianos

Los medios multigaussianos constituyen el modelo geoestadístico de referencia más empleado para representar la heterogeneidad del subsuelo. Su PDF de conductividad hidráulica es lognormal (o sea $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ es una distribución normal en $\log(k(\mathbf{r}))$) y presenta alguna función de covarianza espacial isotrópica (gaussiana, exponencial) con longitud de correlación l_c . Existen numerosos estudios que proponen una gran variedad de soluciones analíticas para calcular la K_{eff} en estos medios [60-63]. Como se mencionó en la sección 2.3, en los medios multigaussianos, los valores de conductividad hidráulica más extremos de $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ tienden a formar nódulos aislados, mientras que los valores más cercanos al valor medio de $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ tienden a formar redes conectadas. En las Figs. 3.1 y 3.2 es posible observar esta propiedad para medios en los cuales $P[\log(k(\mathbf{r}))]$ tiene una media igual a uno y varianza unitaria. Si bien la elección de que la media de la distribución sea igual a cero implica que existan valores menores a cero en el medio gaussiano, esto no es preocupante, ya que se trata de la distribución del logaritmo de las conductividades hidráulicas.

Para generar los medios con distribución multigaussiana de conductividades hidráulicas y con parámetros geológicos dados, se utiliza el algoritmo FFTMA [64], que implementa, en el lenguaje de programación “C”, un algoritmo de transformada rápida de Fourier combinado con medias móviles (Fast Fourier Transform – Moving Average). En el código es posible especificar como parámetros de entrada:

- Dimensiones del reservorio: bidimensional o tridimensional; número de celdas y longitud de las celdas en cada dirección.
- Distribución de conductividades hidráulicas: tipo de distribución (gaussiana o lognormal) y sus parámetros (media y varianza σ_f^2).
- Correlación espacial: longitud de correlación (l_c) en cada dirección y tipo de variograma o función de covarianza (exponencial, gaussiano, esférico) y sus coeficientes.
- Semilla: Valor entero que genera una cierta “imagen” del medio o reservorio, manteniendo las mismas propiedades geoestadísticas (al cambiar la semilla, se genera al azar otra imagen diferente, pero con las mismas propiedades geoestadísticas).

El algoritmo FFTMA fue elegido por ser un método rápido que permite generar modelos aleatorios con resolución espacial alta. Comparado con otros métodos de generación de medios gaussianos, FFTMA permite una gama más amplia de tipos de variogramas posibles que, por ejemplo, el método de “Turning bands” [65] o los métodos espectrales continuos. Como desventaja, FFTMA solamente puede ser utilizado en mallas o grillas con un espaciamiento constante entre nodos.

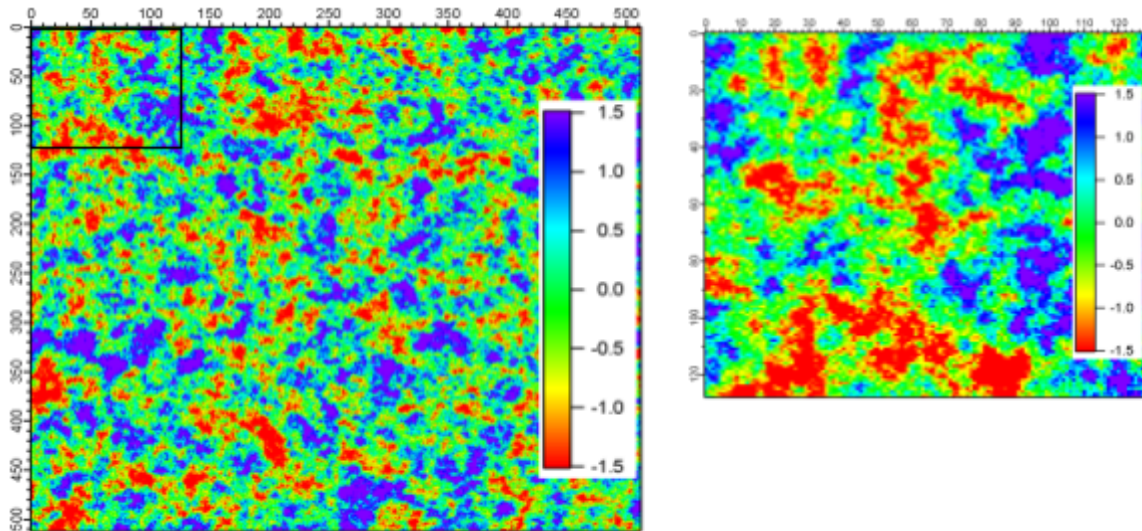


Figura 3.1 Mapa del logaritmo de conductividades hidráulicas en falso color de un medio multigaussiano obtenido con el algoritmo FFTMA, haciendo énfasis en la conectividad de las distintas clases de conductividad hidráulica. El color rojo (azul) representa las conductividades hidráulicas bajas (altas), que tienden a formar nódulos aislados, mientras que el color verde representa las conductividades hidráulicas intermedias, que tienden a formar una red conectada.

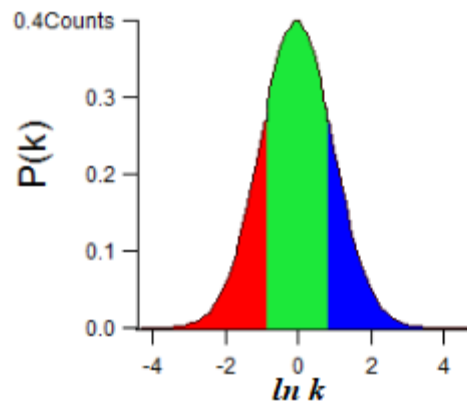


Figura 3.2: PDF lognormal de la conductividad hidráulica de los medios de la figura 3.1.

En este trabajo se generaron medios cúbicos de tamaño lineal $L=128\Delta$. Este tamaño fue elegido con el objetivo de acercarse a las condiciones de medio infinito sin que el costo computacional (asociado al tamaño del sistema lineal a resolver, a la resolución posterior del flujo y al cálculo de K_{eff}) sea excesivamente grande. Se eligió, para simplificar los cálculos, que la dimensión lineal de las celdas sean equivalentes a 1 metro ($\Delta=1m$). Se utilizaron variogramas de tipo gaussiano y se eligió que la media de la PDF de conductividad hidráulica gaussiana fuera igual a uno.

Con el fin de obtener medios isótropos, se utilizó la misma longitud de correlación l_c en las tres direcciones espaciales. Se decidió trabajar con $l_c=8\Delta$, 12Δ y 16Δ , de modo que se cumpliera con dos condiciones. Una es que l_c sea marcadamente superior a Δ , para poder obtener una cierta textura de heterogeneidad. La otra es que l_c sea significativamente menor a L , para que el valor de K_{eff} tenga un valor asintótico bien definido (ver discusión de la sección 2.4.5).

Para trabajar con el enfoque estocástico, se generó un ensamble numeroso de realizaciones (utilizando varios valores de semilla en el algoritmo FFTMA) para cada combinación de parámetros de conectividad (l_c , σ_f^2 y la estructura de conectividad), ya que si se usaran pocas muestras se obtendrían fluctuaciones en K_{eff} . A medida que aumenta el número de muestras, estas fluctuaciones se reducen y pueden comenzar a ser consideradas despreciables (Fig. 3.3). Cabe destacar que el enfoque utilizado es en realidad pseudo-aleatorio, lo que se refleja en que, si se repite la semilla, se repite la misma realización.

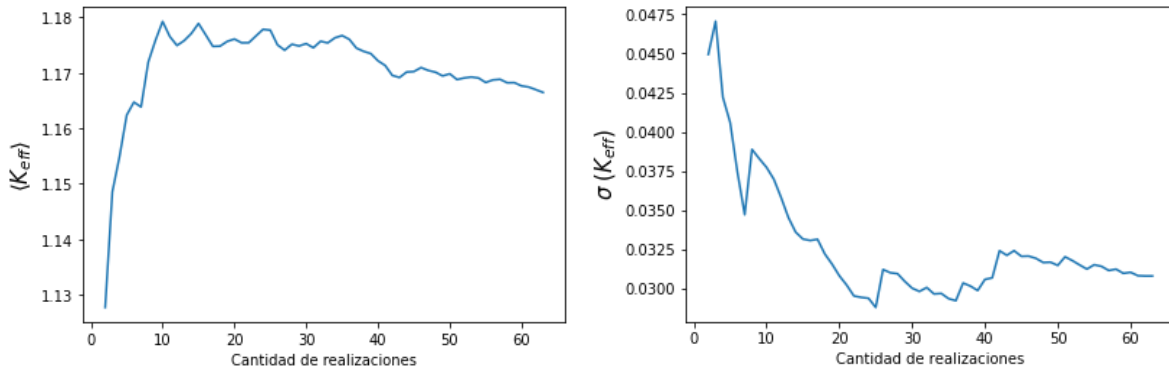


Figura 3.3: Media aritmética y desviación estándar de K_{eff} en función del número de realizaciones de medios con $l_c=16\Delta$, $\sigma_f^2=1$ y ECI. Se observan fluctuaciones en el valor de ambos indicadores estadísticos, que van disminuyendo a medida que el número de realizaciones es mayor.

El método utilizado para realizar el muestreo estadístico de K_{eff} consiste en generar realizaciones de tamaño $L > \lambda$, obteniéndose, en 3D, $\left(\frac{L}{\lambda}\right)^3$ valores (muestras) de K_{eff} para cada realización. Este método combina una estadística de ensamble con una espacial, lo que es válido bajo la hipótesis de ergodicidad. En este sentido hemos realizado comparaciones para corroborar dicha hipótesis con resultados satisfactorios. En la figura 3.3 se ilustran la media aritmética y la desviación estándar de K_{eff} en función del número de realizaciones en la escala λ más grande. Ambos indicadores estadísticos tienen una reducción considerable de sus fluctuaciones a partir de las cincuenta realizaciones aproximadamente (para valores menores de λ las fluctuaciones se reducen con menos realizaciones). Por estas razones, para obtener un modelo estocástico, se decidió generar 63 realizaciones para cada combinación de parámetros (l_c , σ_f^2 y estructura de conectividad), con el objetivo de optimizar la representatividad de los resultados.

Existe un método alternativo al utilizado para la presente tesis, el cual consiste en generar realizaciones con tamaño lineal de muestra λ de forma tal que se obtiene un valor de K_{eff} para cada realización. Este método implica exclusivamente una estadística de ensamble. La ventaja de utilizar este método alternativo es que no existirán correlaciones espaciales entre dos realizaciones distintas. La ventaja del método seleccionado para esta tesis es que se pueden utilizar longitudes de correlación más grandes que son complicadas de generar en muestras más pequeñas.

3.1.2 Obtención de diferentes estructuras de conectividad

En la figura 3.4 se ilustran las tres estructuras de conectividad que puede tener un reservorio generado por el simulador utilizado. Estas tres estructuras tienen funciones de distribución y de covarianza espacial (variograma) casi idénticas. De esta manera, comparten la misma geoestadística, pero difieren en la forma en que los valores de conductividad hidráulica altos y bajos están conectados. En cada una se observan valores de conductividades hidráulicas similares conectados y formando redes conectadas a lo largo del medio, como así también valores de conductividades hidráulicas similares agrupados en nódulos aislados. En la estructura multigaussiana (ECI) se observa que las conductividades hidráulicas intermedias tienden a formar redes conectadas. En la ECA se observa que los valores de conductividad hidráulica altos tienden a formar las redes, mientras que en la ECB las redes conectadas tienden a estar formadas por las conductividades hidráulicas bajas y las conductividades hidráulicas altas tienden a formar nódulos aislados.

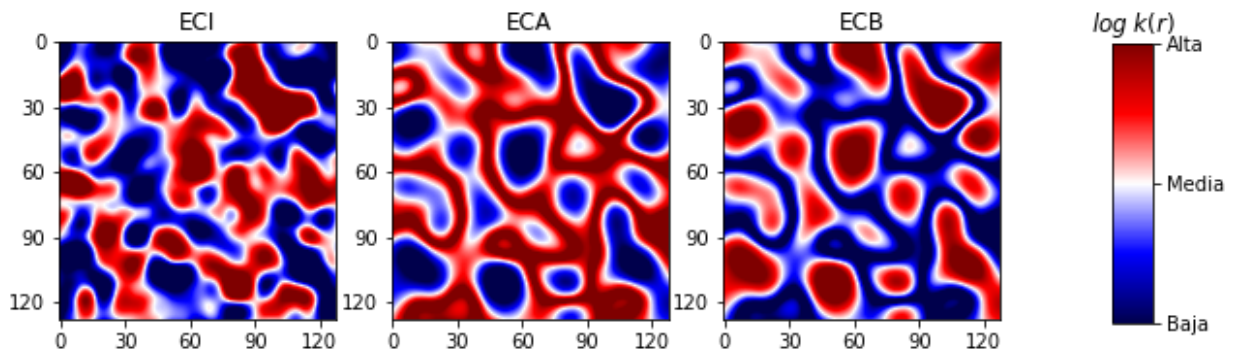


Figura 3.4: Medios lognormales de $L=128\Delta$ generados para la presente tesis. El medio multigaussiano (o con ECI) se generó utilizando el algoritmo FFTMA. A este medio se le aplicó la transformación NST y de esta manera se obtuvieron las estructuras de conectividad alta (ECA) y baja (ECB). Nótese que la ECA es equivalente a la ECB con los valores de conductividad hidráulica invertidos.

Como se mencionó anteriormente, los medios con ECI se generaron aplicando el código FFTMA, mientras que las ECA y ECB se obtuvieron aplicando la NST a los medios con ECI, cuyo método está detallado en la sección 2.3. Teniendo en cuenta que la NST mantiene la PDF y el variograma del medio con ECI pero reduce el valor de l_c , se incrementa el valor de l_c en el generador de medios (FFTMA) para los casos de ECA y ECB, de modo que todos los medios con diferentes estructuras de conectividad tengan la misma longitud de correlación. Si el variograma es gaussiano, el nuevo valor para la longitud de correlación será $l_c/0.6$ y si es exponencial, $l_c/0.38$.

3.2 Cálculo de la conductividad hidráulica efectiva K_{eff} (upscaling)

Se calculó K_{eff} utilizando un método local (permeámetro), imponiéndose las condiciones de contorno que se muestran en la figura 3.5:

1. Flujo cero en los lados laterales (Neumann)
2. Presión en la entrada (p_{en}) y en la salida (p_{sal}) constantes (Dirichlet)

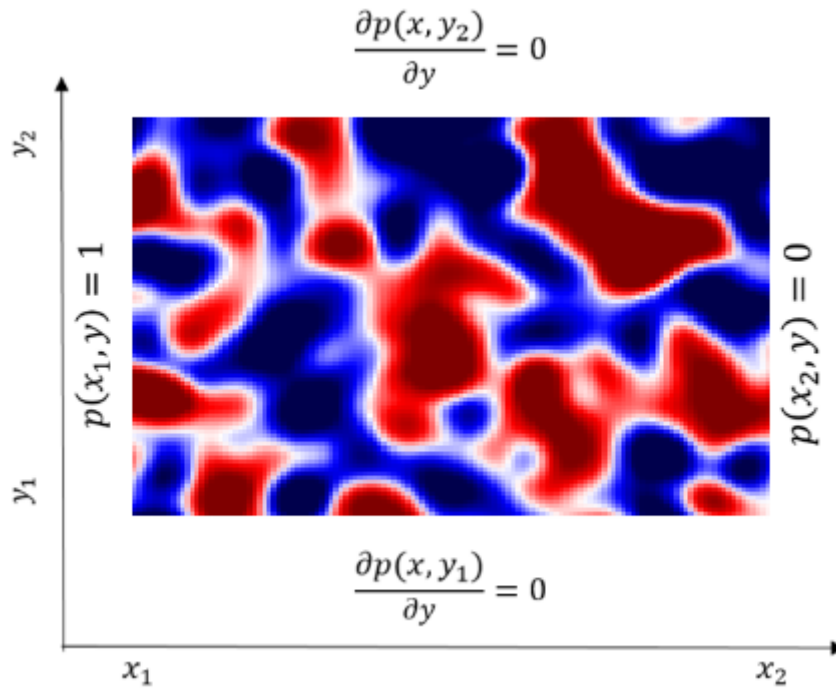


Figura 3.5: Condiciones de contorno tipo permeámetro impuestas en el cálculo del flujo en el medio.

Tal como se explicó en la sección 2.4.1, el hecho de que las condiciones de contorno tengan influencia en K_{eff} y no sean una característica intrínseca del medio, permite proponer que la conductividad hidráulica que calculamos es “pseudo-efectiva” y no efectiva.

Dado que la grilla del medio es regular, la resolución del flujo se realizó mediante diferencias finitas, y asumiendo una transmisividad interceldas dada por la media armónica de las conductividades hidráulicas (lo cual implica una aproximación de flujo 1D entre dichas celdas, y, a su vez, un error de truncamiento si el flujo no es exactamente 1D). Las matrices del sistema lineal que se obtienen a partir de estos métodos son muy ralas (“sparse”), por esto, resulta importante que los códigos que se implementen para almacenar y resolver el sistema aprovechen esta característica, como también utilicen técnicas adecuadas de solución, y preconditionamiento como por ejemplo, el método de gradientes conjugados preconditionado, con preconditionador ILU [66]. Seleccionamos el método de gradientes conjugados (CG) para resolverlo, con un preconditionador tipo Jacobi. Utilizamos una técnica de almacenamiento CSR (Compressed Storage Row) para almacenar la matriz dispersa eficientemente [67].

Para la resolución del flujo se utilizó la biblioteca PETSc Python (PETSc4py) que ofrece un conjunto de herramientas para el procesamiento paralelo de sistemas lineales. PETSc se basa en la herramienta de comunicación entre procesadores MPI (Message Passing Interface). La ventaja de esta solución es que puede utilizarse desde la interfaz de Python. Finalmente, K_{eff} se obtiene de la relación entre el gradiente de presiones aplicado y el caudal resultante, según la ecuación 2.23.

3.2.1 Refinamiento y error de truncamiento

El refinamiento es un proceso que ayuda a reducir el error de truncamiento introducido por la aplicación de la aproximación de flujo 1D que utiliza la media armónica de las conductividades hidráulicas para calcular la transmisibilidad entre celdas vecinas (ver sección 3.2). Consiste en utilizar, para la resolución del flujo, una malla de simulación más fina que la malla fina geológica o escala soporte geológica. Este procedimiento se utiliza con fines puramente numéricos, para mejorar la convergencia y reducir sesgos en el cálculo de K_{eff} [50], y no introduce en modo alguno información geológica adicional sobre el medio. En el ejemplo de la figura 3.7 se muestra el refinamiento de una malla de 2×2 celdas con un grado de refinamiento (r') igual a 2 en el eje X, al igual que en el eje Y.

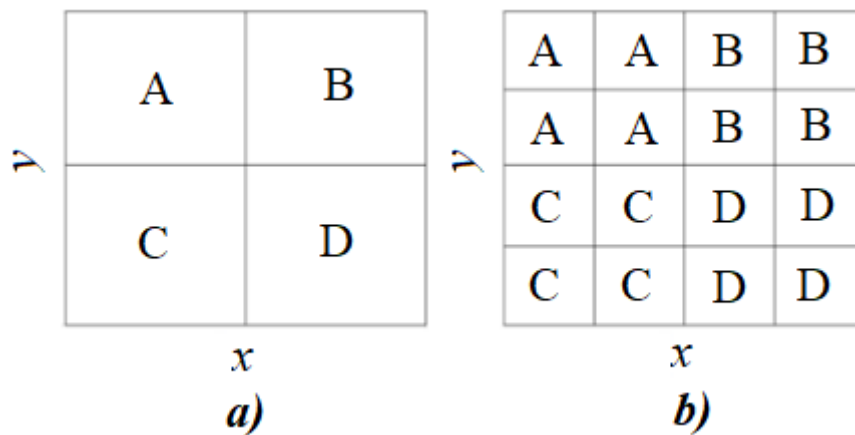


Figura 3.7: Ejemplo de implementación de grado de refinamiento $r' = 2$ en X y en Y. (a) Malla original, con cuatro celdas de conductividades hidráulicas A, B, C, D. (b) Malla refinada, en la que todas las celdas que corresponden a una celda inicial dada tienen el mismo valor de conductividad hidráulica.

En las resoluciones del flujo, tales como el esquema de diferencias finitas, en las cuales existe una aproximación a flujo 1D (o sea se asume, por ejemplo, que el flujo entre la celda con conductividad hidráulica A y la de conductividad hidráulica B tiene únicamente componente en la dirección horizontal), se puede utilizar el refinamiento para reducir el error de truncamiento que genera un sesgo en los resultados. La desviación de la condición 1D del flujo proviene de un contraste fuerte entre las conductividades hidráulicas de las celdas vecinas entre las que se considera el flujo: si la celda A tiene una conductividad hidráulica alta pero la B tiene una conductividad hidráulica muy baja, ésta última representa un “obstáculo” para el flujo, que intentará “contornearla”, haciendo que el flujo tenga una componente no despreciable en la dirección vertical. Al introducir el refinamiento, se aumenta la fracción relativa de celdas vecinas que tienen el mismo valor de conductividad hidráulica, y luego se reduce en cierta medida el problema mencionado arriba.

Si se pudiera refinar en un grado muy alto, o sea, subdividiendo cada celda original en la escala soporte en un número de celdas tendiendo a infinito, la fracción relativa de interfases entre celdas de diferente conductividad hidráulica tendería a cero y en cada interfaz el flujo sería perfectamente unidimensional. Sin embargo, introducir un grado de refinamiento conlleva a un aumento en los tiempos de cómputo, ya que se aumenta el tamaño del sistema lineal a resolver. Dado que el tiempo de cómputo disponible es finito, existe un

compromiso entre el grado de refinamiento r' que se desea utilizar y el número de realizaciones con las que se puede trabajar, que es equivalente a un compromiso entre el error de truncamiento y el error estadístico. En este sentido, un medio con l_c bajo tendrá mayor contraste de conductividad hidráulica entre celdas vecinas que otro con l_c más grande (ver Fig 2.13), ya que en el último caso la correlación espacial es mayor. Si se quiere reducir el error de truncamiento habrá que aplicar un r' mayor para el que tenga l_c menor. Si l_c es lo suficientemente grande, puede eventualmente obviarse el refinamiento.

En la Fig 3.8 se observa la variación de K_{eff} con r' . El valor de K_{eff} para $1/r' \rightarrow 0$ (esto corresponde a $r' \rightarrow \infty$) se obtuvo a partir de una extrapolación (para esto se aprovecha que el error de truncamiento en función de $1/r'$ es una función suave). El error relativo de K_{eff} obtenida sin refinar respecto de la del refinamiento de grado infinito es del 1.77%. A partir de $r' = 4$, el error se reduce a 0.52%. Por lo tanto, se consideró que $r' = 4$ proveía un buen balance entre el error en el truncamiento y el tiempo de cómputo.

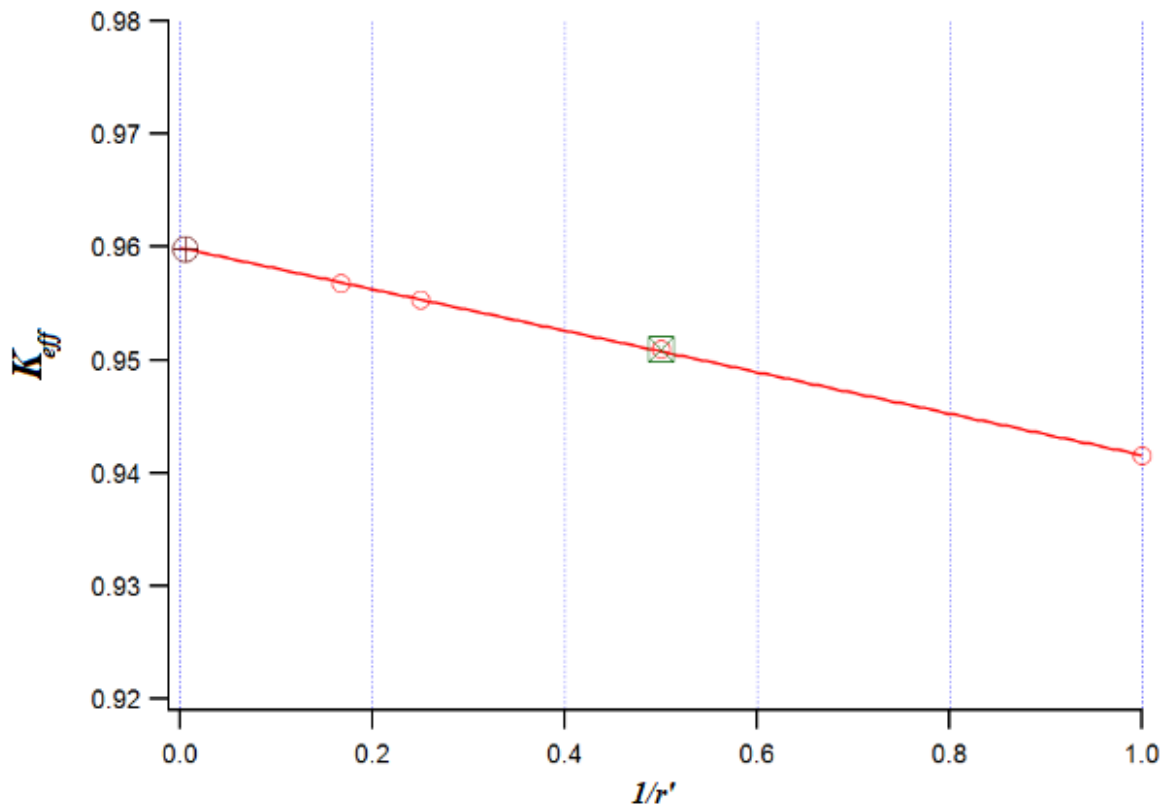


Figura 3.8: Variación de K_{eff} en función del grado de refinamiento r' . La recta se obtuvo calculando K_{eff} para $r' = 1, 2, 4$ y 6 , y extrapolando hacia $1/r' \rightarrow 0$ para conocer el valor de la conductividad hidráulica efectiva cuando el refinamiento tienda a infinito. A partir de cierto grado de refinamiento (por ejemplo $r' = 4$), la reducción del error de truncamiento que generaría refinar más no compensa el aumento en términos de tiempos de cómputo.

En la Fig 3.9 se observa la diferencia entre K_{eff} obtenido de un medio sin refinar y el obtenido de un medio con $r' = 4$ en función de λ , para los valores de l_c y σ_f^2 utilizados en la presente tesis (se muestra la ECA únicamente, ya que es la que mayor diferencia presenta entre las tres estructuras de conectividad). Ambos medios corresponden a un mismo valor de semilla. La diferencia entre ambos valores de K_{eff} se reduce a medida que aumenta l_c , siendo la diferencia más grande de 5.4%, que consideramos como insuficiente para justificar el uso

de refinamiento. Además, es importante tener en cuenta que para graficar las PDF de $\log(K_{eff})$ (ilustradas en el capítulo 4) con una resolución aceptable, es necesario tener un gran número de realizaciones, ya que aumentará el número de muestras de K_{eff} . Como la utilización del refinamiento obliga a reducir el número de realizaciones y para los medios a estudiar no mejora de manera significativa los valores de K_{eff} , decidimos trabajar generando 63 realizaciones sin refinar para cada combinación de parámetros.

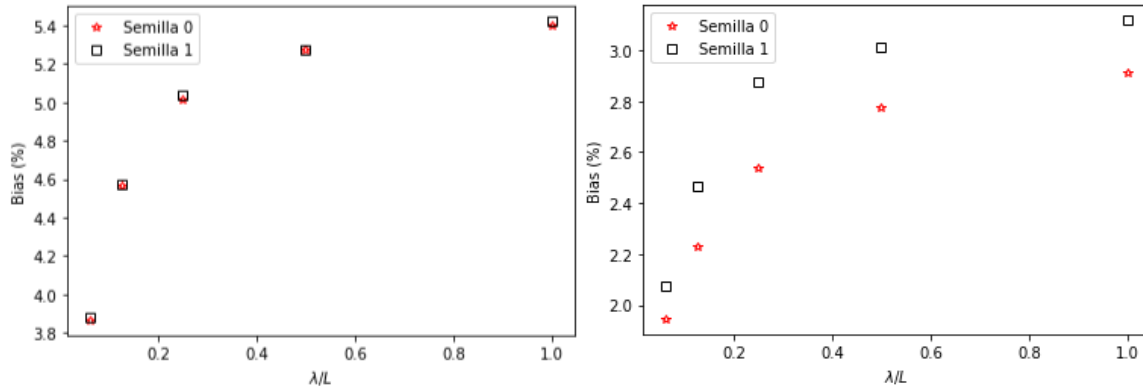


Figura 3.9: Diferencia de K_{eff} entre un medio con refinamiento 4 y uno sin refinar, ambos con ECA, $L=128\Delta$, $l_c=8\Delta$ (izquierda) y 16Δ (derecha), y $\sigma_f^2=2$. La comparación está realizada para medios generados con la misma semilla. La diferencia aumenta a medida que λ es mayor. Se observa que el error de truncamiento se reduce a medida que l_c aumenta.

3.3 Implementación en el entorno de cómputo de alto desempeño TUPAC

Las simulaciones se realizaron en la supercomputadora TUPAC [68] ubicada en el centro de simulación computacional para aplicaciones tecnológicas (CSC) del Conicet (Fig 3.6). La supercomputadora tiene prioridad en el uso de proyectos de desarrollo tecnológico, pero también está abierta para ser utilizada por parte de la comunidad científica.



Figura 3.6: Supercomputadora TUPAC.

El cluster computacional posee 60 nodos CPU y 8 GPU. Cada nodo cuenta con 128 Gb de memoria RAM y 64 núcleos (32 núcleos reales y 32 virtuales), por lo que en cada

nodo pueden ejecutarse 64 procesos en simultáneo. Sin embargo, es más eficiente utilizar solamente los 32 núcleos reales. El sistema que administra las colas es Slurm [69] y el tiempo máximo que es posible utilizar un nodo hasta que el sistema detenga las simulaciones automáticamente (walltime) es de 3 días. El sistema Slurm permite reservar una cantidad arbitraria de nodos del clúster. El método estocástico empleado en este trabajo implica generar varias realizaciones para cada conjunto de parámetros y el simulador puede correr cada una de estas simulaciones en simultáneo, utilizando todos los recursos disponibles.

La versión actual del simulador desarrollado por este equipo cuenta con cuatro módulos principales, que reflejan el procedimiento numérico:

- a) Generación de reservorios multigaussianos utilizando como datos de entrada los parámetros geoestadísticos utilizando FFTMA [1].
- b) Binarización/ Condicionamiento de la estructura de conectividad.
- c) Cálculo de los indicadores de conectividad.
- d) Refinamiento y simulación de flujo. Cálculo de la conductividad hidráulica efectiva.

Las etapas de mayor costo computacional (a,b,d) se encuentran programadas en C/C++ y la etapa c) en Fortran. En particular, la etapa d) utiliza la librería PETSc, que contiene rutinas para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones en paralelo. Las etapas de pre y post-procesamiento fueron programadas en lenguaje Python, con lo cual se tiene una gran flexibilidad para incorporar nuevos módulos al simulador. El código está optimizado para correr en paralelo en entornos de cómputo de alto desempeño (HPC) como TUPAC.

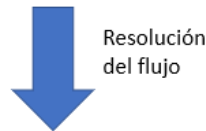
3.4 Diagrama de flujo de la simulación

Como resumen gráfico de esta sección presentamos un diagrama de flujo de la metodología numérica empleada en donde mostramos las principales variables del estudio y los parámetros de entrada y salida de cada programa involucrado.

<ul style="list-style-type: none"> • Algoritmo FFTMA (C/C++) – Generación de medios con distribución de permeabilidades gaussianas. 	
Entrada	Dimensiones: 128^3 celdas cúbicas Varianza de la distribución de permeabilidades: 0.5, 1 y 2 Longitud de correlación: 8, 12 y 16 (unidades en Δ) Realizaciones: 63 semillas para cada combinación de variables Variograma: Gaussiano
Salida	567 medios 3D gaussianos, con distinto grado de heterogeneidad (dado por l_c) y distribución de permeabilidad (dada por σ^2)



<ul style="list-style-type: none"> • Normal score transform (NST) (Python) – Generación de las estructuras de conectividad 	
Entrada	<p>Medios multigaussianos generados en el paso anterior</p> <p style="text-align: center;">Para generar</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>ECI</p> <p>↓</p> <p>No se aplica NST</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>ECB</p> <p>↓</p> <p>Aplicación de NST</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>ECA</p> <p>↓</p> <p>Aplicación de NST con reflexión de los valores de permeabilidad</p> </div> </div>
Salida	<p>1701 medios con distinta heterogeneidad, distribución de permeabilidades y estructura de conectividad</p>



<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de K_{eff} (C/C++/Python) - Resolución del flujo con método de volúmenes finitos
<p>Entrada:</p> <p>1701 medios generados</p> <p>Tolerancia</p> <p>Número de iteraciones máximo</p>
<p>Salida:</p> <p>K_{eff}</p>



Procesamiento de datos y análisis de resultados

4. Resultados

Inicialmente se presentan las PDF del logaritmo de K_{eff} ($P[\log(K_{eff})]$) en función de la escala de agregación λ . Luego se presentan los resultados para las medias aritméticas y geométricas, y la varianza de dichas distribuciones, en función del parámetro λ/l_c . Tanto la media aritmética como la varianza de la conductividad hidráulica efectiva K_{eff} se comparan con los resultados teóricos para medios multigaussianos dados por las Ecs. 2.19 y 2.21.

4.1 Distribuciones de K_{eff} (función de densidad de probabilidad de K_{eff})

En el marco del enfoque estocástico utilizado, se presentan las PDF (histogramas normalizados) del logaritmo de K_{eff} ($P[\log(K_{eff})]$) para todas las combinaciones de parámetros estudiadas (l_c , σ_f^2 y estructura de conectividad), y distintas escalas espaciales de agregación (upscaling) λ . Cada $P[\log(K_{eff})]$ se graficó utilizando las 63 realizaciones, dependiendo la cantidad total de valores de K_{eff} del tamaño de la escala de agregación λ seleccionada. Por ejemplo, si se elige $\lambda = L/2$, se obtendrán $2^3=8$ valores de K_{eff} para cada una de las realizaciones generadas, ya que cada realización contiene 8 bloques de tamaño λ^3 . Entonces, $P[\log(K_{eff})]$ se calcula sobre $63 \times 8 = 504$ valores de K_{eff} en total.

En las Figs. 4.1 y 4.2 se ilustran las distribuciones normalizadas de $\log(K_{eff})$ ($P[\log(K_{eff})]$) obtenidas aplicando la regla de Scott para construir el histograma (esta regla sirve para distribuciones normales o cercanas a la normal). La regla de Scott establece que el intervalo de clase h está dado por

$$h = \sigma \sqrt[3]{\frac{24\pi}{n}}$$

con n la cantidad de muestras y σ la desviación estándar.

Teniendo en cuenta que el grado de homogeneización (el establecimiento de un REV) depende del tamaño relativo entre λ y l_c (ver sección 2.4.5), para $l_c=8\Delta$ se utilizó $\lambda=4\Delta$ como la escala graficada más pequeña, mientras que para $l_c=16\Delta$ se utilizó $\lambda=8\Delta$.

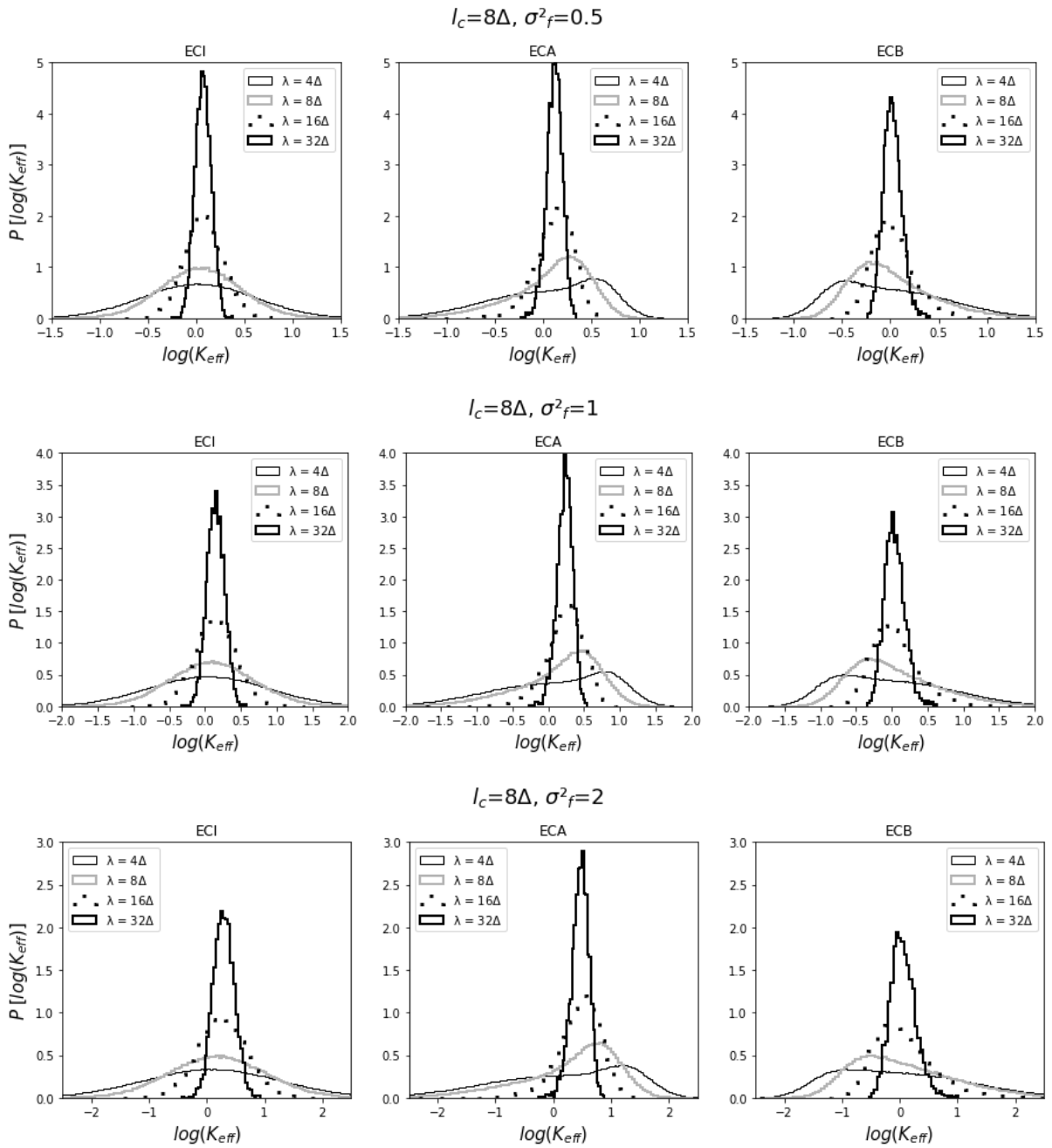


Figura 4.1: $P[\log(K_{eff})]$ para $l_c=8\Delta$; $\lambda=4\Delta, 8\Delta, 16\Delta$ y 32Δ ; y $\sigma_f^2=0.5, 1$ y 2 . Se observa que $P[\log(K_{eff})]$ se vuelve más homogénea a medida que λ es más pequeño. La simetría de $P[\log(K_{eff})]$ cambia dependiendo de la estructura de conectividad.

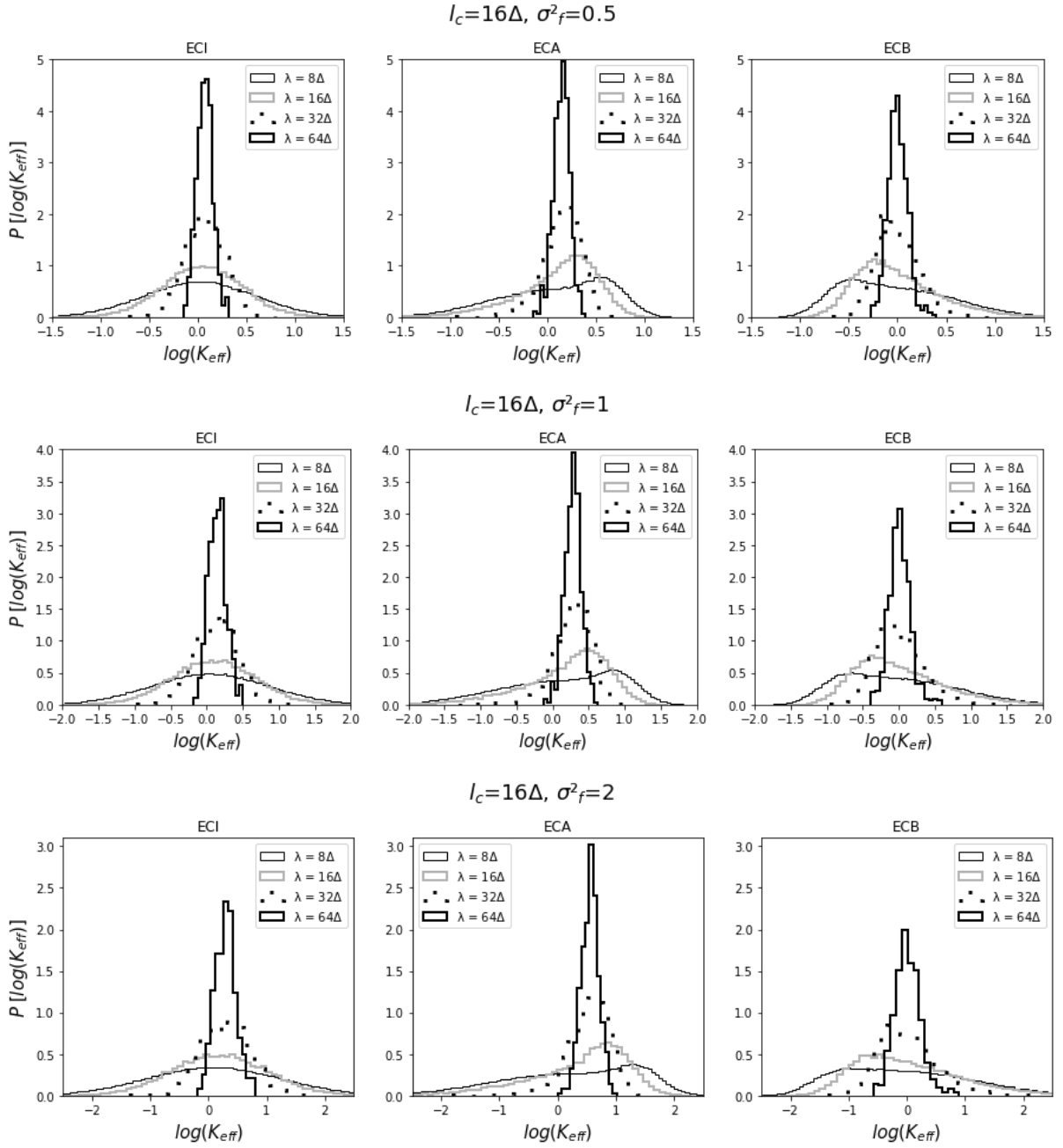


Figura 4.2: $P[\log(K_{eff})]$ para $l_c=16\Delta$; $\lambda=8\Delta, 16\Delta, 32\Delta$ y 64Δ ; y $\sigma_f^2=0.5, 1$ y 2 . Todas las $P[\log(K_{eff})]$ presentan las mismas características que las de la figura 4.1.

Se observa que, a medida que σ_f^2 aumenta, la distribución $P[\log(K_{eff})]$ es más ancha, teniendo picos de menor altura. Al disminuir la longitud de correlación l_c , las distribuciones son más anchas, lo cual es equivalente a afirmar que las $P[\log(K_{eff})]$ son más homogéneas. Para la ECI, $P[\log(K_{eff})]$ se mantiene simétrica y centrada alrededor del mismo valor para todas las escalas de agregación λ (ver pregunta 1) de la sección 2.6.1). En particular, a medida que λ es menor, $P[\log(K_{eff})]$ tiende a ser más homogénea. Por otro lado, $P[\log(K_{eff})]$ para la ECA presenta una asimetría hacia izquierda y una asimetría hacia derecha para las ECB, que son más evidentes a medida que λ disminuye.

4.2 Medias de K_{eff}

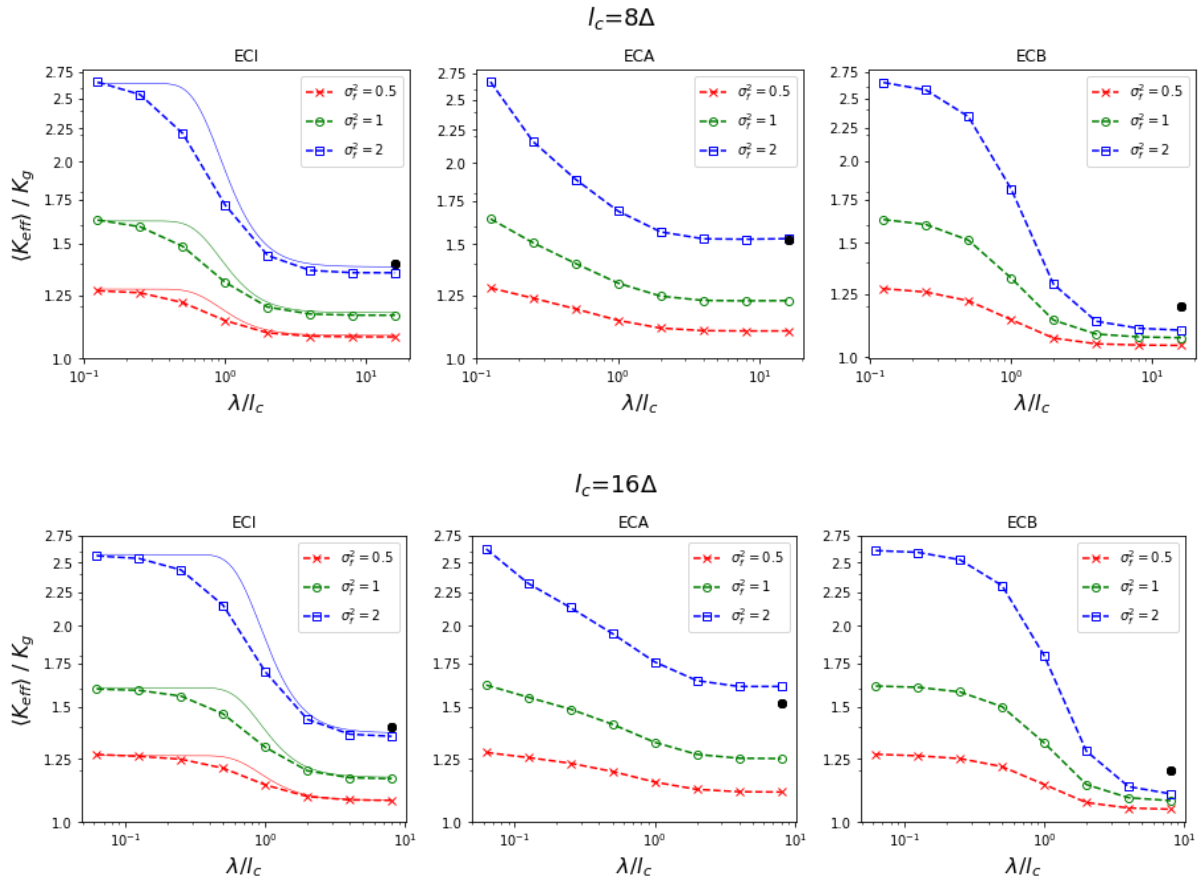


Fig 4.3: Variación de $\langle K_{eff} \rangle / K_g$ en función de λ / l_c para las 3 estructuras de conectividad consideradas; $l_c = 8\Delta$ y 16Δ ; y $\sigma_f^2 = 0.5$ (x), 1 (o) y 2 (□). La línea continua corresponde a la predicción teórica de Eberhard (ecuación 2.19), configurando $a_s = 1.3$. Los puntos negros corresponden a simulaciones de Jankovic y otros [34]. Los resultados tienden a la ecuación 2.18 para $\lambda \rightarrow 0$ y a la conjetura de Matheron (ecuación 2.15 con $D=3$) para $\lambda \rightarrow \infty$.

La Fig 4.3 muestra la media aritmética de K_{eff} ($\langle K_{eff} \rangle$) en función de λ / l_c . Las líneas punteadas corresponden a las simulaciones de este trabajo, mientras que la línea continua representa el resultado analítico de Eberhard (Ec 2.19) y los círculos negros llenos las simulaciones de Jankovic y otros [34] para $\lambda \rightarrow \infty$ y $\sigma_f^2 = 2$. Los resultados para la ECI fueron los únicos que se compararon con la ecuación 2.19, ya que la fórmula aplica a medios multigaussianos. Con un valor de 1.3 para el parámetro a_s , se obtiene un buen acuerdo entre teoría y simulación. Los resultados se asemejan más a los de Eberhard [44] a medida que disminuye σ_f^2 .

Se observa que $\langle K_{eff} \rangle$ decae con la escala para todas las estructuras de conectividad, en acuerdo con las ecuaciones de la sección 2.4.3. Para $\lambda \rightarrow 0$, $\langle K_{eff} \rangle$ tiende a la Ec 2.18 ($K_a = K_g \exp(\sigma_f^2/2)$), que es una propiedad para medios lognormales. Para la ECI y $\lambda \rightarrow \infty$, $\langle K_{eff} \rangle$ decrece asintóticamente a la conjetura de Matheron (Ec. 2.15 con $D=3$), es decir, $\langle K_{eff} \rangle \rightarrow K_g \exp(\sigma_f^2/6)$ (o bien al resultado perturbativo $K_g(1 + \sigma_f^2/6)$).

Los resultados novedosos están relacionados con la ECA y la ECB. Para la ECA se observa un decaimiento de $\langle K_{eff} \rangle$ más suave con λ que para la ECI (y un valor asintótico más alto), mientras que para la ECB se observa un decaimiento abrupto cuando $\lambda \sim l_c$ (y un valor

asintótico más bajo). Los resultados de Eberhard [44] predicen que si λ es significativamente mayor que l_c , entonces $\langle K_{eff} \rangle$ es independiente de l_c .

Si $l_c=8\Delta$, los resultados de la ECA coinciden con las simulaciones de Jankovic y otros [34] para $\lambda \rightarrow \infty$ y $\sigma_f^2=2$, pero presentan una diferencia notable si $l_c=16\Delta$. Para la ECI también existe una coincidencia entre los resultados y las simulaciones de Jankovic y otros, sin observarse una diferencia al variar l_c . La ECB es la que tiene menor coincidencia con Jankovic y otros, sin importar el valor de l_c configurado.

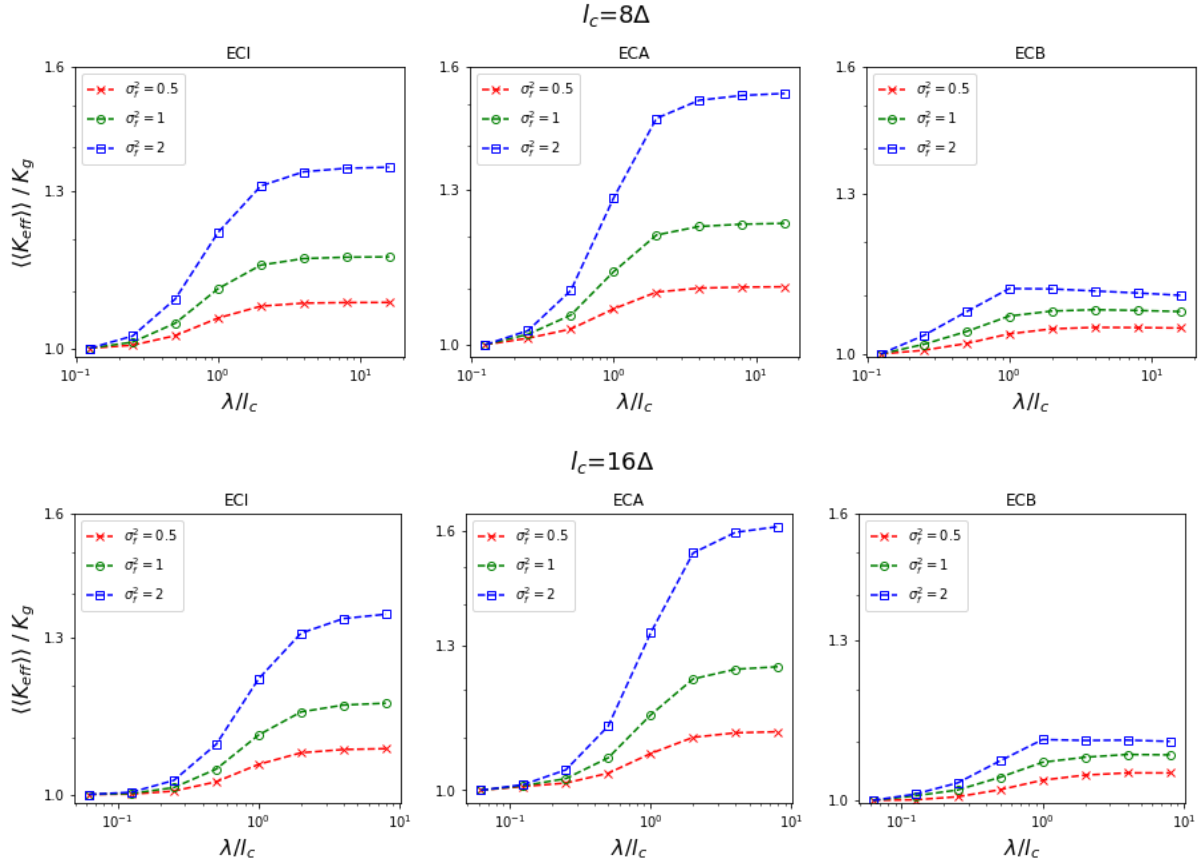


Figura 4.4: Variación de $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle / K_g$ en función de λ/l_c para las 3 estructuras de conectividad consideradas; $l_c=8\Delta$ y 16Δ ; y $\sigma_f^2=0.5$ (x), 1 (o) y 2 (□). Todas las curvas, salvo las de la ECB, son monótonamente crecientes, lo cual constituye un comportamiento inverso al de la media aritmética. Los resultados tienden a 1 para $\lambda \rightarrow 0$ y a la conjetura de Matheron para $\lambda \rightarrow \infty$.

En la figura 4.4 se observa la media geométrica de K_{eff} ($\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$) en función de λ/l_c . Para la ECI y la ECA, $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ es monótonamente creciente con la escala de agregación λ , constituyendo un comportamiento inverso al de la media aritmética $\langle K_{eff} \rangle$, la cual decrece con λ . Para la ECB, $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ también aumenta con λ , pero a partir de cierto valor de λ , que varía respecto de σ_f^2 , comienza a decrecer. La variación más abrupta de $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ corresponde a la ECA, mientras que la ECB presenta una variación más suave. La variación de $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ para la ECI es un caso intermedio entre la ECA y la ECB. Todos los gráficos tienden a 1 para $\lambda \rightarrow 0$, ya que se está dividiendo a la media geométrica de la malla gruesa $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ por la media geométrica de la malla fina K_g . Para $\lambda \rightarrow \infty$, $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ es igual a $\langle K_{eff} \rangle$ y en particular tiende al valor asintótico (para $\lambda \rightarrow \infty$) dado por la conjetura de Matheron (ecuación 2.15 con $D = 3$) para la ECI. Estos valores asintóticos son mayores con el aumento de la conectividad y de σ_f^2 .

Notar que para el mismo valor de λ/l_c , $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ siempre es menor a $\langle K_{eff} \rangle$, a excepción de cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en cuyo caso son iguales. Esta observación coincide con la identidad matemática de que la media geométrica es menor o igual a la aritmética (ver sección 2.2.1).

4.3 Varianza de K_{eff}

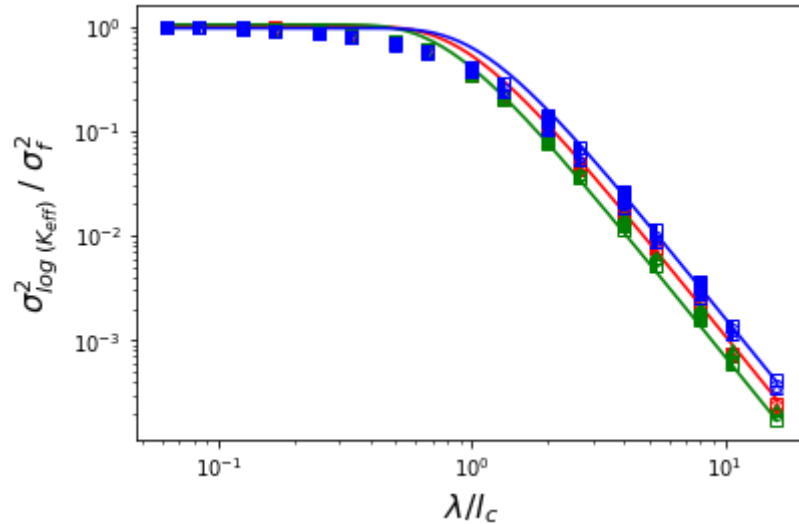


Figura 4.5: $\sigma^2_{\log(K_{eff})} / \sigma_f^2$ en función de λ/l_c para $l_c=8\Delta$ (símbolo vacío), 12Δ (símbolo lleno a izquierda/vacío a derecha: \blacktriangle , \bullet) y 16Δ (símbolo lleno); $\sigma_f^2=0.5$ (\triangle), 1 (\circ) y 2 (\square); y ECI (rojo), ECA (verde) y ECB (azul). Las líneas continuas representan la ecuación 2.21 para $a_s=1.1$ (verde), 1.3 (rojo) y 1.5 (azul). Para valores pequeños de λ/l_c , los datos colapsan para cualquier combinación de parámetros. Para valores mayores de λ/l_c , el colapso se mantiene para medios que tengan la misma estructura de conectividad.

En la figura 4.5 se muestra la varianza del logaritmo de la conductividad hidráulica efectiva ($\sigma^2_{\log(K_{eff})}$) en función de λ/l_c , para todas las combinaciones de σ_f^2 , l_c y estructura de conectividad. Las líneas continuas representan la ecuación 2.21 para tres valores distintos del parámetro a_s , los cuales se configuraron para cada estructura de conectividad: 1.1 para la ECA, 1.3 para la ECI y 1.5 para la ECB. Se observa que, para todas las combinaciones de parámetros y valores pequeños de λ/l_c , $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ colapsa, coincidiendo con la ecuación 2.21 para los tres valores de a_s . Para valores mayores de λ/l_c , el colapso se mantiene entre $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ que comparten la misma estructura de conectividad (con un mismo parámetro a_s de ajuste). Por lo tanto, al variar la estructura de conectividad, debe modificarse el parámetro a_s para tener un ajuste satisfactorio. Esto deja en claro que es necesario considerar la conectividad para obtener una imagen representativa de las diferentes situaciones de heterogeneidad presentes en el subsuelo, más allá de que se varíe σ_f^2 y l_c como se hizo históricamente en la literatura. En ese sentido, el parámetro a_s podría servir para identificar la estructura de conectividad de los medios.

5. Discusión y conclusiones

Como se mencionó anteriormente, Eberhard [44] estudió teóricamente la dependencia de $\langle K_{eff} \rangle$ y $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ con la escala de agregación λ , en el paso de la malla fina (geológica) a una malla gruesa (de simulación) en medios multigaussianos, mientras que Boschan y Noetinger [9], y Colecchio et al [11], realizaron estudios numéricos de similar índole (en 2D y 3D). Por otro lado, Zinn y Harvey [7] propusieron una forma de modificar la estructura de conectividad de los medios multigaussianos en 2D, para representar un rango mucho más amplio de conectividades que puedan replicar mejor las propiedades del subsuelo. Jankovic y otros [34] extendieron el trabajo de Zinn y Harvey, caracterizando las propiedades de flujo y transporte en función de la estructura de conectividad, en 3D. La presente tesis establece un nexo entre estos trabajos, logrando describir la dependencia de K_{eff} con la escala de agregación λ para un rango amplio de estructuras de conectividad.

En la Fig 4.3 validamos las simulaciones al constatar que la variación de $\langle K_{eff} \rangle$ con λ para la ECI están en buen acuerdo con la teoría de Eberhard (Ec 2.19). Además observamos que $\langle K_{eff} \rangle$ cumple con la propiedad para medios lognormales en 3D (Ec 2.18) cuando $\lambda \rightarrow 0$ y tiende al valor asintótico dado por la conjetura de Matheron (Ec 2.15 con $D=3$) para $\lambda \rightarrow \infty$.

Para la ECB, $\langle K_{eff} \rangle$ presenta un decaimiento con λ , que es más abrupto que para la ECI. En contraste, ese decaimiento es más suave para la ECA, constituyendo la ECI un caso intermedio entre la ECA y la ECB. La diferencia en el decaimiento tiene que ver con que los valores asintóticos (o sea, para $\lambda \rightarrow \infty$) de $\langle K_{eff} \rangle$ son más altos para la ECA y más bajos para la ECB (en acuerdo con Jankovic y otros [34]). Esto podría deberse a que en la ECA hay una red conectada de conductividades hidráulicas altas con una longitud de correlación de tamaño L , por lo que las conductividades hidráulicas efectivas en la malla gruesa van a ser altas y similares, sin importar el valor de λ . En cambio, en la ECB las conductividades hidráulicas altas tienden a formar nódulos aislados. Entonces, en la malla gruesa podrían existir casos de regiones con conductividades hidráulicas altas conectadas (conductividad hidráulica efectiva alta) o de nódulos aislados de conductividades hidráulicas altas rodeados de conductividades hidráulicas bajas (conductividad hidráulica efectiva baja), lo cual genera un contraste mayor entre conductividades hidráulicas efectivas. Respecto de las simulaciones de Jankovic y otros [34] para $\lambda \rightarrow \infty$ y $\sigma_f^2=2$, si $l_c=8\Delta$, la coincidencia con los resultados obtenidos es mayor para la ECA, seguida por la ECI. La ECB es la que presenta mayor diferencia con Jankovic y otros. Para $l_c=16\Delta$, hay mayor coincidencia entre las simulaciones de Jankovic y otros y los resultados del presente trabajo para la ECI, observándose una diferencia más notoria para la ECA y la ECB.

En la Fig 4.6 se presenta la variación de $\langle K_{eff} \rangle$ en función de λ/l_c , que es el parámetro planteado por Eberhard como escala de agregación. La diferencia con la Fig 4.3 es que se juntan las simulaciones con distinto l_c en un mismo gráfico. De esta manera es más sencillo notar que, para medios que presentan la misma estructura de conectividad y misma σ_f^2 , $\langle K_{eff} \rangle$ colapsa. El colapso es más notorio a medida que σ_f^2 es menor. El colapso es bueno para la ECI y la ECB, empeorando para la ECA. De estas observaciones se deduce que $\langle K_{eff} \rangle$ es independiente de l_c si se grafica en función de λ/l_c . En particular, se corrobora la independencia de $\langle K_{eff} \rangle$ respecto de l_c para $\lambda \rightarrow \infty$.

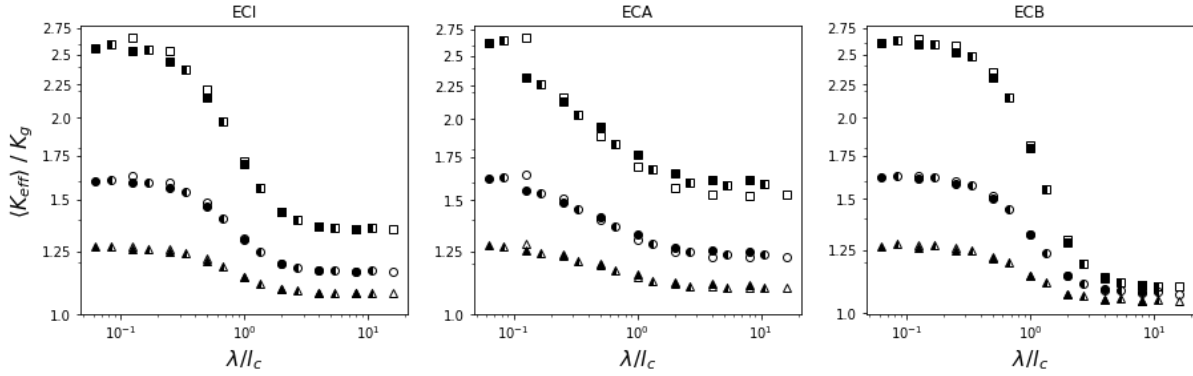


Fig 4.6: Colapso de $\langle K_{eff} \rangle / K_g$ para diferentes valores de l_c en función de λ / l_c . Los gráficos contienen las 3 estructuras de conectividad consideradas; $\sigma_f^2=0.5$ (\triangle), 1 (\circ) y 2 (\square); y $l_c=8\Delta$ (símbolo vacío), 12Δ (símbolo lleno a izquierda/vacío a derecha: \blacktriangle) y 16Δ (símbolo lleno).

En la Fig 4.4 se constata que, para cualquier valor de λ / l_c , la media geométrica de la conductividad hidráulica efectiva $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ es menor o igual a $\langle K_{eff} \rangle$, resultado que coincide con la identidad matemática de que la media geométrica es menor o igual a la aritmética. $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ tiende a la media geométrica de la malla fina K_g para $\lambda \rightarrow 0$ y a la conjetura de Matheron (ecuación 2.15 con $D=3$) para $\lambda \rightarrow \infty$, lo cual resulta en una validación de las simulaciones. El hecho de que $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ tienda a los valores predichos por la teoría produce que su comportamiento sea creciente con λ , a diferencia de $\langle K_{eff} \rangle$, que es decreciente con λ . La única excepción ocurre para la ECB, donde $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$ pasa de ser creciente a decreciente.

Como se vio en la Fig 4.5, la varianza del logaritmo de K_{eff} ($\sigma_{\log(K_{eff})}^2$) para la ECI coincide con la predicción de la Ec 2.21, por lo que validamos nuevamente las simulaciones realizadas. Se observa que, para valores pequeños de λ / l_c , $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ colapsa para cualquier combinación de l_c , σ_f^2 y estructura de conectividad. Para valores mayores de λ / l_c , el colapso se mantiene para medios con misma estructura de conectividad. Se verificó que, variando el parámetro a_s de la ecuación 2.21, se pueden ajustar las diferentes estructuras de conectividad. También podría evaluarse un colapso total usando únicamente la curva teórica de la ECI (con un único valor del parámetro a_s).

En la figura 4.7 se presenta $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ normalizada. Esta normalización se realiza multiplicando $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ por el prefactor $(\lambda / l_c)^3$. $(\lambda / l_c)^3$ representa el número de unidades de heterogeneidad independientes (UHI), interpretando que dentro de un cubo de tamaño λ^3 existen $(\lambda / l_c)^3$ nódulos de tamaño l_c^3 y entendiendo que estos últimos aportan cada uno un valor de K_{eff} independiente (tiene sentido hablar de UHI si se consideran valores grandes de λ). El hecho que $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$ normalizada tiende asintóticamente a un valor constante sugiere que la misma depende únicamente del número de UHI, lo cual se sabía que sucedía para medios con ECI, pero lo novedoso es que también sirve para la ECA y la ECB [9, 10]. Este comportamiento está relacionado al teorema central del límite, ya que la varianza decae con el número de muestras.

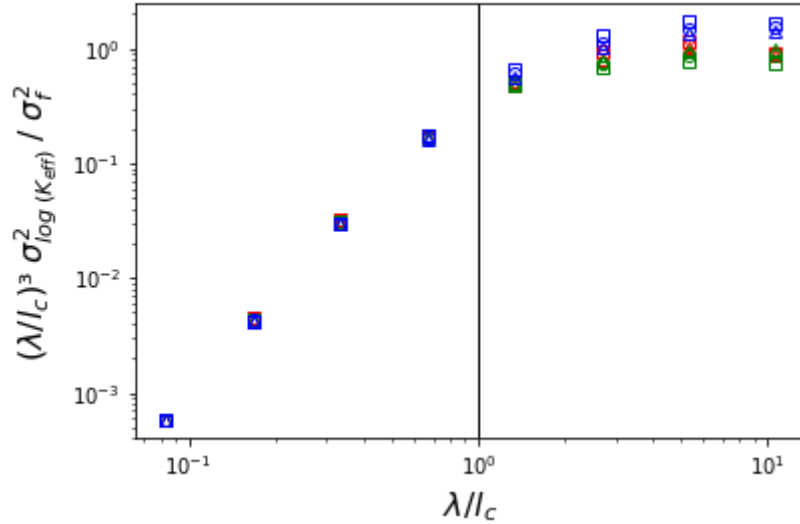


Figura 4.7: $\sigma_{\log(K_{eff})}^2 / \sigma_f^2$ multiplicada por el prefactor $(\lambda/l_c)^3$ en función de λ/l_c , para $l_c=12\Delta$; ECA (verde), ECI (rojo) y ECB (azul); y $\sigma_f^2=0.5$ (\triangle), 1 (\circ) y 2 (\square). $(\lambda/l_c)^3$ representa el UHI. Los datos tienden a una asíntota.

Respecto de las PDF del logaritmo de K_{eff} ($P[\log(K_{eff})]$) de las Figs. 4.1 y 4.2, se observa que en principio se conserva la naturaleza unimodal. La figura 4.8 ilustra con mayor detalle las diferencias que tienen las $P[\log(K_{eff})]$ que coinciden en todos sus parámetros excepto en la estructura de conectividad. Se observa que $P[\log(K_{eff})]$ tiende a ser simétrica para la ECI, coincidiendo con la distribución lognormal teórica. Al realizar upscaling, las $P[\log(K_{eff})]$ de la ECA y de la ECB pierden la naturaleza lognormal que poseían en la malla fina (ver sección 2.3), presentando la ECA una asimetría hacia la izquierda y la ECB una asimetría hacia la derecha.

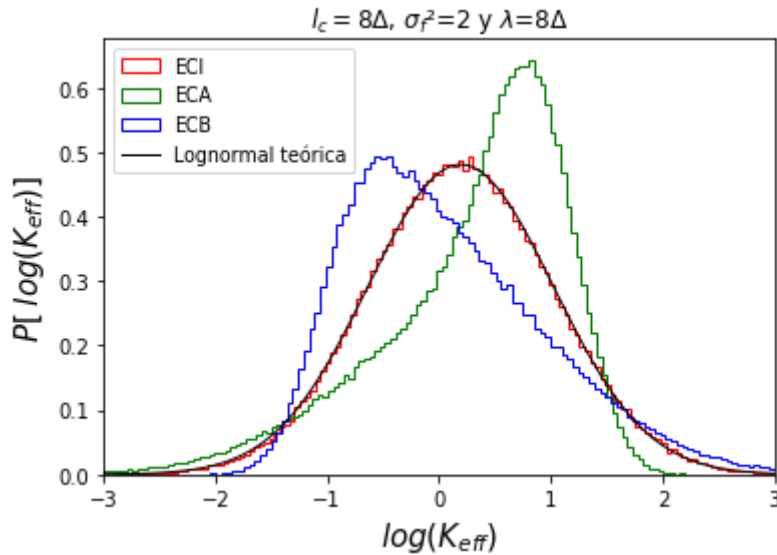


Figura 4.8: $P[\log(K_{eff})]$ para $l_c=8\Delta$, $\sigma_f^2=2$ y $\lambda=8\Delta$, con ECI (rojo), ECA (verde) y ECB (azul). La curva negra representa la distribución lognormal teórica. La distribución de la ECI coincide con la teórica. Se observa un cambio en la distribución de los medios con la estructura de conectividad. Para la ECI se mantiene la simetría lognormal, mientras que para la ECA y la ECB se forma una asimetría hacia izquierda y derecha, respectivamente. Este comportamiento se corrobora con los distintos valores de la oblicuidad.

Es importante recordar que la asimetría de una PDF está cuantificada por la oblicuidad, la cual también cambia al variar la escala de agregación λ . En la figura 4.9 se observa que el valor de la oblicuidad de cada $P[(\log(K_{eff}))]$ colapsa para valores pequeños de λ y si la estructura de conectividad es la misma. A medida que λ aumenta, aumenta la diferencia entre las distintas oblicuidades, lo cual podría deberse a que la cantidad de muestras de conductividad hidráulica disminuye con λ . De todos modos, esas diferencias se consideran pequeñas en comparación a las diferencias entre oblicuidades de medios con distinta estructura de conectividad. Para la ECI, la oblicuidad mantiene valores más cercanos a cero para las escalas más pequeñas respecto de las otras estructuras. El hecho de obtener valores cercanos a cero coincide con la simetría de $P[\log(K_{eff})]$ para medios con ECI. De esta manera se afirma que para medios con ECI, $P[(\log(K_{eff}))]$ es simétrica, independientemente del valor de la escala de agregación λ (ver Figs. 4.1 y 4.2). Se observa en los gráficos de la ECB y la ECA que, para todos los valores de λ , la oblicuidad es positiva y negativa, respectivamente, coincidiendo con la asimetría de $P[(\log(K_{eff}))]$ para cada estructura (ver Fig 4.8). Además, cada gráfico presenta un extremo para $\lambda/l_c=1$ aproximadamente. Ese extremo corresponde a un mínimo para la ECA y a un máximo para la ECB. Esto indica que ambas distribuciones tienden a ser lognormales en la malla fina, pero se tornan asimétricas a medida que aumenta λ en el rango $\lambda \leq l_c$. En el rango $\lambda > l_c$, las $P[(\log(K_{eff}))]$ de la ECA y de la ECB tienden a recuperar la simetría a medida que aumenta λ .

Con estas observaciones, se concluye que la oblicuidad de $P[(\log(K_{eff}))]$ está correlacionada con la estructura de conectividad del medio. El valor de la oblicuidad se mantiene cercano a cero (simetría total) para la ECI, y toma valores positivos (asimetría hacia la derecha) y negativos (asimetría hacia la izquierda) para ECB y ECA, respectivamente (el valor absoluto de la oblicuidad en estos últimos dos casos dependerá de λ). Estos análisis sugieren que se debe tener precaución respecto a en qué medida la media aritmética es representativa de la distribución $P[(\log(K_{eff}))]$.

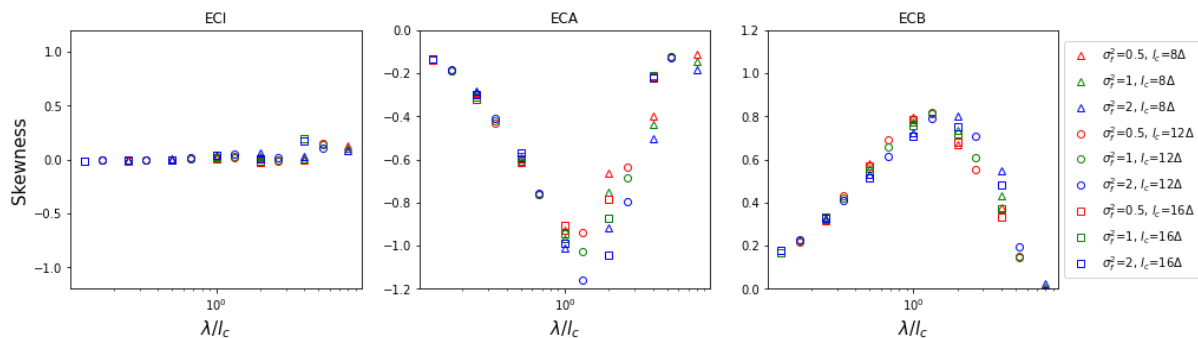


Figura 4.9: Variación de la oblicuidad de $P[(\log(K_{eff}))]$ en función de λ/l_c , para ECI, ECA y ECB; $l_c=8\Delta$ (Δ), 12Δ (\circ) y 16Δ (\square); y $\sigma_f^2=0.5$ (rojo), 1 (verde) y 2 (azul). Se observa un colapso para los medios que tienen misma estructura de conectividad. La ECI mantiene valores cercanos a cero, mientras que la ECA y la ECB toman valores negativos y positivos, respectivamente. Para $\lambda=l_c$ la ECA tiene un valor mínimo, mientras que la ECB tiene un máximo.

Con el análisis expuesto arriba, intentamos aquí contestar las preguntas clave planteadas en la sección 2.6.1:

Preguntas:

- 1) El resultado previo que indica que al realizar upscaling en un medio multigaussiano (ECI) se obtiene también una distribución lognormal de K_{eff} (Figs. 2.13 y 2.14), o puesto en términos matemáticos, que si $P[\log(k(r))]$ es lognormal, entonces $P[\log(K_{eff})]$ también lo es, ¿aplica a medios lognormales pero con estructuras de conectividad diferentes a la de un medio multigaussiano?
- 2) La predicción de Eberhard (Ec 2.19) sobre el decrecimiento de $\langle K_{eff} \rangle$ con λ para medios multigaussianos (Fig 2.15), ¿es extensible a medios lognormales con estructuras de conectividad diferentes?
- 3) El colapso de $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ observado para medios multigaussianos sobre diferentes valores de σ_f^2 (Fig 2.16), extendido en la presente tesis sobre diferentes valores de l_c , ¿se mantiene para medios lognormales con estructuras de conectividad diferentes?

Respuestas:

- 1) No aplica. En el rango $\lambda \leq l_c$, para la ECA, $P[(\log(K_{eff}))]$ presenta una asimetría hacia izquierda, asociada a una oblicuidad negativa. El valor absoluto de la oblicuidad aumenta con λ , lo cual indica que la asimetría es mayor con el aumento de la escala de agregación. En contraste, la $P[(\log(K_{eff}))]$ de la ECB presenta un comportamiento opuesto al de la ECA, con una asimetría hacia derecha, asociada a una oblicuidad positiva. En el rango $\lambda > l_c$, a medida que λ aumenta, tanto la $P[(\log(K_{eff}))]$ de la ECA como de la ECB recuperan la simetría, asociado a una disminución del valor absoluto de sus respectivas oblicuidades. En resumen, como no se mantiene la naturaleza lognormal de $P[(\log(K_{eff}))]$ para la ECA y para la ECB, no es posible replicar los resultados de Boschan y Noetinger [9], y Colecchio y otros [10] para estas estructuras de conectividad.
- 2) No lo es. Verificamos que la ecuación 2.19 coincide satisfactoriamente con $\langle K_{eff} \rangle$ para la ECI. La similitud es aún mayor para varianzas de malla fina más pequeñas. Sin embargo, dada la forma funcional de $\langle K_{eff} \rangle$ con λ para la ECA y la ECB, es evidente que no es posible un ajuste mediante la ecuación 2.19. En particular, la media aritmética para la ECA presenta un decaimiento significativamente más suave que el de la ECI, mientras que la media aritmética de la ECB presenta un decaimiento más abrupto. Por lo tanto, la teoría de Eberhard no puede utilizarse para predecir $\langle K_{eff} \rangle$ para la ECA y la ECB.
- 3) Parcialmente. El colapso de $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ es independiente de la estructura de conectividad en el rango $\lambda \leq l_c$, pero sí depende de la misma en el rango $\lambda > l_c$. Sin embargo, es posible modificar el parámetro a_s de la ecuación 2.21 para ajustar a los datos según la estructura de conectividad, obteniendo resultados aceptables. Por lo tanto, es posible extender la teoría de Eberhard (en cuanto a la varianza de la conductividad hidráulica efectiva) a la ECA y a la ECB, si se configura el parámetro a_s adecuadamente para cada estructura de conectividad. De hecho, para valores de λ pequeños, podría

utilizarse un único valor para el parámetro a_s , ya que, para todas las combinaciones de parámetros estudiados (longitud de correlación, varianza de la malla fina y estructura de conectividad), $\sigma^2_{\log(K_{eff})}$ colapsa.

6. Perspectivas

Como se mencionó en el capítulo 2, la heterogeneidad de los acuíferos y reservorios se describe muy frecuentemente a partir de modelos multigaussianos. Para medios heterogéneos formados por componentes con conductividades hidráulicas de contrastes muy altos (por ejemplo conglomerados y arcilitas), esta representación puede ser insuficiente [70], requiriéndose el modelado en términos de múltiples unidades de flujo. Los medios binarios son una representación simplificada de los medios con múltiples unidades de flujo (reagrupando las unidades de flujo en dos: una unidad de flujo de alta conductividad hidráulica y una de baja conductividad hidráulica), que posibilita retener los detalles esenciales de la heterogeneidad [71, 72], al mismo tiempo que hacen que el espacio de parámetros sea mucho más controlable. Un medio binario tiene una proporción p de la unidad de flujo de alta conductividad hidráulica (k^+ constante), y una proporción $1-p$ de la unidad de flujo de baja conductividad hidráulica (k^- constante). Se plantea entonces como perspectiva trabajar con medios binarios que tengan estructuras de conectividad análogas a las presentadas en la presente tesis [11], con el objetivo de estudiar la variación de $P[\log(K_{eff})]$ y de sus momentos gaussianos con la escala de agregación. Otra ventaja de utilizar medios binarios es que en ellos es posible aplicar la teoría de percolación para estimar la variación de K_{eff} con p . Se utilizan herramientas de la teoría de la percolación denominadas indicadores de conectividad, que permiten estudiar la conectividad con mayor detalle. Estos indicadores de conectividad están programados en el simulador instalado en Tupac, por lo que resulta un trabajo factible de realizar.

También proponemos como perspectivas aplicar los resultados obtenidos a casos de acuíferos y reservorios reales. Los resultados indican que la conectividad influye en las propiedades efectivas del reservorio. Entonces, si se incluyeran los indicadores de conectividad a los softwares que calculan el flujo podrían reducirse las incertidumbres en los pronósticos de producción.

Bibliografía

- [1] Figueiredo, L.P., Grana, D., Le Ravalec, M.: Revisited Formulation and Applications of FFT Moving Average. *Mathematical Geosciences*, Volume 52, Issue 6, Pages 801 - 816 (2020).
- [2] Guin, A., and R. W. Ritzi Jr.: Studying the effect of correlation and finite-domain size on spatial continuity of permeable sediments, *Geophys. Res. Lett.* 35, L10402 (2008).
- [3] Comunian, Alessandro & Renard, Philippe & Straubhaar, Julien: 3D multiple-point statistics simulation using 2D training images. *Computers & Geosciences - COMPUT GEOSCI.* Volume 40 Pages 49-65 (2012).
- [4] Western, A. W., Blöschl, G., Grayson, R. B.: Toward capturing hydrologically significant connectivity in spatial patterns. *Water Resources Research*, Volume 37, 83-97 (2001).
- [5] Renard, P., Allard, D.: Connectivity metrics for subsurface flow and transport. *Advances in Water Resources*, Volume 51, 168-196 (2013).
- [6] Zarlenga, A., Janković, I., Fiori, A., Dagan, G.: Effective hydraulic conductivity of three-dimensional heterogeneous formations of lognormal permeability distribution: The impact of connectivity. *Water Resources Research*, Volume 54, 2480-2486 (2018).
- [7] Zinn, B., Harvey, C. F.: When good statistical models of aquifer heterogeneity go bad: A comparison of flow, dispersion, and mass transfer in connected and multivariate Gaussian hydraulic conductivity fields. *Water Resources Research*, Volume 39, 1051 (2003).
- [8] Knudby, C., Carrera, J., Bumgardner, J. D., Fogg, G. E. "Binary upscaling—the role of connectivity and a new formula". *Advances in water resources*, 29(4), 590-604 (2006).
- [9] Boschan, A., Noetinger, B. "Scale dependence of effective hydraulic conductivity distributions in 3D heterogeneous media: a numerical study." *Transport in porous media* 94.1: 101-121 (2012).
- [10] Colecchio, I., Boschan, A., Otero, A. D., Noetinger, B.: On the multiscale characterization of effective hydraulic conductivity in random heterogeneous media: A historical survey and some new perspectives. *Advances in Water Resources*, Volume 140, 103594 (2020).
- [11] Colecchio, I., Otero, A., Noetinger, B., Boschan, A.: Equivalent hydraulic conductivity, connectivity and percolation in 2D and 3D random binary media. *Advances in Water Resources* 158 (2021).
- [12] Pardo-Igúzquiza, E., Dowd, P.A., CONNEC3D: a computer program for connectivity analysis of 3D random set models. *Computers & Geosciences* 29, 775 – 785 (2003).
- [13] Winter, T. C. "Natural processes of ground-water and surface-water interaction". *Ground Water and Surface Water: A Single Resource*, US Geological Survey Circular 1139: 2-50 (1998).
- [14] Hovadik, J. M., Larue, D. K. "Static characterizations of reservoirs: refining the concepts of connectivity and continuity". *Petroleum Geoscience*, 13(3), 195-211 (2007).
- [15] Preux, Christophe. About the Use of Quality Indicators to Reduce Information Loss When Performing Upscaling. *Oil & Gas Science and Technology - Revue de l'IFP.* 71. 10.2516/ogst/2014023 (2014).

- [16] Bidner, M. S. *Propiedades de la roca y los fluidos en reservorios de petróleo*. Eudeba (2011).
- [17] Strebelle, S. "Conditional simulation of complex geological structures using multiple-point statistics". *Mathematical Geology*, 34(1), 1-21 (2002).
- [18] Seifert, D., Jensen, J. L. "Object and Pixel-Based Reservoir Modeling of a Braided Fluvial Reservoir". *Mathematical Geology* 32(5): 581-603 (2000).
- [19] Chugunova, T., Hu, L. Y., & Lerat, O. "Conditioning a process-based fluvial model using a non-stationary multiple-point statistics approach". In *EAGE Conference on Petroleum Geostatistics* (2007).
- [20] Karsenberg, D., Törnqvist, T. E., Bridge, J. S. "Conditioning a process based model of sedimentary architecture to well data". *Journal of sedimentary research* 71(6): 868-879 (2001).
- [21] Law, J. "Statistical Approach to the Interstitial Heterogeneity of Sand Reservoirs". *Trans., AIME* 155, 202-22 (1944).
- [22] Sudicky, E.A.: A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer: Spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process. *Water Resour. Res.* 22, 2069–2082 (1986).
- [23] Jensen, J. L., Hinkley, D. V., Lake, L. D. "A statistical study of reservoir permeability: distributions, correlations, and averages". *SPE Formation Evaluation* 2.04: 461-468 (1987).
- [24] Lambert, M.E. "A Statistical Study of Reservoir Heterogeneity". MS thesis, U. of Texas, Austin, TX (1981).
- [25] Journel, A.G., Alabert, F.G. "Non-Gaussian data expansion in the earth sciences". *Terra Nova* 1:123–34 (1989).
- [26] Journel A. G., Deutsch, C.V. "Entropy and spatial disorder". *Math Geol*; 25(3):329–55 (1993).
- [27] Gómez-Hernández, J.J., Wen, X.H. "To be or not to be multi-Gaussian? A reflection on stochastic hydrogeology". *Adv Water Res* ;21(1):47–61 (1998).
- [28] Guerillot, D., Rudkiewicz, J.L., Ravenne, C., Renard, G. "An integrated model for computer aided reservoir description: from outcrop study to fluid flow simulations". Paper presented at the 5th European symposium on improved oil recovery, Budapest, 25–27 (1989).
- [29] Basu, T. "Automated facies estimation from integration of core, petrophysical logs, and borehole images." *AAPG Annual Meeting* (2002).
- [30] Derakhshan, S. H., Clayton, V. D. "Multivariate Multiscale Categorical Variable Distributions." Paper 133, *CCG Annual Report* 11 (2009).
- [31] Freeze, R. A. "A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media". *Water Resources Research* 11.5: 725-741 (1975).
- [32] Revuelta, M. B., López Jimeno, C. "Manual de evaluación y diseño de explotaciones mineras" ISBN: 84-921708-2-4 (1997).
- [33] Fogg, G.E. "Groundwater-flow and sand body interconnectedness in a thick, multiple-aquifer system". *Water Resour Res* 22(5):679–94 (1986).
- [34] Jankovic, Igor & Maghrebi, M. & Fiori, Aldo & Dagan, Gedeon. When good statistical models of aquifer heterogeneity go right: The impact of aquifer permeability structures on 3D

- flow and transport. *Advances in Water Resources*. 100. 10.1016/j.advwatres.2016.10.024 (2016).
- [35] Sanchez-Vila, X., Carrera, J. "Directional effects on convergent flow tracer tests". *Math. Geol.*, 29(4), 551-569 (1997).
- [36] P. King, "The use of renormalization for calculating effective permeability", *Trans. Porous Med.* 4, no. 1, p. 37- 58 (1989)
- [37] Matheron, G. "Eléments pour une théorie des milieux poreux." (1967).
- [38] Gutjahr, A. L. "Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows: 2. Evaluation and application." *Water Resources Research* 14.5: 953-959 (1978).
- [39] Desbarats, A. J. "Spatial averaging of hydraulic conductivity in three-dimensional heterogeneous porous media." *Mathematical Geology* 24.3: 249-267(1992).
- [40] De Wit, A. "Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media." *Physics of fluids* 7.11: 2553-2562 (1995).
- [41] Abramovich, B., Indelman, P. "Effective permittivity of log-normal isotropic random media." *Journal of Physics A: Mathematical and General* 28.3: 693 (1995).
- [42] Noetinger, B. "The effective permeability of an heterogeneous porous medium". *Transp. Porous Media* 15, 99–127 (1994).
- [43] Noetinger, B. "Computing the effective permeability of log-normal permeability fields using renormalization methods". *C.R. Acad. Sci. Sci Terre Des Planètes* 331, 353–357 (2000).
- [44] Eberhard, J., Attinger, S., Wittum, G. In: Fenton, G.A., Griffiths, D.V. (Eds.). In: *Coarse Graining For Upscaling of Flow in Heterogeneous Porous Media*, 2. *Multiscale Model. Simul.*, p. 269. <https://doi.org/10.1137/030600497> (2004).
- [45] Celia, M., Bouloutas, E., Zarba, R. "A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation". *Water Resour Res* 26(7):1483–1496. doi:10.1029/WR026i007p01483 (1990).
- [46] Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P., Vachaud, G. "A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration". *Soil Sci Soc Am J* 41(2):285–294. doi:10.2136/sssaj1977.03615995004100020024x (1977).
- [47] Clement T, Wise W, Molz F "A physically based, two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow". *J Hydrol* 161(1–4):71–90. doi:10.1016/0022-1694(94)90121-X (1994).
- [48] Gastó J, Grifoll J, Cohen Y. "Estimation of internodal permeabilities for numerical simulations of unsaturated flows". *Water Resour Res* 38(12):1326. doi:10.1029/2002WR001529 (2002).
- [49] Simpson M, Clement T. "Comparison of finite difference and finite element solutions to the variably saturated flow equation". *J Hydrol* 270(1–2):49–64. doi:10.1016/S0022-1694(02)00294-9 (2003).
- [50] Romeu, R. K., and B. Noetinger. "Calculation of internodal transmissivities in finite difference models of flow in heterogeneous porous media." *Water Resources Research* 31.4: 943-959 (1995).
- [51] Gresho, P., Sani, R. "Incompressible flow and the finite element method". Wiley, Chichester (1998).
- [52] Zienkiewicz O, Taylor R, Zhu J "Finite element method—its basis and fundamentals".

Elsevier, Oxford (2005).

[53] Helmig R. "Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of the hydrosystems". Springer, Berlin (1997).

[54] Zaradny H. "Groundwater flow in saturated and unsaturated soil". Balkema, Rotterdam (1993).

[55] Eymard R, Gallouët T, Herbin R. "Finite volume methods". Ciarlet P, Lions J (eds) Handbook of numerical analysis, vol 7. North-Holland, Amsterdam, pp 713–1020 (2000).

[56] Barth T, Oehlberger M. "Finite volume methods: foundation and analysis". Stein E et al (eds) Encyclopedia of Computational Mechanics, vol 1: fundamentals. Wiley, New York (2004).

[57] Edwards M, Rogers C. "Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation". Comput Geosci 2(4):259–290. doi:10.1023/A:1011510505406 (1998).

[58] Fuhrmann J, Langmach H. "Stability and existence of solutions of time-implicit finite volume schemes for viscous nonlinear conservation laws". Appl NumerMath 37(1–2):201–230 (2001).

[59] Rees, I. "An edge-based finite volume scheme for saturated–unsaturated groundwater flow." Computer methods in applied mechanics and engineering 193.42: 4741-4759 (2004).

[60] Gelhar, L. W.: Stochastic Subsurface Hydrology. Prentice Hall, 390 pp (1993).

[61] Dagan, G. . Flow and transport in porous formations. Springer-Verlag GmbH & Co. KG. (1989).

[62] Cushman, J. H., (Ed.), Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media, Academic, San Diego, Calif., 1990.

[63] Sánchez-Vila X, Guadagnini A, Carrera J. Representative hydraulic conductivities in saturated groundwater flow. Rev Geophys;44(3). Article No. RG3002 (2006).

[64] Ravalec, M. L., Noetinger, B., Hu, L. Y. "The FFT moving average (FFT-MA) generator: An efficient numerical method for generating and conditioning Gaussian simulations". Mathematical Geology 32(6), 701-723 (2000).

[65] Ababou, R, Gelhar, L. W. "Implementation of the three-dimensional turning bands random field generator." Water Resources Research 25.10: 2227-2243 (1989).

[66] Forsyth P, Wu Y, Pruess K. "Robust numerical methods for saturated unsaturated flow in heterogeneous media". Adv Water Resour 18(1):25–38. doi: 10.1016/0309-1708(95)00020-J (1995).

[67] Van Loan, C. F., Golub, G. H. "Matrix computations". Johns Hopkins studies in mathematical sciences ISBN 0-8018-5413-X (1996).

[68] <http://tupac.conicet.gov.ar>

[69] <https://slurm.schedmd.com/>

[70] Rubin, Y., Flow and Transport in Bimodal Heterogeneous Formations, Water Resour. Res., 31(10), 2461– 2468, doi:10.1029/95WR01953 (1995).

[71] Hunt, A., Idriss, B., Percolation-based effective conductivity calculations for bimodal distributions of local conductances. Philosophical Magazine 89, 580 1989–2007. doi:10.1080/14786430802660431 (2009).

[72] Zarlenga, A., Fiori, A., Advective transport through three-dimensional anisotropic formations of bimodal hydraulic conductivity. *Transport in Porous Media* 107, 573–593. doi:10.1007/s11242-015-0455-3 (2015).

[73] Winter, T.C., Harvey, J.W., Franke, O.L., and Alley, W.M., *Ground water and surface water - A single resource*: U.S. Geological Survey Circular 1139, 79 p (1998).

Glosario

- Δ : Tamaño lineal de la celda de la malla fina o escala geológica soporte
- l_c : Longitud de correlación geológica o escala integral
- λ : Tamaño lineal del bloque de la malla gruesa, escala de agregación
- L : Tamaño lineal del medio o dominio
- D : Dimensionalidad (2D o 3D)
- K_g : Media geométrica de la conductividad hidráulica de la malla fina
- K_a : Media aritmética de la conductividad hidráulica de la malla fina
- σ_f^2 : Varianza de la PDF del logaritmo natural de la conductividad hidráulica de la malla fina
- K_{eff} : Conductividad hidráulica efectiva definida sobre la malla gruesa
- $\langle K_{eff} \rangle$: Media aritmética de la conductividad hidráulica efectiva
- $\langle\langle K_{eff} \rangle\rangle$: Media geométrica de la conductividad hidráulica efectiva
- $P[\log(K_{eff})]$: Función densidad de probabilidad (PDF) de la conductividad hidráulica efectiva
- $\sigma_{\log(K_{eff})}^2$: Varianza del logaritmo natural de la conductividad hidráulica efectiva

*Tesis disponible bajo licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial –
Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina*

Buenos Aires, 2023