



Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Modelo de Avalanchas de Subtormentas Geomagnéticas

Tesis de Licenciatura

Matias Leonel Ocello

Mayo de 2022

Alumno: Matias Ocello (mail: ocellomatias1@gmail.com) L.U.: 606/15

Directora: Laura Morales (mail: lmorales@df.uba.ar)

Lugar de trabajo: Instituto de Física del Plasma (UBA-Conicet), Buenos Aires, Argentina

Fecha de iniciación: Abril de 2021

Fecha de Finalización: Mayo de 2022

Fecha de defensa:

Informe final aprobado por:

Alumno: Matias Ocello

Jurado

Directora: Laura Morales

Jurado

Profesora: Silvina Ponce Dawson

Jurado

Resumen

Este trabajo de tesis, tiene como objetivo principal estudiar las inestabilidades que se presentan en la magnetocola de la magnetosfera terrestre por su interacción con el viento solar mediante el paradigma de la criticalidad auto-organizada.

Para estudiar este mecanismo, es necesario estudiar las ecuaciones de movimiento que relacionan el plasma del viento solar y las líneas de campo de la magnetosfera terrestre. Estas son las ecuaciones MHD.

El problema del acoplamiento viento solar - magnetocola no puede ser resuelto mediante la solución numérica de las ecuaciones MHD (por la disparidad de las escalas de longitud y tiempo involucradas). Es por esto que, en este trabajo, utilizaremos un modelo basado en la criticalidad auto organizada para abordar el problema.

Se realiza una aproximación con un modelo *SOC* (Self Organized Criticality: criticalidad auto organizada) discreto bidimensional de red de nodos interconectados a primeros vecinos, que da cuenta de la liberación de energía que ocurre en la magnetocola vía el proceso de reconexión.

En este caso, se discretizan las ecuaciones de movimiento para encontrar la evolución del campo magnético. Con el campo magnético obtenido es posible estimar la corriente en cada nodo de la red y, sobre esta, imponer una condición umbral a partir de la cual se redistribuye el campo siguiendo la lógica de un automata celular clásico como el de la pila de arena.

A partir de las simulaciones realizadas es posible obtener la energía magnética liberada por el sistema (en forma de avalanchas). El análisis estadístico de estas avalanchas permite inferir que el sistema simulado alcanza un estado *SOC* y los estimadores típicos alcanzan valores similares a los obtenidos mediante observaciones remotas.

Índice general

1. Introducción	1
2. La magnetosfera terrestre	2
2.1. El viento solar	2
2.2. Regiones de la magnetosfera	3
2.3. Perturbaciones en la magnetosfera	5
2.3.1. Subtormentas	5
2.4. Reconexión magnética y su aplicación a la magnetocola	6
3. Una introducción a la magnetohidrodinámica	8
3.1. Ecuaciones de magnetohidrodinámica	8
3.2. Ecuación de inducción	10
3.3. Escalas de conversión de energía	11
3.4. Regímenes del sistema y Número de Reynolds	12
3.5. Conservación del flujo magnético y congelamiento de las líneas de campo	13
4. Modelos de criticalidad auto-organizada (SOC)	15
4.1. La pila de arena	15
4.2. La magnetoesfera como un sistema complejo y auto-organizado	16
5. Modelo de autómata celular	18
5.1. Descripción conceptual del modelo	18
5.2. El campo B : Solución de la Ecuación de Inducción MHD	19
5.3. Criterio de estabilidad	20
5.4. Regla de Redistribución	21
5.5. Energía liberada por las avalanchas	22
5.6. Energía total de la red y características del estado SOC	23
5.7. Implementación numérica del modelo	24
6. Estado SOC y Avalanchas	25
6.1. Caracterización del estado de criticalidad auto-organizada SOC	25
6.2. Caracterización estadística de las avalanchas	31
7. Conclusiones	37
8. Apéndices	39
8.1. Apéndice 1	39
8.2. Apéndice 2	40
Bibliografía	42

Capítulo 1

Introducción

La magnetosfera terrestre posee una estructura compleja en la que pueden identificarse dos regiones diferentes: el lado más cercano al Sol o lado diurno, que se ubica entre el Sol y la Tierra, y el lado más alejado del sol o lado nocturno, que se extiende formando la *magnetocola*. La magnetocola es la región de la magnetosfera terrestre que se extiende entre 200 y 1000 radios terrestres en el lado nocturno de la misma. Esta región actúa como un reservorio de energía magnética que es liberada en el interior de la magnetosfera, en forma de subtormentas geomagnéticas, durante los episodios de reconexión magnética generados cuando el viento solar está fuertemente acoplado a la magnetosfera.

Se sugirió en [12], [14] que el plasma que conforma la magnetosfera tiene un comportamiento similar al de los sistemas con criticalidad auto-organizada (Self Organized Criticality).

Este trabajo de tesis, tiene como objetivo principal ampliar un modelo numérico de subtormentas geomagnéticas con el que se ha trabajado en los últimos años: [54], [40]. Se trata de un autómata celular simple en el que se busca: imponer una prescripción del campo de velocidades y testear la capacidad del modelo para reproducir observaciones magnetosféricas, tales como liberación de energía, la variación del campo magnético y la energía total en la región llamada magnetocola.

En el *capítulo 2* de este trabajo explicaremos en detalle el fenómeno de la magnetosfera, centrándonos principalmente en la magnetocola de la misma.

Como la interacción involucra al plasma solar del viento, para describir lo que sucede físicamente se necesitarán usar las ecuaciones de magneto-hidrodinámica (MHD), principalmente la ecuación de inducción, como veremos en el *capítulo 3*.

En el *capítulo 4* buscaremos establecer las relaciones mediante las cuales el fenómeno de la de liberación de energía en la magnetosfera vía la inestabilidad de la magnetocola puede pensarse como un proceso de auto-organización crítica similar al problema de la pila de arena ([7]).

En el *capítulo 5* nos centraremos en desarrollar el *modelo de autómata celular*, como un modelo SOC de pila de arena discreto de baja dimensionalidad, que nos permitirá obtener expresiones para la evolución del campo magnético, para la energía liberada y la energía total en la magnetocola. Luego, plantearemos la implementación numérica de este modelo, la cual nos permite obtener los valores de campo y energías.

En el *capítulo 6* realizaremos un análisis cuantitativo y estadístico de estos datos. Esto nos permitirá testear la capacidad que tiene el modelo para reproducir las observaciones en la magnetosfera.

Capítulo 2

La magnetosfera terrestre

La Tierra tiene un campo magnético propio, generado por el movimiento de fluidos eléctricamente conductores en su interior [23], que envuelve a la Tierra generando un escudo protector contra las partículas que provienen del espacio exterior: la *magnetosfera terrestre*.

La principal fuente de partículas que impactan sobre la Tierra es el Sol. Sobre la magnetosfera terrestre impactan continuamente cúmulos de plasma, donde podemos definir sintéticamente al plasma como un gas ionizado, con una cierta resistividad. Por esta razón, es buen conductor eléctrico y sus partículas responden fuertemente a las interacciones electromagnéticas de largo alcance [47]. Además, los plasmas cumplen la condición de cuasineutralidad de partículas positivas y negativas no ligadas, es decir, la carga total de un plasma es aproximadamente cero, pero es distinto a cero [46].

Llamamos *viento solar* al plasma proveniente del Sol eyectado a velocidades supersónicas y con muy alta frecuencia, que impacta permanentemente contra el campo magnético de la tierra [47].

El planeta Tierra, se encuentra sumergido en la *heliósfera*. Esta es la región espacial que conecta el Sol y su atmósfera con los planetas de nuestro sistema Solar y con el entorno galáctico hasta la *heliopausa* (≈ 123 U.A.), donde U.A. es la unidad astronómica y es tal que $1 \text{ U.A.} \approx 15 \times 10^{10} \text{ m}$, es la distancia entre el Sol y la Tierra. La heliosfera proporciona el plasma Solar, que determina el entorno espacial de todos los cuerpos del sistema solar, incluida la Tierra (1 U.A.). Por lo tanto, es la zona que se encuentra bajo la influencia del viento Solar y del campo magnético del Sol [8]. El plasma que se encuentra en la heliósfera es un plasma muy diluido, por lo que se lo considera no colisional y es tal que a medida que más lejos se encuentra del sol, menos colisiones presentan las partículas que lo componen [47].

En este trabajo, y en particular en este capítulo, nos centraremos principalmente en describir cómo se forma y se sostiene en el tiempo la región de la magnetosfera llamada: *magnetocola*, en particular, en la región del punto nulo (Figura 2.2).

2.1. El viento solar

El viento solar tiene efectos sorprendentes en el entorno planetario. Su variabilidad en intensidad y orientación, da lugar a diversos fenómenos magnetosféricos: algunos estacionarios y otros intermitentes, de gran importancia para la vida en la tierra.

Según el modelo de la *espiral de Parker* [37], si consideramos que el Sol no rota, una aproximación razonable en las regiones polares y/o a distancias relativamente cercanas, el viento solar se expande radialmente al igual que el campo magnético. En donde, las líneas de campo son arrastradas por el flujo de plasma y tienden a alinearse con las líneas de flujo radiales. La conservación del flujo magnético produce un campo magnético radial que varía como $B \sim r^{-2}$ (Figura 2.1(a)). Si consideramos ahora la rotación del Sol, las líneas de campo dibujan un campo en forma de espiral (Figura 2.1(b)). El flujo de plasma que es expulsado del Sol, sigue a las líneas de campo describiendo también una forma de espiral. De esta forma,

el viento solar sigue la forma espiralada del campo y moldea permanentemente las magnetosferas de los planetas del sistema solar.

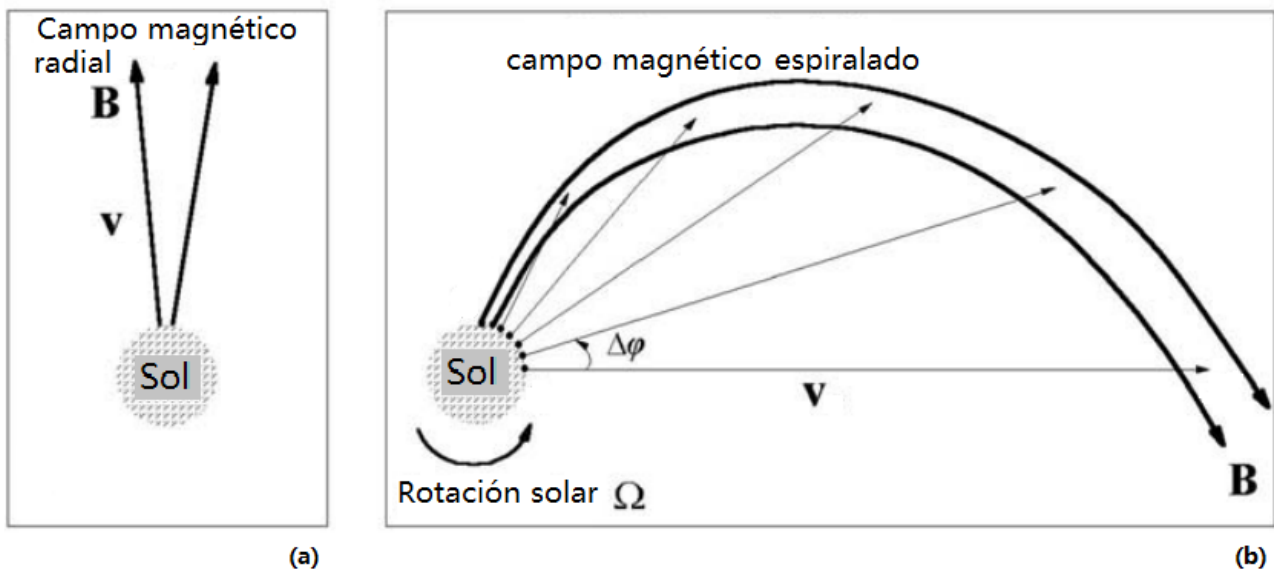


FIGURA 2.1: Diagrama de la espiral de Parker [37]. (a) Diagrama de líneas de campo magnético del Sol no rotante, estiradas por el viento solar que se expande radialmente. (b) Diagrama de líneas de campo del sol con rotación, la cual lleva a la forma espiralada que estas presentan. Donde Ω es la rotación solar y $\Delta\phi$ el ángulo entre los cúmulos de plasma eyectados radialmente. Las flechas radiales dan cuenta de la trayectoria de los cúmulos de plasma expulsados a una velocidad radial (V), que van siguiendo las líneas de campo espiraladas arrastrándose con ellas.

Podemos caracterizar el viento solar basándonos en la velocidad y temperatura típica que este posee. Partiendo de esto, se pueden identificar dos tipos de viento solar: el *viento solar lento* y el *viento solar rápido*. Estos dos tipos se originan en regiones distintas de la corona solar. El viento solar lento alcanza velocidades aproximadas de entre 300 – 500 Km/s. Mientras que el viento solar rápido alcanza velocidades aproximadas de 750 km/s.

El viento solar lento posee temperaturas típicas de aproximadamente 100 MK (10^8 K) y posee una composición similar a la corona solar. Por su parte, el viento solar rápido posee temperaturas típicas de 800 MK y una composición muy similar a la de la superficie solar, llamada *fotósfera* [25].

El viento solar lento es el doble de denso y de naturaleza más variable que el viento solar rápido ([34]) y este último ocupa la mayor parte de la heliósfera [37].

2.2. Regiones de la magnetosfera

El viento Solar le da a la magnetosfera sus propiedades y particular forma. En esta sección, nos dedicaremos a describir las regiones de la magnetosfera y sus características.

Cuando el viento Solar impacta contra la magnetosfera, desde la región que llamaremos: *lado más cercano al Sol* o lado diurno, se forma una onda de choque, lo que da lugar a un *arco de choque* (Figura 2.2), que se produce porque el viento solar pasa por la Tierra a una velocidad aproximadamente ocho veces mayor que las velocidades de Alfvén o del sonido (en el plasma). Este arco de choque se encuentra a una distancia de $15R_E$ (Radio terrestre, donde $1 R_E$ es aproximadamente 6370km) [47].

La región que viene luego del arco de choque se llama *magnetohoja*, y es donde el viento Solar que impacta contra la magnetosfera se desvía alrededor de la misma (Figura 2.2).

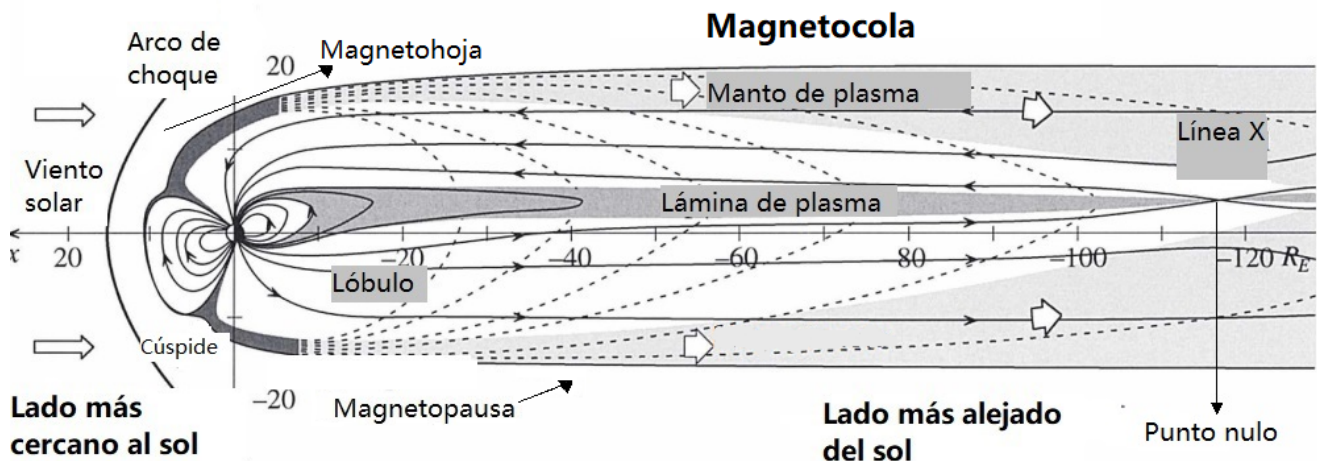


FIGURA 2.2: Diagrama de la sección transversal de la magnetosfera y la cola geomagnética dibujada a escala [47], donde los valores del eje horizontal se presentan en radios terrestres R_E (radios terrestres, donde $1 R_E = 6370 \text{ Km}$), la ubicación del punto nulo (centro de la línea x) de la cola está en aproximadamente $115 R_E$. Las líneas discontinuas indican las rutas de deriva de partículas de diferentes energías a medida que se convergen hacia la hoja de plasma.

Existen 2 puntos nulos, donde por definición el campo magnético se anula, ubicados en las regiones de las cúspides, que se ubican en la *magnetopausa* (Figura 2.2). Esta última es el límite de la magnetosfera [47].

La forma y la distancia de la magnetopausa del lado más cercano al Sol, está determinado por el balance entre la presión de arrastre (*Ram pressure*) del viento Solar y la presión magnética del campo magnético terrestre. Típicamente, la magnetopausa del lado diurno se encuentra a aproximadamente $10R_E$ de la Tierra [47].

En cuanto al *lado más alejado del sol* o lado nocturno, el factor predominante que le da la forma y la distancia a la magnetopausa, es la tensión de Maxwell. Esta actúa sobre los flancos superior e inferior de la magnetosfera, aplastándola de ambos lados, la cual le da la forma alargada que tiene. A esta región se la llama *magnetocola*, y se extiende creando una cola extendida hasta aproximadamente unos $1000 R_E$ [21], [30], como se puede ver en la Figura 2.2.

En la magnetosfera, más precisamente en la magnetocola, se encuentra también la llamada: *lámina de plasma* u *hoja de corriente*. Esta es una capa delgada de plasma que transporta corriente a través de la cual el campo magnético cambia en dirección, magnitud o ambas y está formada por plasma a una temperatura aproximada de 11 MK [55]. Ésta es un plano que sale de la imagen y que se extiende a lo largo de toda la magnetocola, desde la magnetopausa, hasta aproximadamente $6R_E$ de la tierra [47].

Por encima y por debajo de la lámina de plasma se encuentran los lóbulos de la cola, que contienen un plasma a aproximadamente $0,6 \text{ MK}$, mucho más frío que la lámina de plasma [47]. A medida que nos movemos hacia abajo por la cola, los lóbulos se llenan gradualmente con un flujo de plasma que proviene de la fuga del plasma de la hoja a lo largo de las líneas de campo abiertas (Figura 2.3). En la región cercana a la Tierra, esta fuga de plasma constituye una capa límite llamada *manto de plasma* [19].

El límite de latitud alta a lo largo del manto de plasma, consiste en una discontinuidad rotacional. En esta discontinuidad el campo magnético y el flujo de plasma cambian de dirección pero no de magnitud, el flujo de masa a través de la discontinuidad es distinto de cero pero la densidad y componente normal de la velocidad son constantes. En la capa límite de latitud baja se presenta una discontinuidad tangencial, en la cual el campo magnético y la velocidad son tangenciales a la discontinuidad, el flujo de masa a través

de la misma es cero y la presión total a través de ella es continua [49], [11].

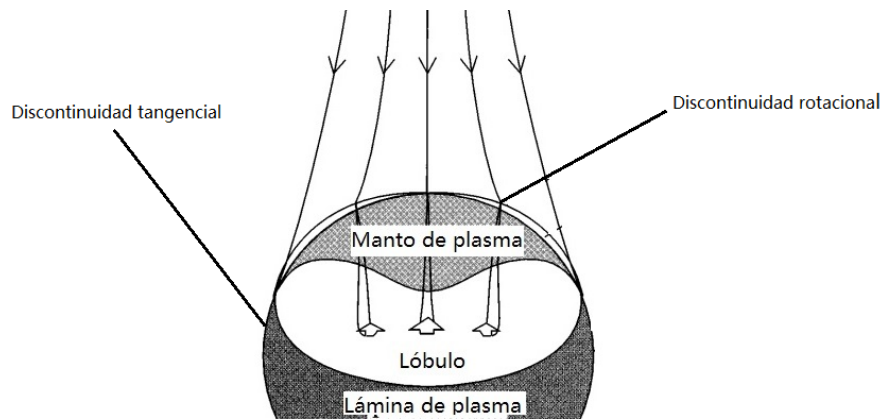


FIGURA 2.3: Estructura transversal de la magnetocola [47]. Muestra la relación del manto de plasma con la magnetopausa y las líneas de campo abierto que lo cruzan. En el límite de arriba y a lo largo del manto de plasma se presenta una discontinuidad rotacional. En la capa límite de abajo de la lámina de plasma, tiene lugar una discontinuidad tangencial.

La magnetosfera, cuenta con otro punto nulo, además de los de las cúspides. Este punto, es un *punto nulo del tipo X* o del tipo *línea X* que se ubica entre las líneas de campo que vienen de arriba y de abajo del eje ecuatorial terrestre (Figura 2.2) y se encuentra sobre la lámina de plasma, a una distancia aproximada de $100R_E$ - $150R_E$ [47].

A ambos lados de la lámina de plasma propiamente dicha se encuentra la capa límite de esta lámina. Dentro de esta capa, los iones energéticos y los electrones fluyen hacia el exterior, ya sea hacia o desde la Tierra, dependiendo de si uno está del lado más cercano a la Tierra o del otro lado del punto nulo. En el lado terrestre del punto X, hay un flujo de partículas en contracorriente creado por el reflejo de las partículas en la Tierra [20].

En este trabajo nos centraremos, como ya se mencionó, principalmente en el estudio de la física de la magnetocola, en particular en la región donde se encuentra el punto nulo X.

2.3. Perturbaciones en la magnetosfera

Las propiedades y forma de la magnetosfera están determinadas por las perturbaciones provocadas por la interacción entre el viento solar y la magnetosfera terrestre.

Entre las múltiples perturbaciones que genera el Sol sobre el planeta Tierra, podemos mencionar dos perturbaciones importantes. Estas son: las *tormentas magnéticas* y las *subtormentas*. Las tormentas magnéticas son la consecuencia de la interacción directa entre una eyección de masa coronal, que es una nube de plasma que emerge de la corona solar, y el campo magnético de la Tierra. Por su parte, las subtormentas ocurren cuando el origen de la perturbación en la magnetosfera, se asocia a energía liberada en la magnetocola, la cual es inyectada en la alta ionósfera [37], [47]. En este trabajo nos dedicaremos a modelar estas últimas.

2.3.1. Subtormentas

Las subtormentas son perturbaciones que ocurren cuando la cola magnética se reorganiza, produciendo una cadena de eventos conocida como subtormenta, que suele durar alrededor de una hora (t_0). La presión magnética en los lóbulos aumenta, la cola se estira y la lámina de plasma se comprime. En ese momento, la estructura se vuelve inestable, manifiesta turbulencias y una parte de la cola colapsa liberando

desde la magnetocola en todas las direcciones, incluyendo la tierra, flujos de plasma (Figura 2.4). Cuando este fenómeno se produce, se libera energía cinética y energía en forma de calor [37].

El origen de estas perturbaciones está en la apertura del lado diurno de la magnetosfera que se produce cuando el campo magnético del viento solar es paralelo y de sentido contrario al campo magnetosférico.

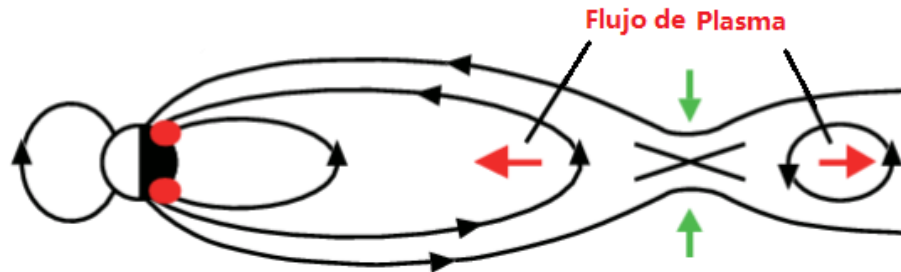


FIGURA 2.4: Diagrama de subtormenta [31]. Las líneas rojas representan el flujo de plasma liberado desde el punto nulo de la magnetocola en dirección de la tierra y opuesto luego del colapso. Las líneas verdes representan al plasma del viento solar.

Durante una subtormenta, la energía que es entregada desde el punto nulo de la magnetocola, es reemplazada aprovechando la energía electromagnética del viento solar durante la escala de tiempo t_0 estimada anteriormente. Esto sugiere que una cierta longitud de la cola, puede entregar su energía magnética y ser reconstruida por el viento solar normal durante la escala de tiempo de esa longitud de la cola. Para la tierra, estos valores corresponden aproximadamente a: una longitud de unos $20 R_E$, una energía de unos 10^{15} J y un tiempo de aproximadamente 2 horas [37].

Esta energía magnética sirve para acelerar las partículas que se encuentran en el llamado *anillo de corriente* de la tierra y se precipitan en la ionosfera auroral cerca de los óvalos aurales, desencadenando las auroras. Otra parte se disipa en las corrientes de la ionósfera, que aumentan en gran medida, y otra parte regresa al viento solar como un flujo de plasma. La perturbación del viento solar sirve principalmente como desencadenante de la reconfiguración de la magnetocola que produce el evento, cuya energía ya estaba presente como energía magnética en la magnetocola. La energía del viento Solar se utiliza posteriormente para reconfigurar la cola que ha sido parcialmente destruida [37].

El origen de estas subtormentas se asocia a la existencia de diversas inestabilidades de plasma, entre ellas, la llamada *reconexión magnética*, como se discute en [35], [9]. En el año 2008 la sonda *Themis* registró evidencia que permite relacionar el inicio de las subtormentas con el desarrollo de eventos de reconexión magnética en la magnetocola terrestre [2], [3]. Por esta razón, en la siguiente sección, presentaremos brevemente en qué consiste el mecanismo de reconexión magnética y cómo podría aplicarse al fenómeno de la magnetosfera.

2.4. Reconexión magnética y su aplicación a la magnetocola

La *reconexión magnética* es un proceso complejo que puede ocurrir en dos y tres dimensiones ([48]). Esencialmente, el proceso de reconexión magnética consiste en la ruptura y posterior re-conexión de líneas de campo magnético de sentido opuesto (Figura 2.5).

Este cambio en la conectividad, tiene varios desencadenantes importantes: afecta al flujo de partículas en las línea de campo que se están reconectando, en el sentido de que el camino libre de las partículas en una línea de campo, se desviará hacia la otra línea involucrada en la reconexión. Por lo cual, afecta también al flujo de calor entre estas líneas [49]. También, se crean ondas de choque, filamentos de corriente y turbulencia, todos asociados con fuertes campos eléctricos que aceleran las partículas [49].

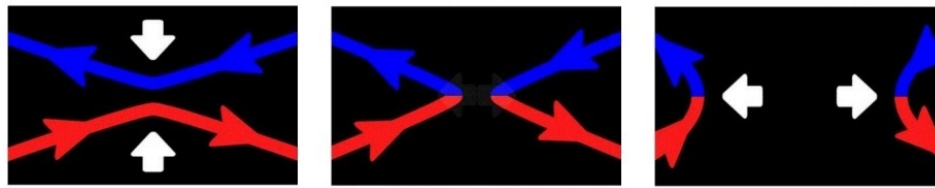


FIGURA 2.5: Diagrama de reconexión magnética (lweb.cfa.harvard.edu) entre 2 líneas(roja y azul) de campo magnético que se acercan en forma vertical y apuntan en sentido opuesto.

La reconexión magnética permite que una parte de la energía magnética sea convertida en energía cinética, por lo que las líneas involucradas en la reconexión salen reconectadas con una velocidad mayor a la inicialmente tenían y, por medio de la disipación óhmica, otra parte de la energía magnética, se convierte en calor [49].

En el fenómeno que estamos analizando, las líneas de campo magnético inferiores y superiores de la magnetocola son arrastradas hacia el centro por el flujo de plasma del viento solar (Figura 2.6). Esto ocurre, ya que el flujo de plasma está congelado a las líneas de campo magnético. La explicación de por qué sucede esto último, la veremos en el siguiente capítulo.

Este arrastre, que provoca que las líneas de campo se acerquen entre ellas, conlleva un aumento en la corriente entre medio de las líneas superiores e inferiores. En esa región, se crea la hoja de corriente (Figura 2.6). Esta hoja, en la cual tiene lugar el punto nulo x , presenta grandes densidades de corriente y flujo turbulento ([41]) y es creada justamente por las inestabilidades que desencadena el mecanismo de reconexión [49].

El plasma congelado a las líneas de campo, sale eyectado del punto nulo junto a ellas (Figura 2.6) con mayor velocidad que la que tenía previamente al proceso de reconexión[47].

Cuando se produce la disipación, el campo magnético se difunde en un medio conductor, como lo es la hoja de corriente. Esto ocurre porque las corrientes eléctricas de la hoja producen una pérdida de energía, la cual convierte la energía magnética en energía en forma de calor [37].

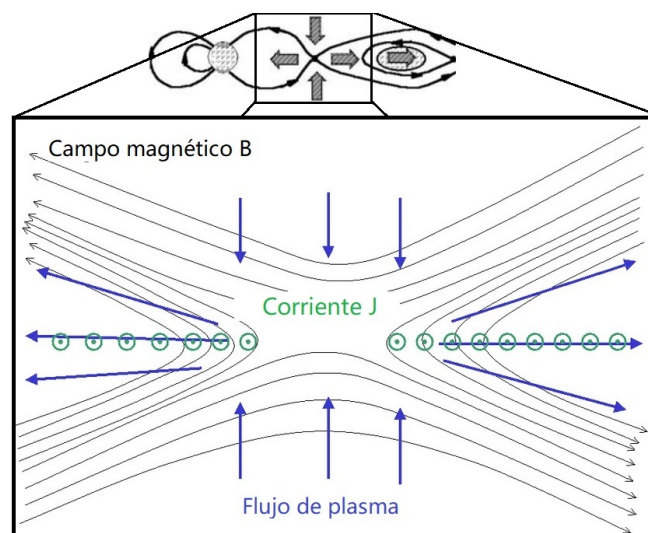


FIGURA 2.6: Acercamiento del diagrama de reconexión magnética en el punto nulo X de la magnetocola (Figura realizada combinando diagramas de [37] y [33]). Diagrama del flujo de plasma (azul) empujando las líneas de campo magnético (negras) hacia la hoja de corriente y estas líneas reconectándose y saliendo hacia los costados reconectadas a una cierta velocidad. La hoja de corriente o lámina de plasma es el plano que sale de la pantalla y que está en el medio de la líneas que se reconectan. Su vector corriente (verde) apunta saliendo de la hoja.

Capítulo 3

Una introducción a la magnetohidrodinámica

En este trabajo buscamos realizar una descripción de las inestabilidades de la magnetocola. Como el plasma del viento solar es el que moldea la magnetosfera y desencadena estas inestabilidades, va a ser necesario introducir las ecuaciones que describen la dinámica del plasma. Estas son las ecuaciones magneto-hidrodinámicas (MHD).

Estas ecuaciones cuentan con ciertas aproximaciones. La primera de ellas propone que: podemos considerar al plasma como un medio continuo, lo cual tiene validez siempre que la escala espacial en la cual varía el campo sea mucho más grande que las escalas espaciales microscópicas típicas del plasma [49].

En nuestro trabajo, esto es válido ya que el campo magnético de la tierra es muy intenso (0,25 - 0,65 G) y si consideramos una escala microscópica usual del plasma, como el radio de Larmor, como esta última es inversamente proporcional al campo magnético [37], entonces tiene un valor muy chico.

La otra aproximación consiste en que el plasma se encuentra en equilibrio termodinámico dominado por funciones de distribución aproximadamente Maxwellianas. Con esta aproximación, se puede estudiar, para escalas temporales mucho mayores que las escalas temporales entre colisiones, la evolución del plasma [49].

Esto quiere decir que nuestra descripción tiene validez siempre que las escalas de variación temporal del plasma, sean mucho mayores que el tiempo entre colisiones de las partículas que lo componen y que las escalas espaciales de esta variación sean mucho mayores que el camino libre medio de esas partículas.

Muchos de los entornos en los que se produce la reconexión, constituyen plasmas sin colisiones, en los que la ausencia de colisiones binarias en tales plasmas significa que las partículas individuales pueden viajar distancias del orden de la escala global del sistema. Estas ecuaciones son una descripción correcta del volumen a gran escala en la dinámica de un fluido, con bajas o sin colisiones internas [47].

La región de la magnetocola cerca del punto nulo que queremos estudiar es una región en la cual el plasma prácticamente no tiene colisiones [42], por lo que esta descripción es la adecuada.

3.1. Ecuaciones de magnetohidrodinámica

A continuación introduciremos entonces las ecuaciones principales de MHD. Estas ecuaciones, derivadas de la mecánica de fluidos y del electromagnetismo [49], [18] son :

Conservación de la masa:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.1)$$

Donde ρ es la densidad de masa, \vec{v} es la velocidad del fluido, t es el tiempo y $\frac{d\rho}{dt}$ es la derivada convectiva.

Conservación del momento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{F}_{\text{volumen}} + \vec{F}_{\text{viscosas}} \quad (3.2)$$

Donde ∇p es el gradiente de presiones. En las fuerzas de volumen tenemos que considerar *la fuerza de Lorentz* (ecuación 3.3), ya que tenemos campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} que actúan sobre las cargas de los elementos del fluido. En su forma más general, dicha fuerza es:

$$\vec{F} = \nabla \cdot \underline{\sigma} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

Con $\underline{\sigma} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$ el tensor de esfuerzos de Maxwell y ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío.

Además, sabemos por la aproximación de cuasi-neutralidad del plasma, que la carga neta en un elemento de fluido es cero, pero los iones y electrones tienen movimiento relativo, entonces, la corriente \vec{j} es distinta de cero. Por lo que solo influye en la ecuación de Lorentz el término de campo magnético, que se puede escribir: $\vec{j} \times \vec{v}$. Por otro lado, podemos obtener las fuerzas viscosas por unidad de volumen, que las calculamos a partir de la divergencia del tensor de esfuerzos. En la mayoría de los plasmas magnetosféricos, alcanza con suponer que la viscosidad es constante. Por este motivo, estas fuerzas se pueden reducir a un término difusivo con una viscosidad dinámica μ , quedando el término de fuerzas viscosas de la siguiente forma: $\mu \nabla^2 \vec{v}$. En cuanto al término de la izquierda, desarrollamos la derivada convectiva. De esta manera, obtenemos la ecuación de *Navier-Stokes* o ecuación de evolución del campo de velocidades \vec{v} , que se expresa como:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.4)$$

Conservación de la energía interna:

$$\rho \frac{de}{dt} + p \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\underline{\kappa} \cdot \nabla T) + (\underline{\epsilon}_e \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + Q_v - Q_r \quad (3.5)$$

Donde e es la energía interna por unidad de masa, $\underline{\kappa}$ es el tensor de conductividad térmica, T es la temperatura, $\underline{\epsilon}_e$ es el tensor de resistividad eléctrica, Q_v es el calor por disipación viscosa y Q_r es la energía perdida por radiación.

El sistema de ecuaciones MHD se completa, entonces, con las ecuaciones de Maxwell, que escritas en el sistema de unidades Gaussiano [26], [50] son:

Ecuación de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.6)$$

Ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.7)$$

Donde el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.7 es la corriente de desplazamiento, la cual es la variación del campo eléctrico en el tiempo. Para el caso magnetosférico, es posible considerar que las escalas de variación temporal del campo eléctrico son mucho mas grandes que las escalas de variación espacial de ese campo, al menos comparándolas con la velocidad de la luz. Es decir que si consideramos las escalas de variación espacial como V_e y la variación temporal como V_t , estamos tomando la aproximación: $1/c \ll V_t/V_e$

Por lo tanto, podemos despreciar el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.7, por lo que la Ley de Ampère queda:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.8)$$

Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.9)$$

Ley de Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \quad (3.10)$$

Donde σ es la conductividad eléctrica.

3.2. Ecuación de inducción

Veamos ahora que combinando algunas de las ecuaciones de Maxwell de la sección anterior, podremos obtener una relación muy importante para nuestro trabajo. Si tomamos el rotor de la ecuación 3.8 y reemplazamos en el lado derecho el rotor de la corriente por la ecuación 3.10, obtenemos:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \sigma \nabla \times \vec{E} + \frac{\sigma}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.11)$$

Reemplazando el rotor del campo eléctrico por la ecuación 3.6:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{-\sigma}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.12)$$

Si ahora despejamos la derivada temporal del campo magnético y definimos al coeficiente de difusividad magnética como $\eta := \frac{c^2}{4\pi\sigma}$, obtenemos una de las ecuaciones más importantes para este trabajo, la cual nos permitirá describir el comportamiento del plasma. La llamada: *ecuación de inducción*, que se expresa como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \eta \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \quad (3.13)$$

Podemos usar ahora la propiedad del rotor para escribir de otra forma el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.13, de la siguiente manera:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \quad (3.14)$$

Donde en esta ultima igualdad se usó la ecuación 3.9. Luego, Reemplazando esta ecuación en la ecuación 3.13, obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla x(\vec{v}x\vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.15)$$

Esta es la *ecuación de inducción*, la cual describe el movimiento del plasma congelado a las líneas de campo magnético de la Tierra. Esta ecuación tiene tanto las derivadas temporales como las derivadas segundas espaciales del campo magnético, de forma tal que dan cuenta de la variación temporal y espacial respectivamente de \vec{B} . El término de la derivada segunda espacial del campo, está multiplicado por el coeficiente de difusividad magnético η , por lo que se lo llamará término difusivo. El primer término del lado derecho de la ecuación, es el término convectivo, ya que contiene a la velocidad \vec{v} del plasma, lo que da cuenta de la parte hidrodinámica de la descripción.

Ahora bien, cuando queremos describir el movimiento del plasma, nos encontramos que en la ecuación 3.15 tenemos la velocidad (\vec{v}) con la que el plasma se mueve junto a las líneas de campo. Por lo tanto, nos aparece una nueva incógnita, además del campo magnético, ya que \vec{v} es una magnitud desconocida. Por esta razón, vamos a tener que considerar una ecuación que nos permita obtener el valor de \vec{v} y esta es la ecuación MHD de *Navier-Stokes* (ecuación 3.4). Entonces, tenemos las siguientes dos ecuaciones que describen el movimiento del plasma:

$$\rho(\partial t\vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p + \vec{j}x\vec{B} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla x(\vec{v}x\vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.17)$$

Como podemos ver, tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. La ecuación de Navier-Stokes (ecuación 3.16) y la ecuación de inducción (ecuación 3.17), donde las variables que acoplan a estas ecuaciones son \vec{v} y \vec{B} . De esta manera, en principio, para conocer el movimiento del plasma, deberíamos poder resolver este sistema de ecuaciones. Sin embargo, este sistema no es resoluble analíticamente. Por este motivo, vamos a ver una forma diferente de atacarlo para el caso de la magnetocola, como veremos en el capítulo 5 de este trabajo.

3.3. Escalas de conversión de energía

Ahora que presentamos las ecuaciones de Maxwell, veamos qué sucede con la conversión de energía en la reconexión que discutíamos en el capítulo anterior y la escala a la que esta ocurre. La energía magnética del plasma se expresa como [37]:

$$E_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.18)$$

Donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

Para entender la conversión de energía que se produce en la reconexión magnética de la magnetocola, consideremos la siguiente estimación de orden de magnitud [37]. La tasa de disipación de energía por unidad de volumen $\vec{E} = \vec{j} \times \vec{E}$, es del orden:

$$\vec{E} \sim \eta j^2 \quad (3.19)$$

Por la ecuación 3.8, la corriente correspondiente a un campo magnético de variación espacial de escala L , es del orden de magnitud: $j \sim B/L$, y disipa energía a razón: $\eta (B/L)^2$ por unidad de volumen. Durante el tiempo de difusión: $t_\eta \sim L^2/\eta$, la energía disipada por unidad de volumen es entonces:

$$\tilde{E} \sim B^2 \quad (3.20)$$

La cual es igual, en orden de magnitud, a la densidad inicial de energía magnética.

Durante la difusión, la energía magnética se convierte óhmicamente en calor a la misma velocidad. Sin embargo, esta difusión impulsa inestabilidades en la hoja, las cuales llevan a convertir la energía magnética en calor y energía cinética a un ritmo mucho más rápido [24] [49].

Esto nos dice que la energía que se va acumulando, lo hace a escalas temporales mucho mayores que los tiempos característicos en los cuales se produce la reconexión magnética. Por lo tanto, el mecanismo de reconexión en este fenómeno se produce de manera intermitente. Es decir, luego de que se acumuló esta energía, en un un cierto instante, se produce la reconexión magnética en el punto nulo. Cuando esta tiene lugar, se producen inestabilidades en la hoja de corriente, las cuales provocan que la energía que se acumuló se libere de forma repentina y en escalas temporales mucho menores a las escalas temporales de acumulación de la misma.

3.4. Regímenes del sistema y Número de Reynolds

Si en el fenómeno que estamos analizando domina el término difusivo sobre el convectivo, es decir, el término de velocidades tiene una contribución despreciable, ya sea porque la difusividad magnética es muy grande o la velocidad es muy chica, la ecuación 3.17 nos queda [49]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.21)$$

Es decir, en el fenómeno domina el régimen difusivo. Estar en este régimen implica que si las variaciones espaciales del campo magnético se dan a una cierta escala L , el tiempo en el cual se difunde el campo: $t_\eta \sim L^2/\eta$, es chico, ya que η es grande y L es chico porque las variaciones espaciales del campo en la hoja de corriente donde se difunde el campo lo son.

La ecuación 3.21 puede escribirse como η/L^2

Si tuviésemos el comportamiento opuesto, es decir, que en el fenómeno la difusión es despreciable frente a la velocidad del plasma, la ecuación de inducción se escribe como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \nabla x(\vec{v}x\vec{B}) \quad (3.22)$$

Es decir, en el fenómeno domina el régimen convectivo. Como η es muy chico en este régimen ($\eta \ll 1$), y L es grande, porque estamos en la escala de variación espacial macro del campo, el tiempo de difusión del mismo (t_η) es muy grande en comparación a su escala de variación temporal.

La ecuación 3.22 puede escribirse como U/L , donde U es la velocidad característica del plasma.

Ahora que presentamos la ecuación de inducción, podemos definir una cantidad importante, la cual nos permitirá saber en que régimen se encuentra el plasma de interés. Tomando el cociente entre la parte difusiva $\eta \nabla^2 \vec{B}$ y convectiva $\nabla x(\vec{v}x\vec{B})$ de la ecuación de inducción, definimos el *Número de Reynolds magnético* (R_M), de la siguiente forma [49]:

$$R_M := \left| \frac{\nabla x(\vec{v}x\vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \right| \approx \frac{UL}{\eta} \quad (3.23)$$

Este número nos indica si la física que domina nuestro fenómeno es la parte convectiva o la difusiva. Si el número de Reynolds es muy grande ($R_M \gg 1$), el régimen convectivo domina por sobre el difusivo, y si $R_M \ll 1$, domina el régimen difusivo sobre el convectivo en nuestro fenómeno.

3.5. Conservación del flujo magnético y congelamiento de las líneas de campo

Cuando se cumple que $R_M \gg 1$, en donde la ecuación de inducción se puede escribir como la ecuación 3.22, el *teorema de Alfvén* establece que el flujo magnético que atraviesa cualquier superficie que se mueve solidaria al fluido y que está rodeada por una curva cerrada, se conserva [49]. Por lo que el campo magnético se comporta como si se moviera con el plasma.

Para demostrar esto consideremos que tenemos una curva C , que encierra una superficie S (donde esta superficie se mueve solidaria al fluido). En el tiempo dt , un elemento dl de C barre un elemento de área: $\vec{v}x\vec{dl} dt$. La tasa de cambio del flujo magnético a través de C es

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{B} \cdot \vec{v}x\vec{dl} \quad (3.24)$$

Donde $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ es el flujo magnético que atraviesa una superficie S encerrada por la curva C .

A medida que C se mueve, el flujo cambia, tanto porque el campo magnético cambia con el tiempo, como porque la frontera se mueve en el espacio (primer y segundo término del lado derecho de la ecuación 3.24 respectivamente). Si ahora usamos que: $\vec{B} \cdot \vec{v}x\vec{dl} = -\vec{v}x\vec{B} \cdot \vec{dl}$ y aplicamos el teorema de Stokes al segundo término de la derecha, obtenemos que:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \nabla x(\vec{v}x\vec{B}) \right) \cdot d\vec{S} \quad (3.25)$$

El término de la derecha se anula en el límite de $R_M \gg 1$, por la ecuación 3.22. Por lo tanto, el flujo magnético total a través de S limitado por C permanece constante mientras se mueve con el plasma. De esta manera, queda demostrada la conservación del flujo magnético, es decir, los elementos de plasma que inicialmente forman un tubo de flujo continúan haciéndolo en momentos posteriores, como se puede ver en la (Figura 3.1). Esto muestra que las líneas de campo magnético acompañan al fluido o están congeladas al plasma. Por lo tanto, el plasma puede moverse longitudinalmente sobre las líneas de campo, pero cuando se mueve de forma transversal a ellas, las arrastra en la dirección en la que se está moviendo.

La dinámica del movimiento del plasma en la magnetosfera, puede ser macroscópicamente descrita en el régimen de alto número de Reynolds, el cual presenta el congelamiento entre el campo magnético terrestre y el plasma del viento solar. En regiones donde la corriente es muy grande, como en la hoja de corriente de la magnetocola, la difusividad magnética es importante.

Ahora bien, en estos dos capítulos explicamos que para realizar una descripción correcta de las inestabilidades en la magnetocola, es necesario entender la física tanto a escalas grandes como a escalas pequeñas, ya que en ambas ocurren fenómenos fundamentales, los cuales explican el movimiento del plasma.

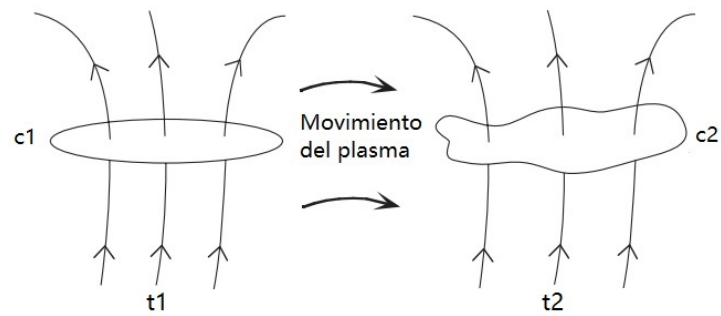


FIGURA 3.1: Diagrama de la conservación del flujo magnético [49]: si una curva c_1 se distorsiona en c_2 por el movimiento del plasma, el flujo a través de c_1 a tiempo t_1 es igual al flujo a través de c_2 a tiempo t_2 .

Por lo tanto, el sistema que analizamos presenta ambos regímenes, sólo que a diferentes escalas espaciales y temporales. Por esta disparidad de escalas de longitud y tiempo involucradas, las ecuaciones de movimiento del plasma completas que presentan un sistema de ecuaciones diferenciales no resoluble, no puede ser resuelta numéricamente. Por esta razón, es necesario tomar una perspectiva distinta para atacar este problema. Por consiguiente, estudiaremos este problema basándonos en los llamados: *modelos de criticalidad auto-organizada*, como veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Modelos de criticalidad auto-organizada (SOC)

La auto organización es un proceso en el que algún orden global surge de las interacciones locales y no lineales entre los componentes de un sistema complejo. Este es un proceso espontáneo, generalmente desencadenado por fluctuaciones aleatorias y la organización resultante está completamente distribuida sobre todos los componentes del sistema y, es capaz de sobrevivir y auto-reparar daños o perturbaciones sustanciales. Es decir, los sistemas auto-organizados son capaces de mantenerse funcionando con la misma dinámica sin que sea necesario que entre en cuestión algún factor externo [5].

Desde que *Perl Bak* y colaboradores propusieran en 1987 el paradigma de la criticalidad auto-organizada (*Self Organized Criticality: SOC*) [7], diversos sistemas complejos fueron estudiados utilizando estas ideas. En la descripción estadística de sistemas complejos aparecen, generalmente, leyes de escala como las que fueron observadas para fenómenos que van desde las emisiones en el rango óptico de los discos de acreción hasta los terremotos pasando por las erupciones que ocurren en el sol y otras estrellas magnéticas [4]. Esta regularidad estadística sugiere que un número limitado de mecanismos, o principios, conducen a la complejidad en todas sus manifestaciones.

4.1. La pila de arena

El ejemplo arquetípico de un sistema SOC es la pila de arena que describimos en este apartado. Si se dejan caer granos de arena sobre una mesa, de a uno y en posiciones aleatorias, se generará un montículo cónico. El ángulo cónico se incrementará hasta llegar a un valor límite a partir del cual la incorporación de un nuevo grano de arena desencadenará una avalancha por la cual la arena se deslizará hasta que el valor límite de la pendiente del cono sea menor que dicho valor crítico. Cuando esto ocurre, la pila de arena alcanza un estado estacionario muy dinámico. La relajación, ocurre en forma de avalanchas intermitentes que involucran desde un solo grano hasta toda la longitud de la pila [17].

En la figura 4.1 se ilustra como la adición de granos de arena conduce primero a la formación de una pila y hasta que, cuando se alcanza la pendiente crítica, ocurre la liberación de energía potencial vía avalanchas. La sucesiva adición de granos de arena, transforma el sistema de un estado en el cual los granos individuales siguen su propia dinámica local, a un estado crítico donde las dinámicas emergentes son globales. Es decir que, en el estado estacionario, la pila de arena con sus de avalanchas grandes y pequeñas tienen una su propia dinámica, que no podría haber sido anticipada de las propiedades de los granos individuales [45].

El estado crítico es un atractor de la dinámica. Es en ese sentido que se dice que el sistema se encuentra en un estado de criticalidad auto organizada.

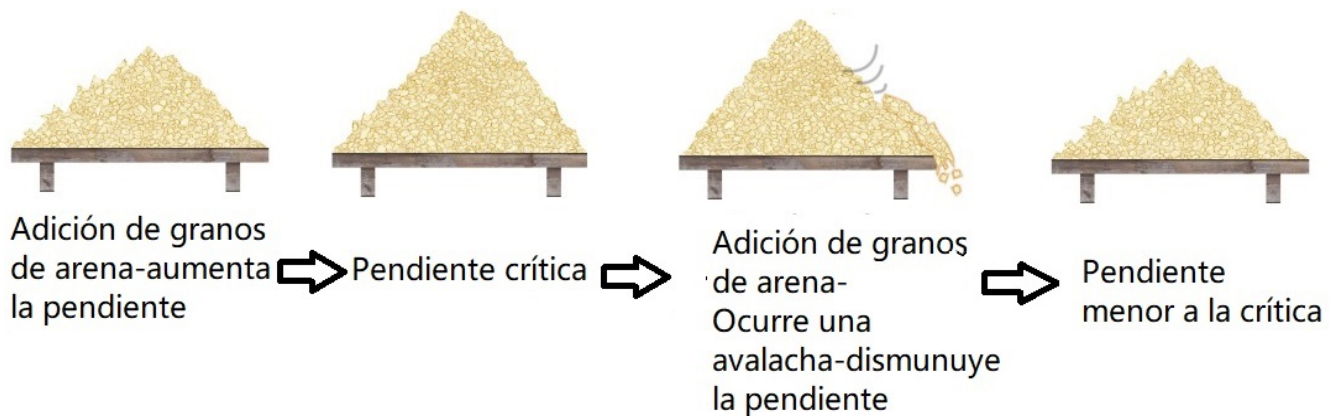


FIGURA 4.1: Diagrama del modelo SOC de pila de arena [27], donde se agregan granos de arena una pila de arena hasta llegar a un estado crítico donde se producen avalanchas

Siguiendo a [6] podemos decir que un aspecto que caracteriza a los sistemas SOC es que están dominados por la interacción, es decir, su comportamiento dinámico es una propiedad emergente de la interacción relativamente simple entre muchos grados de libertad. No importa exactamente cómo interactúan dos granos de arena, siempre que lo hagan localmente y que su estabilidad mecánica en la pendiente esté sujeta a un cierto *threshold* (*umbral*) o de ahora en adelante: τ , por ejemplo, fricción entre granos adyacentes. Tal umbral es de hecho crucial, ya que permite la existencia de múltiples estados meta-estables a través de los cuales las avalanchas llevan al sistema al estado SOC. [17]. Además, en los sistemas físicos que alcanzan un estado de SOC, no hay una escala preferida para la liberación de energía.

En los capítulos 2 y 3 vimos que una de las características fundamentales de la dinámica de la magnetocola son su comportamiento turbulento e intermitente. Características que, a priori, pueden también observarse en algunos sistemas auto-organizados. En la siguiente sección presentaremos una forma de modelar la magnetocola haciendo uso de un modelo inspirado en la pila de arena.

4.2. La magnetoesfera como un sistema complejo y auto-organizado

Como vimos en el capítulo 2, el viento solar es la fuente de energía cinética y magnética que se transfiere y acumula en la magnetosfera mediante diversos mecanismos. El modelado de la magnetocola es una pieza fundamental para entender estos procesos de acumulación y transferencia. En esta sección veremos como utilizar el paradigma de la criticalidad auto-organizada para estudiar el comportamiento altamente complejo de la magnetocola.

De las observaciones in situ ([44], [10]), sabemos que la hoja de corriente que se aloja en el seno de la magnetocola es altamente turbulenta y que, en el momento que comienza una subtormenta, se produce en ella una inestabilidad del campo magnético compatible con la ocurrencia de eventos de reconexión (en la micro escala) [22].

Sin embargo, en un estudio de los inicios de subtormentas con observaciones de la magnetocola [43], encontraron que la reconexión magnética dura un cierto tiempo, y luego se detiene incluso mientras avanza la fase de expansión de la subtormenta. Esto implica que la reconexión se da de forma localizada en regiones que se activan y desactivan durante el transcurso de una subtormenta, de manera que la disipación en la magnetocola es intermitente y localizada. En la Figura 4.2 se esquematizan los cúmulos de

plasma generados en las regiones de aceleración localizada [13]. La transferencia de energía y momento producida por la reconexión alcanza, sin embargo las escalas globales de la magnetosfera terrestre [56]. Por lo que es claro que la dinámica de la magnetocola es también un fenómeno multiescalar.

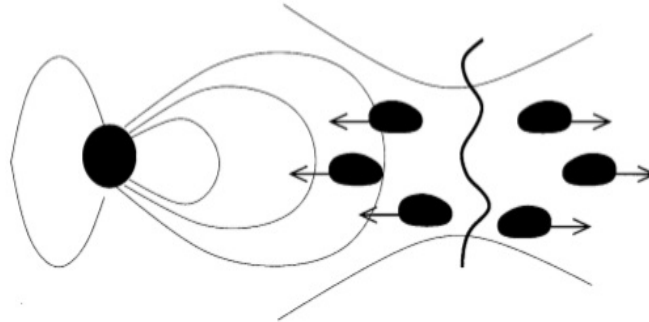


FIGURA 4.2: Vista conceptual de la magnetosfera compleja [54]. En algún lugar de la cola se generan ráfagas de flujo que transportan plasma y flujo magnético. Este transporte parece permitir un cambio topológico global durante las subtormentas.

Estas tres propiedades de la magnetocola permiten argüir que la dinámica de la magnetocola y la de la pila de arena son asimilables. Sumado a esto sabemos que desde hace más de dos décadas se ha acumulado evidencia que muestra que la auroras y las subtormentas geomagnéticas (por ejemplo los resultados de las observaciones en [52], [51]) y fenómenos asociadas a ellas como las disrupciones de corriente localizadas [39], fluctuaciones del campo magnético [38] y el espectro del campo magnético en la magnetocola [29], presentan un comportamiento claro de la ley de potencias [54].

También, se ha demostrado en [36] y [28] que los modelos basados en la física de baja dimensión reproducen muchas de las características de la interacción de la magnetosfera del viento solar.

Toda esta evidencia indica es que la magnetocola podría encontrarse en un estado *global SOC*.

Por lo tanto, es posible estudiar el fenómeno de las subtormentas geomagnéticas como avalanchas de muchos pequeños eventos de reconexión en la hoja de plasma turbulento, bajo el supuesto de que el sistema, se encuentra en, o cerca, de un estado global auto organizado.

En el siguiente capítulo describiremos un autómata celular que contiene los componentes necesarios para describir los eventos de reconexión de la magnetocola e interpretar las avalanchas producidas en términos de energía liberada en la magnetosfera.

Capítulo 5

Modelo de autómatas celulares

La modelización del problema de liberación de energía en la magnetocola mediante autómatas celulares ha sido estudiada desde fines de los años 90 ([16]) y a lo largo de las dos últimas décadas se fue complejizando ([17], [54], [40]). En este capítulo presentaremos un modelo 2-D que, a pesar de su simplicidad, permite entender mejor la fenomenología de la magnetocola.

5.1. Descripción conceptual del modelo

Consideremos primero que las líneas de campo están compuestas por tubos de flujo de campo magnético, cuya profundidad se extiende a lo largo de la dirección (\hat{i}) tal como se muestra en la Figura 5.1(a). En el plano $j - k$ esos campos se ven como se presenta en la Figura 5.1 (b). Sabiendo que es posible estudiar la liberación de energía en la magnetocola usando modelos de baja dimensionalidad, simplificaremos el problema y estudiaremos la inestabilidad del campo B asumiendo que la fenomenología relevante al problema ocurre en el plano que se muestra en la Figura 5.2 y puede modelarse mediante un autómata celular sencillo. Asumiremos que la red es un conjunto discreto de tubos de flujo y que cada uno de sus nodos

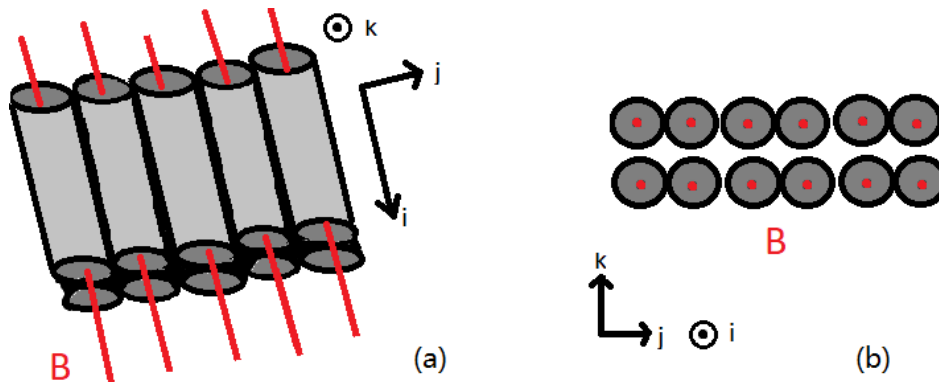


FIGURA 5.1: (a) Diagrama de los tubos de flujo magnético en 3-D. (b) Diagrama de los tubos de flujo vistos desde el frente 2-D. Cada fila de tubos representa a cada línea de campo magnético.

representa la componente B_k , que es la única componente no nula del campo magnético en este sistema y que depende de las variables (i, j) , esto es:

$$\vec{B} = B(i, j, t)(\hat{k}) \quad (5.1)$$

En la red definida, haremos evolucionar el campo magnético siguiendo la ecuación de inducción bajo las hipótesis que discutiremos en la siguiente sección. A partir del campo magnético obtenido en cada iteración definiremos la energía magnética del sistema y el módulo de la corriente y, sobre esta impondremos umbrales a partir de los cuales el campo se reconecta y se libera energía. Dicha energía liberada se dará en

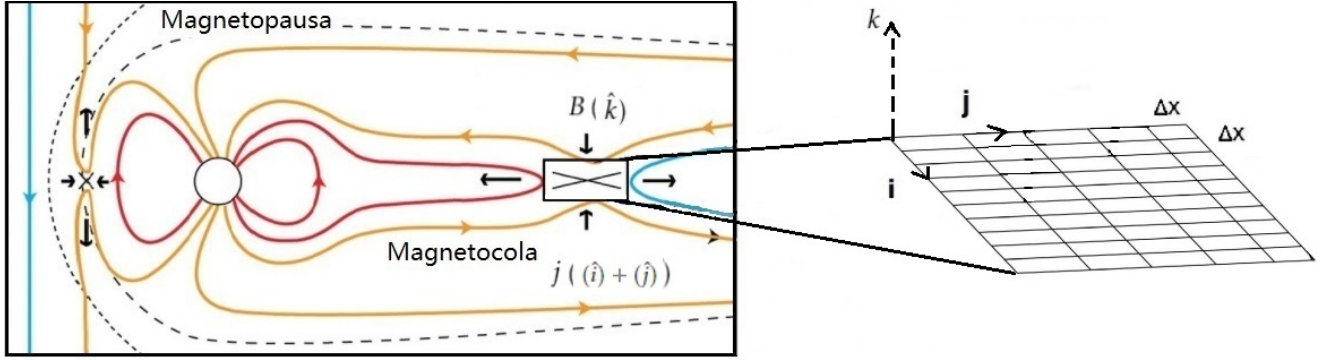


FIGURA 5.2: Diagrama del modelo usado para describir la magnetocola. Modelo de la reconexión como una red cuadrada 2-D con distancia entre nodos Δx . En el diagrama se indica la dirección donde apunta el campo ($B(\hat{k})$) y la corriente en el plano i - j ($j(\hat{i}+\hat{j})$).

forma de avalanchas cuyas distribuciones estadísticas analizaremos en detalle. En las secciones siguientes discutiremos cada uno de los elementos presentes en el autómatas celulares diseñado y su interpretación en el contexto de la magnetocola.

5.2. El campo B : Solución de la Ecuación de Inducción MHD

Teniendo en cuenta que la intensidad del campo B está representada por los valores de los nodos de la red, describiremos aquí cómo se lo calcula y se lo inicializa en el código desarrollado. En el capítulo 3, vimos que la Ecuación de Inducción para un plasma como el de la magnetocola es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (5.2)$$

y que como no conocemos el valor de \vec{v} , es necesario utilizar la ecuación 3.16, que es la ecuación para el campo de velocidades y que forma un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas con la ecuación 5.2. La solución numérica de estas ecuaciones en el marco de la MHD es computacionalmente muy costosa y también lo es en el marco de los autómatas celulares. Sin embargo, siguiendo a otros autores [53], [54], [40] es posible asumir que el término convectivo puede reemplazarse por un término que actúa como una perturbación aleatoria (D) *noise-like driver* [15] que actúa permanentemente sobre el sistema. De manera que ahora la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (5.3)$$

Para resolver numéricamente la ecuación 5.3 necesitamos discretizar cada uno de sus términos. Para la derivada temporal usamos *diferencias finitas hacia adelante (forward)* asumiendo un paso temporal Δt [32]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{B(i, j, t + 1) - B(i, j, t)}{\Delta t} \quad (5.4)$$

Por otra parte, el laplaciano es la suma de las derivadas segundas de la función en cada variable, para eso, escribimos cada derivada segunda usando el método de *diferencias finitas central*, para las direcciones

i y j de la red. Esto es:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial i^2} = \frac{B(i+1, j, t) + B(i-1, j, t) - 2B(i, j, t)}{\Delta i^2} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial j^2} = \frac{B(i, j+1, t) + B(i, j-1, t) - 2B(i, j, t)}{\Delta j^2} \quad (5.6)$$

Asumiendo que $\Delta i = \Delta j = \Delta x$, Cuando calculamos el laplaciano, sumando las ecuaciones 5.5 con 5.6, obtenemos:

$$\eta \nabla^2 \vec{B} = \eta \frac{B(i+1, j, t) + B(i-1, j, t) + B(i, j+1, t) + B(i, j-1, t) - 4B(i, j, t)}{\Delta x^2} \quad (5.7)$$

De esta manera, la ecuación de inducción discretizada queda:

$$\frac{B(i, j, t+1) - B(i, j, t)}{\Delta t} = \eta \frac{B(i+1, j, t) + B(i-1, j, t) + B(i, j+1, t) + B(i, j-1, t) - 4B(i, j, t)}{\Delta x^2} + D \quad (5.8)$$

De manera que en cada iteración el campo magnético será:

$$B(i, j, t+1) = B(i, j, t) + \frac{\eta \Delta t}{\Delta x^2} (B(i+1, j, t) + B(i-1, j, t) + B(i, j+1, t) + B(i, j-1, t) - 4B(i, j, t)) + D \quad (5.9)$$

Solo necesitamos una condición inicial para poder integrar la ecuación 5.9. En este caso, siguiendo un trabajo previo [40], la condición inicial es una función decreciente de la coordenada espacial i .

5.3. Criterio de estabilidad

A medida que el campo magnético calculado mediante la ecuación 5.9 aumenta, también aumenta y se complejiza la corriente que, en este caso es:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.10)$$

Cuando la corriente excede cierto valor, podremos asumir que estamos en presencia de una inestabilidad (la reconexión magnética es la principal candidata) y es necesario incorporar una forma de redistribución (relajación de la corriente y liberación de energía). Para el caso del campo magnético B definido en la sección anterior, puede mostrarse que plantear que la corriente sea inestable equivale a decir que $|\vec{j}| > \tau$. Donde, siguiendo con la lógica del modelo de [41], τ es un umbral elegido cuya única propiedad es ser distinto de cero. La implementación numérica de esta condición se reduce a calcular el módulo del rotor del campo magnético $\vec{B} = B(i, j, t)(\hat{k})$, que será:

$$\nabla \times \vec{B} = \partial j B_k(\hat{i}) - \partial i B_k(\hat{j}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.11)$$

Donde en esta última ecuación se utilizó la ecuación 5.10. Tomando módulo de ambos lados de esta ecuación:

$$|\vec{j}| \propto \sqrt{(\partial j B_k)^2 + (\partial i B_k)^2} \quad (5.12)$$

Si calculamos el gradiente del campo unidimensional B_k y le tomamos el módulo, obtenemos:

$$|\nabla B_k| = \sqrt{(\partial i B_k)^2 + (\partial j B_k)^2} \quad (5.13)$$

Por las ecuaciones 5.11, 5.12 y 5.13 y tomando el tiempo $t + 1$, tenemos:

$$|\vec{j}| = |\nabla_x \vec{B}(i, j, t + 1)| = |\nabla \vec{B}(i, j, t + 1)| \quad (5.14)$$

Entonces, como módulo del rotor y el módulo del gradiente del campo en nuestro modelo son iguales, tomamos el módulo del gradiente del campo magnético de los nodos y obtenemos el módulo de la corriente. Nos quedamos con el gradiente del campo en lugar del rotor del mismo, por una cuestión de simplificación del código computacional posterior. Cuando $|\vec{j}| > \tau$ para uno o más nodos de la red diremos que el sistema es inestable y deberá liberar energía de una forma que explicaremos en la siguiente sección. Por otro lado, si el $|\vec{j}| < \tau$, para todo los nodos de la red diremos que el sistema es estable y agregaremos una perturbación aleatoria del sistema.

Para eso introduciremos un campo medio perturbativo en cada iteración de manera que el campo será:

$$\vec{B}^*(i, j, t) = \vec{B}(i, j, t) + \delta B(i, j) \quad (5.15)$$

donde \vec{B}^* es el nuevo campo, obtenido luego de perturbar el campo viejo \vec{B} y δB es la perturbación aleatoria del campo.

En el capítulo 3, mencionamos que la tasa de energía disipada o liberada por unidad de volumen, luego de la acumulación, en la hoja de corriente estaba dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{E} = \eta j^2 \quad (5.16)$$

En el caso de nuestro modelo, \tilde{E} es la energía disipada por todos los nodos inestables de la red y que esa energía se disipa en toda la red cuadrada.

5.4. Regla de Redistribución

Una vez que uno o más nodos de la red alcanzó la inestabilidad es necesario establecer un procedimiento que permita que el sistema vuelva a la estabilidad liberando energía. En el contexto de un autómata celular esto implica establecer una regla de redistribución.

La forma que elegimos para hacer esta redistribución es la siguiente: nos fijamos en todos los nodos de la red. A los nodos inestables, tomamos el valor del campo magnético en ese nodo y le sumamos el valor del campo magnético de sus primeros vecinos. Estos son los nodos que están arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda con respecto al nodo inestable que estamos considerando en la red.

Luego, dividimos el valor de esa suma de 5 elementos (el valor de los campos de los 5 nodos involucrados) por la cantidad de elementos involucrados, es decir, dividimos por 5.

Esto es:

$$B(i_*, j_*, t + 2) = \frac{B(i_*, j_*, t + 1) + B(i_* + 1, j_*, t + 1) + B(i_* - 1, j_*, t + 1) + B(i_*, j_* + 1, t + 1) + B(i_*, j_* - 1, t + 1)}{5} \quad (5.17)$$

La ecuación 5.17, nos dice que esa suma nos da el nuevo campo a tiempo $(t + 2)$ en el nodo con coordenadas i_*, j_* . Donde los asteriscos hacen referencia a que el nodo es inestable a tiempo $(t + 1)$. Es decir, el campo en el nodo que era inestable, pasa ahora a tener el valor indicado en la ecuación 5.17, a tiempo $t + 2$.

Pasemos ahora a la redistribución del campo de los nodos vecinos a ese nodo. Lo que vamos a hacer es lo siguiente: una vez que se actualizó el valor del campo del nodo que empezó siendo inestable y que

ahora tiene un nuevo valor, vamos a pedir que ese valor que obtuvimos en la ecuación 5.17 para ese nodo, sea igual para el campo de los nodos vecinos involucrados en ese cálculo de actualización de campo. Esto es:

$$B(i_*, j_*, t + 2) = B(i_* - 1, j_*, t + 2) = B(i_* + 1, j_*, t + 2) = B(i_*, j_* - 1, t + 2) = B(i_*, j_* + 1, t + 2) \quad (5.18)$$

Esto se puede ver más claramente en el diagrama de la Figura 5.3, donde se puede ver gráficamente la redistribución de los nodos.

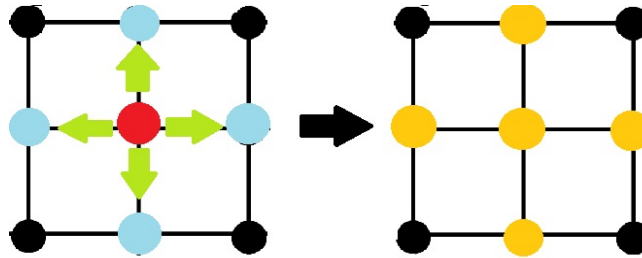


FIGURA 5.3: Redistribución del valor del campo magnético de los nodos de la red 2-D del modelo. El nodo rojo, indica que el campo en ese nodo es inestable. Los nodos celestes indican los primeros vecinos del nodo inestable. Las flechas verdes indican que se produce una avalancha en el sistema, cuando un nodo es inestable. La flecha negra indica como quedan redistribuidos los nodos en la siguiente iteración temporal. Los nodos naranjas indican los nodos luego de que se hizo la redistribución, es decir, a la siguiente iteración temporal, donde ahora tienen todos el mismo valor de campo magnético

Entonces, empezamos con un campo aleatorio a tiempo t . En la ecuación 5.9 obtenemos el campo a tiempo $t + 1$ y luego propusimos una forma (5.17 y 5.18) para obtener el campo a tiempo $t + 2$.

Se hace la redistribución de esta manera, para hacerlo de la forma más uniformemente posible y consideramos que se redistribuyen todos los nodos inestables de la red de esta forma. Cuando esta ocurre, se reduce la corriente de la red de forma neta [40]. Este proceso de aplicar el criterio de inestabilidad, actualización del campo y redistribución de nodos se realiza para todas las subsiguientes iteraciones temporales.

5.5. Energía liberada por las avalanchas

Veamos ahora como podemos representar la energía liberada en nuestro modelo. Recordemos que la energía magnética del plasma, viene dada por la siguiente ecuación:

$$E_M \approx \frac{B^2}{2} \quad (5.19)$$

Escribimos la energía liberada en términos de los valores discretos del campo magnético. Esto lo hacemos según la forma que elegimos para hacer la redistribución de campos en los nodos en la sección anterior, porque esta redistribución, va a ser la que nos de la expresión de la redistribución de energía.

Consideremos que la energía inicial (antes de una redistribución de campos magnéticos), la cual llamaremos (ϵ_i), va a depender del nodo inestable en cuestión y de sus primeros vecinos, todos a $t + 1$. Además, como tenemos nodos discretos, y el campo magnético tiene un cierto valor específico para cada uno, la energía de cada uno de los nodos involucrados, no será otra cosa que:

$$\epsilon_{in} = \frac{B(i, j, t + 1)^2}{2} \quad (5.20)$$

donde (i, j) corresponden al nodo inestable o alguno de sus primeros vecinos al momento de la redistribución.

Si sumamos los valores de la energía de cada uno de estos 5 nodos involucrados, obtenemos la energía inicial total:

$$\epsilon_{inT} = \frac{B(i_*, j_*, t+1)^2 + B(i_* - 1, j_*, t+1)^2 + B(i_* + 1, j_*, t+1)^2 + B(i_*, j_* - 1, t+1)^2 + B(i_*, j_* + 1, t+1)^2}{2} \quad (5.21)$$

donde (i_*, j_*) es el nodo inestable en cuestión.

Por otra parte, tenemos que considerar la energía con la que quedan los 5 nodos involucrados luego de la redistribución, a tiempo $t + 2$, es decir la energía final total, la cual llamaremos (ϵ_{fT}) . La ecuación 5.18 nos muestra que todos sus valores son iguales. Esto es:

$$\epsilon_{fT} = \frac{5B(i_*, j_*, t+2)^2}{2} \quad (5.22)$$

Entonces, partimos de la siguiente ecuación, en la cual consideramos que si tenemos una energía inicial, se libera energía y se obtiene la energía final. Esto nos da la relación entre energía inicial total, energía final total y energía liberada (ϵ_l) :

$$\epsilon_{inT} - \epsilon_l = \epsilon_{fT} \quad (5.23)$$

despejando ϵ_l , obtenemos

$$\epsilon_l = \epsilon_{inT} - \epsilon_{fT} \quad (5.24)$$

Reemplazando por la ecuación 5.21 y la ecuación 5.22 llegamos a:

$$\begin{aligned} \epsilon_l(i_*, j_*, t+1) = & \\ & \frac{B(i_*, j_*, t+1)^2 + B(i_* - 1, j_*, t+1)^2 + B(i_* + 1, j_*, t+1)^2 + B(i_*, j_* - 1, t+1)^2 + B(i_*, j_* + 1, t+1)^2}{2} \\ & - \frac{5B(i_*, j_*, t+2)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Esta energía, es la energía liberada por cada nodo inestable (i_*, j_*) luego de cada iteración. Para obtener la energía liberada por todos los nodos inestables de la red luego de cada iteración, la cual llamaremos ϵ_L , tenemos que sumar sobre todos los nodos inestables. Esto es:

$$\epsilon_L(i_*, j_*, t) = \sum_{i_*, j_*} \epsilon_l(i_*, j_*, t) \quad (5.26)$$

5.6. Energía total de la red y características del estado SOC

El estado SOC es estadísticamente estacionario, y lo es en el sentido de que, a partir de un cierto número de iteraciones, la energía (B^2) en los nodos es estadísticamente constante. Cuando el sistema alcanza el estado SOC, lo hace a partir de un cierto tiempo que llamaremos: *tiempo de estabilidad* (t_{est}) .

Para poder representar este estado, tenemos que escribir la energía total de la red, es decir, cuánto vale $(B^2/2)$ en cada iteración temporal. Para eso, podemos escribir esta energía como un vector llamado: *vector de energía total* (ϵ_T).

Como queremos saber la energía que tienen los nodos luego de que se llevan a cabo las redistribuciones, escribiremos la expresión para esta energía a partir de $t + 2$, ya que buscamos el valor de energía total de la red, a partir de la primera redistribución de campos en los nodos, que se lleva a cabo a tiempo $t + 1$. Habiendo dicho esto, definimos ϵ_T de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_T = & \\ & \left(\sum_{i_*, j_*} \frac{B(i_*, j_*, t + 2)^2}{2}, \sum_{i_*, j_*} \frac{B(i_*, j_*, t + 3)^2}{2}, \sum_{i_*, j_*} \frac{B(i_*, j_*, t + 4)^2}{2}, \sum_{i_*, j_*} \frac{B(i_*, j_*, t + 5)^2}{2}, \dots \right. \\ & \left. \dots, \sum_{i_*, j_*} \frac{B(i_*, j_*, t + (n + 1))^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Donde $n + 1$ es el número de iteraciones temporales que hacemos en la red.

Entonces, tenemos ahora la energía total de la red para todas las iteraciones, donde cada elemento del vector $\vec{\epsilon}_T(i_*, j_*, t)$ nos indica la energía total en la red en cada iteración.

5.7. Implementación numérica del modelo

Ahora que ya describimos las características de nuestro modelo, vamos a traducir estas características a un código numérico para realizar nuestro autómatas. El código numérico, fue escrito en el lenguaje *python*. En el Apéndice 8.1, se muestra el pseudocódigo del programa que hicimos. Estas simulaciones nos permiten obtener la evolución del campo magnético y con esto la energía liberada por las avalanchas (ϵ_L) y la energía total de la red cuadrada (ϵ_T).

Por otro lado, las iteraciones temporales nos permitirán ver la evolución del campo y de las energías.

Realizamos entonces simulaciones con 3 valores distintos de red: $N = 24$, $N = 32$ y $N = 64$, con 3 umbrales: $\tau = 0$, $\tau = 0,25$ y $\tau = 1$ y con simulaciones de diferente longitud (entre 100000 y 200000 iteraciones).

Capítulo 6

Estado SOC y Avalanchas

Este capítulo se dividirá dos grandes secciones: en la *sección 6.1* caracterizaremos el estado de criticidad auto-organizada que alcanza nuestro modelo y en la *sección 6.2* realizaremos un estudio estadístico de las avalanchas del sistema.

6.1. Caracterización del estado de criticidad auto-organizada SOC

En esta sección, analizaremos los datos obtenidos de las simulaciones, con el objetivo de caracterizar la energía total y la energía liberada en la red. Para establecer si nuestro autómatas ha logrado alcanzar el estado estacionario, estudiamos las series temporales para ϵ_T y ϵ_L .

En la Figura 6.1 se muestra la energía total de la red (ϵ_T) para $N = 24$ con $\tau = 4$.

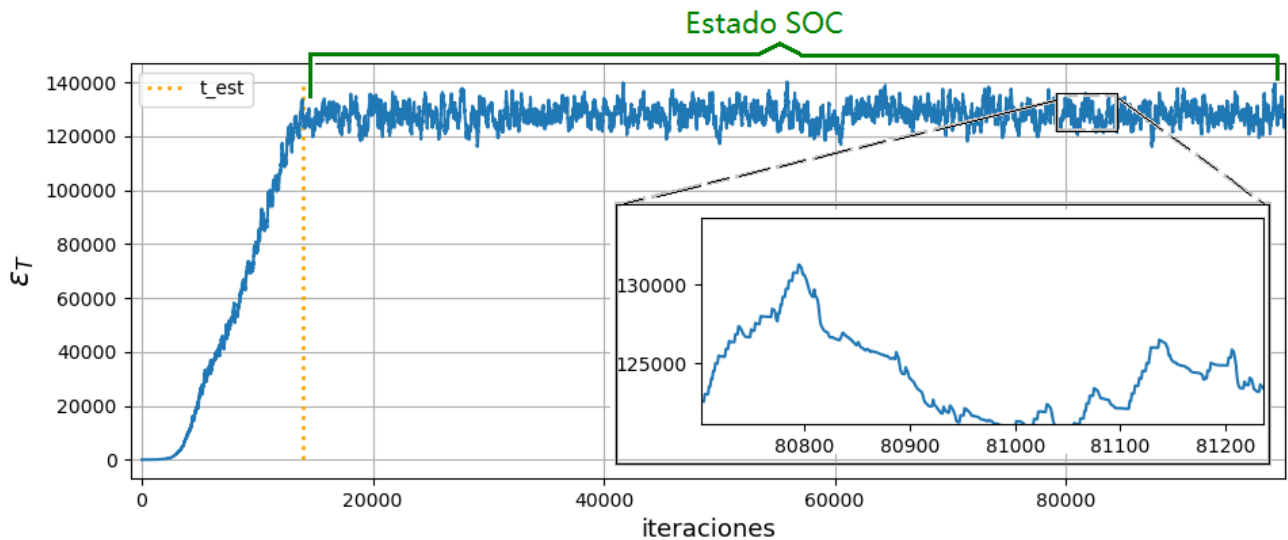


FIGURA 6.1: Gráfico del vector de energía total en función de las iteraciones, para una red de tamaño: $N=24$, con $\tau = 4$ para 10000 iteraciones. Se marca también el tiempo de estabilidad (t_{est}) alrededor de las 15000 iteraciones y el estado SOC del sistema que tiene lugar desde el (t_{est}) hasta que terminan las iteraciones. En un recuadro en la parte de la derecha abajo, se muestra en detalle la energía total en el estado SOC desde los 80700 hasta los 81215 iteraciones, para observar las avalanchas que componen esta energía.

Como se puede observar en la Figura 6.1, desde el inicio de la simulación ϵ_T crece a medida que aumentan las iteraciones temporales, hasta que cerca de las 128000 iteraciones su valor se estabiliza. Para tiempos mayores que $t_{est} \approx 15000$, la energía total de la red se mantiene estadísticamente constante por más que las iteraciones sigan aumentando. Decimos que se mantiene estadísticamente constante, porque fluctúa alrededor de un valor de energía total, el cual llamaremos: *Energía Total de Estabilidad* (ϵ_{Test}). Este valor de energía se alcanza en lo que denominamos y señalamos como t_{est} en la Figura 6.1 con la línea

punteada. Cuando la energía total se estaciona en ϵ_{Test} y se mantiene fluctuando alrededor de ese valor, decimos que el sistema alcanzó el estado SOC.

Como hablamos en el capítulo anterior, el hecho de que podamos mostrar que nuestro modelo alcanza este estado, es el primer indicio del comportamiento auto-organizado del fenómeno que estamos describiendo.

Analicemos ahora que sucede con la energía que se libera en las avalanchas (ϵ_L) definida en la ecuación 5.26. En la Figura 6.2, se muestra la energía liberada por la red durante 100000 iteraciones para una red de tamaño y umbral $N = 24$ y $\tau = 4$ respectivamente.

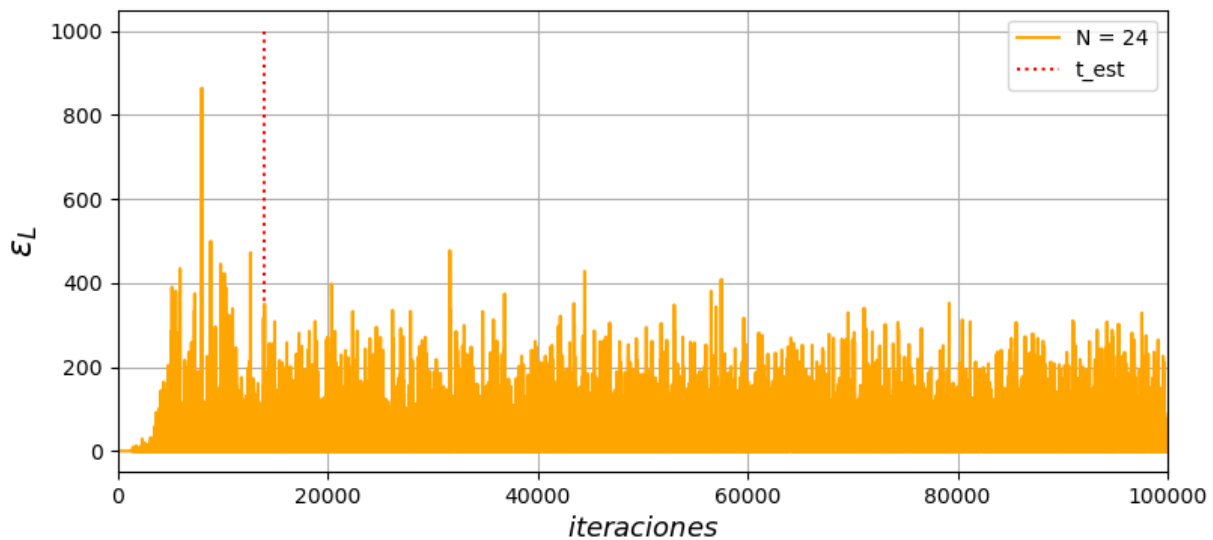


FIGURA 6.2: Energía liberada por la red para $N=24$ y $\tau=4$, calculada para 100000 iteraciones. Con línea punteada roja se indica el tiempo de estabilidad (t) cerca de las 15000 iteraciones.

Vemos que inicialmente el tamaño de las avalanchas crece hasta que llega a un cierto valor (alrededor de t_{est}), a partir del cual la liberación de energía se mantiene intermitente de la misma forma que en modelos como [41], [17].

Veamos que sucede al cambiar el tamaño de la red cuadrada con la que estamos trabajando. Consideremos entonces que tenemos los tamaños de red: $N = 24$ y $N = 32$. Si graficamos en un mismo eje horizontal y vertical los valores de energía liberada por la red para estos 2 tamaños de red con el mismo valor de umbral ($\tau = 4$), obtenemos el gráfico que se muestra en la Figura 6.3. En esta figura se puede ver que los valores de ϵ_L para la red de mayor tamaño son mayores a los de la red más chica. Además, los picos más grandes de la energía liberada de la red más grande se encuentra corridos hacia iteraciones mayores con respecto a las de la red más chica. Esto nos indica, que no solo la red libera más energía cuando es más grande, sino que tarda más tiempo en llegar al estado estadísticamente estacionario. Esto es consistente pues a mayor tamaño de red, hay mayor cantidad de nodos perturbados y, por ende, el aumento de energía en la red se demora.

Hasta acá vimos la forma de la energía liberada en la red. Veamos en detalle cómo son las avalanchas que componen esta energía. Si hacemos un acercamiento en la Figura 6.2, entre las iteraciones 3690 y 3715, vemos en la Figura 6.4 una de las tantas avalanchas que componen la energía liberada de la red. En ella se pueden identificar 3 magnitudes fundamentales con las cuales trabajaremos a lo largo del capítulo: el *Pico* de la avalancha, la cual indica el valor máximo energía liberada durante la duración de la misma, la *Duración* de la avalancha, que indica cuántas iteraciones dura desde que comienza hasta que termina

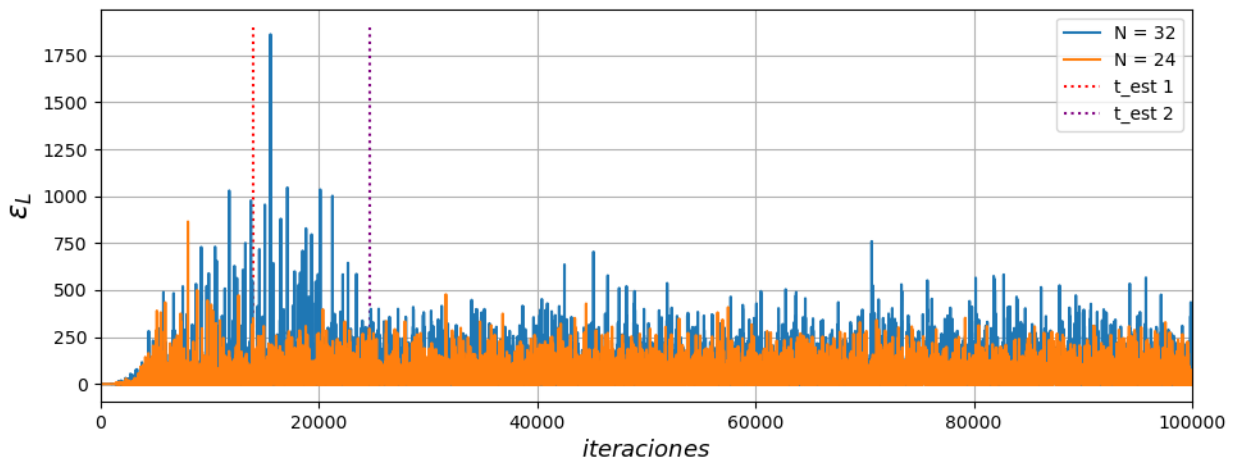


FIGURA 6.3: Energía liberada por la red para $N=24$ y $N=32$ con $\tau=4$, calculada para 100000 iteraciones. Con línea punteada roja se indica el t_{est} de $N=24$ con $\tau=4$ cerca de las 15000 iteraciones (t_{est1}) y con la línea punteada violeta el t_{est} para $N=32$ con $\tau=4$ cerca de las 25000 iteraciones (t_{est2}).

y la Energía, que es la suma de las energías que liberan los nodos inestables de la red en la cantidad de iteraciones que dure esa avalancha. Es decir, es el área bajo la curva que describe cada avalancha (Figura 6.4).

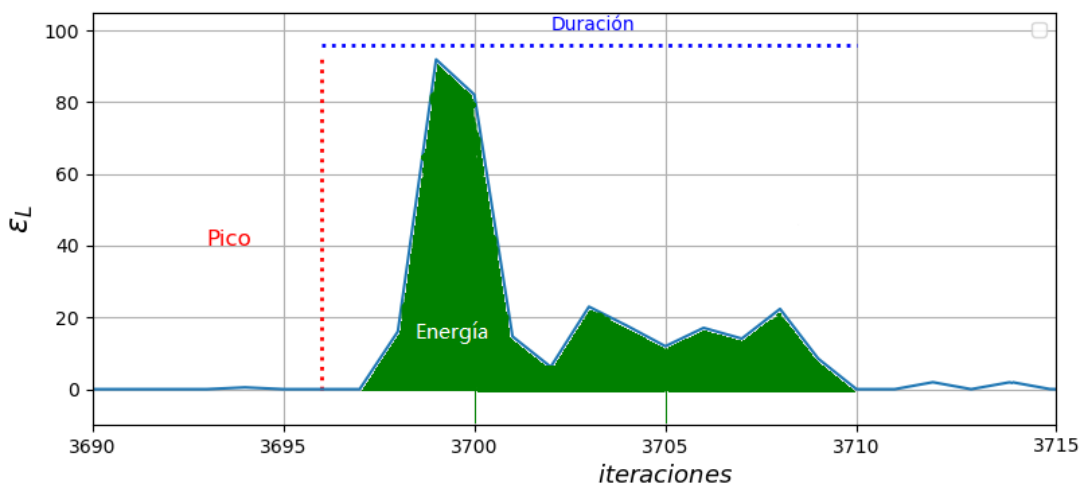


FIGURA 6.4: Detalle de la energía liberada con $N=24$ y $\tau=4$, entre las iteraciones 3690 y 3715. En el gráfico se puede ver el pico, la duración y la energía de una avalancha típica.

Veamos ahora que sucede con el campo magnético (B), y por ende con la energía total del sistema de la red, a medida que transcurren las iteraciones. Para esto, se realizó la Figura 6.5. Allí graficamos la energía total en función de las iteraciones para $N=64$ con $\tau=0,25$, en el cual se indican con letras distintos puntos de esa energía con su correspondiente iteración temporal. Se eligieron estos puntos, ya que las iteraciones correspondientes a cada uno de ellos, nos permitirá ver el comportamiento antes y después del tiempo de estabilidad [17].

En la Figura 6.6 se ve la variación de campo magnético a lo largo de la fila promedio de la red de tamaño $N=64$ con $\tau=0,25$, para cada iteración fija, el cual definimos como: *campo magnético medio*. Esto es, como cada elemento de la matriz de campo es el valor del campo en cada nodo, se sumaron todas las filas de esta matriz (fila promedio) y con esto, graficamos el valor del campo en cada nodo de esa fila en

función de su posición (N_j). Se realizó ese gráfico para 6 valores de iteración temporal distintos, que son las iteraciones correspondientes a los puntos de la Figura 6.5: A, B, C, D, E y F.

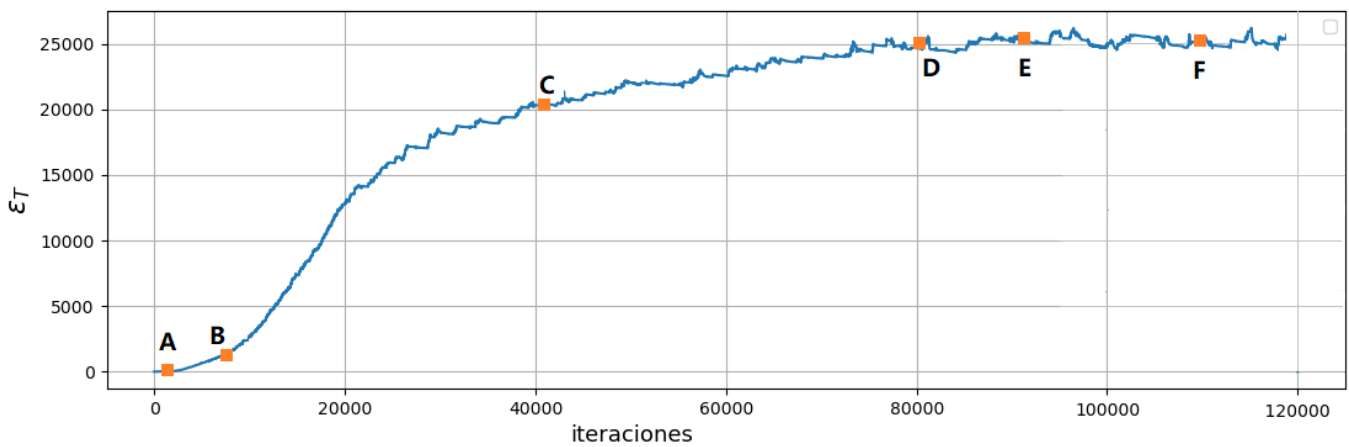


FIGURA 6.5: Energía total en función de las iteraciones para $N = 64$ con umbral = 0,25, graficado para 119000 iteraciones. Los cuadrados naranjas y las letras indican la energía total para un cierto número de iteraciones. Esas iteraciones están indicadas en la Figura 6.6

Como podemos ver en la Figura 6.6, el campo magnético crece a medida que crece el número de iteraciones. Esto ilustra el comportamiento del campo medio a medida que el sistema se acerca al estado SOC

En las iteraciones: 100, 10000 y 50000 que se presentan en gamas de azules, el campo todavía no alcanzó su valor y forma promedio, que alcanza a partir de que supera t_{est} , que en el caso de $N = 64$ y $\tau = 0,25$ es $t_{est} = 80000$ iteraciones. En t_{est} llega a un cierto valor, el cual se mantendrá en promedio constante. Los valores de campo magnético cuyas iteraciones son mayores o iguales a t_{est} , se presentan en la Figura 6.6 en gamas de rojo.

Esto muestra que el campo magnético medio se mantiene aproximadamente constante en su forma y valores que toma, una vez superado el tiempo de estabilidad. Un resultado similar a este se obtuvo para el paradigmático modelo de *Lu y Hamilton* para el caso de las erupciones en la corona solar ([41]).

Además de estudiar la evolución temporal de la energía, es interesante analizar la distribución espacial de la misma en la red. En este caso presentamos en la Figura 6.7, 5 mapas de color, donde cada uno se realizó para una iteración fija (A, B, C, D y F de las anteriores figuras), que ilustran como se redistribuye la energía a medida que avanza la simulación. Esta figura, que fue realizada para una red de tamaño y umbral $N = 64$ y $\tau = 0,25$ respectivamente, indica con una barra de color lateral el valor de energía que toma cada uno de los 64×64 nodos de la red.

La Figura 6.7 nos muestra el comportamiento que vimos en la Figura 6.5 y Figura 6.6, en donde, a partir de una cierta iteración (en este caso 80000 iteraciones), el sistema entra en el estado SOC. La diferencia con los gráficos recién mencionados, es que en la Figura 6.7 podemos ver la distribución espacial de esta energía en la red, y podemos notar como a partir del t_{est} , esta distribución en la red se mantiene prácticamente invariante en cuanto a su forma, y en cuanto al valor de energía de los nodos de la red. Esto nos muestra, desde otro punto de vista, la llegada del sistema al estado SOC.

Durante toda esta sección, hemos usado distintos tamaños de red y distintos umbrales para obtener los gráficos que mostramos y discutimos. En la Figura 6.3 de la sección anterior, vimos que el tiempo de

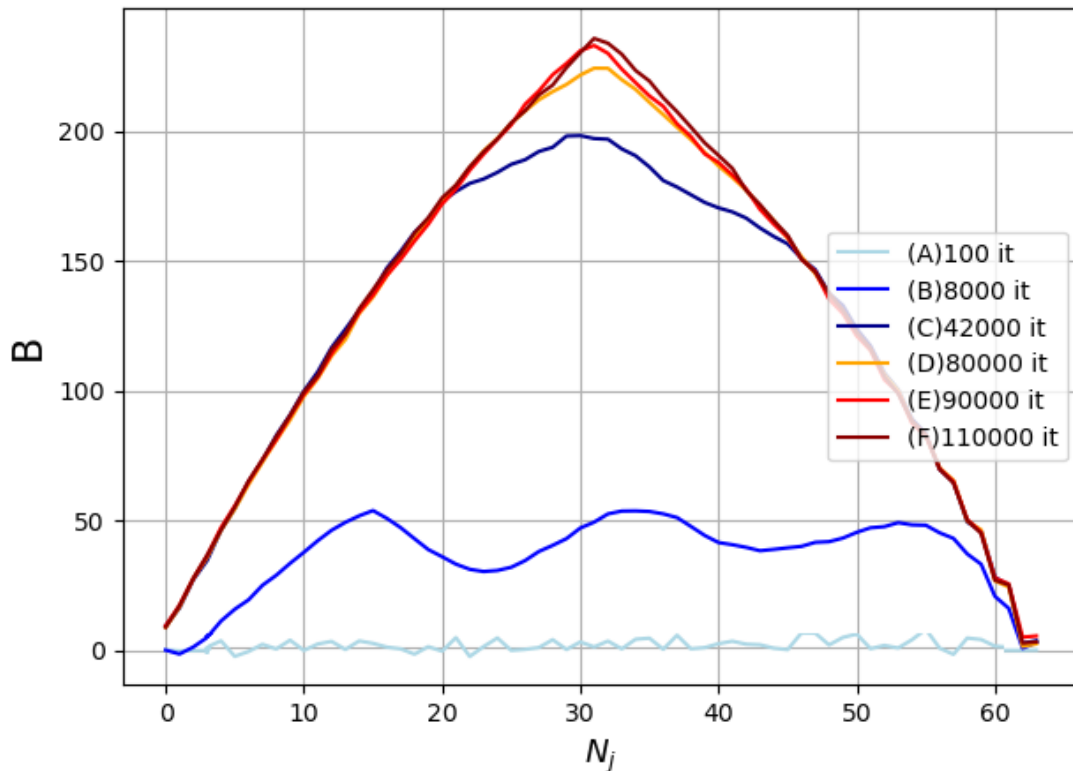


FIGURA 6.6: Campo magnético medio para $N = 64$ con $\tau = 0,25$. Las letras entre paréntesis indican en la Figura 6.5 cuál es el valor de energía total de esos nodos para la misma iteración. Donde estas iteraciones están indicadas en este gráfico al lado de cada letra entre paréntesis, con sus respectivos colores. Donde, se marcan en gamas de azules los valores de campo cuyas iteraciones son menores que el $t_{est} = 80000$, en naranja el campo en el t_{est} y en gamas de rojos, los campos cuyas iteraciones superan el t_{est} .

estabilidad para redes de distinto tamaños con un mismo umbral, era distinto. Esto es un indicio de que variar los parámetros de nuestro modelo, tales como N y τ , podrían variar el tiempo de estabilidad y alguna otra magnitud de nuestro modelo.

Comencemos viendo entonces qué sucede al variar el tamaño de la red con un umbral fijo. Como se presenta en la Figura 6.8(b), se gráfico el t_{est} para un umbral fijo en función de N para 3 valores de N distintos: $N = 24, 32$ y 64 . Hicimos esto para 3 valores de umbral distintos: $\tau = 0,25, 1$ y 4 . Se eligieron estos N y τ ya que muestran un buen rango de tiempos de estabilidad y de energía de estabilidad, como veremos más adelante.

En todas las simulaciones que realizamos para todas las combinaciones de N y de τ , conseguimos alcanzar un estado estacionario. Por lo tanto, se pudieron obtener los t_{est} , los cuales fueron obtenidos aproximadamente al inspeccionar los gráficos de ϵ_T para los distintos valores de N y de τ .

Sin embargo, como se observa en la Figura 6.8 (b), la cantidad de iteraciones que se necesitan para alcanzarlo, varía con el tamaño de la red. Como puede verse en esta figura, para cada τ fijo, aumentar en aproximadamente 10 el valor de N , implica que se necesitan del orden de 20000 iteraciones más para que la energía total del sistema se estacione. Por lo tanto, aumentar el tamaño de la red, va a imponer que necesariamente vamos a necesitar realizar simulaciones más largas para que nuestro sistema alcance el estado SOC.

Algo muy similar sucede con la $\epsilon_{T_{est}}$, como se puede observar en la Figura 6.8 (a), en donde aumentar el tamaño de la red lleva a que esta energía tenga un valor mayor. Esto tiene sentido ya que, como ϵ_T es

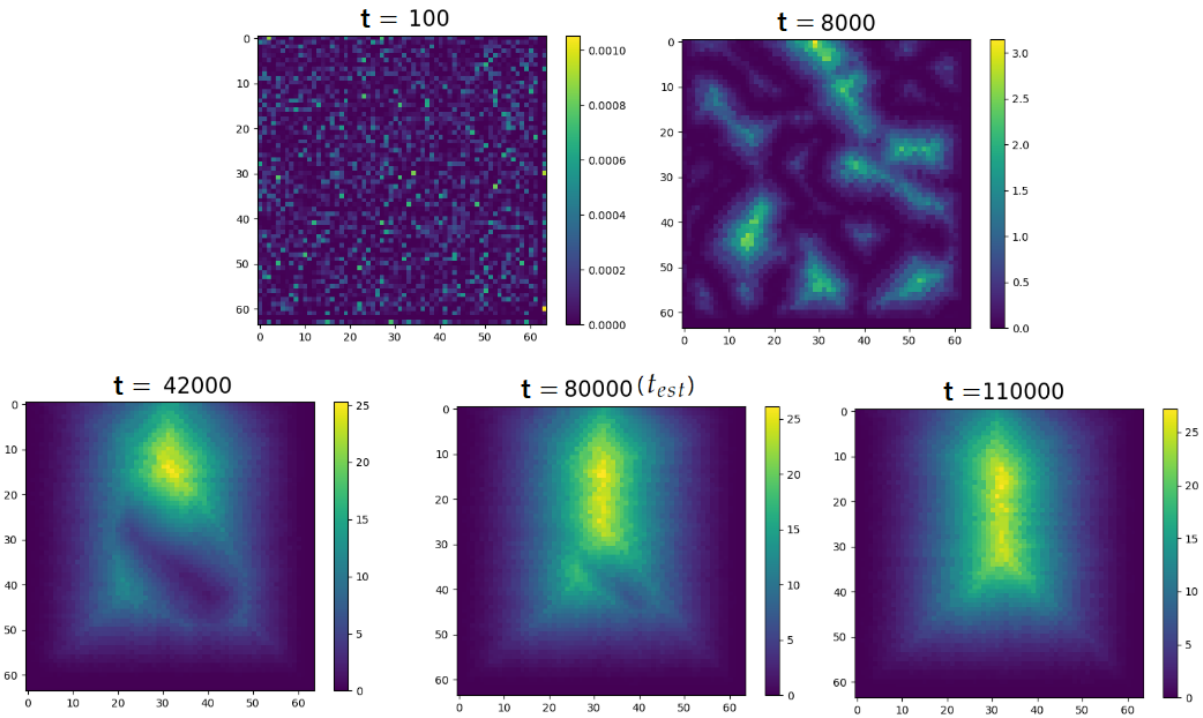


FIGURA 6.7: Mapas de color de la energía de los nodos de la red para $N = 64$ con $\tau = 0,25$, para la iteración indicada arriba de cada mapa de color. Estas iteraciones son: A,B,C,D y F indicadas en la figura: Figura 6.5, en donde se puede ver el valor de la energía total para esa iteración. Se indica con un barra lateral vertical el valor de la energía para cada uno de los $64 \times 64 = 4096$ nodos que componen la red.

creciente en las iteraciones, hacer simulaciones más largas, conllevará que ϵ_T se estacione en valores más grandes.

El hecho de que para un τ fijo, aumentar N aumente el t_{est} , podemos asociarlo a que como la perturbación se distribuye de manera aleatoria, el sistema tarda más tiempo en alcanzar un estado en el cual aproximadamente todos los nodos tengan la suficiente energía para alcanzar la criticalidad o cercana a ella.

Veamos ahora el comportamiento de t_{est} variando τ para N fijo, que se presenta en la Figura 6.9, para ver que nos puede aportar en cuanto a nuestra caracterización de los tiempos de estabilidad.

El hecho de que t_{est} para N fijo aumente a medida que aumenta τ , se lo atribuimos a lo siguiente: como τ crece, se necesitan valores de ∇B mayores para que se cumpla que $|\vec{j}| > \tau$, por lo cual serán necesarias más iteraciones en las cuales se perturbe el campo para que cumpla esta condición y se redistribuya la energía en los nodos. Como son las liberaciones de energía las que llevan al sistema al estado SOC, aumentar τ , aumenta t_{est} .

Algo que hay que notar es que como el proceso de redistribución es altamente no lineal, ni ϵ_{Test} ni t_{est} se comportan de manera lineal cuando crece el tamaño de la red para un τ fijo, ni t_{est} cuando crece τ para N fijo.

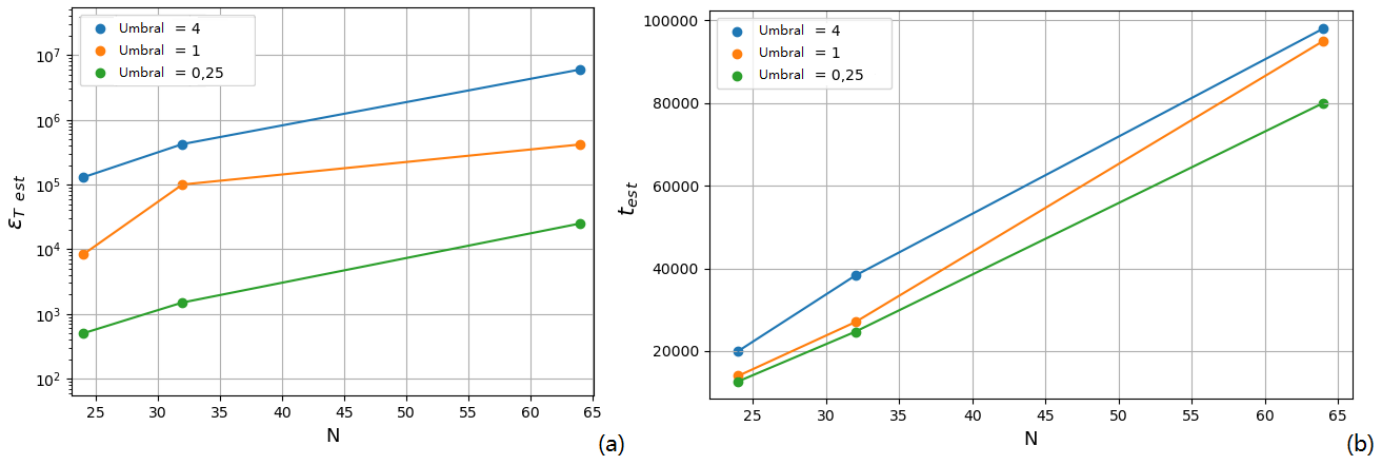


FIGURA 6.8: (a) $\epsilon_{T_{est}}$ en función de N para los valores de $\tau = 0,25, 1$ y 4 , graficado con eje vertical logarítmico para que se visualicen adecuadamente la diferencia en las energías. (b) t_{est} en función de N para los valores de $\tau = 0,25, 1$ y 4 .

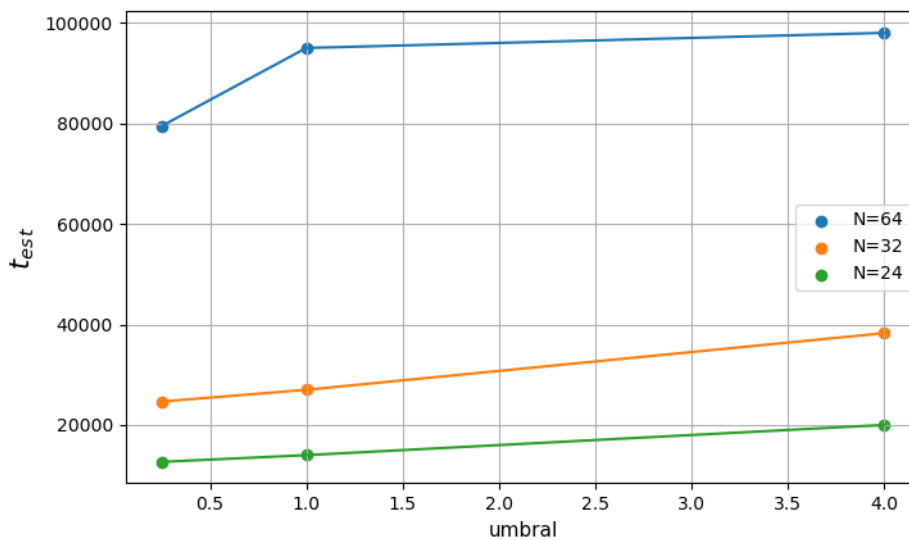


FIGURA 6.9: t_{est} en función de τ para los valores de $N = 24, 32$ y 64 , con $\tau = 0,25, 1$ y 4 .

6.2. Caracterización estadística de las avalanchas

Una vez obtenidas las series temporales de energía liberada y la energía total para nuestro modelo del capítulo anterior, vimos que el insumo básico de estas energías son las avalanchas. Por esta razón, nos vamos a dedicar en esta sección a caracterizar el comportamiento cuantitativo y estadístico de las avalanchas obtenidas a partir de estas series temporales.

En la sección anterior vimos que podemos caracterizar las avalanchas valiéndonos de 3 magnitudes fundamentales: La duración, el pico y la energía de cada una estas.

Para calcular estas cantidades, se consideraron las avalanchas presentes en la energía liberada para tiempos superiores al t_{est} , es decir, cuando el sistema se encuentra en el estado estacionario.

Además, como estamos buscando el comportamiento estadístico de estas cantidades, es importante que la cantidad de avalanchas con las que trabajemos sea grande. Esto no fué un inconveniente, ya que la cantidad de avalanchas para cualquier N y τ eran del orden de 10^5 en adelante, lo cual es lo suficientemente extenso como para hacer este análisis.

El primer análisis que hicimos fue verificar si las energías, picos y duraciones, están relacionadas entre

sí por una ley de potencias como se muestra en [17], partiendo de la ecuación 6.1, que es la ecuación de los sistemas que describen comportamiento de ley de potencias:

$$a(b) = f_{ab}b^{\gamma_{ab}} \tag{6.1}$$

Donde a y b son las cantidades que queremos relacionar.

Si graficamos en escala log-log esta ecuación, obtenemos una función lineal. Por lo tanto, haciendo una regresión lineal con los datos, vamos a obtener el valor de γ_{ab} , que es la pendiente de esta recta. Podríamos también obtener el valor de la ordenada al origen de esa recta: $\log(f_{ab})$, pero como buscamos entender si estas cantidades tienen comportamiento de leyes de potencia, que esta distribución este más arriba o más abajo en el eje vertical no nos va a dar información de este comportamiento. Realizamos para ver este comportamiento los gráficos de Energía vs Duración (Figura 6.10) y de Energía vs Picos (Figura 6.11), Para $N = 32$ y $\tau = 1$, con sus respectivos ajustes lineales.

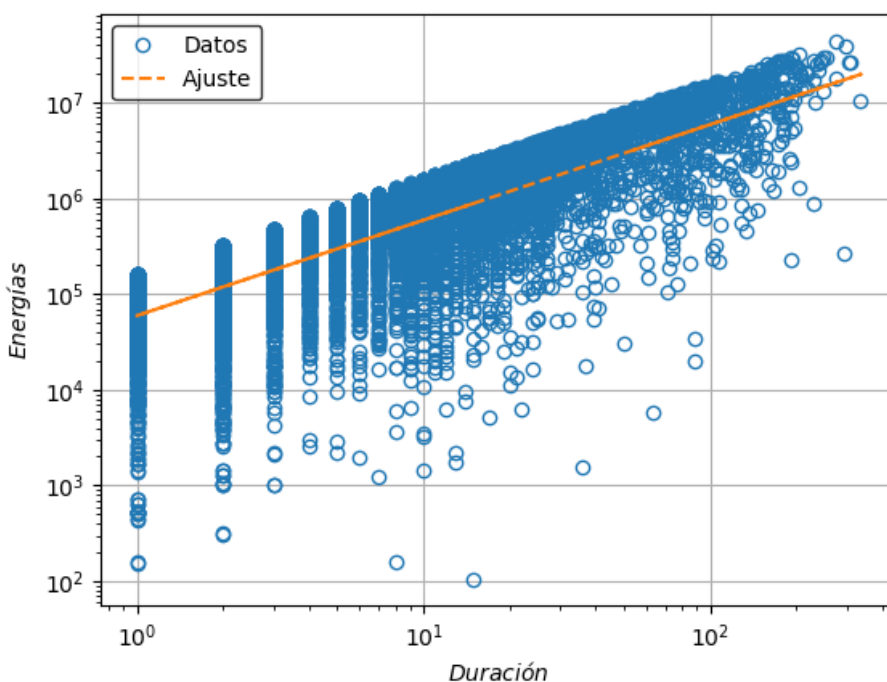


FIGURA 6.10: Energía en función de las duraciones de las avalanchas, graficadas en log-log. Para $N = 32$, con $\tau=1$, ajustados con una función lineal.

Hicimos estos gráficos para esos valores de N y τ de manera representativa para observar el comportamiento de ley de potencia en la relación entre estas variables. Además, se usó un test estadístico (apéndice 8.2) usando la librería *powerlaw* de *python*, que es el programa donde se realizaron los ajustes, para corroborar que efectivamente se tratase de una conducta de ley de potencias. Test que dió como resultado que este era efectivamente el comportamiento.

Luego, con los ajustes lineales de estos datos obtuvimos los valores de γ_{ab} para todos los valores de N y de τ que usamos a lo largo del trabajo, como se puede ver en el Cuadro 6.1. En este presentamos los valores de γ_{EP} que es la pendiente para el gráfico a escalas logarítmicas entre Energías (E) en función de los Picos (P), con el error de esta pendiente ($\Delta \gamma_{EP}$). Se presentan las mismas cantidades para La energía (E) en función de la duración (D) de las avalanchas.

Ahora bien, cuando realizamos un ajuste de datos medidos o simulados, como en este caso, con una curva teórica, la fidelidad de este ajuste está determinada por el R^2 . En nuestro caso, como se puede observar en el cuadro 6.1, estos valores varían dependiendo el tamaño de la red y aumentan su valor para N

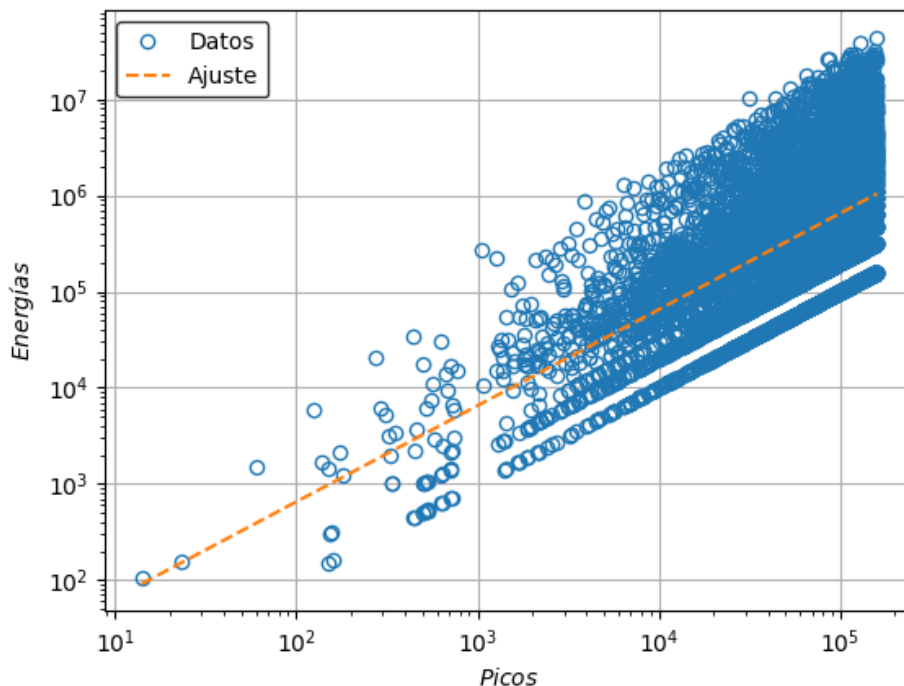


FIGURA 6.11: Energía de las avalanchas en función de los picos de las avalanchas, graficados en log-log. Para $N = 32$, con $\tau=1$, ajustados con una función lineal.

mayor, lo cual nos dice que el comportamiento de ley de potencia se observa más claramente para tamaños mayores de red. Para los distintos valores de τ para N fijo, los cambios en la precisión del ajuste no son significativos, lo que indica que el valor del umbral no modifica el comportamiento de ley de potencias que presenta esta relación. Otra característica importante para notar del Cuadro 6.1 es que los R^2 que involucran a los picos de las avalanchas (R^2_{EP}) son mayores a los que involucran a las duraciones (R^2_{ED}). Esto tiene que ver con que los valores obtenidos para las energías y los picos están distribuidos en un rango mayor de órdenes de magnitud (aproximadamente 4), en comparación a los de las energías con las duraciones de las avalanchas (aproximadamente 2 ordenes de magnitud). Por esta razón, cuando se hace el ajuste, al tener un rango mayor en el cual hacerlo, este es más fidedigno, por lo que R^2 da mejor.

N	τ	$\gamma_{EP} \pm \Delta \gamma_{EP}$	$\gamma_{ED} \pm \Delta \gamma_{ED}$	R_{EP}^2	R_{ED}^2
24	0,25	$1,02 \pm 0,05$	$1,23 \pm 0,08$	0,94	0,86
	1	$1,01 \pm 0,05$	$1,23 \pm 0,07$	0,94	0,86
	4	$1,01 \pm 0,04$	$1,22 \pm 0,07$	0,94	0,86
32	0,25	$1,03 \pm 0,04$	$1,22 \pm 0,07$	0,95	0,86
	1	$1,01 \pm 0,03$	$1,26 \pm 0,08$	0,95	0,88
	4	$1,05 \pm 0,03$	$1,24 \pm 0,06$	0,96	0,88
64	0,25	$1,07 \pm 0,03$	$1,27 \pm 0,08$	0,96	0,88
	1	$1,01 \pm 0,03$	$1,23 \pm 0,08$	0,97	0,89
	4	$1,06 \pm 0,03$	$1,28 \pm 0,07$	0,97	0,89

CUADRO 6.1: Tabla que indica los valores de γ_{EP} y γ_{ED} que se obtuvieron mediante el ajuste lineal con sus respectivos errores $\Delta \gamma_{EP}$ y $\Delta \gamma_{ED}$. También se presentan los valores de R^2 para cada caso mostrando cuán fidedigno es el ajuste realizado. Para $N = 24, 32$ y 64 , con $\tau = 0,25, 1$ y 4 .

Veamos ahora otro análisis estadístico de las tres cantidades que estamos analizando, en el cual calculamos la función de densidad de probabilidad (*Probability distribution function: PDF*) de la energía, picos y duración de las avalanchas, con el objetivo de verificar el comportamiento del tipo ley de potencia de estas cantidades [17], [54], [40].

Para calcular esta distribución se realizaron los histogramas de estas cantidades. La cantidad de bins que se usaron, se eligió de forma tal que al realizar el histograma, este tome 2 o más ordenes de magnitud para tener un espectro alto de valores y poder entender mejor su comportamiento.

Una vez realizadas las *PDF*, se buscó obtener el parámetro α de la ecuación de ley de potencias:

$$f(k) = f_0 k^{-\alpha} \quad (6.2)$$

La función de distribución para una cierta cantidad k , que para nosotros serán las energías, picos o duraciones, es representada por $f(k)$ en la ecuación 6.2

De esta manera, si graficamos nuevamente en log-log esta ecuación y hacemos una regresión lineal, vamos a obtener el valor de la pendiente α .

En las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 graficamos las distribuciones de probabilidad para una red representativa. Se realizó esto para las tres cantidades características de las avalanchas, como se puede observar en las figuras: Figura 6.12, Figura 6.13 y Figura 6.14 para las energías, picos y duraciones respectivamente, para una red de $N = 32$ con $\tau = 1$.

Como se puede observar en estas figuras, estas cantidades presentan un claro comportamiento de ley de potencia y este se extiende durante varios órdenes de magnitud. Para corroborar que se trate de este comportamiento, se usó el test del apéndice 8.2, y su resultado fué que el comportamiento era ciertamente el de ley de potencias.

Por la forma en la cual se calcularon las distribuciones, se obtuvieron puntos en un rango mayor de ordenes de magnitud para las energías (aproximadamente 4 ordenes de magnitud), después para los picos (aproximadamente 3) y luego para las duraciones (aproximadamente 2).

Se calcularon los valores de α especificados para cada cantidad, α_E , α_P y α_D para las energías, los picos y las duraciones respectivamente, con sus respectivos errores: $\Delta\alpha_E$, $\Delta\alpha_P$ y $\Delta\alpha_D$, como se puede ver en el cuadro 6.2.

En este cuadro podemos notar las siguientes singularidades. Si miramos los errores de las pendientes para alguna de las cantidades, estos en todos los casos disminuye o se mantiene igual a medida que aumentamos el tamaño de la red. Esto nos indica que para N mayor, el ajuste es mas preciso, por lo que aumentar el tamaño de la red acrecienta el comportamiento de ley de potencia que tienen estas cantidades.

Otra cuestión es que, como tenemos puntos en un rango mayor de órdenes de magnitud para la distribuciones de energías, como se hizo mención, esto se ve reflejado en este cuadro, en el hecho de que si comparamos la columna de errores de α_E ($\Delta\alpha_E$), estos errores son menores que los de la columna $\Delta\alpha_P$ y estos son menores a su vez que los $\Delta\alpha_D$. Lo que muestra que al haber podido tomar puntos en un rango mayor para realizar los histogramas, incidió directamente en la precisión del cálculo de la pendiente.

Se compararon los valores de las pendientes y errores del cuadro 6.2 con los datos obtenidos en las simulaciones realizadas en [40] y con los datos experimentales obtenidos en [52] ($\alpha_E \sim 1,2$ y $\alpha_D \sim 2$) y se verificó que los valores que obtuvimos son consistentes con estos.

Recordemos aquí que estamos trabajando con un modelo sencillo donde el campo de velocidad no se calcula sino que se reemplaza por una perturbación, sin embargo aún en su simplicidad, el modelo alcanza a describir algunas de las características salientes de la liberación de energía en la magnetocola.

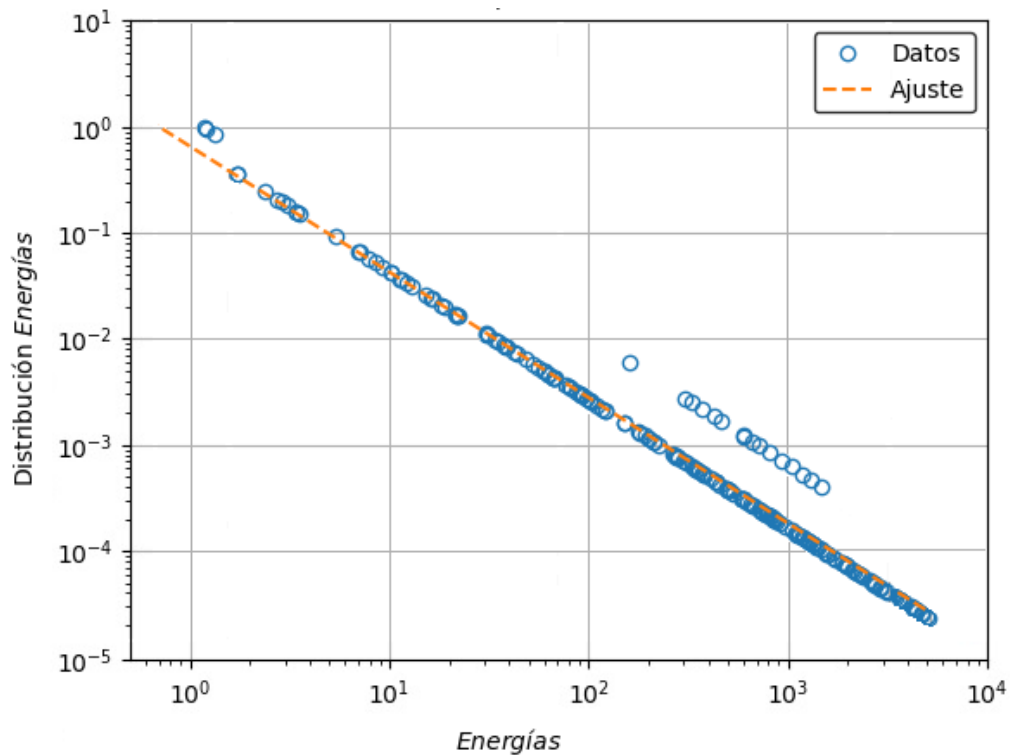


FIGURA 6.12: PDF energía (azul) para $N=32$ con $\tau=1$, graficado en log-log, con ajuste lineal(naranja)

Los valores de R^2 varían dependiendo el tamaño de la red. Para las 3 cantidades oscilan desde 0,86 a 0,88 para $N=24$, desde 0,89 a 0,92 para $N=32$ y desde 0,94 a 0,98 para $N=64$. siendo entonces la red más chica la que tiene un ajuste menos fiel y la más grande la que mejor ajusta.

N	τ	$\alpha_E \pm \Delta\alpha_E$	$\alpha_P \pm \Delta\alpha_P$	$\alpha_D \pm \Delta\alpha_D$
24	0,25	$1,12 \pm 0,04$	$0,92 \pm 0,06$	$1,28 \pm 0,18$
	1	$1,12 \pm 0,04$	$0,92 \pm 0,06$	$1,27 \pm 0,18$
	4	$1,11 \pm 0,04$	$0,91 \pm 0,06$	$1,27 \pm 0,18$
32	0,25	$1,09 \pm 0,04$	$0,92 \pm 0,06$	$1,27 \pm 0,18$
	1	$1,07 \pm 0,04$	$0,89 \pm 0,06$	$1,28 \pm 0,18$
	4	$1,07 \pm 0,04$	$0,89 \pm 0,04$	$1,26 \pm 0,18$
64	0,25	$1,07 \pm 0,04$	$0,89 \pm 0,04$	$1,26 \pm 0,12$
	1	$1,04 \pm 0,02$	$0,86 \pm 0,04$	$1,24 \pm 0,11$
	4	$1,04 \pm 0,02$	$0,86 \pm 0,04$	$1,24 \pm 0,11$

CUADRO 6.2: Tabla que indica los valores de α_E , α_P y α_D que se obtuvieron mediante el ajuste lineal con sus respectivos errores $\Delta\alpha_E$ y $\Delta\alpha_P$ y $\Delta\alpha_D$. Para $N=24, 32$ y 64 , con $\tau=0,25, 1$ y 4 .

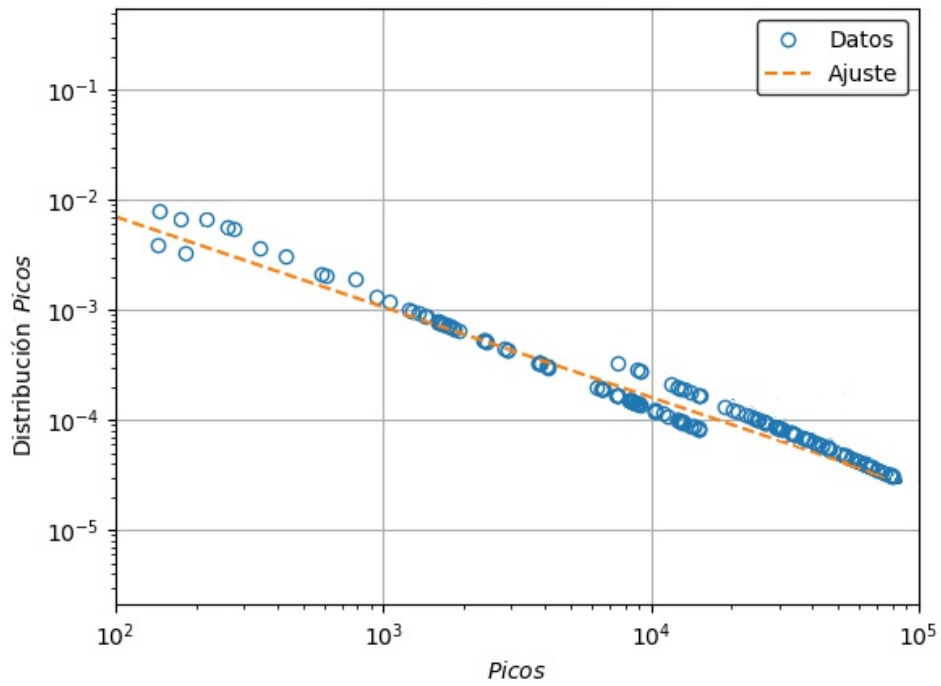


FIGURA 6.13: PDF picos (azul) para $N=32$ con $\tau=1$, graficado en log-log, con ajuste lineal(naranja)

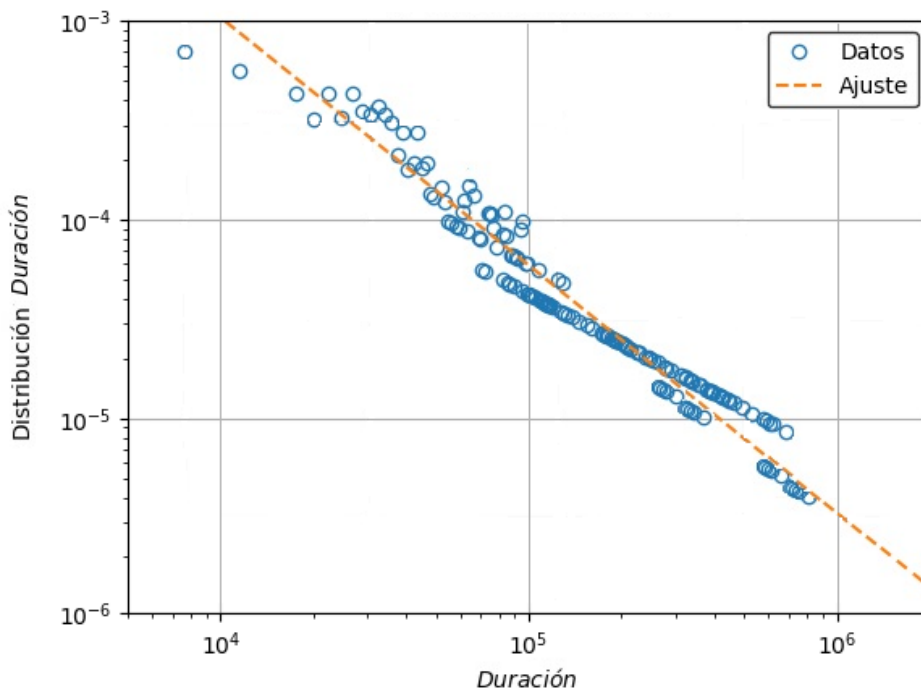


FIGURA 6.14: PDF duración (azul) para $N=32$ con $\tau=1$, graficado en log-log, con ajuste lineal(naranja)

Capítulo 7

Conclusiones

Para explicar el fenómeno de las subtormentas magnetosféricas, se realizaron a lo largo de los años diversos trabajos por varios autores diferentes. En [12], [14] se sugirió que es posible interpretar la existencia de subtormentas geomagnéticas basándose en la hipótesis de que el sistema viento solar-magnetosfera se encuentra en un estado de criticalidad auto-organizada. El modelo de [41] para las fulguraciones solares presentado en [17], fue el precursor de la aplicación de estos al plasma magnetosférico.

Desde fines del siglo pasado, varios autómatas fueron desarrollados en 1D y 2D para modelar las subtormentas magnetosféricas ([54], [40]).

Este trabajo de tesis, tiene como objetivo principal ampliar los modelos numéricos de subtormentas. Para esto se realizó un autómata celular 2-D, que consiste en una red de nodos interconectados, que modelan el fenómeno. Mediante este autómata, se realizaron diversas simulaciones para los tamaños de red $N = 24$, $N = 32$ y $N = 64$ y tres umbrales: $\tau = 0,25$, $0,5$ y 1 , con la cantidad necesaria de iteraciones temporales en cada caso, de forma tal que pueda apreciarse el comportamiento completo del sistema. Se realizaron simulaciones para las nueve combinaciones de estos N y τ y se consiguió verificar que el sistema para todos los casos alcanzó el estado *SOC*.

Para esto, se estudió no solo la ϵ_T y ϵ_L sino que se agregó la observación del campo magnético medio en la red, verificando que este aumenta hasta estacionarse en un valor y se mantiene fluctuando alrededor de este.

Se obtuvo el tiempo estimado para el cual el sistema entra en el estado estacionario, para todas las configuraciones de parámetros. Se verificó con esto que tanto el aumento de N como de τ , implican un aumento en el número de iteraciones necesarias para que el sistema alcance el estado *SOC*.

Mediante la observación de los gráficos de energía total en la red, se obtuvo la energía estacionaria alrededor de la cual fluctúa la energía en el estado estacionario. Esta energía presentó un comportamiento similar al del tiempo del estado *SOC*, en el sentido que esta energía para todas las configuraciones de parámetros aumentaba con el tamaño de la red y con el umbral.

Estos resultados indican que el modelo propuesto alcanzó un estado estacionario compatible con lo esperado para los fenómenos en los que se produce auto-organización.

Para avanzar en la caracterización de este sistema nos dedicamos a estudiar el comportamiento estadístico de las avalanchas obtenidas. Para esto, lo primero que se hizo fué verificar la correlación entre las magnitudes características de las avalanchas, obteniendo como resultado el comportamiento de ley de potencias esperado. Luego, se estudiaron las funciones de distribución para cada una de las magnitudes y se corroboró que tanto la energía, como los picos y las duraciones, presentan comportamiento de ley de potencia para cuatro, tres y dos órdenes de magnitud respectivamente.

Para chequear que efectivamente estas magnitudes presenten este comportamiento, nos apoyamos en un test estadístico, tanto para analizar la correlación entre las magnitudes de las avalanchas, como para analizar el comportamiento de sus distribuciones, dando como resultado que mostraban el comportamiento supuesto.

A lo largo del trabajo, se dieron bastos argumentos y muestras que indican que las subtormentas satisfacen las condiciones que los modelos SOC presentan. Esto da cuenta de que la reconexión magnética, que desencadena las inestabilidades que preceden a las subtormentas, son parte del sistema: magnetosfera terrestre - viento solar, el cual presenta las características de un sistema con criticalidad auto-organizada.

Entonces, si bien los modelos de autómata celular, como el que hemos construido, no resuelven las ecuaciones que describen la física de nuestro fenómeno, por lo que no nos proporcionan un modelo completo, nos permiten comprender muchas de las características físicas importantes que presenta el fenómeno de las subtormentas en la magnetocola.

Asimismo, aún con las dificultades que se presentan al comparar los resultados de las simulaciones con observaciones remotas, obtuvimos que, para una versión muy simplificada del problema de cómo se libera la energía en la magnetocola, nuestro modelo alcanza exponentes similares a los de *Uritsky*. Es importante destacar aquí que las observaciones conllevan siempre la dificultad de establecer que es una avalancha (*burst*), en términos observacionales y, por tal motivo, las comparaciones deben ser realizadas con cautela.

Capítulo 8

Apéndices

8.1. Apéndice 1

Se presenta a continuación el pseudo-código con el cual se obtuvo: B , ∇B , ϵ_L y ϵ_T :

**Se definen los parámetros y los valores iniciales de las variables*

$N := 24$	<i>tamaño de la red cuadrada</i>
$T := 100000$	<i>cantidad de iteraciones</i>
$\tau := 1$	<i>valor del threshold o umbral</i>
$\eta := 0.001$	<i>coeficiente de difusividad</i>
$\Delta X := 1$	<i>paso espacial</i>
$\kappa = 0,001$	<i>constante usada en el campo inicial</i>
$B := \kappa \text{list}(0, \dots, N-1)/N$	<i>valor inicial del campo</i>
$\nabla B := 0$	<i>gradiente inicial del campo</i>
$BB := 0$	<i>variable inicial útil</i>
$\epsilon_L := 0$	<i>valor inicial de energía liberada total</i>
$\epsilon_T := 0$	<i>valor inicial de vector de energía total de la red</i>

**Se calcula el gradiente de B*

for $t := 0, T - 1$ do	<i>loop de iteración temporal</i>
for $k := 1, N - 2$ do	<i>loop espacial en las dos direcciones de la red</i>
$\nabla B_k = (1/2\Delta x) \sqrt{(B_{k+1} - B_{k-1})^2}$	
for $k := 1, N - 2$ do	
$\nabla B_0 = (1/2\Delta x) \sqrt{(-3B_0 + 4B_1 - B_2)^2 + (B_{k+1} - B_{k-1})^2}$	<i>2 bordes</i>
$\nabla B_{N-1} = (1/2\Delta x) \sqrt{(3B_{N-1} - 4B_{N-2} + B_{N-3})^2 + (B_{k+1} - B_{k-1})^2}$	<i>2 bordes</i>
$\nabla B_0 = (1/2\Delta x) \sqrt{(-3B_0 + 4B_1 - B_2)^2 + (-3B_0 + 4B_1 - B_2)^2}$	<i>2 esquinas</i>
$\nabla B_{N-1} = (1/2\Delta x) \sqrt{(+3B_{N-1} - 4B_{N-2} + B_{N-3})^2 + (3B_{N-1} - 4B_{N-2} + B_{N-3})^2}$	<i>2 esquinas</i>

**Se aplica el criterio de estabilidad*

if $\nabla B < \tau$	<i>nodos estables</i>
$\delta B := \text{random}(N)$	<i>perturbación random del campo</i>
for $K := 1, N - 2$ do	<i>loop espacial en las dos direcciones de la red</i>
$B_{t+1} = B_t + \delta B_k + \eta (B_{k+1} - 2B_k + B_{k-1})$	<i>campo perturbado al tiempo siguiente</i>
$B_0 = B_0 - \delta B_0 + \eta (2B_0 - 5B_1 + 4B_2 - B_3 + B_{k+1} B_k + B_{k-1})$	<i>valor de B para los bordes de la red</i>
$B_{N-1} = B_0 - \delta B_{N-1} + \eta (2B_{N-1} - 5B_{N-2} + 4B_{N-3} - B_{N-4})$	<i>valor de B para los bordes de la red</i>
$\epsilon_{Tt} = \sum_k B_{kt}^2$	<i>vector de energía total</i>
else	<i>nodos inestables</i>
$B_{t+1} = B_t$	<i>campo al tiempo siguiente</i>
$el := 0$	<i>energía inicial total</i>
$M := \text{length (where } \nabla B > \tau)$	<i>largo de la lista de los nodos inestables</i>
for $k := 1, M$ do	<i>loop espacial en la lista de nodos inestables</i>
$BB_k = (B_{k+1} + B_k + B_{k-1}) / 5$	<i>campo final de los nodos involucrados</i>
$e_{ik} := (B_{k+1}^2 + B_k^2 + B_{k-1}^2) / 2$	<i>energía inicial total</i>
$e_{Lk} := (e_{ik} - 5 BB_k^2 / 2)$	<i>energía liberada</i>
if $k := 0$ or $k := N-1$	<i>se definen los bordes de la red por separado</i>
$e_{Lk} = (B_{k+1}^2 + B_k^2 + B_{k-1}^2 - 3 BB_k^2) / 2$	<i>energía liberada de los bordes</i>
$B_{k+1} = BB_k$	<i>campo del nodo vecino al tiempo siguiente</i>
$B_k = BB_k$	<i>campo del nodo vecino al tiempo siguiente</i>
$B_{k-1} = BB_k$	<i>campo del nodo vecino al tiempo siguiente</i>

**se obtienen los valores de energía liberada en toda la red y de la energía total*

$\epsilon_{Ltot} := \sum_k \epsilon_{Lk}$	<i>suma de la energía liberada por toda la red en cada iteración</i>
$\epsilon_{Tt} = \sum_k B_{kt}^2$	<i>vector de energía total de la red</i>

8.2. Apéndice 2

El test de *python* que corrobora si una distribución tiene un comportamiento de ley de potencias que se usó en este trabajo, es el que se presenta en [1]. En este trabajo se explica como funciona el test de comparación, el cual se explicará brevemente a continuación. Se calculan los valores de R y p mediante la siguiente línea de código de *python*:

```
R,p = fit.distribution _compare('power _law', 'exponential', normalized _ratio=True)
```

El programa nos devuelve R y p, donde R es la relación logarítmica de verosimilitud entre las dos distribuciones candidatas. Este número será positivo si los datos son más probables en la primera distribución (Powerlaw o Ley de potencias) y negativo si los datos son más probables que sigan la segunda

distribución (exponential o exponencial). p da el error de R y se calcula mediante la opción: `normalized_ratio=True` o razón normalizada, la cual normaliza a R por su desviación estándar ($\frac{R}{\sigma\sqrt{n}}$).

Bibliografía

- [1] Jeff Alstott, Ed Bullmore y Dietmar Plenz. "powerlaw: a Python package for analysis of heavy-tailed distributions". En: *PloS one* 9.1 (2014), e85777.
- [2] V Angelopoulos y col. "First results from the THEMIS mission". En: *Space Science Reviews* 141.1 (2008), págs. 453-476.
- [3] Vassilis Angelopoulos y col. "Tail reconnection triggering substorm onset". En: *Science* 321.5891 (2008), págs. 931-935.
- [4] Markus Aschwanden. *Self-organized criticality in astrophysics: The statistics of nonlinear processes in the universe*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [5] W Ross Ashby. "Principles of the self-organizing system". En: *Facets of systems science*. Springer, 1991, págs. 521-536.
- [6] Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld. "Self-organized criticality". En: *Physical review A* 38.1 (1988), pág. 364.
- [7] Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld. "Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise". En: *Physical review letters* 59.4 (1987).
- [8] Daniel Baker y col. *Solar Dynamics and its Effects on the Heliosphere and Earth*. Vol. 22. Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] Daniel N Baker y col. "Neutral line model of substorms: Past results and present view". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 101.A6 (1996), págs. 12975-13010.
- [10] Joseph E Borovsky y col. "The Earth's plasma sheet as a laboratory for flow turbulence in high- β MHD". En: *Journal of Plasma Physics* 57.1 (1997), págs. 1-34.
- [11] TJ Boyd, TJM Boyd y JJ Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] Tom Chang. "Low-dimensional behavior and symmetry breaking of stochastic systems near criticality-can these effects be observed in space and in the laboratory?" En: *IEEE Transactions on Plasma Science* 20.6 (1992).
- [13] Tom Chang. "Self-organized criticality, multi-fractal spectra, sporadic localized reconnections and intermittent turbulence in the magnetotail". En: *Physics of Plasmas* 6.11 (1999).
- [14] Tom Chang. "Sporadic localized reconnections and multiscale intermittent turbulence in the magnetotail". En: *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series* 104 (1998).
- [15] Sandra Chapman y Nicholas Watkins. "Avalanching and self-organised criticality, a paradigm for geomagnetic activity?" En: *Space Science Reviews* 95.1 (2001), págs. 293-307.
- [16] SC Chapman y col. "A simple avalanche model as an analogue for magnetospheric activity". En: *Geophysical Research Letters* 25.13 (1998).
- [17] Paul Charbonneau y col. "Avalanche models for solar flares (Invited Review)". En: *Solar Physics* 203.2 (2001).

- [18] Arnab Rai Choudhuri y col. *The physics of fluids and plasmas: an introduction for astrophysicists*. Cambridge University Press, 1998.
- [19] FV Coroniti y CF Kennel. "Magnetospheric reconnection, substorms, and energetic particle acceleration". En: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 56. 1. American Institute of Physics. 1979, págs. 169-178.
- [20] So WH Cowley. "Plasma populations in a simple open model magnetosphere". En: *Space Science Reviews* 26.3 (1980), págs. 217-275.
- [21] JW Dungey. "The length of the magnetospheric tail". En: *Journal of Geophysical Research* 70.7 (1965).
- [22] DH Fairfield y col. "Geotail observations of substorm onset in the inner magnetotail". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 103.A1 (1998).
- [23] Stéphan Fauve. "Chaotic dynamos generated by fully turbulent flows". En: *Chaos*. Springer, 2013, págs. 55-95.
- [24] Harold P Furth, John Killeen y Marshall N Rosenbluth. "Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch". En: *The physics of Fluids* 6.4 (1963), págs. 459-484.
- [25] Johannes Geiss, G Gloeckler y R Von Steiger. "Origin of the solar wind from composition data". En: *Space Science Reviews* 72.1 (1995), págs. 49-60.
- [26] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. 2005.
- [27] Janina Hesse y Thilo Gross. "Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems". En: *Frontiers in systems neuroscience* 8 (2014), pág. 166.
- [28] W Horton e I Doxas. "A low-dimensional dynamical model for the solar wind driven geotail-ionosphere system". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 103.A3 (1998).
- [29] M Hoshino y col. "Turbulent magnetic field in the distant magnetotail: Bottom-up process of plasmoid formation?" En: *Geophysical research letters* 21.25 (1994).
- [30] WJ Hughes. "The magnetopause, magnetotail, and magnetic reconnection". En: *Introduction to space physics* (1995), págs. 227-287.
- [31] Akimasa Ieda y col. "Longitudinal association between magnetotail reconnection and auroral breakup based on Geotail and Polar observations". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 113.A8 (2008).
- [32] Arieh Iserles. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. 44. Cambridge university press, 2009.
- [33] P Jelinek y M Bárta. "MHD Simulations in Plasma Physics". En: ().
- [34] May-Britt Kallenrode. *Space physics: an introduction to plasmas and particles in the heliosphere and magnetospheres*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [35] NME Kalmoni y col. "A diagnosis of the plasma waves responsible for the explosive energy release of substorm onset". En: *Nature Communications* 9.1 (2018), págs. 1-11.
- [36] AJ Klimas y col. "A nonlinear dynamical analogue model of geomagnetic activity". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 97.A8 (1992).
- [37] Devendra Lal. "Basics of the solar wind, by Nicole Meyer-Vernet". En: *Meteoritics & Planetary Science Archives* 43.11 (2008).
- [38] W William Liu. "Rotating magnetic anomalies as a possible accelerator of charged particles". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 97.A6 (1992), págs. 8145-8155.

- [39] Weining William Liu. "Plasma sheet dynamics induced by plasma mantle". Tesis doct. Rice University, 1988.
- [40] William W Liu y col. "Formation and disruption of current filaments in a flow-driven turbulent magnetosphere". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 116.A3 (2011).
- [41] Edward T Lu y Russell J Hamilton. "Avalanches and the distribution of solar flares". En: *The astrophysical journal* 380 (1991).
- [42] E Marsch, H-J Fahr y K Scherer. *The outer heliosphere: The next frontiers*. Elsevier, 2001.
- [43] T Nagai y col. "Structure and dynamics of magnetic reconnection for substorm onsets with Geotail observations". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 103.A3 (1998).
- [44] S Ohtani y col. "AMPTE/CCE-SCATHA simultaneous observations of substorm-associated magnetic fluctuations". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 103.A3 (1998).
- [45] Maya Paczuski, Sergei Maslov y Per Bak. "Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models". En: *Physical Review E* 53.1 (1996), pág. 414.
- [46] Alexander Piel. *Plasma physics: an introduction to laboratory, space, and fusion plasmas*. Springer, 2017.
- [47] E Priest y T Forbes. "Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications, Cambridge Univ". En: *Press, Cambridge* (2000).
- [48] ER Priest y TG Forbes. "The magnetic nature of solar flares". En: *The Astronomy and Astrophysics Review* 10.4 (2002), págs. 313-377.
- [49] Eric Priest. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press, 2014.
- [50] Melvin Schwartz. *Principles of electrodynamics*. Courier Corporation, 2012.
- [51] Vadim M Uritsky, Alexander J Klimas y Dimitris Vassiliadis. "Evaluation of spreading critical exponents from the spatiotemporal evolution of emission regions in the nighttime aurora". En: *Geophysical research letters* 30.15 (2003).
- [52] Vadim M Uritsky y col. "Scale-free statistics of spatiotemporal auroral emissions as depicted by POLAR UVI images: Dynamic magnetosphere is an avalanching system". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 107.A12 (2002), SMP-7.
- [53] JA Valdivia y col. "Self-organization in a current sheet model". En: *Space science reviews* 107.1 (2003).
- [54] JA Valdivia y col. "The magnetosphere as a complex system". En: *Advances in Space Research* 35.5 (2005).
- [55] Chih-Ping Wang, Larry R Lyons y Vassilis Angelopoulos. "Properties of low-latitude mantle plasma in the Earth's magnetotail: ARTEMIS observations and global MHD predictions". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 119.9 (2014), págs. 7264-7280.
- [56] Michael Wiltberger y col. "Modeling seasonal variations of auroral particle precipitation in a global-scale magnetosphere-ionosphere simulation". En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 114.A1 (2009).

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons
Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina
Buenos Aires, 2022