



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

---

# Entrelazamiento cuántico y la paradoja de la información

---

**Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas**

María Agustina Pereyra Grau

DIRECTOR: Dr. Guillem Pérez Nadal

CO-DIRECTOR: Dr. David Blanco

Buenos Aires, Junio 2022

## Resumen

*Uno de los problemas centrales de la física teórica de altas energías es la aparente falta de unitariedad en el proceso de evaporación de un agujero negro, conocida como la paradoja de la información. En los últimos años se han producido avances muy significativos hacia la resolución de esta paradoja, basados en resultados recientes en el estudio del entrelazamiento en teoría de campos y en AdS/CFT. En esta tesis estudiamos estos desarrollos, que incluyen conceptos de termodinámica de agujeros negros, la derivación de la fórmula de Ryu-Takayanagi y de la fórmula de islas. Finalmente calculamos la curva de Page que resuelve la paradoja de la información en un modelo sencillo en dos dimensiones.*

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Termodinámica de agujeros negros</b>	<b>6</b>
1.1. Revisión clásica de agujeros negros . . . . .	6
1.1.1. Geometría de Schwarzschild . . . . .	6
1.1.2. Estructura causal . . . . .	9
1.2. Radiación de Hawking . . . . .	15
1.3. Termodinámica de agujeros negros . . . . .	18
1.4. Proceso de evaporación . . . . .	21
1.5. Dogma central . . . . .	24
1.6. Paradoja de la información y curva de Page . . . . .	26
1.7. Reformulación más sencilla de la paradoja . . . . .	29
<b>2. Entrelazamiento en teoría cuántica de campos</b>	<b>33</b>
2.1. Entropía de entrelazamiento . . . . .	33
2.2. Entrelazamiento en QFT . . . . .	36
2.3. Algunos resultados de QFT . . . . .	37
2.4. Truco de réplicas . . . . .	39
2.5. Ejemplo: término de masa . . . . .	44
<b>3. Fórmula de islas</b>	<b>48</b>
3.1. Cálculo de Gibbons-Hawking de la entropía de un agujero negro . . . . .	48
3.2. Fórmula de Ryu-Takayanagi . . . . .	53
3.3. Correcciones cuánticas a la fórmula de Ryu-Takayanagi . . . . .	59
3.4. Fórmula de islas . . . . .	62

---

<b>4. Ejemplo: modelo JT+CFT<sub>2</sub></b>	<b>67</b>
4.1. Gravedad de Jackiw–Teitelboim . . . . .	67
4.1.1. Ecuaciones de movimiento y soluciones . . . . .	69
4.1.2. Temperatura y entropía termodinámica . . . . .	72
4.1.3. Incorporación de las “alas” . . . . .	73
4.2. Obtención de la curva de Page . . . . .	75
4.2.1. Preliminares . . . . .	75
4.2.2. Cálculo semi-clásico . . . . .	77
4.2.3. Cálculo usando la fórmula de islas . . . . .	79
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>

# Introducción

Los agujeros negros son objetos muy interesantes desde el punto de vista de la física teórica ya que presentan un escenario en el que se combinan fenómenos relativos a dos grandes pilares de la física: la relatividad general y la mecánica cuántica. En los años '70, los estudios de Hawking, Bekenstein y otros [1–6] revelaron que los agujeros negros no eran tan oscuros como se había pensado originalmente. El descubrimiento de la radiación de Hawking consolidó la idea de que, visto desde afuera, un agujero negro se comporta de manera idéntica a un sistema termodinámico usual. Como tal, posee una temperatura finita no nula y una entropía. La naturaleza termodinámica de los agujeros negros sugiere que éstos deberían poder ser descritos por un observador exterior como un sistema cuántico ordinario con muchos grados de libertad. Esta idea, que ha sido llamada *el dogma central* [7], ha inspirado numerosos desarrollos en el camino hacia una teoría de la gravedad cuántica, pero encuentra un obstáculo importante en el hecho de que la evolución temporal de este sistema cuántico parece no ser unitaria: partiendo de un estado puro, el sistema evoluciona hacia un estado mixto [8]. Este fenómeno viola uno de los principios fundamentales de la mecánica cuántica, motivo por el cual ha sido llamado *la paradoja de la información*. Desde hace décadas, esta aparente contradicción es uno de los problemas centrales de la física teórica de altas energías.

Una manera de cuantificar el grado de mezcla de un estado cuántico es a partir de la *entropía de von Neumann*, la cual es siempre menor o igual a la entropía termodinámica del sistema. En estos términos, la paradoja de la información se manifiesta en el hecho de que la entropía de von Neumann de la radiación de Hawking (la cual debería ser igual a la entropía de von Neumann del agujero negro si el estado global es puro) crece ilimitadamente en el tiempo y en algún instante (llamado *tiempo de Page*) supera la entropía termodinámica del agujero negro. Page [9] propuso que, para resolver la paradoja, la entropía de la radiación debía cambiar drásticamente de comportamiento luego del

tiempo de Page. Sin embargo, durante muchos años, la forma de derivar esta curva a partir de primeros principios permaneció incógnita.

No fue hasta el año 2019, con los trabajos de Penington [10], Almheiri, Engelhardt, Marolf y Maxfield [11] y Almheiri, Mahajan, Maldacena y Zhao [12], que se encontró la manera de calcular la curva de Page de la radiación en algunos modelos específicos. La derivación hace un uso crucial de los desarrollos que se han dado en los últimos años en el estudio del entrelazamiento en teoría cuántica de campos y holografía, y en particular de la fórmula de Ryu-Takayanagi [13, 14] y sus correcciones cuánticas [15, 16]. A pesar de estar inspirada en resultados obtenidos en el contexto de AdS/CFT, esta derivación de la curva de Page tiene un dominio de aplicabilidad mucho más amplio que el de AdS/CFT, ya que se puede obtener a partir del cálculo directo de la entropía [17, 18].

El objetivo de esta tesis es estudiar estos importantes avances en la búsqueda de la resolución de la paradoja de la información, avances que han revolucionado la física teórica de altas energías en los últimos años. El trabajo se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 1 daremos una breve introducción de la descripción clásica y termodinámica de los agujeros negros y explicaremos en detalle cómo estas nociones, junto con el dogma central, dan lugar a la paradoja de la información. En el capítulo 2 repasaremos algunos conceptos fundamentales de entrelazamiento en teoría de campos; entre ellos, veremos el llamado *truco de réplicas*, el permite calcular entropías en QFT y es crucial en la derivación de la resolución de la paradoja.

En el capítulo 3 nos adentraremos en el cálculo de Gibbons-Hawking de la entropía de un agujero negro, introduciendo la integral de caminos gravitatoria. Luego, veremos la derivación [19] de la fórmula de Ryu-Takayanagi y sus correcciones cuánticas y estudiaremos la prescripción, conocida como la *fórmula de islas*, para el cálculo de la entropía de la radiación que permite resolver la paradoja. Finalmente, en el capítulo 4 daremos un ejemplo explícito [18] de aplicación de la fórmula y calcularemos la curva de Page.

# Capítulo 1

## Termodinámica de agujeros negros

El propósito de este capítulo es introducir las nociones básicas sobre termodinámica de agujeros negros que, junto con el dogma central, naturalmente dan origen a la paradoja de la información.

### 1.1. Revisión clásica de agujeros negros

#### 1.1.1. Geometría de Schwarzschild

Comenzaremos esta sección con una breve revisión de la descripción de un agujero negro, utilizando nociones de la relatividad general. Para simplificar, vamos a considerar que la constante cosmológica es nula, lo cual corresponde a un espacio-tiempo asintóticamente plano. La métrica del espacio-tiempo debida a un objeto de masa  $M$  esféricamente simétrico y sin carga se puede escribir (en unidades  $c = 1$ ) como

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.1)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{y} \quad r_s = 2GM, \quad (1.2)$$

con  $G$ , la constante de Newton. Ésta es la conocida *métrica de Schwarzschild*. Si el objeto tiene un tamaño finito, esta métrica es válida únicamente fuera del cuerpo en cuestión ya que ésta es una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein. Si, además, el tamaño del objeto es más pequeño que el *radio de Schwarzschild*  $r_s$ , la ecuación (1.1) describe la geometría de un agujero negro.

Podemos decir entonces que lo que distingue a un agujero negro es su *horizonte de eventos* localizado en  $r = r_s$ . Sobre esta hipersuperficie  $f(r_s)$  se anula, de modo que la componente temporal de la métrica es cero y la radial, diverge. Cuando  $r < r_s$ ,  $f(r)$  cambia de signo y adquiere un valor negativo. Esto implica que, al atravesar el horizonte de eventos hacia el interior del agujero negro,  $r$  se convierte en una coordenada temporal y  $t$ , en una coordenada espacial. El tiempo  $t$  es llamado *tiempo de Schwarzschild*.

A continuación, mencionaremos algunos de los aspectos más destacados de esta geometría. Por un lado, notemos que la métrica (1.1) es invariante ante inversiones temporales (se mantiene inalterada al reemplazar  $t \rightarrow -t$ ). Esta situación no describe exactamente a un agujero negro real. Los agujeros negros reales se forman a partir del colapso gravitacional, proceso que no tiene simetría de inversión temporal. Sin embargo, la métrica de Schwarzschild resulta una buena aproximación para describir el período de vida del agujero negro real una vez que se ha estabilizado luego del colapso. Podemos considerarla una idealización matemática de la situación real.

Por otro lado, retomemos la observación hecha más arriba de que la componente radial de la métrica (1.1) diverge en  $r = r_s$ . Debemos destacar que, a pesar de esto, la geometría no es singular en el horizonte. Esto se puede verificar calculando invariantes de curvatura, como el *escalar de Kretshmann* ( $K = R_{abcd}R^{abcd}$ ), y comprobando que éstos están bien definidos. Por tanto, la aparente singularidad en el horizonte  $r = r_s$  es tan sólo un defecto del sistema de coordenadas utilizado.

El horizonte de eventos es una hipersuperficie nula, es decir que contiene a las geodésicas de los rayos de luz. Se puede ver que los observadores que se encuentran en  $r \rightarrow \infty$  perciben un corrimiento al rojo infinito sobre esta superficie. Consideremos un observador  $O_h$  situado en  $r = r_h \gtrsim r_s$ , muy cerca del horizonte, en la región exterior, y otro observador  $O_\infty$  infinitamente alejado del horizonte. En  $r \rightarrow \infty$ , la función  $f(r)$  tiende a 1 y entonces la ecuación (1.1) se convierte en la métrica estándar de Minskowski escrita en coordenadas esféricas. Resulta entonces inmediato advertir que el llamado tiempo de Schwarzschild  $t$  **es el tiempo propio de los observadores en el infinito**. Realizando el razonamiento análogo, obtenemos que el tiempo propio  $\tau_h$  del observador  $O_h$  está relacionado con el tiempo propio de  $O_\infty$  mediante

$$d\tau_h = \sqrt{f(r_h)} dt = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_h}} dt. \quad (1.3)$$

Debido a este factor  $\sqrt{f(r_h)}$ , a medida que  $r_h$  se aproxima al horizonte, la relación  $d\tau_h/dt$



tiende a cero. De modo que cualquier intervalo de tiempo propio finito de los observadores en  $r = r_s$  resulta infinitamente largo visto desde la perspectiva de  $O_\infty$ . Es decir que el tiempo en  $r \simeq r_s$  se vuelve infinitamente lento comparado a la escala temporal de los observadores en  $r \rightarrow \infty$ .

La relación (1.3) puede invertirse de manera de poder visualizar el corrimiento al rojo en  $r = r_s$  para los observadores en el infinito. Consideremos un proceso con energía local  $E_h$  para el observador  $O_h$ . Como tiempo y energía son cantidades conjugadas, podemos emplear la relación (1.3) para obtener la energía observada por  $O_\infty$ :

$$E_\infty = \sqrt{f(r_h)} E_h. \quad (1.4)$$

Entonces,  $E_\infty \rightarrow 0$  para  $r_h \rightarrow r_s$ . Esto quiere decir que cualquier proceso de energía propia local finita que ocurre en  $r \simeq r_s$  corresponde a un proceso de energía muy baja para los observadores en el infinito.

Otra característica a mencionar es que una partícula que cae libremente dentro del agujero negro tarda un tiempo propio finito en atravesar el horizonte de eventos, mientras que al medirlo en el tiempo de Schwarzschild, el intervalo resulta infinito. Es decir que desde la perspectiva de los observadores asintóticos pareciera que la partícula se congela en el horizonte y jamás cae al interior. Una vez dentro del horizonte ( $r < r_s$ ) no es posible enviar señales al exterior ni escapar. Es por este motivo que la hipersuperficie  $r = r_s$  es denominada *horizonte de eventos*.

Por último, introduciremos dos cantidades geométricas que serán relevantes en la discusión: el *área del horizonte de eventos*  $A_h$  y la *gravedad superficial*  $\kappa$ .

El área de la sección espacial del horizonte se puede calcular a partir de la ecuación (1.1), tomando  $r = r_s$  e integrando en las coordenadas angulares. Como resultado, se obtiene el área de la 2-esfera de radio  $r_s$ :

$$A_h = 4\pi r_s^2 = 16\pi G^2 M^2. \quad (1.5)$$

Esta magnitud juega un papel fundamental en el desarrollo de la termodinámica de agujeros negros.

La otra cantidad es la gravedad superficial  $\kappa$  definida como la aceleración de un observador estacionario en el horizonte medida por los observadores en  $r \rightarrow \infty$ . Supongamos que un observador está cayendo libremente hacia el interior del agujero negro. Para lograr que dicho observador deje de caer de modo que se mantenga en una posición fija fuera del

agujero, sería necesario que un motor lo acelere. Esa aceleración necesaria para mantenerse en una posición fija se puede calcular y aumenta a medida que  $r \rightarrow r_s$ , volviéndose infinita sobre el horizonte de eventos. Debido al factor de corrimiento al rojo, el cual es infinito en  $r = r_s$  para los observadores  $O_\infty$ , la aceleración necesaria para mantener fijo a un observador en el horizonte resulta finita para observadores en  $r \rightarrow \infty$ . Esta magnitud finita es una característica geométrica básica de los horizontes y es lo que se conoce como gravedad superficial:

$$\kappa = \frac{1}{2}f'(r_s) = \frac{1}{2r_s} = \frac{1}{4GM}. \quad (1.6)$$

Notemos que a pesar de que la función  $f(r)$  se anula en el horizonte, su derivada es no nula en  $r = r_s$ .

### 1.1.2. Estructura causal

Para comprender la estructura del espacio-tiempo de los agujeros negros, vamos a enfocarnos en la región cercana al horizonte de eventos, puesto que es una parte crucial de la geometría. Consideremos entonces  $r \gtrsim r_s$  y hagamos una expansión de Taylor de la función  $f(r)$ :

$$f(r) = f'(r_s)(r - r_s) + \mathcal{O}[(r - r_s)^2]. \quad (1.7)$$

Para reescribir la métrica (1.1) usando esta aproximación, es conveniente introducir el siguiente cambio de coordenadas:

$$d\rho = \frac{1}{\sqrt{f(r)}}dr \simeq \frac{1}{\sqrt{f'(r_s)(r - r_s)}}dr, \quad (1.8)$$

de manera que

$$\rho \simeq \frac{2}{\sqrt{f'(r_s)}}\sqrt{r - r_s} \quad (1.9)$$

es la distancia propia al horizonte. Elegimos la constante de integración tal que  $\rho = 0$  en  $r = r_s$ . Recordando que la gravedad superficial  $\kappa$  está dada por la ecuación (1.6), la función  $f$  queda escrita en términos de  $\rho$  como  $f(\rho) \simeq \kappa^2\rho^2$ . Entonces, definiendo a la coordenada temporal

$$\eta = \kappa t, \quad (1.10)$$

la métrica (1.1) cerca del horizonte resulta a primer orden no nulo

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + r_s^2 d\Omega_2^2. \quad (1.11)$$

El último término de esta expresión es la métrica de una 2-esfera de radio  $r_s$ , mientras que los primeros dos términos corresponden a un espacio-tiempo de Minkowski (1+1)-dimensional expresado en el sistema de coordenadas de Rindler. La transformación que relaciona las coordenadas cartesianas usuales de Minkowski  $X$  y  $T$  con las de Rindler  $\rho$  y  $\eta$  es

$$\begin{aligned} X &= \rho \cosh(\eta) \\ T &= \rho \sinh(\eta). \end{aligned} \tag{1.12}$$

De modo que la métrica plana (1+1)-dimensional se escribe como

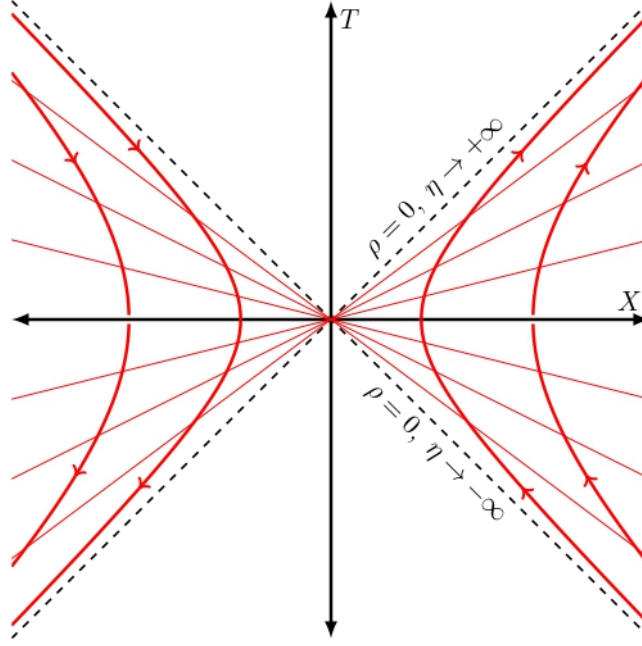
$$ds_{\mathcal{M}_2} = -dT^2 + dX^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2. \tag{1.13}$$

Es fácil ver que las coordenadas de Rindler no cubren la totalidad del espacio-tiempo de Minkowski. Por definición, se satisface  $X^2 - T^2 = \rho^2 \geq 0$  y, por estar tomando  $\rho \geq 0$ , las coordenadas describen sólo la porción del espacio-tiempo tal que  $X \geq |T| \geq 0$ . Esta región se denomina *Rindler wedge* y se encuentra graficada junto con su región complementaria en la figura 1.1.

Las rectas a  $45^\circ$  en el plano  $(X, T)$  corresponden a  $X = \pm T$ . Las curvas de  $\rho \equiv cte$  son hipérbolas  $X^2 - T^2 \equiv cte$  y  $\eta \equiv cte$  corresponde a las rectas  $T/X = \tanh(\eta) \equiv cte$ . Dado que consideramos  $\rho \geq 0$ , la métrica (1.13) sólo cubre la cuña derecha del espacio-tiempo de Minkowski. En el borde  $X = \pm T$  de la región,  $\rho$  se anula, por lo que, para que  $X$  y  $T$  sean finitos, debe ocurrir que  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Por otra parte, el punto  $X = T = 0$  corresponde a  $\rho = 0$  para cualquier valor finito de  $\eta$ .

Volviendo la atención al resultado (1.11), vemos entonces que cerca del horizonte de eventos del agujero negro la estructura del espacio-tiempo es  $\text{Rindler} \times S^2$ . Traducir el esquema de la figura 1.1 a las coordenadas de Schwarzschild resulta muy sencillo. El borde  $\rho = 0$  de la cuña corresponde precisamente al horizonte  $r = r_s$ , y como se trata del cono de luz, esto reafirma el hecho de que el horizonte es una hipersuperficie nula. La región exterior del agujero negro está mapeada a todo el *wedge* derecho de Rindler, en el cual cada punto debe pensarse como una 2-esfera de radio  $r_s$ . Dado que el tiempo  $t$  es proporcional a  $\eta$ , las rectas  $\eta \equiv cte$  corresponden a rectas  $t \equiv cte$  y  $\eta \rightarrow \pm\infty$  implica  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Los observadores que se encuentran en  $r \equiv cte$  ( $r \gtrsim r_s$ ) en la geometría de agujero negro corresponden a observadores con trayectorias hiperbólicas  $\rho \equiv cte$  en el *patch* de



**Figura 1.1:** *Cuñas de Rindler.* Son las regiones donde  $X^2 - T^2 \geq 0$ , de manera que  $|X| \geq |T|$ . La cuña derecha corresponde a  $\rho \geq 0$  ( $X$  positivo) y la izquierda a  $\rho \leq 0$  ( $X$  negativo). En rojo se dibujaron algunas curvas  $\rho \equiv \text{constante}$  (hipérbolas) y  $\eta \equiv \text{constante}$  (rectas). Las flechas sobre las curvas indican el sentido de evolución temporal en  $\eta$ .

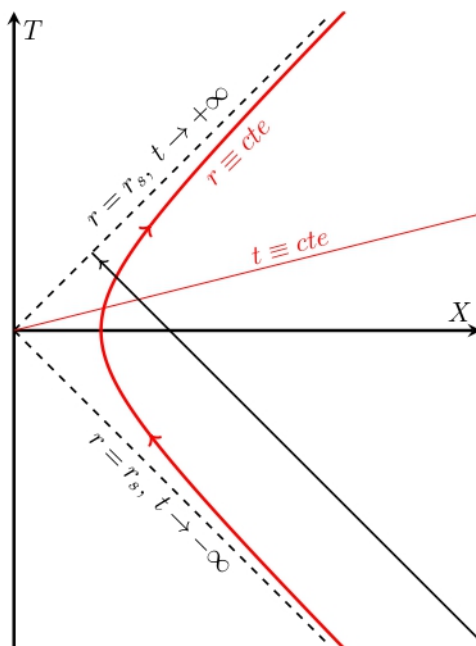
Rindler de Minkowski. La aceleración propia local de estos observadores es

$$a(r) = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{f'(r_s)}}{2} \frac{1}{\sqrt{r - r_s}}. \quad (1.14)$$

De aquí se puede ver que la aceleración necesaria para mantenerse a  $r$  fijo respecto del horizonte se vuelve infinita cuando  $r \rightarrow r_s$ . Dicha aceleración vista desde el infinito es  $a_\infty = \lim_{r \rightarrow r_s} a(r) \sqrt{f(r)} = \kappa$ , como era de esperarse según la definición de gravedad superficial (1.6).

Por otra parte, un observador en caída libre cerca del horizonte de eventos corresponde a un observador inercial en Minkowski. Dicho de otra manera, si quisiéramos graficar en el plano  $(X, T)$  a las geodésicas de observadores que se aproximan al horizonte, serían líneas rectas de tipo temporal (o nulas) que tocan en algún punto al horizonte, como la que se muestra en la figura 1.2. Esto es consecuencia del principio de equivalencia, el cual establece que los observadores en caída libre no perciben el efecto de la gravedad. Así, desde el punto de vista del observador inercial, el horizonte no es un lugar especial.

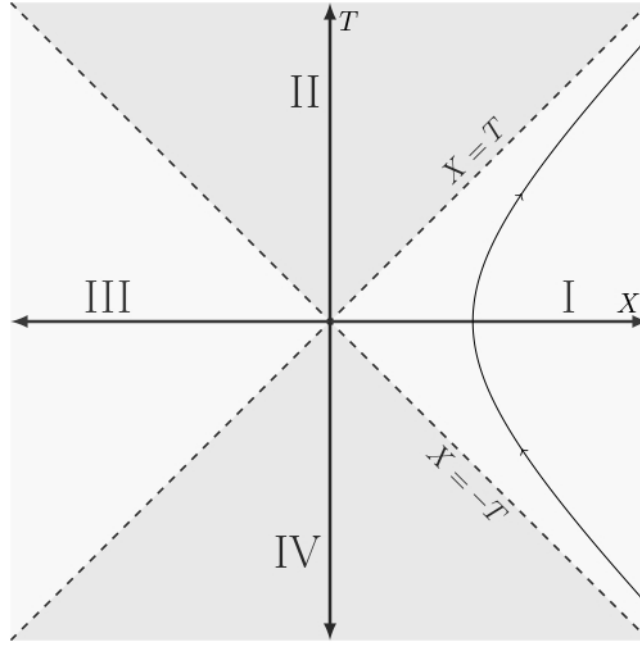
Las coordenadas de Rindler  $(\rho, \eta)$  son singulares en  $\rho = 0$  dado que para ese valor se rompe la relación 1 a 1 entre las coordenadas  $(\rho, \eta)$  y  $(X, T)$ . De la misma manera, las



**Figura 1.2:** Trayectoria de un rayo de luz aproximándose al horizonte de eventos.

coordenadas de Schwarzschild se vuelven singulares en el horizonte. No obstante, sabemos que el espacio-tiempo de Minkowski no posee un único cuadrante, sino que está conformado por cuatro regiones identificadas en la figura 1.3. Por lo tanto, el *wedge* de Rindler puede ser extendido usando coordenadas globales  $(X, T)$ . Con esto podemos concluir que, dado que el *patch* de Rindler describe la geometría de Schwarzschild cerca del horizonte, debe existir un sistema de coordenadas que permita extender la región exterior del agujero negro más allá del horizonte de eventos. En efecto, dichas coordenadas son las *coordenadas de Kruskal-Szekeres* y, de manera similar a las coordenadas globales de Minkowski, permiten extender la geometría de Schwarzschild a cuatro regiones. En la figura 1.4 se muestran esas cuatro regiones para  $r$  cercano al horizonte. Una diferencia entre este diagrama y el de Minkowski es que la métrica de Schwarzschild (1.1) es singular en  $r = 0$ , lo cual ocurre dentro del horizonte, en la región II. Todo observador que se encuentra en esta región interior alcanza eventualmente la singularidad, por lo que se denomina *singularidad futura*. Vemos que, al estar considerando la versión extendida de Schwarzschild, existe también una *singularidad pasada* en la región IV, en donde ocurre lo opuesto: todos los observadores que se encuentran en IV “salen” eventualmente al exterior.

Destacaremos ahora algunos aspectos importantes de la geometría extendida del agujero negro. Primero que, dado que el tiempo evoluciona hacia arriba en la figura 1.4, no existe punto en la región interior II cuyo cono de luz atraviese el horizonte (llamado *horizonte*



**Figura 1.3:** Regiones de Rindler del espacio-tiempo de Minkowski.

*futuro*). Por lo tanto, **una vez en el interior del agujero negro, no hay información u observador que pueda alcanzar la región exterior I.**

Segundo, cabe señalar que la región IV puede ser obtenida a partir de la región II mediante inversión temporal. En realidad, las regiones III y IV no existen para agujeros negros reales formados a partir del colapso gravitacional. Su aparición al realizar la extensión analítica es un artificio debido a estar trabajando con una métrica invariante ante  $t \rightarrow -t$ . Dibujando los conos de luz de los observadores en la región I, es posible convencerse de que éstos no pueden influir sobre los eventos de la región IV, de modo que el límite entre estas regiones se denomina *horizonte pasado*.

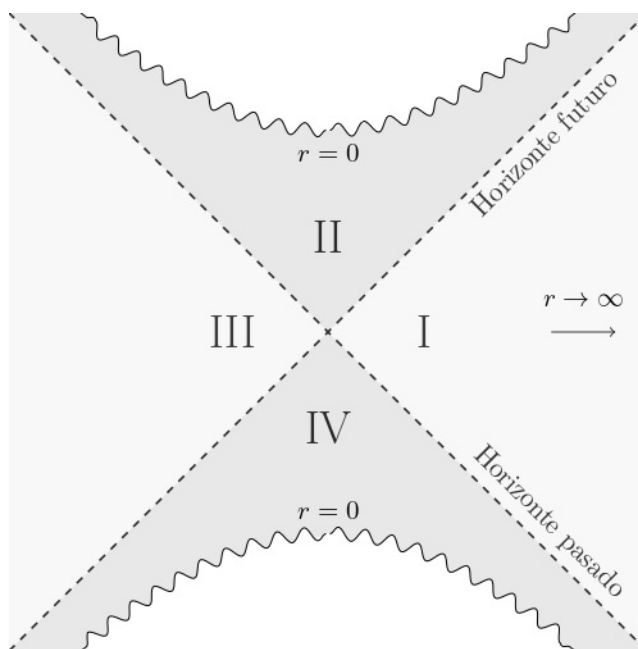
Por último, la singularidad  $r = 0$  que yace en el interior del agujero negro es una singularidad de tipo espacial ya que los roles de las coordenadas radial y temporal se invierten al atravesar el horizonte.

Finalizaremos esta sección con el diagrama de Penrose del espacio-tiempo extendido de Schwarzschild. Para construirlo, pasamos a coordenadas nulas de Kruskal  $(t, r) \rightarrow (u, v)$ , definidas según

$$u v = \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{r/r_s}, \quad (1.15)$$

de manera que la métrica (1.1) queda escrita como

$$ds^2 = -\frac{32 r_s^3}{r} e^{-r/r_s} du dv + r^2 d\Omega_2^2, \quad (1.16)$$



**Figura 1.4:** Geometría de Schwarzschild extendida cerca del horizonte de eventos.

donde  $r(u, v)$  está definida implícitamente a partir de (1.15). En estas coordenadas maximales, los conos de luz yacen a  $45^\circ$ . Ahora, hacemos la siguiente transformación para traer el infinito a una región finita:

$$U = \arctan(u), \quad V = \arctan(v), \quad (1.17)$$

con  $U, V \in (-\pi/2, \pi/2)$  y  $-\pi < U + V < \pi$ . El resultado está representado en la figura 1.5. Vemos que están graficadas las cuatro regiones de la extensión analítica máxima de Schwarzschild. Las regiones  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$  corresponden al infinito nulo futuro y pasado, donde empiezan y terminan todas las geodésicas nulas, respectivamente;  $i^+$  e  $i^-$  son el infinito temporal futuro y pasado ( $r$  finito y  $t \rightarrow \pm\infty$ ), respectivamente, e  $i^0$  es el infinito espacial ( $t$  finito y  $r \rightarrow +\infty$ ). En estas coordenadas, la singularidad  $r = 0$  es una línea recta que se extiende desde el infinito temporal de una región asintótica al de la otra.

Hasta aquí hemos cubierto algunos de los aspectos más importantes de la física clásica de agujeros negros. El modelo de la figura 1.5, a pesar de ser una idealización estática, será de utilidad para explicar las propiedades de los agujeros negros y su relación con la termodinámica. En las siguientes secciones avanzaremos en la descripción desde un punto de vista un poco más cuántico.

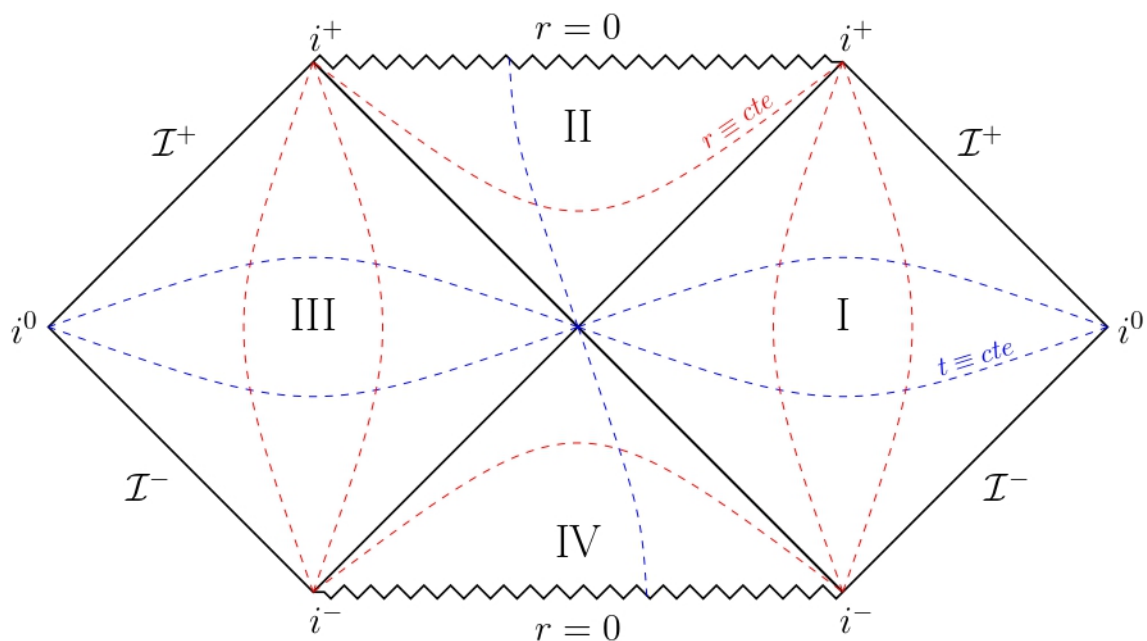


Figura 1.5: Diagrama de Penrose del agujero negro de Schwarzschild.

## 1.2. Radiación de Hawking

En 1974, Stephen Hawking [5, 6] hizo el gran descubrimiento de que los agujeros negros no son completamente oscuros, sino que emiten radiación térmica. Sorprendentemente, para obtener este resultado no tuvo que recurrir a una descripción cuántica de la gravedad; **basta con considerar a los campos de materia** (fotones, electrones, neutrinos, etc.) **como sistemas cuánticos que viven en la geometría clásica del agujero negro.** Por este motivo, esta descripción es llamada *semi-clásica*.

La derivación original de Hawking muestra que, mucho tiempo después de ocurrido el colapso gravitatorio y luego de que se haya formado el agujero negro, un observador en el infinito puede medir, efectivamente, radiación saliente del agujero negro y que dicha radiación tiene el espectro de cuerpo negro a una temperatura bien definida. Para los fines de este trabajo, vamos a optar por una deducción más simple basada en la continuación euclídea de la geometría del agujero negro.

Como veremos luego en la sección 2.4, en teoría cuántica de campos (QFT), una forma de describir un sistema a temperatura finita  $T$  es pasar a signatura euclídea reemplazando



$t \rightarrow -i\tau$ , y haciendo la identificación periódica

$$\tau = \tau + \hbar\beta, \quad (1.18)$$

donde  $\beta = T^{-1}$  (en unidades  $k_B = 1$ ). Inspirados en esta idea, hagamos la continuación analítica de la geometría lorentziana del agujero negro (1.1) al tiempo euclídeo:

$$ds_E^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2^2. \quad (1.19)$$

Tomando nuevamente el límite  $r \gtrsim r_s$ , la métrica (1.19) cerca del horizonte resulta

$$ds_E^2 = \rho^2\kappa^2d\tau^2 + d\rho^2 + r_s^2d\Omega_2^2. \quad (1.20)$$

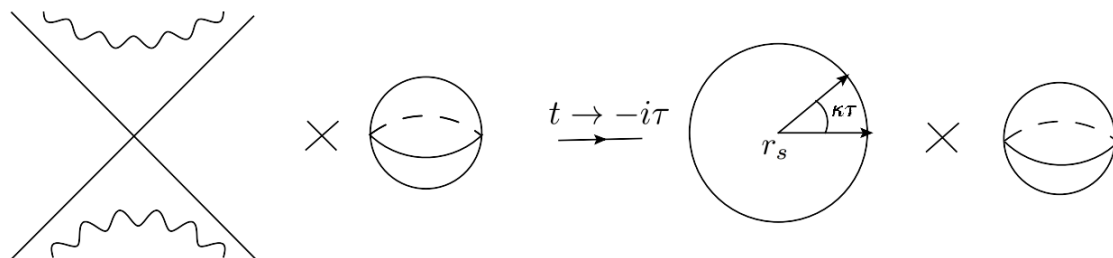
De manera análoga al caso lorentziano, introducimos una coordenada temporal  $\theta = \kappa\tau$  y, por consiguiente,

$$ds_E^2 = \rho^2d\theta^2 + d\rho^2 + r_s^2d\Omega_2^2. \quad (1.21)$$

Podemos identificar en los primeros dos términos de esta expresión a la métrica plana euclídea 2-dimensional escrita en coordenadas polares, salvo por el hecho de que en el espacio euclídeo la coordenada angular  $\theta$  es periódica en  $2\pi$  y aquí  $\tau = it$  no es compacta. Si  $\theta$  no tiene periodicidad  $2\pi$ , entonces esta métrica posee una singularidad cónica en el origen. Llegamos así a una contradicción: la continuación euclídea de la geometría de agujero negro no puede tener una singularidad en  $\rho = 0$  puesto que la solución original es suave allí sobre el horizonte de eventos. Entonces, para salvar la singularidad, se debe imponer la condición

$$\tau = \tau + \frac{2\pi}{\kappa} \quad (1.22)$$

y la variedad euclídea resultante es como se muestra en la figura 1.6.



**Figura 1.6:** Continuación analítica de la geometría de agujero negro lorentziana cerca del horizonte a la euclídea.

Recordemos que  $\tau$  es la versión euclídea del tiempo propio  $t$  de los observadores en el infinito. Si elegimos este tiempo y consideramos una teoría cuántica de campos embebida en el espacio-tiempo del agujero negro, su tiempo imaginario periódico (1.18) es tal que debemos identificar  $2\pi/\kappa = \hbar\beta$  y podemos afirmar que los observadores en  $r \rightarrow \infty$  perciben una temperatura finita dada por

$$T_\infty = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar}{8\pi GM} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}, \quad (1.23)$$

donde restauramos las unidades en la última igualdad. Para calcular la temperatura  $T_{loc}(r)$  percibida por los observadores situados en alguna posición  $r$  fija, podemos usar la relación (1.4):

$$T_{loc}(r) = \frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi\sqrt{f(r)}}. \quad (1.24)$$

De aquí se puede ver que la temperatura en el horizonte es extremadamente elevada ya que  $T_{loc}$  tiende a infinito cuando  $r \rightarrow r_s$ .

Ahora bien, notemos que el mismo razonamiento puede ser aplicado para la métrica de Rindler. Definiendo  $\eta = -i\theta$  y reemplazando en la ecuación (1.13) obtenemos

$$ds_{\mathcal{M}_{2,E}}^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \quad (1.25)$$

Entonces, al igual que antes:

$$\theta = \theta + 2\pi. \quad (1.26)$$

Para un observador en  $\rho \equiv cte$  (ver figura 1.1), su tiempo propio es  $dt_{loc} = \rho d\eta$  y, por lo tanto, su tiempo propio euclídeo  $d\tau_{loc} = \rho d\theta$  tiene periodicidad  $\tau_{loc} = \tau_{loc} + 2\pi\rho$ . Identificando  $\tau_{loc}$  con (1.18), encontramos que estos observadores hiperbólicos perciben una temperatura

$$T_{loc}(\rho) = \frac{\hbar}{2\pi\rho} = \frac{\hbar a}{2\pi} = \frac{\hbar}{k_B c} \frac{a}{2\pi}, \quad (1.27)$$

donde usamos la relación (1.14) en la segunda igualdad. Así, escrito de esta manera, vemos que cualquier observador en Minkowski con una aceleración  $a \neq 0$  percibe una temperatura finita  $T_{loc}(\rho)$  que es proporcional a su aceleración. Este efecto fue descubierto por W.G. Unruh en 1976 [20] y revela que incluso en el caso plano existe una temperatura de radiación asociada al tiempo propio del observador, de modo que la radiación de Hawking y la de Unruh son, en esencia, el mismo fenómeno.

Hemos dicho que el problema que surge al no hacer la identificación periódica del tiempo euclídeo es que la variedad euclídea resulta singular en el origen, es decir, en

$r = r_s$  en el caso de Schwarzschild. Como consecuencia, al pasar a la signatura lorentziana, las funciones de correlación, el tensor de energía-momento y, en general, los observables físicos de la teoría tienen un mal comportamiento allí. En cambio, si consideramos (1.22), la variedad es suave en el horizonte y entonces los observables son regulares al hacer la continuación analítica. Dado que nada indica que la regularidad deba romperse al atravesar el horizonte de eventos (de hecho, la curvatura en  $r = r_s$  puede ser muy pequeña para un agujero negro lo suficientemente grande),  $\tau$  debe ser periódica. Destaquemos que la única forma de evitar la singularidad cónica es que la periodicidad de  $\tau$  sea precisamente (1.22). Esto implica que, si consideramos una teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de un agujero negro, entonces **la única temperatura a la que puede estar el campo en equilibrio con el agujero negro es a la temperatura de Hawking** (1.23). En este sentido, un agujero negro visto por un observador suficientemente alejado no es diferente a un cuerpo negro. En particular, emite radiación si no es alimentado por una fuente. La radiación emitida por el agujero negro es lo que denominamos *radiación de Hawking*.

### 1.3. Termodinámica de agujeros negros

Habiendo visto ya de que los agujeros negros tienen una temperatura (1.23), el siguiente paso es convencernos de que, entonces, son objetos termodinámicos y deben obedecer las leyes de la termodinámica. En particular, aplicando la relación

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T(E)} = \frac{8\pi GM}{\hbar}, \quad (1.28)$$

con  $E = M$ , se deduce inmediatamente que los agujeros negros tienen entropía

$$S(E) = \frac{4\pi GE^2}{\hbar}, \quad (1.29)$$

donde elegimos la constante de integración tal que  $S$  se anula para  $M = 0$ . En términos geométricos, recordando que  $r_s = 2GM$ , (1.29) puede escribirse como

$$S(E) = \frac{\pi r_s^2}{4\hbar G} = \frac{A_h}{4\hbar G}, \quad (1.30)$$

en donde usamos el resultado (1.5) para el área del horizonte de eventos  $A_h$ . De modo que, como ya anticipamos en la sección 1.1.1, existen dos cantidades geométricas muy importantes en la física de agujeros negros: una es la gravedad superficial  $\kappa$ , relacionada con la temperatura a través de la ecuación (1.23), y la otra es el área de la sección espacial

del horizonte  $A_h$ , la cual interviene en la entropía del agujero negro a través de la expresión (1.30).

Cabe notar que, de acuerdo con la ecuación (1.23), la relación entre la masa del agujero negro y la temperatura es anti-intuitiva: al incrementar  $M$ , la temperatura disminuye. Esto implica que el calor específico es negativo:

$$c_V = \frac{1}{M} \frac{\partial E}{\partial T} < 0. \quad (1.31)$$

La razón se debe a que estamos considerando un agujero negro en un espacio asintóticamente plano. En cambio, para un agujero negro suficientemente grande en Anti-de Sitter el calor específico es positivo, y, por lo tanto, es posible alcanzar un equilibrio estable con la radiación térmica a temperatura finita [21].

Es importante destacar que, a pesar de que las relaciones (1.23) y (1.30) fueron derivadas para la solución de agujero negro más sencilla (la de Schwarzschild), las mismas son universales para todo agujero negro de la gravedad de Einstein. Existe un teorema, denominado en inglés *no-hair theorem*, que postula que **cualquier agujero negro estacionario y asintóticamente plano está completamente caracterizado por tres cantidades:**

- su masa  $M$ ,
- su momento angular  $J$
- y sus cargas de *gauge* conservadas (su carga eléctrica  $Q$ , por ejemplo).

El agujero negro de Schwarzschild que estudiamos hasta ahora es un caso especial con  $J = 0$  y  $Q = 0$ , pero casos más generales incluyen  $J \neq 0$  y  $Q \neq 0$ . Por lo tanto, según el teorema, si una estrella colapsa y forma un agujero negro, entonces, clásicamente, todas las características físicas particulares de la estrella se pierden en el proceso, dado que sólo quedarán  $M$ ,  $J$  y  $Q$  para describir al objeto.

Históricamente, este teorema precedió al descubrimiento de la radiación de Hawking. Los agujeros negros eran entonces objetos caracterizados por tan sólo tres números. Tiempo después, se propuso que los agujeros negros estacionarios debían cumplir las siguientes cuatro leyes [4]:

- *ley cero*: la gravedad superficial  $\kappa$  es constante sobre el horizonte de eventos;

- *primera ley*: modificando la masa en una cantidad  $dM$ , a primer orden se satisface la relación

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA_h + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (1.32)$$

con  $\Omega$  la frecuencia angular de rotación en el horizonte y  $\Phi$ , el potencial eléctrico también evaluado en el horizonte (normalizado de modo que se anula en el infinito);

- *segunda ley*: el área del horizonte de eventos jamás decrece; y
- *tercera ley*: la gravedad superficial  $\kappa$  de un agujero negro no puede ser reducida a cero mediante un número finito de pasos.

Estas leyes de la mecánica de agujeros negros se derivan puramente de la relatividad general clásica. La segunda ley establece que si se arroja una partícula al interior del agujero negro, su área aumenta [1]. En particular, si dos agujeros negros colisionan, la segunda ley impone que el agujero negro resultante tendrá un área mayor que la suma de las áreas de los originales.

Resulta evidente que haciendo la identificación (1.23) y (1.30), estas cuatro leyes se convierten inmediatamente en las cuatro leyes termodinámicas. En efecto, sustituyendo  $\kappa$  y  $A_h$  por  $T$  y  $S$ , respectivamente, la primera ley resulta

$$dM = T dS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (1.33)$$

es decir, la primera ley estándar de la termodinámica. A pesar de las similitudes y dado que la radiación de Hawking fue calculada tiempo después del descubrimiento de estas leyes, para ese entonces no se concebía a los agujeros negros como objetos termodinámicos. De hecho, Bardeen, Carter y Hawking plantean en [4] que es posible que las leyes de los agujeros negros, de alguna manera, trasciendan a las leyes termodinámicas conocidas.

Bekenstein, sin embargo, opinaba lo contrario. Los agujeros negros parecían violar la segunda ley de la termodinámica: debido al *no-hair theorem*, toda la entropía asociada a un objeto que caía al interior del horizonte desaparecía para un observador exterior. Para salvarla, Bekenstein propuso [2, 3], basándose en la segunda ley de la mecánica de agujeros negros, que la entropía del agujero negro debía ser proporcional al área del horizonte:  $S \propto A_h$ . Así, la entropía perdida cuando un objeto cae al interior del horizonte se traduce en un aumento del área. Más aún, Bekenstein postuló la ***segunda ley generalizada***: si  $S_{gen}$  es la entropía total de un sistema formado por un agujero negro de entropía  $S \propto A_h$

y campos cuánticos de materia que se encuentran en la región exterior cuya entropía es  $S_{mat}$ ,

$$S_{gen} = S + S_{mat}, \quad (1.34)$$

entonces se cumple que

$$dS_{gen} \geq 0. \quad (1.35)$$

Es claro que, si asumimos que los agujeros negros son sistemas termodinámicos usuales, entonces la conclusión (1.35) es automática. No obstante, cuando Bekenstein propuso estas relaciones, era difícil concebir que un sistema que no dejaba escapar absolutamente nada pudiera tener una entropía asociada. Una vez que Hawking [5, 6] hizo el hallazgo (1.23), fue posible definir de manera unívoca la constante de proporcionalidad de la ley propuesta por Bekenstein a partir de la ecuación (1.32), de modo que la relación entre área y entropía es (1.30). Así, se afianzó la idea de los agujeros negros como sistemas termodinámicos.

## 1.4. Proceso de evaporación

Dijimos ya que la solución de agujero negro eterno (1.1) es una idealización de la situación real debido a que no tiene en cuenta la formación del agujero negro a partir del colapso gravitacional de la estrella original. Debemos agregar además que esta solución (1.1) falla en describir el proceso de evaporación.

A partir de los argumentos dados hasta aquí, hemos podido concluir que los agujeros negros son objetos termodinámicos: para un observador exterior alejado del horizonte, el agujero negro se comporta idénticamente a un cuerpo negro usual. Como tal, éste radía y el flujo de energía que se lleva la radiación de Hawking al infinito implica una pérdida de masa para el agujero negro [6]. Así, su área se reduce gradualmente hasta desaparecer, de modo que el diagrama de Penrose correspondiente es como se muestra en la figura 1.7. Como se puede ver, asumiendo que no existen singularidades desnudas, una vez que el agujero negro se evapora completamente sólo queda un espacio-tiempo plano que contiene a toda la radiación de Hawking emitida durante la vida del agujero negro.

Suponiendo que las partículas radiadas no tienen masa, se cumple la ley de Stefan-Boltzmann,

$$\frac{P}{A_h} = \frac{\pi^2}{60} T^4, \quad (1.36)$$

donde  $P$  es la potencia radiada. Por consiguiente,

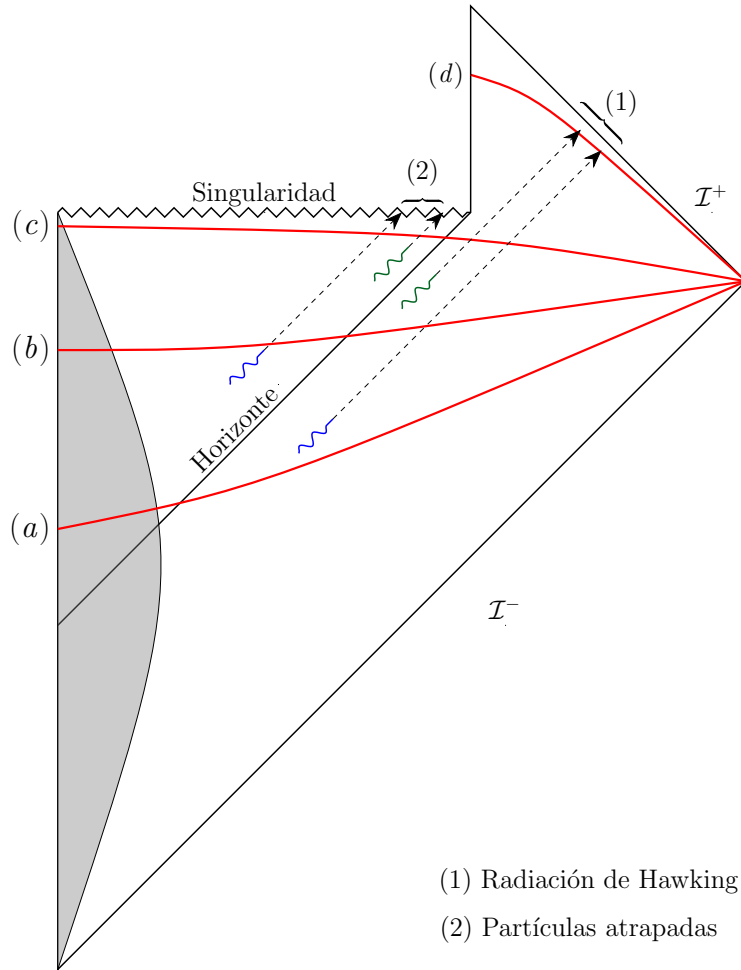
$$\frac{dM}{dt} = -P = -\frac{\pi^2}{60} A_h T^4 = -\frac{\pi^2}{30(8\pi)^3 G^2} \frac{1}{M^2} \equiv -\frac{\alpha}{M^2} \quad (1.37)$$

y el agujero negro se evapora completamente en un tiempo finito  $t_{ev}$  dado por

$$t_{ev} = -\frac{1}{\alpha} \int_{M_0}^0 M^2 dM = \frac{M_0^3}{3\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi^2}{30(8\pi)^3 G^2}, \quad (1.38)$$

donde  $M_0$  es la masa inicial. Un agujero negro de masa equivalente a la del sol posee una temperatura de Hawking  $T \sim 10^{-7} K$  y un tiempo de vida  $t_{ev} \sim 10^{64}$ , muchísimo mayor que la edad del universo. Es por esto que para escalas de tiempo mucho menores que  $t_{ev} \propto (M/m_{Pl})^3$ , donde  $m_{Pl}$  es la masa de Planck, la solución de agujero negro en equilibrio estacionario es una buena aproximación.

Para entender el proceso de Hawking, una analogía muy utilizada consiste en pensar al estado de vacío como un mar constituido por pares de partículas en constante creación y aniquilación. Cuando éstas se crean lejos del agujero negro, rápidamente son aniquiladas, pero cerca del horizonte de eventos puede ocurrir que una de las partículas caiga al interior y que la otra logre escapar. La partícula que escapa al infinito llevándose parte de la energía del agujero negro es observada como radiación térmica, mientras que la partícula absorbida, de energía negativa, queda atrapada detrás del horizonte. Este proceso va provocando la disminución de la masa del agujero negro hasta evaporarlo completamente. Como se verá luego, este escenario, representado en la figura 1.7, es muy útil para entender el entrelazamiento entre la radiación de Hawking y el interior del agujero negro: ambas partículas, a pesar de separarse, quedan entrelazadas.



**Figura 1.7:** Diagrama de Penrose de un agujero negro formado a partir del colapso gravitatorio esféricamente simétrico de una estrella. La región gris corresponde al interior de la estrella, donde la solución de vacío no es válida. Cada par de partículas entrelazadas se representa con el mismo color. En rojo se dibujaron las regiones espaciales que corresponden a las distintas instancias de la vida del agujero negro: (a) la estrella colapsa dejando al descubierto el horizonte de eventos y la geometría cerca del horizonte rápidamente se estabiliza; (b) el proceso de Hawking crea pares de partículas entrelazadas, una de las cuales es absorbida por el agujero negro y la otra escapa al infinito; (c) la emisión de la radiación va disminuyendo la masa del agujero negro hasta que finalmente el área del horizonte se reduce a cero; (d) el agujero negro desaparece y el espacio-tiempo es como en Minkowski. Como resultado del proceso sólo queda la radiación térmica de Hawking.

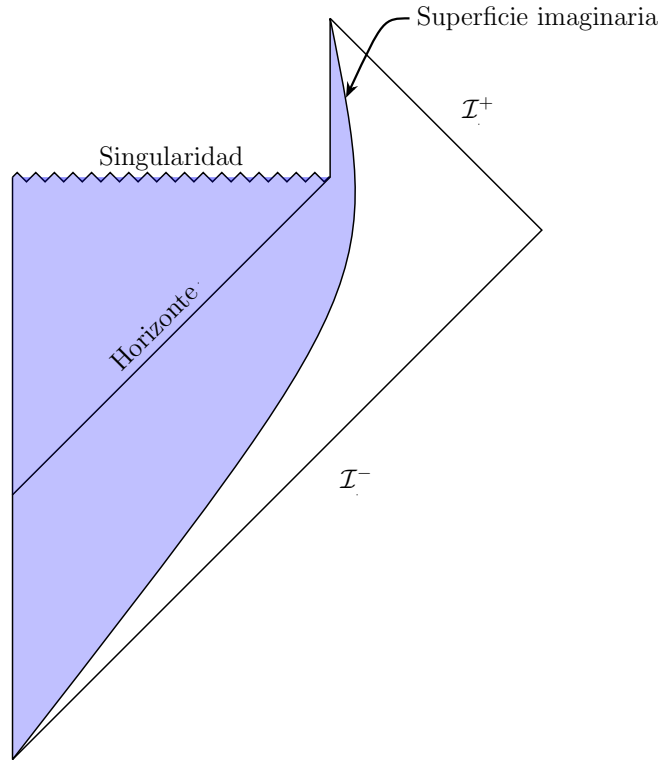


## 1.5. Dogma central

Los resultados que hemos visto hasta ahora se basan en una descripción semi-clásica de los agujeros negros. En esta descripción, un agujero negro se comporta para un observador exterior de manera idéntica a un sistema termodinámico usual. La pregunta que surge, entonces, es si los agujeros negros (y su entropía, por ejemplo) tienen una interpretación estadística tal como ocurre en los sistemas termodinámicos ordinarios. Si la respuesta es afirmativa, esto implica que, a pesar de que macroscópicamente los agujeros negros están caracterizados por las tres cantidades del *no-hair theorem*, a nivel microscópico debe existir un número enorme, pero finito, de estados internos del orden de  $N \sim e^{\frac{A_h}{4G}}$  compatibles con el estado macroscópico. La naturaleza termodinámica en la descripción semi-clásica sugiere que **en una descripción completamente cuántica el agujero negro visto desde afuera deberá comportarse como un sistema cuántico usual.**

Esta idea ha resultado tan importante en el desarrollo del tema que ha sido llamada *el dogma central* [7] y establece que, visto desde afuera, un agujero negro puede ser descrito en términos de un sistema cuántico con  $\log N \sim \frac{A_h}{4G}$  grados de libertad efectivos que evoluciona en el tiempo de manera unitaria. Para describir al agujero negro como un sistema cuántico es conveniente pensar que la región está delimitada por una superficie imaginaria (de radio equivalente a, por ejemplo, unos cuantos radios de Schwarzschild) como en la figura 1.8. Así, de acuerdo con el dogma central, para un observador exterior todo el interior del agujero negro y el espacio-tiempo incluido en la región representada en azul en la figura 1.8 es equivalente a un sistema cuántico usual. Como tal, el sistema está acoplado a los grados de libertad que viven del lado externo de la superficie delimitadora. En general, pensamos a esta región exterior como un sistema cuántico en un espacio-tiempo fijo, es decir que despreciamos las fluctuaciones del *background* en esa región. La evolución conjunta de ambos sistemas acoplados (es decir, del sistema cuántico equivalente al agujero negro y del sistema fuera de la superficie imaginaria) debe ser unitaria.

Notemos que el dogma central es una hipótesis acerca del agujero negro visto desde afuera y nada dice sobre lo que ocurre en el interior. Tampoco distingue de qué tipo son los grados de libertad que describen al sistema, simplemente enuncia que la dimensión del espacio de Hilbert es finita. La dificultad en describir la teoría microscópica subyacente radica en que estos grados de libertad y el hamiltoniano que permite la evolución temporal



**Figura 1.8:** Esquematación del dogma central: la región azul que incluye todo el interior del agujero negro y parte del exterior es equivalente a un sistema cuántico para un observador ubicado fuera de la superficie imaginaria.

unitaria no son evidentes en la descripción semi-clásica de la gravedad. Por lo tanto, en principio, el hamiltoniano podría ser muy general, aunque el hecho de que debe dar lugar a la evolución gravitatoria impone ciertas propiedades, como el ser fuertemente interactuante.

Desde la perspectiva del dogma central, para un observador fuera del horizonte de eventos, un agujero negro no es fundamentalmente distinto a cualquier sistema físico ordinario ya que ambos están gobernados por un hamiltoniano unitario y tienen un número finito de grados de libertad. Lo que distingue al agujero negro de otros sistemas físicos es que posee una región interior delimitada por un horizonte de eventos, pero ésta no es accesible para los observadores exteriores. La teoría gravitatoria semi-clásica no describe qué es lo que ocurre en la singularidad, de modo que no existe una prueba fehaciente de que el dogma central es verdadero o, en otras palabras, de que la información cuántica no se pierde en el interior del agujero negro. A pesar de esto, resultados como el de Strominger y Vafa [22], en el que se calculan de manera explícita los  $e^{\frac{A_h}{4G}}$  estados internos para un

tipo específico de agujero negro en teoría de cuerdas, y los avances relacionados con la correspondencia AdS/CFT dan peso a la hipótesis del dogma central.

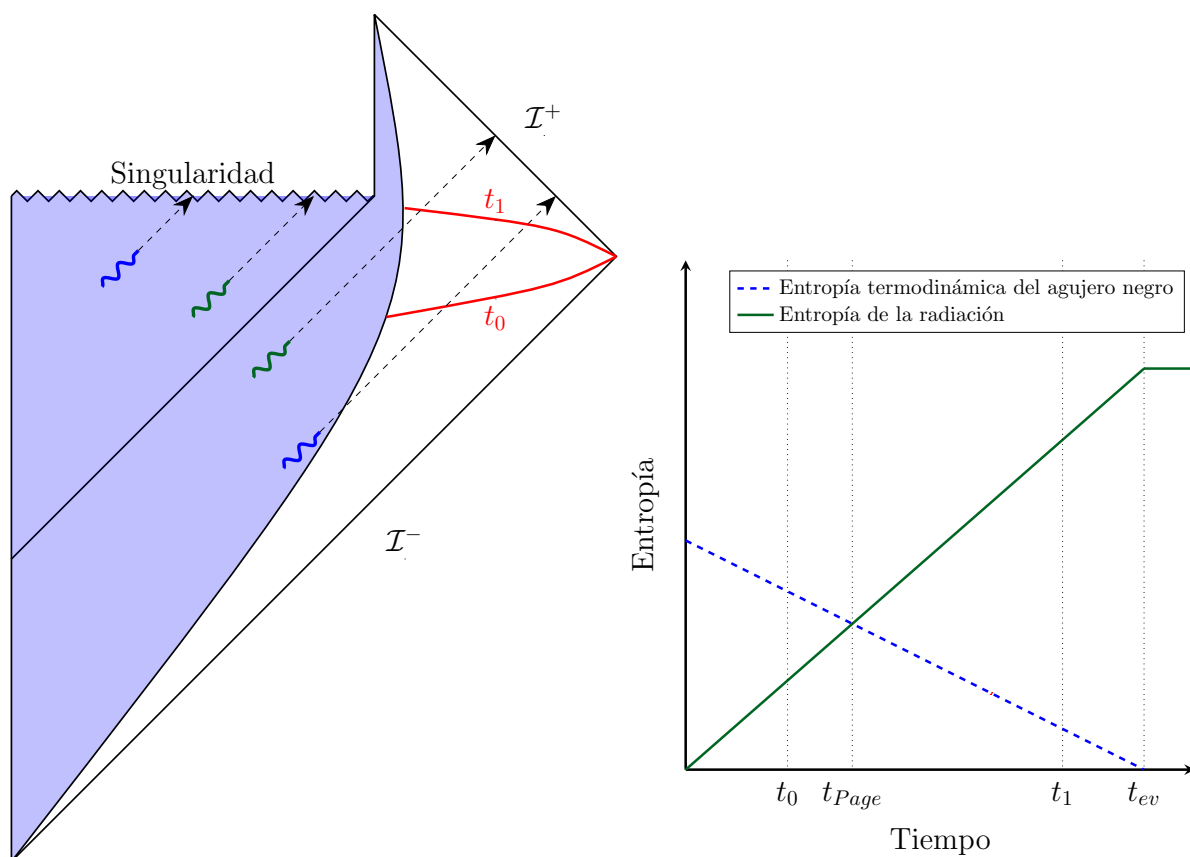
## 1.6. Paradoja de la información y curva de Page

En esta sección veremos los argumentos por los cuales, si consideramos que el dogma central es verdadero, entonces se llega a una paradoja conocida como *la paradoja de la información de Hawking*. Para ello, primero, revisemos qué es lo que esperamos que ocurra para un sistema aislado formado por un cuerpo negro ( $C$ ) y su radiación emitida ( $R$ ).

Inicialmente, justo antes de que el cuerpo negro comience a radiar, el sistema se encuentra en un estado global puro que podemos representar como  $|E\rangle_C \otimes |0\rangle_R$ , donde  $E$  es la energía inicial del cuerpo negro y el cero para la radiación indica que su energía es nula. A medida que el cuerpo negro radia, la interacción entre éste y su radiación provoca que el estado se entrelace y, con el tiempo, las matrices densidad reducidas (ver sección 2.1) se vuelven aproximadamente térmicas. Después de un tiempo suficientemente largo, el estado global estará bien aproximado por  $|0\rangle_C \otimes |E\rangle_R$ , dado que el cuerpo negro habrá radiado toda su energía. De esta manera, los estados reducidos vuelven a purificarse hacia el final del proceso.

Si el dogma central es válido, entonces en la evaporación de un agujero negro debería ocurrir lo mismo: el estado de la radiación debería ir purificándose hasta ser puro al final del proceso. Sin embargo, esto no ocurre: la entropía de la radiación siempre crece y el estado final de la radiación es mixto. Para ver esto, usemos la analogía de la creación de partículas en el vacío (ver figura 1.9). Cada partícula se encuentra entrelazada con su compañera, de forma tal que el par constituye un estado puro. Si consideramos un solo miembro del par, por ejemplo, la partícula que logra escapar al infinito, la encontraremos en un estado mixto. Ahora bien, imaginemos una superficie espacial en el diagrama de Penrose del agujero negro, por ejemplo, la superficie  $t = t_0$  señalada en la figura 1.9. Esta superficie recoge un solo miembro del par; el otro miembro que lograría purificarlo queda atrapado detrás del horizonte. La superficie a  $t = t_1 > t_0$ , por su parte, captura a dos partículas de diferente par y, como cada una se encuentra en un estado mixto, entonces la entropía de la radiación a  $t = t_1$  es mayor que a  $t = t_0$ . Así, a medida que el tiempo avanza, la entropía de la radiación aumenta monótonamente hasta que el agujero negro

se evapora completamente. No existe forma, pues, de que la radiación pueda purificarse como sí ocurre para un cuerpo negro.



**Figura 1.9:** A la izquierda, diagrama de Penrose del agujero negro, donde la región azul corresponde al sistema formado por el agujero negro y la región sin colorear, a la radiación. A la derecha, gráfico de la entropía de la radiación en función del tiempo.

Dado que lo que nos ha llevado a esta contradicción es el haber supuesto que el dogma central es verdadero, una postura -defendida, por ejemplo, por Unruh y Wald [23]- consiste en rechazar la hipótesis del dogma central, de modo que la pérdida de información en el proceso de evaporación de agujeros negros no viola ningún principio fundamental de la física.

Por otro lado, para resolver la paradoja sin desechar el dogma central, podríamos alegar que en las instancias finales de la evaporación del agujero negro la descripción semi-clásica ya no es confiable, ya que el tamaño del horizonte se vuelve comparable con la longitud de Planck y la curvatura resulta demasiado elevada. Por lo tanto, se necesitaría una descripción cuántica de la gravedad para dar cuenta de lo que ocurre en esta etapa.

Por ejemplo, podría quedar un remanente del agujero negro que termine purificando a la radiación y de esa forma no habría pérdida de la información cuántica. Sin embargo, este argumento no resuelve el conflicto, dado que la paradoja se da cuando el agujero negro todavía es suficientemente grande, mucho antes de evaporarse completamente. Para entender esto, es necesario hacer la distinción entre la *entropía de von Neumann* de un sistema y la *entropía termodinámica*.

La entropía de von Neumann es la “entropía cuántica” y se define como

$$S_{vN}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (1.39)$$

donde  $\rho$  es la matriz densidad. Esta entropía da cuenta de la ignorancia sobre el estado preciso en el que se encuentra el sistema, de modo que  $S_{vN}$  se anula para un estado puro.

Por otra parte, la entropía termodinámica es aquella que maximiza la entropía de von Neumann (1.39) sobre todos los estados  $\rho$  compatibles con un conjunto de observables medidos  $B_i$  (que pueden ser, por ejemplo, la energía total, el volumen del sistema, etc.):

$$S_{termo} = \max_{\rho|B_i} \{S_{vN}(\rho)\}. \quad (1.40)$$

Ésta es la cantidad involucrada en la segunda ley de la termodinámica, de manera que la entropía de Bekenstein-Hawking (1.30) para agujeros negros corresponde a esta definición. Notemos que, por definición, la entropía de von Neumann de un sistema es siempre menor o igual que su entropía termodinámica.

Hecha esta aclaración, volvamos al proceso de evaporación del agujero negro. Inicialmente, al igual que ocurre para un cuerpo negro, es esperable que la entropía de von Neumann de la radiación de Hawking,  $S_R$ , aumente. Como el sistema formado por el agujero negro y su radiación se encuentran en un estado global puro, entonces las entropías de von Neumann de ambos sistemas deben coincidir para todo tiempo:  $S_A = S_R$ , donde  $S_A$  es la entropía de von Neumann del sistema cuántico que describe al agujero negro. De acuerdo con la definición (1.40),  $S_A$  está superiormente acotada por la entropía termodinámica de Bekenstein-Hawking (1.30):  $S_A \leq \frac{A_h}{4G}$ . A medida que el agujero negro se evapora, su área se reduce, y, por lo tanto, también se reduce su entropía termodinámica, como se muestra en la figura 1.9. Por lo tanto, **la paradoja se da cuando la entropía de la radiación, la cual crece monótonamente, supera la entropía termodinámica del agujero negro**  $S_R > \frac{A_h}{4G}$  y entonces se viola la condición

$$S_R = S_A \leq \frac{A_h}{4G}. \quad (1.41)$$

El tiempo para el cual ocurre la paradoja se denomina *tiempo de Page* y ocurre mucho antes de que el agujero negro se evapore completamente. El nombre es debido a D. Page, quien propuso cuál es el comportamiento que debe tener la entropía de von Neumann de la radiación para ser consistente con unitariedad [9, 24]. Dicho comportamiento se ilustra en la figura 1.10.

De acuerdo con la propuesta de Page, existe una tercera posibilidad para resolver la paradoja: el cálculo de Hawking para la entropía de la radiación debe ser incorrecto. Es decir que debemos estar describiendo mal el estado de la radiación. En particular, agregar pequeñas correcciones al proceso de Hawking de manera perturbativa en  $G$  no resuelve el problema. En los últimos años se han producido un gran número de avances [10–19] en el entendimiento de la entropía de von Neumann de sistemas gravitatorios y se ha conseguido reproducir la curva de Page. En este trabajo, calcularemos esta curva en un ejemplo explícito. Para ello, será útil reformular la paradoja como se explica en la siguiente sección.

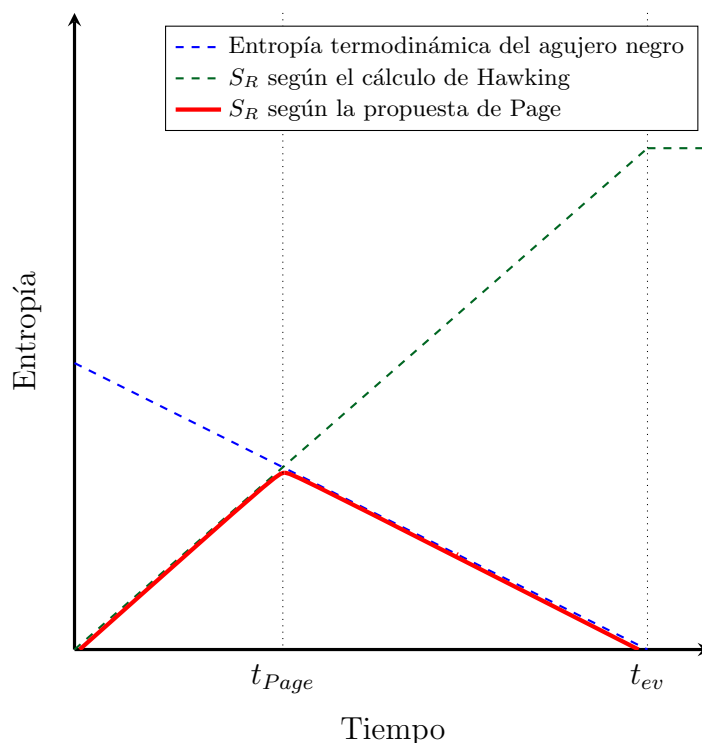
## 1.7. Reformulación más sencilla de la paradoja

Como mencionamos en la sección anterior, la paradoja de la información ocurre mucho tiempo antes de que el agujero negro se evapore completamente. Existe una reformulación de dicha paradoja [12] que permite estudiar la radiación de Hawking en un caso más sencillo en el cual el agujero negro no se evapora. Consideremos el agujero negro eterno de la figura 1.11 en equilibrio con su radiación. Éste no se evapora ya que está siendo constantemente alimentado por la radiación entrante. Como se trata del diagrama extendido de Schwarzschild, tenemos dos regiones exteriores, por lo que la entropía termodinámica correspondiente es

$$S_{termo} = 2 \frac{A_h}{4G}. \quad (1.42)$$

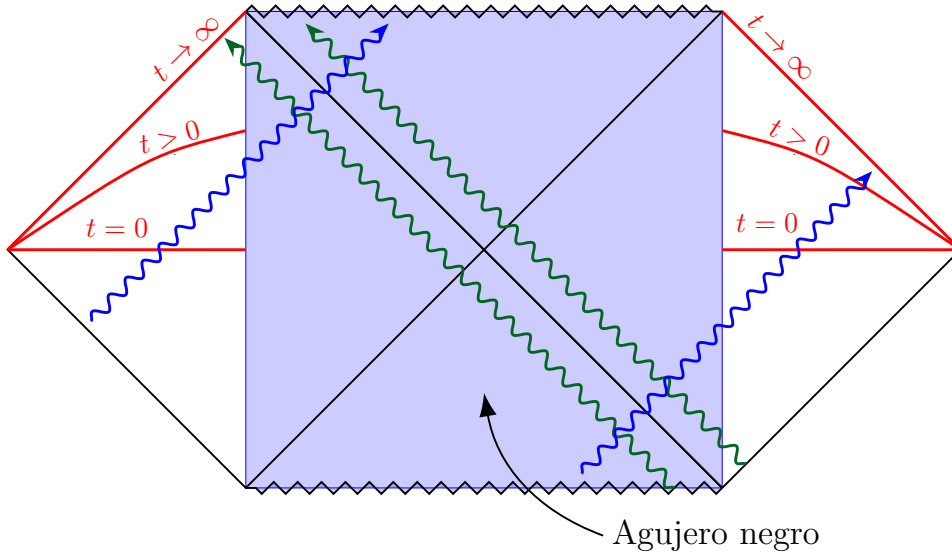
Dado que aquí no hay evaporación, el área del horizonte no se reduce y  $S_{termo}$  se mantiene constante en el tiempo.

Para delimitar la región del agujero negro en el sentido propuesto por el dogma central, consideramos que la superficie imaginaria viene dada por las dos rectas verticales de la figura 1.11. De esta manera, todo el interior del agujero negro queda incluido en dicha región. De acuerdo con el dogma central, esta región es equivalente a un sistema cuántico usual.



**Figura 1.10:** Curva de Page para la entropía de la radiación de Hawking. Inicialmente, la curva coincide con el cálculo de Hawking, pero luego del tiempo de Page  $t_{Page}$  el comportamiento cambia para que  $S_R$  sea siempre menor que la entropía termodinámica del agujero negro. Por el contrario, en el cálculo de Hawking la entropía de la radiación crece monótonamente hasta que el agujero negro se evapora completamente a  $t = t_{ev}$ .

Supongamos nuevamente que el estado global es puro y observemos el comportamiento cualitativo de la entropía de la radiación a tiempos  $t = 0$  y  $t > 0$ . A  $t \equiv \text{cte}$ , esta entropía es la entropía de von Neumann de las dos regiones exteriores que quedan incluidas en una misma superficie  $t \equiv \text{cte}$ . Para el tiempo  $t = 0$  existen dos posibilidades: las dos partículas del par que conforman un estado puro son capturadas, o bien ninguna de las dos es capturada. Esto implica que la entropía de la radiación a tiempo  $t = 0$  es  $S_R = 0$ . A tiempo  $t > 0$  se añade una tercera posibilidad: de las dos partículas del par, sólo una es capturada. Es evidente que a medida que el tiempo evoluciona, la cantidad de pares que entran en esta tercera categoría aumenta. Cada partícula que es capturada sin su compañera contribuye al aumento de la entropía de la radiación, por lo que  $S_R > 0$  a  $t > 0$  y, además, el crecimiento de  $S_R$  es monótono en el tiempo. Finalmente, a tiempo infinito, la única posibilidad es que sólo una partícula del par sea capturada ya que la otra irá a parar inevitablemente a la singularidad. Esto nos da como resultado la máxima contribución a

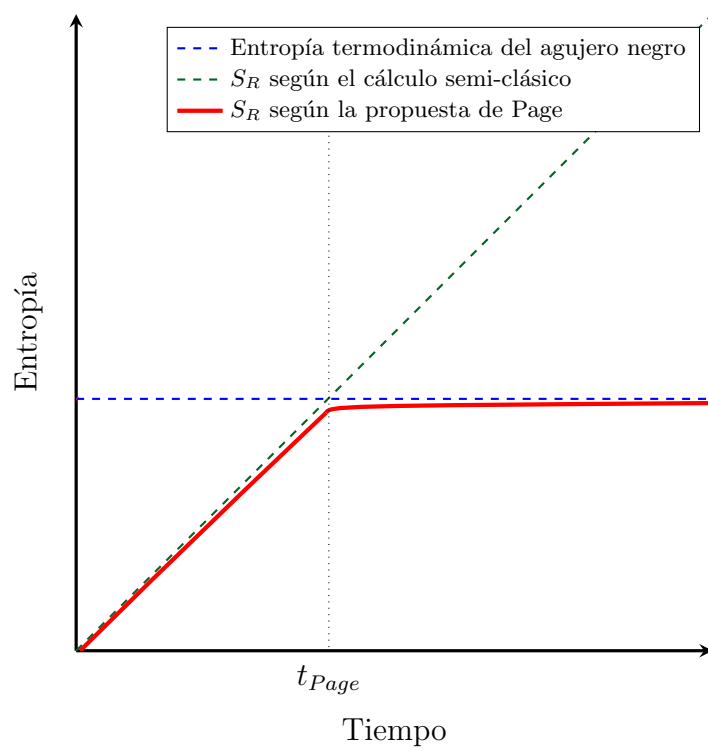


**Figura 1.11:** *Diagrama de Penrose del agujero negro eterno con su radiación de Hawking. El agujero negro no se evapora porque a medida que irradia, es a su vez alimentado con radiación. La superficie que delimita la región azul es la superficie imaginaria del dogma central. En rojo se graficaron distintas superficies  $t \equiv cte$  en la región de radiación.*

la entropía. Como la cantidad de pares es infinita, la entropía no está acotada y en algún instante que corresponde al tiempo de Page, la entropía de von Neumann de la radiación supera la entropía termodinámica  $S_{termo}$ , dando lugar, nuevamente, a la paradoja.

En la figura 1.12 se representa la curva de Page en este caso. Para ser consistente con unitariedad, se debe cumplir que  $S_R \leq S_{termo}$  para todo tiempo. Inicialmente, la curva coincide con el cálculo semi-clásico que hemos descrito, pero luego del tiempo de Page el comportamiento de  $S_R$  debe ser radicalmente distinto. El objetivo es lograr calcular explícitamente esta curva. El modelo que desarrollaremos en el capítulo 4 [18] proporciona un escenario similar al presentado aquí. Como veremos luego, en dicho modelo la curva de Page es calculable y se puede ver que cumple el comportamiento de la figura 1.12.





**Figura 1.12:** *Curva de Page para el agujero negro eterno.*

# Capítulo 2

## Entrelazamiento en teoría cuántica de campos

En este capítulo ahondaremos en la definición de la *entropía de entrelazamiento* en teoría de campos y daremos el resultado para una CFT en un intervalo y para el fermión no masivo en varios intervalos dado que serán de utilidad para el cálculo explícito de la curva de Page. Las entropías de entrelazamiento mencionadas se obtienen a partir de un método llamado *el truco de réplicas*. Dicho método será especialmente relevante en la justificación del cálculo correcto de la entropía de la radiación, por lo que lo explicaremos en detalle en este capítulo.

### 2.1. Entropía de entrelazamiento

Consideremos un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es el producto tensorial de dos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (2.1)$$

de modo que si  $\mathcal{H}_A$  tiene dimensión  $M$  y  $\mathcal{H}_B$  tiene dimensión  $N$ , entonces la dimensión de  $\mathcal{H}$  es  $M \times N$ . Sea  $\{|\alpha_i\rangle_A\}_{i=1,\dots,M}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}_A$  y  $\{|\beta_j\rangle_B\}_{j=1,\dots,N}$ , una base ortonormal de  $\mathcal{H}_B$ , entonces un estado global genérico  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  puede ser expresado como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} |\alpha_i\rangle_A \otimes |\beta_j\rangle_B, \quad (2.2)$$

con  $c_{ij}$  coeficientes complejos. Decimos que los subsistemas  $A$  y  $B$  están entrelazados si el estado global  $|\Psi\rangle$  del sistema no puede ser escrito como un producto simple de estados en

$\mathcal{H}_A$  y en  $\mathcal{H}_B$ , es decir, si no existen  $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$  y  $|\chi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$  tales que

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \quad (2.3)$$

La *entropía de entrelazamiento* es una magnitud que permite cuantificar la cantidad de entrelazamiento entre  $A$  y  $B$ . El objetivo, a continuación, será definir esta magnitud.

Primero, recordemos que a partir de la matriz densidad del sistema global,

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad (2.4)$$

podemos obtener la *matriz densidad reducida*  $\rho_A$  del subsistema  $A$  tomando la traza parcial sobre  $B$

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_{j=1}^N \langle \beta_j | \rho | \beta_j \rangle_B. \quad (2.5)$$

La entropía de entrelazamiento de  $A$ ,  $S_A$ , se define como la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida  $\rho_A$ :

$$S_A = -\text{Tr}[\rho_A \log(\rho_A)]. \quad (2.6)$$

Una indicación de que esta entropía es una buena medida del entrelazamiento entre  $A$  y  $B$  se obtiene al notar que  $S_A$  se anula si y sólo si  $\rho_A$  es un estado puro, lo cual se cumple si y sólo si el estado global  $|\Psi\rangle$  se puede escribir como un producto simple de estados en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ . En efecto, sólo en el caso en el que  $|\Psi\rangle$  viene dado por (2.3), la matriz densidad reducida de  $A$  es un estado puro:  $\rho_A = |\psi\rangle_A \langle \psi|$ . Como entonces  $\rho_A$  posee un único autovalor distinto de cero e igual a 1, la entropía de entrelazamiento (2.6) es  $S_A = 0$ . Por lo tanto,  $S_A \neq 0$  implica que existe entrelazamiento entre  $A$  y  $B$ , y el grado de entrelazamiento viene dado por el valor de  $S_A$ .

De manera análoga, podemos definir la entropía de entrelazamiento asociada a  $B$ ,  $S_B$ , como la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida  $\rho_B$ , la cual se calcula tomando la traza parcial sobre los grados de libertad de  $A$  al estado global  $\rho$ . Si  $\rho$  es puro, entonces la entropía de entrelazamiento de  $A$  es igual a la de  $B$ :

$$S_A = S_B. \quad (2.7)$$

Para demostrar esto, usemos el teorema de Schmidt, el cual establece que dado un estado  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ , siempre se puede hallar una base ortonormal  $\{|u_i\rangle_A\}_{i=1,\dots,M}$  de  $\mathcal{H}_A$  y otra base

ortonormal  $\{|v_i\rangle_A\}_{i=1,\dots,N}$  de  $\mathcal{H}_B$  tales que  $|\Psi\rangle$  puede ser expresado en la forma de la descomposición de Schmidt

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i |u_i\rangle_A \otimes |v_i\rangle_B, \quad (2.8)$$

donde  $m = \min\{M, N\}$  y  $\lambda_i$  satisface la condición de normalización  $\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 = 1$ . A partir de esta expresión, podemos calcular fácilmente las matrices densidad reducidas de  $A$  y de  $B$ :

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 |u_i\rangle_A \langle u_i|, \\ \rho_B &= \text{Tr}_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2 |v_i\rangle_B \langle v_i|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vemos así que ambas matrices reducidas tienen los mismos autovalores no nulos con igual multiplicidad y en consecuencia  $S_A = S_B$ . Cuando existe un único autovalor no nulo, recuperamos el caso separable (2.3) y  $S_A = S_B = 0$ ; en cambio, cuando existe más de un autovalor no nulo hay entrelazamiento y  $S_A = S_B \neq 0$ . Se dice que el estado está *maximalmente entrelazado* si todos los autovalores  $|\lambda_i|^2$  son iguales. En ese caso, la entropía de entrelazamiento alcanza su valor máximo:  $S_A = S_B = \log(m)$ .

Por otro lado, si el estado global  $\rho$  del sistema compuesto es mixto, es decir, si  $\rho \neq |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , entonces en general  $S_A \neq S_B$ . Esto está relacionado con el hecho de que, en ese caso, la entropía de entrelazamiento no sólo mide las correlaciones cuánticas, sino también las incertezas estadísticas clásicas. Por este motivo, para estados globales mixtos la entropía de entrelazamiento no es una buena medida del entrelazamiento cuántico entre los subsistemas  $A$  y  $B$ .

Finalizaremos esta sección dando dos propiedades muy importantes de la entropía de entrelazamiento:

- (1) *Desigualdad triangular*: la entropía de entrelazamiento del sistema compuesto  $AB$ ,  $S_{AB}$ , es menor o igual que la suma de las entropías de los subsistemas individuales y mayor o igual que su resta, es decir,

$$|S_A - S_B| \leq S_{AB} \leq S_A + S_B. \quad (2.10)$$

Cuando el estado es de la forma  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  se cumple la igualdad  $S_{AB} = S_A + S_B$ .

- (2) *Subaditividad fuerte*: si el sistema está compuesto por tres partes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de manera que el espacio de Hilbert es  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ , entonces se cumple

$$S_{AC} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_C, \quad (2.11)$$

donde los subíndices de las entropías indican el subsistema que estamos considerando; por ejemplo,  $S_{AC}$  es la entropía de entrelazamiento calculada a partir de la matriz densidad reducida  $\rho_{AC}$  que se obtiene al tomar la traza sobre el complemento de  $AC$ .

La entropía de entrelazamiento juega un papel muy importante en información cuántica y en teoría de campos ya que es una forma de cuantificar correlaciones que no están presentes clásicamente.

## 2.2. Entrelazamiento en QFT

En teoría cuántica de campos, asociamos los subsistemas  $A$  y  $B$  a regiones del espacio. En un modelo discreto, el espacio constituye una red de puntos o sitios con espaciado  $\epsilon$ . Los grados de libertad de la teoría se ubican sobre cada sitio  $\mathbf{x}_i$ , de modo que el espacio de Hilbert es el producto tensorial del espacio de Hilbert asociado a cada punto:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{x}_1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{x}_2} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{x}_3} \otimes \dots \quad (2.12)$$

Sea  $A$  una región del espacio compuesta por el conjunto de puntos  $\mathbf{x}_i \in A$ , entonces su espacio de Hilbert asociado es

$$\mathcal{H}_A = \bigotimes_{\mathbf{x}_i \in A} \mathcal{H}_{\mathbf{x}_i}. \quad (2.13)$$

De forma análoga podemos definir al subsistema asociado a una región  $B$  del espacio (sin intersecciones con  $A$ ) y lo visto en la sección anterior se aplica de igual manera.

Una característica importante de las teorías de campos es que las interacciones son locales. Para ver esto, consideremos, por ejemplo, el lagrangiano de un campo escalar libre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [|\partial_\mu \phi(\mathbf{x})|^2 - m^2 \phi^2(\mathbf{x})]. \quad (2.14)$$

Discretizando esta relación resulta evidente que la derivada del primer término acopla puntos vecinos. Si el hamiltoniano de un sistema  $AB$  contiene acoplamientos entre  $A$  y  $B$ , entonces, en general, el estado fundamental del sistema es un estado entrelazado. La localidad implica que el acoplamiento se da a través de la frontera entre  $A$  y su

complemento. En general, se encuentra que la entropía de entrelazamiento de una QFT en el estado fundamental para una región  $A$  está dominada por un término proporcional al área del borde de  $A$ :

$$S_A \propto \frac{\text{Área}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \dots, \quad (2.15)$$

donde  $d$  es la dimensión del espacio y los puntos suspensivos corresponden a órdenes superiores en  $\epsilon$ . Esta relación se conoce como *ley de área*. De aquí podemos ver que en teoría de campos, dado que debemos tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , la entropía de entrelazamiento es una cantidad divergente. No obstante, es posible deshacerse de esta divergencia calculando cantidades independientes de  $\epsilon$ , como por ejemplo, la *información mutua*, definida para dos subsistemas  $A$  y  $B$  como:

$$I(A : B) \equiv S_A + S_B - S_{AB}. \quad (2.16)$$

La relación (2.15) se dice que es *universal* debido a que no depende de la teoría considerada. En cambio, el factor de proporcionalidad en dicha relación no es universal. En la siguiente sección mencionaremos algunos resultados concretos que serán de utilidad para este trabajo.

### 2.3. Algunos resultados de QFT

Vamos a dar ejemplos para teorías de campos conformes (CFT). Una CFT es una QFT cuya acción cumple invariancia de Weyl, es decir

$$I[\Omega^2 g, \Omega^{-\Delta} \phi] = I[g, \phi], \quad (2.17)$$

donde  $\phi$  es el campo,  $g$  la métrica y  $\Delta$  es la dimensión conforme de  $\phi$ . Por ejemplo, para el campo escalar sin masa  $\Delta = 0$  y para el campo de Dirac sin masa  $\Delta = 1/2$ .

Veamos los siguientes resultados:

- *CFT en un intervalo*

Consideremos una CFT 1+1-dimensional en el estado de vacío. En este caso, la región  $A$  es un intervalo de longitud  $L$ . De acuerdo con [25], la entropía de entrelazamiento es

$$S_L = \frac{c}{3} \log \left( \frac{L}{\epsilon} \right), \quad (2.18)$$

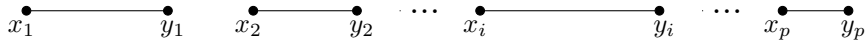
donde  $c$  es la *carga central* de la teoría ( $c > 0$ ); por ejemplo, para un campo escalar  $c = 1$ . En una dimensión espacial ( $d = 1$ ) el borde del intervalo corresponde a los dos puntos extremos, los cuales son de tamaño nulo. Por este motivo, la entropía no posee un término dominante proporcional al área, sino que la contribución más importante proviene del logaritmo de  $\epsilon$ .

■ *Fermión de Dirac en varios intervalos*

Consideremos ahora el caso de  $p$  intervalos cuyos extremos son los puntos  $x_i$  e  $y_i$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ , como se muestra en la figura 2.1. Es decir que la región  $A$  es la unión de los intervalos  $[x_1, y_1] \cup [x_2, y_2] \cup [x_3, y_3] \cup \dots$ . Para el fermión libre no masivo se encuentra que la entropía de entrelazamiento es [26]

$$S_{\cup_i [x_i, y_i]} = \frac{1}{3} \left( \sum_{i,j} \log |x_i - y_j| - \sum_{i < j} \log |x_i - x_j| - \sum_{i < j} \log |y_i - y_j| - p \log(\epsilon) \right). \quad (2.19)$$

Vemos que se obtiene la misma dependencia en  $\epsilon$  que en (2.18), por lo que este resultado también respeta la ley de área. De hecho, comparando el último término de (2.19) con (2.18) podemos notar que cada uno de los extremos del borde de  $A$  aporta una contribución a la entropía  $S \sim -c \log(\epsilon)/6$ .



**Figura 2.1:** Intervalos con extremos  $x_i$  e  $y_i$ , donde  $i = 1, \dots, p$ .

Los resultados (2.18) y (2.19) aplican para el caso en que la métrica es la de Minkowski. Si el espacio es conformemente plano, es decir, dado por

$$ds^2 = [\Omega(x)]^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.20)$$

donde  $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  es la métrica de Minkowski, la entropía de entrelazamiento es

$$S = S_{Mink} + \frac{c}{6} \log \left[ \prod_{i=1}^p \Omega(x_i) \Omega(y_i) \right], \quad (2.21)$$

siendo  $S_{Mink}$  la entropía de entrelazamiento en la geometría plana.

La manera más directa de calcular la entropía de entrelazamiento en un modelo finito es construyendo la matriz densidad reducida  $\rho_A$  (o, al menos, sus autovalores) de manera

exacta o numérica, para luego calcular (2.6). Sin embargo, hacer esto, en general, representa un gran desafío a nivel operacional. Por este motivo, se ha desarrollado un enfoque distinto para abordar el problema: el *truco de réplicas*. Dado que será fundamental para este trabajo, la siguiente sección estará dedicada a explicar en qué consiste este método.

## 2.4. Truco de réplicas

El truco de réplicas es una técnica que permite calcular las *entropías de Rényi* de orden entero positivo en QFT. Se define la entropía de Rényi de orden  $n > 0$  para una matriz densidad  $\rho$  como

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \log [\text{Tr}(\rho^n)]. \quad (2.22)$$

En el límite  $n \rightarrow 1$  esta entropía coincide con la entropía de von Neumann (1.39). Esto se puede ver reescribiendo a (2.22) y (1.39) en términos de los autovalores  $\lambda_i$  de  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho) &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \sum_i \lambda_i^n = \lim_{n \rightarrow 1} - \frac{1}{\sum_j \lambda_j^n} \sum_i \lambda_i^n \log(\lambda_i) = \\ &= - \sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) = S_{vN}(\rho), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde en la tercera igualdad usamos que  $\sum_i \lambda_i = 1$ . Así pues, conocer la entropía de Rényi es útil para calcular la entropía de entrelazamiento de un sistema cuántico. El truco de réplicas proporciona un método para calcular  $\text{Tr}(\rho^n)$  para  $n$  entero.

Para entender en qué consiste el truco de réplicas, comencemos recordando que en QFT la amplitud de transición entre dos estados se puede escribir en términos de la integral de caminos (en unidades  $\hbar = 1$ )

$$\langle \varphi' | e^{-iHt} | \varphi \rangle = \int_{\substack{\phi|_{t=0}=\varphi \\ \phi|_{t=t}=\varphi'}} \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]}, \quad (2.24)$$

donde  $|\varphi\rangle$  y  $|\varphi'\rangle$  son autoestados del campo a tiempo  $t = 0$ , con  $\varphi$  y  $\varphi'$  los autovalores correspondientes,  $I[\phi]$  es la acción de la teoría y  $H$ , el hamiltoniano. Sea

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad (2.25)$$

la matriz densidad térmica, donde  $\beta$  es la temperatura inversa y

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \quad (2.26)$$



es la función de partición canónica; es claro a partir de (2.24) que

$$\langle \varphi' | \rho | \varphi \rangle = \frac{1}{Z} \langle \varphi' | e^{-\beta H} | \varphi \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\substack{\phi|_{t=0}=\varphi \\ \phi|_{t=-i\beta}=\varphi'}} \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]} = \frac{1}{Z} \int_{\substack{\phi|_{\tau=0}=\varphi \\ \phi|_{\tau=\beta}=\varphi'}} \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]}, \quad (2.27)$$

donde en el último paso hemos introducido el tiempo euclídeo  $\tau = it$  y la acción euclídea  $I_E = -iI$ . La función de partición es, entonces,

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi | e^{-\beta H} | \varphi \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \int_{\phi|_{\tau=0}=\phi|_{\tau=\beta}=\varphi} \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]} = \int_{\phi|_{\tau=0}=\phi|_{\tau=\beta}} \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]}. \quad (2.28)$$

Es decir que  $Z$  es una integral sobre campos periódicos en  $\tau$  con período  $\beta$  o, equivalentemente, campos en un cilindro cuya dirección compacta es  $\tau$ , con perímetro  $\beta$ . Este cilindro se representa en la figura 2.2(a). Se puede pensar que la integral (2.27) está definida en el mismo cilindro, pero ahora los campos sobre los que se integra son discontinuos en  $\tau = 0$ , tomando el valor  $\varphi$  en  $\tau = 0^+$  y  $\varphi'$  en  $\tau = 0^-$ . Esto se representa en la figura 2.2(b). A partir de ahora nos concentraremos en el estado de vacío, el cual corresponde a tomar  $\beta \rightarrow \infty$ . En este límite, el cilindro se convierte en un plano, como se ilustra en las figuras 2.2(c) y 2.2(d).

Notemos que en este desarrollo hemos supuesto que la continuación analítica  $t \rightarrow -i\tau$  define un espacio euclídeo. Esto es válido cuando el espacio-tiempo sobre el cual está definida la QFT es estático. Vamos a restringirnos a este tipo de geometrías.

Para obtener la entropía de entrelazamiento asociada a una región del espacio  $A$  necesitamos calcular el elemento de matriz de la matriz densidad reducida  $\rho_A$ . Denotando  $\bar{A}$  a la región complementaria a  $A$ , los autoestados del campo se pueden escribir como

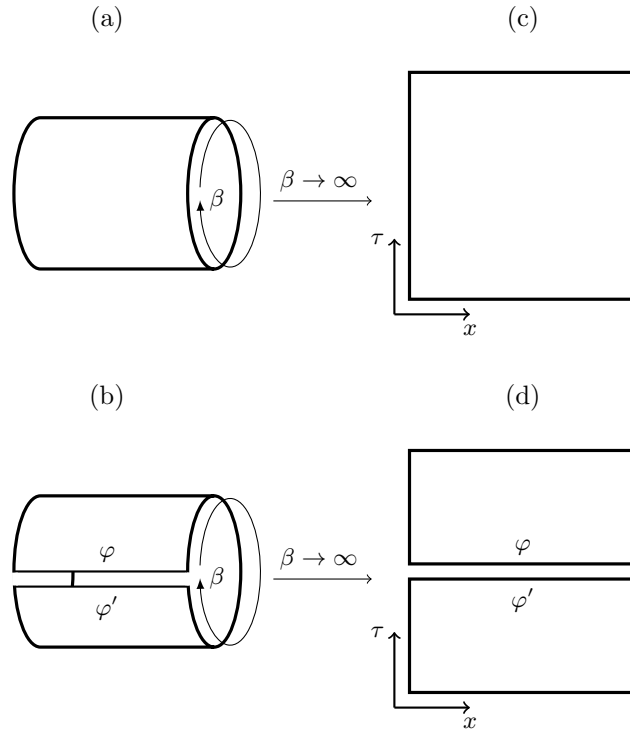
$$|\varphi\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_{\bar{A}}\rangle \equiv |\varphi_A, \varphi_{\bar{A}}\rangle. \quad (2.29)$$

Entonces, el elemento de matriz de  $\rho_A$  resulta

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_A | \rho_A | \varphi_A \rangle &= \langle \varphi'_A | \text{Tr}_{\bar{A}}(\rho) | \varphi_A \rangle = \int \mathcal{D}\varphi_{\bar{A}} \langle \varphi'_A, \varphi_{\bar{A}} | \rho | \varphi_A, \varphi_{\bar{A}} \rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi_{\bar{A}} \int_{\substack{\phi|_{A^+}=\varphi_A \\ \phi|_{A^-}=\varphi'_A \\ \phi|_{\bar{A}}=\varphi_{\bar{A}}}} \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]} = \frac{1}{Z} \int_{\substack{\phi|_{A^+}=\varphi_A \\ \phi|_{A^-}=\varphi'_A}} \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Es decir, el elemento de matriz de  $\rho_A$  es una integral de caminos en el plano euclídeo con un corte en la región  $A$ , como se muestra en la figura 2.3.

Para obtener la entropía de Rényi (2.22) asociada a la región  $A$ , calculemos la traza de



**Figura 2.2:** Integrales de caminos que intervienen en el elemento de matriz de  $\rho$  considerando una única dirección espacial  $x$  (la generalización a dimensión mayor es inmediata). (a) y (b) corresponden a un estado térmico de temperatura inversa  $\beta$  y (c) y (d), al vacío.

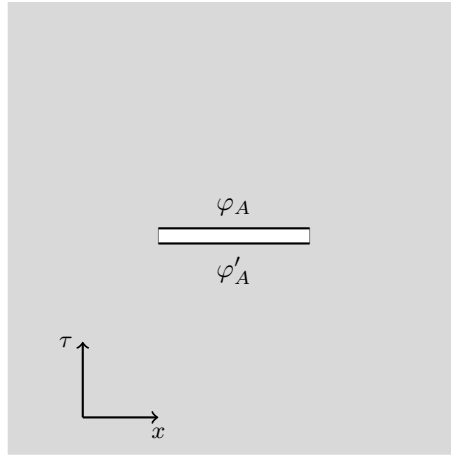
la potencia  $n$ -ésima de  $\rho_A$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\rho_A)^n] &= \int \mathcal{D}\varphi_A \langle \varphi_A | (\rho_A)^n | \varphi_A \rangle = \\ &= \int \mathcal{D}\varphi_A \mathcal{D}\varphi_{A,1} \mathcal{D}\varphi_{A,2} \dots \mathcal{D}\varphi_{A,n-1} \langle \varphi_A | \rho_A | \varphi_{A,1} \rangle \langle \varphi_{A,1} | \rho_A | \varphi_{A,2} \rangle \dots \langle \varphi_{A,n-1} | \rho_A | \varphi_A \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde en la última igualdad utilizamos la propiedad de clausura  $\int \mathcal{D}\varphi_{A,i} |\varphi_{A,i}\rangle \langle \varphi_{A,i}| = \mathbb{1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Usando el resultado (2.30), se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\rho_A)^n] &= \\ &= \frac{1}{Z^n} \int \mathcal{D}\varphi_A \mathcal{D}\varphi_{A,1} \dots \mathcal{D}\varphi_{A,n-1} \int_{\substack{\phi_1|_{A^+} = \varphi_{A,1} \\ \phi_1|_{A^-} = \varphi_A}} \mathcal{D}\phi_1 e^{-I_E[\phi_1]} \dots \int_{\substack{\phi_n|_{A^+} = \varphi_A \\ \phi_n|_{A^-} = \varphi_{A,n-1}}} \mathcal{D}\phi_n e^{-I_E[\phi_n]}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Comparando esta expresión con la integral de caminos (2.30), podemos observar que la ecuación (2.32) es equivalente a integrar sobre una variedad formada por  $n$  copias (o



**Figura 2.3:** Representación de la matriz densidad reducida  $\rho_A$ . La región  $A$  (en este caso, un intervalo) corresponde a la zona del corte dado que  $\varphi_A \neq \varphi'_A$ . Las regiones correspondientes a  $\bar{A}$  permanecen pegadas. En general, si  $A$  es una región formada por un conjunto de intervalos disjuntos, existe un corte por cada uno de dichos intervalos.

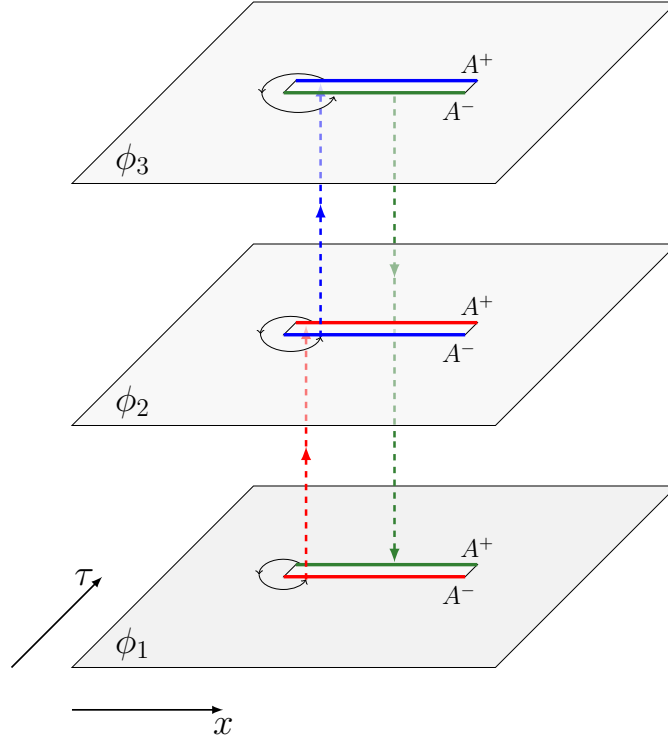
réplicas) del plano de la figura 2.3, de manera tal que dichas copias se pegan cíclicamente unas con otras sobre los cortes, como se muestra en la figura 2.4. Para cada copia, identificamos  $A^-$  en una copia con  $A^+$  en la copia siguiente. Debido a que los extremos del borde de  $A$  pertenecen tanto a  $A^-$  como a  $A^+$ , cada extremo queda identificado consigo mismo. Es decir, cada extremo del borde es un único punto en la variedad replicada. Esto da origen a singularidades cónicas allí. Para entender esto, supongamos que queremos ir de un punto  $P$  en una copia a su réplica  $P'$  en la copia siguiente, como en la figura 2.5. Si  $P$  es suficientemente cercano a un extremo  $Q$  del intervalo, la transformación que lleva  $P$  a  $P'$  es una rotación en un ángulo  $2\pi$ . Debido a que las copias están identificadas cíclicamente, partiendo de  $P$  podemos volver al mismo punto  $P$  realizando una rotación en  $2\pi n$ . La apertura angular es entonces  $2\pi n \neq 2\pi$  (si  $n \neq 1$ ) y, en consecuencia, el punto  $Q$  tiene una singularidad cónica cuando  $n \neq 1$ .

Llamando  $Z_n$  a la integral de caminos sobre la variedad replicada  $n$  veces, resulta

$$\text{Tr} [(\rho_A)^n] = \frac{Z_n}{Z_1^n}, \quad (2.33)$$

donde puede pensarse a  $Z$  como el resultado de integrar sobre una única copia, es decir,  $Z = Z_1$ .

A partir de la ecuación (2.33) podemos escribir a la entropía de Rényi de orden  $n$



**Figura 2.4:** Truco de réplicas. Este método permite calcular la entropía de entrelazamiento de una región  $A$  integrando a la matriz densidad reducida sobre una variedad formada por  $n$  copias del plano euclídeo. Estas copias tienen cortes a lo largo de la región  $A$  debido a que el campo tiene condiciones  $\phi_i|_{A^+} = \phi_{i+1}|_{A^-}$  y  $\phi_i|_{A^-} = \phi_{i-1}|_{A^+}$ . Esto implica que cada copia está “pegada” a la siguiente a través del corte, de manera tal que la variedad se recorre como indican las flechas. Notar que finalmente debemos unir la última copia a la primera.

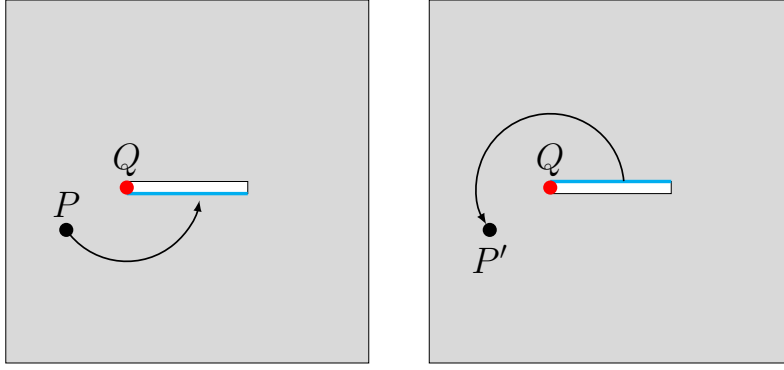
entero como

$$S_n(\rho_A) = \frac{\log(Z_n) - n \log(Z_1)}{1 - n}. \quad (2.34)$$

Este procedimiento que permite calcular  $\text{Tr}[(\rho_A)^n]$  para  $n$  entero positivo a través de una operación realizada sobre una variedad euclídea replicada es lo que se conoce como *el truco de réplicas*. Luego, para obtener la entropía de entrelazamiento debemos extender analíticamente el resultado a  $n$  real y calcular el límite  $n \rightarrow 1$  de  $S_n(\rho_A)$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho_A) = -\frac{\partial}{\partial n} [\log(Z_n) - n \log(Z_1)]_{n=1} \quad (2.35)$$

Todos los resultados de la sección 2.3 se obtienen a partir del truco de réplicas. En la siguiente sección daremos un ejemplo de cómo usar este método para calcular la entropía



**Figura 2.5:** *Dos copias del plano replicado, unidas a través del corte. Para ir de  $P$  a su réplica  $P'$  aplicamos una rotación en  $2\pi$  alrededor del extremo  $Q$  del intervalo.  $Q$  es el mismo punto en todas las copias.*

de entrelazamiento de un campo escalar masivo en un intervalo.

## 2.5. Ejemplo: término de masa

Usando la técnica de réplicas, vamos a calcular ahora lo que ocurre al encender un parámetro de masa  $m$  para un campo escalar [27]. Si la longitud del intervalo  $L$  es tal que  $L \gg m^{-1}$ , entonces lo que esperamos es que los modos de longitud de onda larga ( $\sim L$ ) se vean suprimidos por el término de masa y, por lo tanto, la entropía de entrelazamiento no dependa de  $L$ , sino de  $m^{-1}$ . Los modos UV, por su parte, no deberían verse afectados, de manera que esperamos recuperar la misma divergencia dependiente del cutoff  $\epsilon$  para cada borde.

Si  $L \gg m^{-1}$ , entonces el problema puede simplificarse considerando que un extremo del intervalo se encuentra ubicado en el origen y el otro, en el infinito.

Para obtener la entropía de entrelazamiento, debemos calcular primero la entropía de Rényi (2.34). Veamos que la función de partición  $Z$  del campo escalar viene dada por su función de Green euclídea  $G(x^i, y^i)$ . Para ello, escribamos, a partir de (2.28),

$$\frac{\partial Z}{\partial m^2} = - \int \mathcal{D}\phi \frac{\partial I_E[\phi]}{\partial m^2} e^{-I_E[\phi]}, \quad (2.36)$$

donde, recordemos, estamos realizando la integral de caminos en el plano euclídeo  $(x^1, x^2) =$

$(x, \tau)$ . Usando que la acción euclídea del campo escalar masivo es

$$I_E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^2x \{[\partial_i \phi]^2 + m^2 \phi^2\}, \quad (2.37)$$

la ecuación (2.36) queda

$$\frac{\partial Z}{\partial m^2} = - \int \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]} \int d^2x \frac{\phi^2}{2}. \quad (2.38)$$

De esta manera,

$$\frac{\partial(\log Z)}{\partial m^2} = -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-I_E[\phi]} \int d^2x \frac{\phi^2}{2} = -\frac{1}{2} \int d^2x \langle \phi^2 \rangle, \quad (2.39)$$

donde usamos que el valor de expectación de un operador  $\mathcal{O}$  es

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\mathcal{O} \rho). \quad (2.40)$$

Como  $\langle \phi^2 \rangle = G(x^i, x^i)$ ,

$$\frac{\partial(\log Z)}{\partial m^2} = -\frac{1}{2} \int d^2x G(x^i, x^i), \quad (2.41)$$

y entonces podemos calcular  $Z$  a partir de la función de Green. Generalizando,  $Z_n$  viene dada por la función de Green  $G(x^i, x^i)$ , donde el subíndice  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) indica que estamos evaluando el campo sobre la variedad replicada  $n$  veces. Como ya vimos, esta variedad tiene cortes en cada copia a lo largo del intervalo  $L$ , por donde dichas copias se unen entre sí. En este caso,  $L$  coincide con todo el semi-eje real, de modo que en el extremo ubicado en el origen tendremos una singularidad cónica con ángulo de apertura  $2\pi n$ .

La función de Green euclídea satisface la ecuación diferencial

$$(-\nabla_i + m^2) G(x^i, y^i) = \delta^2(x^i - y^i), \quad (2.42)$$

y entonces  $G(x^i, y^i)$  es la inversa del operador diferencial  $(-\nabla_i + m^2)$ . Podemos invertir este operador diagonalizándolo, es decir, resolviendo la ecuación de autovalores y autovectores, la cual se escribe en coordenadas polares como

$$(-\nabla + m^2) \varphi(r, \theta) = \lambda \varphi(r, \theta), \quad (2.43)$$

donde  $\lambda$  es el autovalor asociado a la autofunción  $\varphi(r, \theta)$ . Notemos que  $r \in (0, +\infty)$  y  $\theta \in (0, 2\pi n)$  con identificación periódica  $\theta = \theta + 2\pi n$ , siendo que la variedad replicada es un cono. Propongamos una solución separable  $\varphi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ . Esta solución debe ser

regular cuando  $r \rightarrow 0$  y debe cumplir la condición de periodicidad en  $\theta$ , de manera que, resolviendo (2.43), se obtiene

$$\varphi_{k,\nu}(r, \theta) = N e^{i\theta k/n} J_{|k/n|}(\nu r), \quad (2.44)$$

siendo  $J_{|k/n|}(\nu r)$  la función de Bessel de orden  $|k/n|$ ,  $k$  entero,  $\nu = \sqrt{\lambda - m^2} \in (0, +\infty)$  y  $N$  una constante de normalización tal que

$$\int d^2 x^\mu \varphi_{k,\nu}^*(r, \theta) \varphi_{k',\nu'}(r, \theta) = \delta_{k,k'} \delta(\nu - \nu'). \quad (2.45)$$

Dicha constante resulta  $N = \left(\frac{\nu}{2\pi n}\right)^{1/2}$ .

Hecho esto, estamos en condiciones de invertir la relación (2.42). Como  $\{\varphi_{k,\nu}(r, \theta)\}$  es una base completa y ortonormal, podemos expandir

$$G(r, \theta, r', \theta') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\nu a_{k,\nu}(r', \theta') \varphi_{k,\nu}(r, \theta). \quad (2.46)$$

Reemplazando esta relación en la ecuación (2.42) y usando (2.43) se obtiene que

$$a_{k,\nu}(r', \theta') = \frac{1}{\lambda} \varphi_{k,\nu}^*(r', \theta'), \quad (2.47)$$

con  $\lambda = \nu^2 + m^2$ . Ahora, evaluemos la función de Green en los puntos de coincidencia e integremos en  $\nu$ ,  $\theta$  y  $r$ . El resultado es

$$\frac{\partial(\log Z_n)}{\partial m^2} = -\frac{1}{2} \int d^2 x G(x^i, x^i) = \frac{1}{m^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{|k|}{4n} + U \right), \quad (2.48)$$

donde  $U$  es una constante divergente independiente de  $k$  y de  $n$ . Esta divergencia se puede hacer finita si consideramos  $r \in (0, R)$ , es decir, si integramos en una variedad cónica de radio  $R$  finito. De cualquier manera, esta contribución se cancela al calcular (2.34), y  $U$  no aparece en el resultado final. Por otro lado, la sumatoria sobre  $k$  también diverge, lo cual es esperable dado que la función de Green evaluada en los puntos de coincidencia es divergente, incluso en el plano sin singularidades cónicas. Ésta es una divergencia UV que podemos regularizar discretizando el ángulo  $\theta$  con una separación  $\delta\theta$  pequeña. Si el cutoff es el mismo para cualquier valor de  $n$ , entonces las divergencias deben cancelarse en (2.34). Equivalentemente, podemos pensar a la discretización en términos del momento conjugado  $k/n$  e introducir un cutoff dado por una función  $F(|k|/n)$  que cumpla  $F(0) = 1$  y que se vaya a cero suficientemente rápido cuando  $|k|/n \rightarrow \infty$ . Una opción es elegir

$F(|k|/n) = e^{-s|k|/n}$ , donde  $s$  es un parámetro que haremos tender a cero una vez calculada la sumatoria. Así,

$$\frac{\partial(\log Z_n)}{\partial m^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|k|}{4n} e^{-s|k|/n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2n} e^{-sk/n}. \quad (2.49)$$

Una forma más precisa de regularizar el resultado se logra aplicando la fórmula de Euler-MacLaurin, como se explica en [27]. La expresión final es la misma que la obtenida a partir de (2.49):

$$\frac{\partial(\log Z_n - n \log Z_1)}{\partial m^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2m^2} \left[ \frac{e^{s/n}}{n(e^{s/n} - 1)^2} + \frac{n e^s}{(e^s - 1)^2} \right] = \frac{1}{24m^2} \left( n - \frac{1}{n} \right). \quad (2.50)$$

Integrando e incluyendo el cutoff UV de manera que el resultado sea adimensional, (2.34) queda

$$S_n = -\frac{n+1}{12n} \log(m\epsilon), \quad (2.51)$$

por lo que, finalmente, la entropía de entrelazamiento se obtiene igualando la ecuación anterior en  $n = 1$ :

$$S_L = -\frac{1}{6} \log(m\epsilon). \quad (2.52)$$

Comprobamos así que cada extremo del intervalo contribuye a la entropía con  $S_L \sim -1/6 \log(m\epsilon)$  cuando  $L \gg m^{-1}$ .



# Capítulo 3

## Fórmula de islas

En este capítulo estudiaremos los desarrollos que dan lugar a una fórmula para el cálculo correcto de la entropía de von Neumann de la radiación: *la fórmula de islas*.

### 3.1. Cálculo de Gibbons-Hawking de la entropía de un agujero negro

En la sección 2.4 vimos que la función de partición a temperatura  $\beta^{-1}$  de una QFT en Minkowski o en cualquier espacio-tiempo estático es

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]}, \quad (3.1)$$

donde  $\phi$  es un campo en el cilindro de perímetro  $\beta$  (ver figura 2.2(a)). Dado que en este capítulo trabajaremos siempre con la acción euclídea, omitiremos el subíndice  $E$  en la acción  $I[\phi]$ . El espacio-tiempo debe ser estático para que admita una continuación euclídea. En otras palabras, debe existir una coordenada temporal  $t$  tal que  $\partial_t$  sea un vector de Killing perpendicular a hipersuperficies. La dirección periódica del cilindro es la versión euclídea de dicha coordenada  $t$ .

Si consideramos que la geometría es un grado de libertad, podemos definir, por analogía con (3.1), la función de partición gravitatoria integrando sobre métricas. Como la geometría no está fija, ya no podemos asegurar que exista un Killing temporal para cada una de ellas. Sólo podemos especificar las condiciones de borde en el infinito, tal como hacemos para los campos de materia  $\phi$ . Por lo tanto, vamos a imponer la condición de que las métricas

consideradas sean aquellas que en el infinito tienden a Minkowski<sup>1</sup>. Por el momento, supongamos que la teoría es de gravedad pura, sin campos  $\phi$ . Así, la función de partición gravitatoria térmica es

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}g e^{-I[g]}, \quad (3.2)$$

donde  $g$  son las geometrías euclídeas regulares asintóticamente planas con condición de borde  $\tau = \tau + \beta$  en el tiempo euclídeo. Esta última condición es el análogo a integrar sobre los campos  $\phi$  en un cilindro: en la versión de gravitatoria, integramos sobre métricas cuyo borde sea un círculo de perímetro  $\beta$ . Este enfoque fue propuesto por primera vez por Gibbons y Hawking [28]. Notemos que la integral sobre métricas incluye también, implícitamente, una suma sobre topologías.

Resolver (3.2) exactamente implicaría tener una teoría de gravedad cuántica. Como no la tenemos, una aproximación que podemos hacer es considerar que la contribución dominante a la función de partición es

$$Z(\beta) \simeq e^{-I(M_\beta)}, \quad (3.3)$$

donde  $M_\beta$  es la solución clásica de las ecuaciones de movimiento con acción más pequeña. Ésta es la *aproximación de punto silla*. Vamos a asumir que la solución  $M_\beta$  es la del agujero negro de Schwarzschild euclídeo, puesto que su acción clásica es menor que la del espacio plano [28]. Esta solución, esquematizada en la figura 3.1, es la métrica de la ecuación (1.19) con condiciones de contorno  $\tau = \tau + \beta$  en  $r \rightarrow \infty$ .

Conociendo  $Z(\beta)$  podemos calcular la entropía gravitatoria a partir de su expresión termodinámica usual

$$S = -(\beta \partial_\beta - 1) \log Z(\beta). \quad (3.4)$$

Eligiendo unidades tales que la temperatura inversa es  $\beta = 1$ , lo anterior se puede escribir como

$$S = -(\partial_\beta - 1) \log Z(\beta)|_{\beta=1} = -\partial_\beta [\log Z(\beta) - \beta \log Z(1)]|_{\beta=1}. \quad (3.5)$$

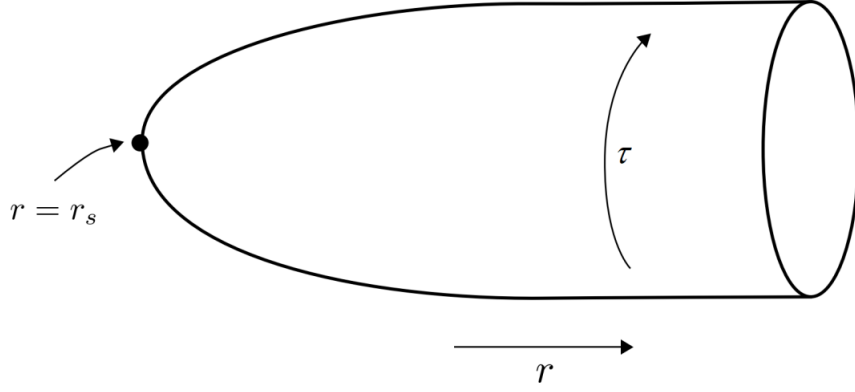
Usando la aproximación de punto silla (3.3) obtenemos

$$S \simeq \partial_\beta [I(M_\beta) - \beta I(M_1)]|_{\beta=1}, \quad (3.6)$$

donde  $M_1$  corresponde al agujero negro euclídeo cuyo borde es un círculo de perímetro  $\beta = 1$ .

---

<sup>1</sup>En la siguiente sección consideraremos constante cosmológica  $\Lambda < 0$  y entonces la condición de borde para la geometría será Anti-de Sitter (AdS) en vez de Minkowski.



**Figura 3.1:** Continuación euclídea de la solución de Schwarzschild en donde el borde de la geometría es un círculo de perímetro  $\beta$  en la dirección del tiempo imaginario  $\tau$ . Cada punto del diagrama corresponde a una 2-esfera de radio  $r$ . La variedad tiene simetría  $U(1)$  y el punto fijo de dicha simetría es  $r = r_s$ .

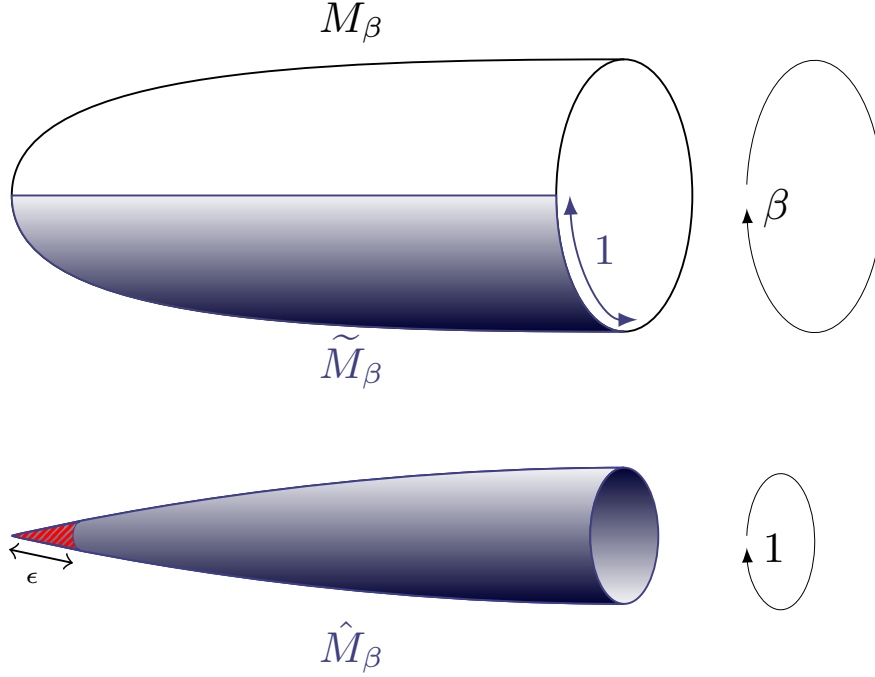
Nuestro objetivo es, entonces, calcular la acción euclídea  $I(M_\beta)$ . Para ello, consideremos una sección de  $M_\beta$  como la que se muestra en la figura 3.2, la cual llamaremos  $\widetilde{M}_\beta$ . Esta sección es una región cuyo borde tiene longitud 1. Debido a que la geometría de Schwarzschild es invariante ante traslaciones en la dirección del Killing temporal  $\partial_t$ , la variedad  $M_\beta$  obtenida a partir de la compactificación en el tiempo euclídeo  $\tau$  posee una simetría  $U(1)$ . Por este motivo, la acción cumple

$$I(M_\beta) = \beta I(\widetilde{M}_\beta). \quad (3.7)$$

En vez de calcular  $I(\widetilde{M}_\beta)$  directamente, vamos a ver un procedimiento que podremos aplicar luego a casos con una simetría un poco más general que la simetría  $U(1)$ . Consideremos a la variedad  $\widehat{M}_\beta$  que resulta de hacer la identificación periódica  $\tau = \tau + 1$  en la geometría  $\widetilde{M}_\beta$ , como se muestra en la figura 3.2. Esta variedad es topológicamente equivalente a  $M_\beta$ , pero, a diferencia de  $M_\beta$ , posee una singularidad cónica en el punto fijo de la simetría  $U(1)$ , es decir, en  $r = r_s$ . El defecto angular de esta singularidad es la diferencia de longitud de la circunferencia de radio unidad. En el caso suave, dicha longitud es  $2\pi$ . Para  $\widehat{M}_\beta$ , en cambio, como la periodicidad de  $\tau$  es 1 en vez de  $\beta$ , la longitud se modifica por un factor  $\beta^{-1}$  y entonces el defecto angular es

$$\delta = 2\pi(1 - \beta^{-1}). \quad (3.8)$$

La acción de  $\widetilde{M}_\beta$  puede escribirse como



**Figura 3.2:** Arriba, variedad euclídea original  $M_\beta$  cuyo borde es un círculo de perímetro  $\beta$ . En azul se indicó una sección  $\widetilde{M}_\beta$  de longitud 1. Abajo, variedad  $\widehat{M}_\beta$  cuyo borde es un círculo de perímetro 1 y que posee una singularidad cónica en el punto fijo de la simetría  $U(1)$ . Para estudiar la divergencia de esta singularidad, tomamos una pequeña sección de longitud  $\epsilon$  en  $r$  alrededor del punto fijo  $r = r_s$ .

$$I(\widetilde{M}_\beta) = I(\widehat{M}_\beta) - I_{sing}, \quad (3.9)$$

donde  $I_{sing}$  es la contribución de la singularidad cónica:

$$I_{sing} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{r \sim r_s} d^4x \sqrt{g} R_\wedge, \quad (3.10)$$

con  $R_\wedge$  el escalar de curvatura del cono. La región de integración es la punta del cono  $r = r_s + \epsilon$ , como se muestra en la figura 3.2, siendo  $\epsilon \ll r_s$ . Dado que aquí  $r$  es infinitesimalmente cercano a  $r_s$ , podemos aproximar la variedad por la 2-esfera de radio  $r_s \times$  cono. Así,  $g = g_{S^2(r_s)} g_\wedge$ , siendo  $g_{S^2(r_s)}$  el determinante de la métrica de la 2-esfera y  $g_\wedge$ , del cono. Por lo tanto, (3.10) resulta

$$I_{sing} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{S^2(r_s)} d^2x \sqrt{g_{S^2(r_s)}} \int_\wedge d^2x \sqrt{g_\wedge} R_\wedge = -\frac{A_h}{16\pi G} \int_\wedge d^2x \sqrt{g_\wedge} R_\wedge, \quad (3.11)$$

donde  $A_h$  es el área del horizonte de eventos (1.5). El escalar de curvatura  $R_\wedge$  diverge en  $r = r_s$ . Para ver cómo lo hace, suavicemos la punta del cono reemplazándola por un

casquete esférico, como se ilustra en la figura 3.3. El escalar de curvatura de una esfera de radio  $\rho$  es  $2/\rho^2$ ; entonces, integrando sobre el casquete obtenemos

$$\int d^2x \sqrt{g_{S(\rho)}} \frac{2}{\rho^2} = \frac{2}{\rho^2} \int_0^{\pi/2-\alpha} d\theta \rho^2 \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi(1 - \sin \alpha), \quad (3.12)$$

donde  $\alpha$  es la mitad del ángulo de apertura del cono (ver figura 3.3). Este resultado es independiente de  $\rho$ , por lo que no varía cuando hacemos tender  $\rho \rightarrow 0$  al acercarnos a la singularidad cónica. En consecuencia,

$$I_{sing} = -\frac{A_h}{4G}(1 - \sin \alpha). \quad (3.13)$$

El déficit angular del cono es

$$\delta = 2\pi(1 - \sin \alpha). \quad (3.14)$$

Por lo tanto, reemplazando esto en (3.13) y usando que para  $\hat{M}_\beta$  el déficit angular es (3.8), encontramos que

$$I_{sing} = -\frac{A_h}{4G}(1 - \beta^{-1}). \quad (3.15)$$

A partir de este resultado y de la ecuación (3.9), hallamos que la acción euclídea (3.7) es

$$I(M_\beta) = \beta I(\hat{M}_\beta) + (\beta - 1)\frac{A_h}{4G}. \quad (3.16)$$

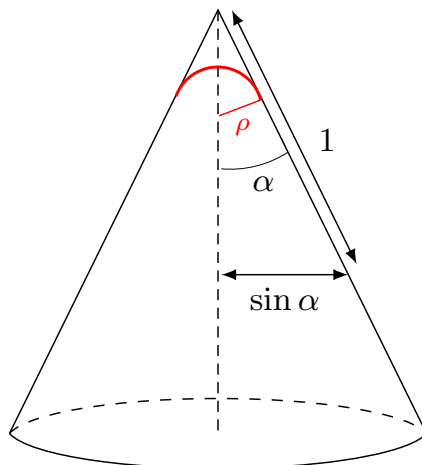
Por consiguiente, la entropía (3.6) resulta

$$S = \partial_\beta \left\{ \beta \left[ I(\hat{M}_\beta) - I(M_1) \right] + (\beta - 1)\frac{A_h}{4G} \right\}_{\beta=1}. \quad (3.17)$$

Enfoquémonos en el primer término. Por cómo definimos  $\hat{M}_\beta$ , es evidente que  $\hat{M}_1$  es igual a  $M_1$ . Si consideramos  $\beta$  muy próximo a 1,  $\hat{M}_\beta$  representa una pequeña variación respecto a  $M_1$  con la misma condición de borde. Debido a que  $M_1$  es solución de las ecuaciones de Einstein, esta variación es  $\delta I = 0$ . Por lo tanto,

$$S = \frac{A_h}{4G} \quad (3.18)$$

y hemos re-derivado así la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro. Ésta viene dada por el área de la superficie de codimensión 2 que es un punto fijo de la simetría  $U(1)$ . Cabe notar que en esta derivación nos hemos apoyado en la hipótesis de que la contribución de mínima acción es una solución conocida de las ecuaciones de movimiento. En la siguiente sección relajaremos esta condición.



**Figura 3.3:** Cono de apertura angular  $2\alpha$ . La curvatura es divergente en la punta del cono, así que regularizamos reemplazando la punta por una esfera de radio  $\rho$  y tomando el límite  $\rho \rightarrow 0$ .

Hemos supuesto que nuestra teoría es de gravedad pura sin materia, pero este resultado es más general. En efecto, si agregamos un campo  $\phi$  en la integral de caminos (3.2), llegaremos nuevamente a la conclusión (3.18) puesto que la densidad lagrangiana de  $\phi$  no tiene divergencias en la punta del cono y entonces no contribuye al término  $I_{sing}$ . Lo único que cambia es la solución de mínima acción. Por ejemplo, si se trata de un campo electromagnético, la contribución dominante es la de Reissner-Nordström en vez de la de Schwarzschild.

## 3.2. Fórmula de Ryu-Takayanagi

En la sección anterior re-obtuvimos la entropía termodinámica de un agujero negro a partir del cálculo de Gibbons-Hawking, el cual se basa en la aproximación de la integral de caminos gravitatoria por la contribución dominante, es decir, por la solución clásica de las ecuaciones de movimiento con una condición de borde específica. En esta sección, trataremos un resultado que fue originalmente inspirado en la entropía del agujero negro: la fórmula de Ryu-Takayanagi [13]. A pesar de haber sido formulada en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, veremos que el procedimiento utilizado para derivar esta fórmula guarda una estrecha similitud con el cálculo de Gibbons-Hawking de la sección anterior. En esta derivación, el truco de réplicas tendrá un papel importante.

La correspondencia AdS/CFT propuesta por Maldacena en 1997 [29] establece la equivalencia entre una teoría de campos conforme definida en un espacio-tiempo fijo  $(d + 1)$ -dimensional y una teoría dual de gravedad cuántica definida en un espacio-tiempo asintóticamente anti-de Sitter en  $d + 2$  dimensiones. Se considera a la CFT viviendo en el borde de AdS, como se puede ver en la figura 3.4. En este contexto, Ryu y Takayanagi propusieron en 2007 [13, 14] una fórmula para calcular la entropía de entrelazamiento de un subsistema  $A$  de la CFT a partir del área de una superficie minimal de codimensión 2 en la geometría dual:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G}. \quad (3.19)$$

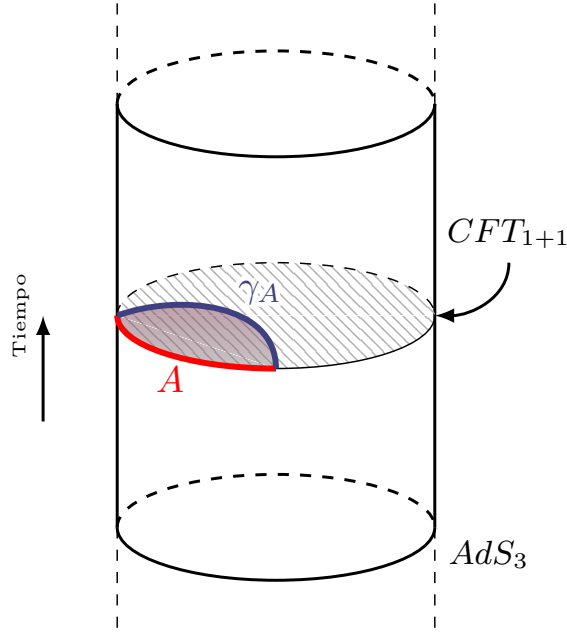
La superficie  $\gamma_A$  está definida a partir de las siguientes condiciones:

- debe tener el mismo borde que la región  $A$ ,
- debe ser *homóloga* a  $A$ , es decir, la unión de  $A$  y  $\gamma_A$  debe ser la frontera de una superficie espacial de dimensión  $d + 1$  en la geometría dual, y
- la superficie  $\gamma_A$  debe ser un extremo del funcional de área, y si hay más de un extremo,  $\gamma_A$  es el que tiene área mínima.

Es sencillo mostrar que esta fórmula respeta la condición de subaditividad fuerte (2.11) y también que con ella se recupera el resultado (2.18) para la entropía de una CFT en un intervalo. La fórmula ha pasado diversas pruebas de consistencia (ver, por ejemplo, [30, 31], donde se prueba para el caso de  $AdS_3$  puro), hasta ser finalmente demostrada por Lewkowycz y Maldacena en [19]. En lo que sigue, nos centraremos en dar un desarrollo de esta derivación.

Llamemos  $B$  al borde de AdS, donde vive la CFT. El truco de réplicas nos permite calcular la entropía de entrelazamiento de una región espacial  $A$  de  $B$  a partir de la fórmula (2.35), donde  $Z_n$  es la función de partición en la variedad  $B_n$  que resulta de considerar  $n$  copias de  $B$ . Como ya se explicó en la sección 2.4, estas copias se encuentran unidas a través de los cortes correspondientes a la región  $A$ , dando lugar a singularidades cónicas en el borde de  $A$ . En la figura 3.5 se representa a la variedad  $B_n$  para  $d = 1$  dimensiones espaciales. Como se puede ver,  $B_n$  es invariante ante **permutaciones cíclicas** de las hojas. Estas permutaciones forman el grupo  $\mathbb{Z}_n$  y decimos que  $B_n$  tiene *simetría de réplicas*.

En la figura 3.5 se indican los extremos del intervalo  $A$  en cada copia. Estos puntos son invariantes ante las transformaciones del grupo  $\mathbb{Z}_n$  puesto que cada punto extremo está



**Figura 3.4:** Correspondencia AdS/CFT y conjetura de Ryu-Takayanagi. En este caso se consideró a la geometría dual  $AdS_{d+2}$  puro, con  $d = 1$ . La CFT está definida en el cilindro que constituye el borde de  $AdS_3$ . La fórmula de Ryu-Takayanagi establece que para un intervalo espacial  $A$  del borde, la entropía de entrelazamiento de la CFT viene dada por el área (en este caso, longitud) de la superficie (intervalo) minimal  $\gamma_A$  en el bulk. Los extremos de  $\gamma_A$  coinciden con los de  $A$  y  $\gamma_A \cup A$  es la frontera de una superficie espacial en el bulk.

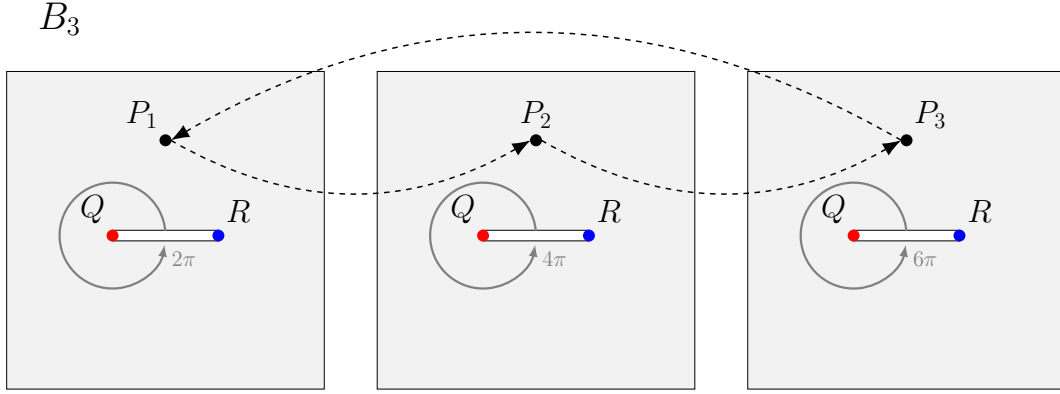
identificado consigo mismo en todas las copias (ver sección 2.4). En otras palabras, realizar permutaciones cíclicas mantiene a los puntos del borde de  $A$  fijos. Decimos entonces que son **puntos fijos de la simetría de réplicas**. Alrededor de uno de estos puntos, la simetría de réplicas es una simetría de rotación en un múltiplo entero de  $2\pi$ .

En principio, la fórmula (2.35) del truco de réplicas sólo puede ser aplicada cuando el estado global es el vacío o un estado térmico ya que la derivamos suponiendo una matriz densidad de la forma (2.27). Sin embargo, podemos considerar un estado más general  $\tilde{\rho}$  dado por

$$\langle \varphi' | \tilde{\rho} | \varphi \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ -I[\phi] - \int d^{(d+1)}x J\phi \right], \quad (3.20)$$

donde  $J = J(x)$  es una fuente. Así, al tener una representación del elemento de matriz de  $\tilde{\rho}$ , podemos utilizar el truco de réplicas tal como lo hicimos antes, tan sólo agregándole el





**Figura 3.5:** Transformación del grupo  $\mathbb{Z}_n$  con  $n = 3$ . Los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son equivalentes entre sí, entonces decimos que la variedad tiene simetría de réplicas. Los puntos  $Q$  y  $R$  son puntos del borde de  $A$  y son puntos fijos de la simetría de réplicas. Cerca de los puntos fijos, la simetría es una simetría de rotación en un múltiplo entero de  $2\pi$ .

término de la fuente a la acción. En este caso, cada hoja de  $B_n$  tiene una copia de  $J(x)$ .

La correspondencia AdS/CFT nos proporciona una fórmula para calcular la función de partición  $Z_n$ :

$$Z_n = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi e^{-I[g,\phi]}, \quad (3.21)$$

donde el diferencial  $\mathcal{D}g$  indica que estamos integrando sobre las métricas que tienen como borde a  $B_n$  y el diferencial  $\mathcal{D}\phi$ , que estamos integrando sobre los campos que cumplen la condición de contorno

$$\phi|_{B_n} = J_n \quad (3.22)$$

con  $J_n$  denotando a las  $n$  copias de  $J$ . La acción es

$$I[g, \phi] = I_{EH}[g] + I_{mat}[g, \phi], \quad (3.23)$$

siendo  $I_{EH}[g]$  la acción euclídea de Einstein-Hilbert de la geometría e  $I_{mat}[g, \phi]$ , la acción euclídea de los campos en dicha geometría.

Vamos a considerar  $J = 0$  por simplicidad. Usando la aproximación de punto silla, tenemos

$$Z_n \simeq e^{-I_{EH}(M_n)}, \quad (3.24)$$

siendo  $M_n$  la solución de las ecuaciones de movimiento en el *bulk* con acción más pequeña y condición de borde  $B_n$ . Aquí no hay contribución de  $I_{mat}[g, \phi]$  porque la solución de las

ecuaciones de movimiento con condición de contorno  $\phi|_{B_n} = 0$  es  $\phi = 0$ . Usando (2.35), la entropía de entrelazamiento se escribe como

$$S = \partial_n [I_{EH}(M_n) - n I_{EH}(M_1)]_{n=1}. \quad (3.25)$$

Como ya mencionamos, cerca de los puntos fijos la simetría de réplicas se puede pensar como una simetría de rotación en un múltiplo entero de  $2\pi$ . Vamos a asumir que **la solución  $M_n$  tiene la misma simetría de réplicas que su borde  $B_n$**  [19]. Por lo tanto, podemos representar esta geometría como se muestra en la figura 3.6, donde se suprimieron  $d$  dimensiones para hacer posible la ilustración. La curva elegida para representar al borde  $B_n$  en 3.6 es la circunferencia de longitud  $2\pi n$  alrededor de uno de los puntos fijos, como la mostrada en la figura 3.5 alrededor del extremo  $Q$ . Se ve así que la simetría de réplicas es una simetría de traslación (en múltiplos enteros de  $2\pi$ ) sobre esta curva y dicha simetría se extiende, por hipótesis, al interior del *bulk*. La situación es análoga a la de la cuenta de Gibbons-Hawking descrita en la sección anterior, sólo que ahora en vez de tener simetría  $U(1)$  (la cual aplica sólo para describir estados térmicos) tenemos simetría de réplicas. Además, la diferencia está en que no conocemos *a priori* la solución de mínima acción.

Como antes, escribamos la acción de  $M_n$  en términos de una sección  $\widetilde{M}_n$  de  $M_n$  cuyo borde es de longitud  $2\pi$ . Como consecuencia de la simetría de réplicas obtenemos nuevamente:

$$I_{EH}(M_n) = n I_{EH}(\widetilde{M}_n). \quad (3.26)$$

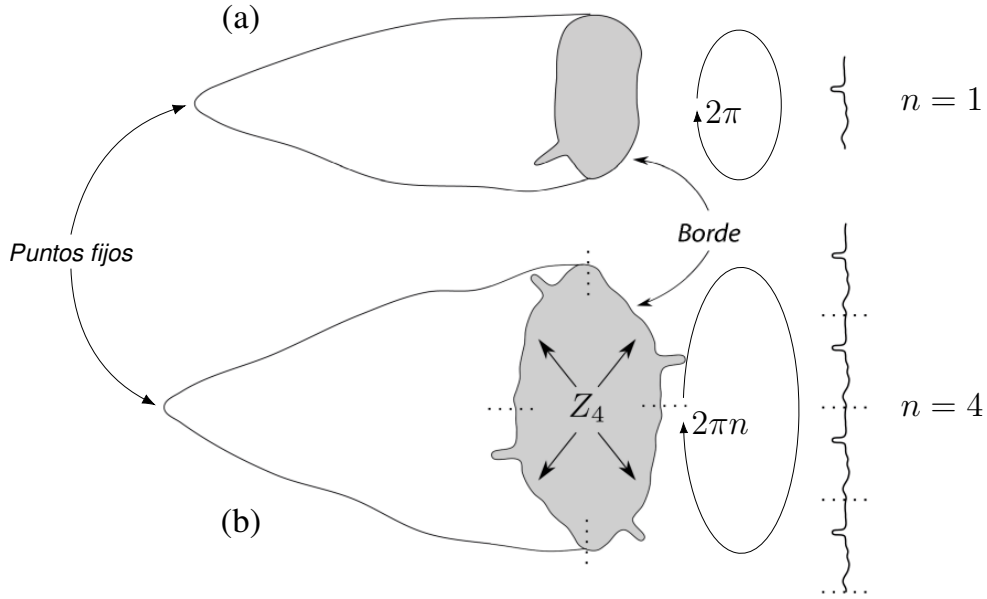
Uniendo los extremos de  $\widetilde{M}_n$  construimos la variedad  $\hat{M}_n$ , la cual posee una singularidad cónica en cada uno de los puntos fijos de la simetría de réplicas, esto es, en la punta del cigarro de la figura 3.6. El déficit angular en este caso es

$$\delta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (3.27)$$

Al igual que en la sección anterior,

$$I_{EH}(\widetilde{M}_n) = I_{EH}(\hat{M}_n) - I_{sing} = I_{EH}(\hat{M}_n) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\text{Área}(X_n)}{4G} \equiv I_n(\hat{M}_n, X_n), \quad (3.28)$$

donde  $X_n$  es la superficie de puntos fijos de la simetría de réplicas. A pesar de que no es evidente en la figura 3.6 dado que  $X_n$  se representa como un punto ubicado en la punta del cigarro, esta superficie está anclada al borde de  $A$  ya que los extremos de  $A$  son puntos fijos.



**Figura 3.6:** Geometrías  $M_n$  con  $n = 1$  en (a) y  $n = 4$  en (b). Se grafica el borde en una única dimensión, la cual fue elegida de manera que representa una rotación alrededor de uno de los puntos fijos de  $A$ . La periodicidad es  $2\pi n$ . Los picos representan la simetría de réplicas: las rotaciones en múltiplos enteros de  $2\pi$  mantienen  $M_n$  invariante. La punta del cigarro está conformada por los puntos fijos frente a estas rotaciones.

A partir de (3.26) y (3.28), obtenemos

$$I_{EH}(M_n) = nI_n(\hat{M}_n, X_n). \quad (3.29)$$

Como  $M_n$  debe extremar la acción, entonces  $(\hat{M}_n, X_n)$  debe extremar  $I_n$ . En principio,  $\hat{M}_n$  y  $X_n$  no son independientes puesto que  $X_n$  es la superficie donde  $\hat{M}_n$  es singular. Sin embargo, podemos considerarlas independientes debido a que la ecuación de movimiento ya fuerza esa relación [32]. Notemos que para que  $X_n$  sea extremo de  $I_n$ , debe extremar el área en la geometría  $\hat{M}_n$  (y si hay más de un extremo, debe ser el de área mínima). Las condiciones de contorno son tales que  $\hat{M}_n$  tiene a  $B_1$  como borde, y el borde de  $X_n$  coincide con el borde de  $A$ , dado que éstos son los puntos fijos en el borde  $B_1$ .

Hasta aquí hemos considerado  $n$  entero, pero para calcular la entropía es necesario hacer la extensión analítica a  $n$  real dado que la fórmula (3.25) incluye una derivada respecto de  $n$ . Esta extensión se puede hacer ya que la ecuación (3.29) tiene sentido para cualquier  $n$  real.

Reemplazando (3.29) y (3.28) en (3.25) obtenemos

$$S = \partial_n \left\{ n \left[ I_{EH}(\hat{M}_n) - I_{EH}(\hat{M}_1) \right] + (n-1) \frac{\text{Área}(X_n)}{4G} \right\}_{n=1}. \quad (3.30)$$

$M_1$  es la geometría dual de la correspondencia AdS/CFT asociada al estado global de la CFT en el borde  $B_1 \equiv B$ . Análogamente al caso de Gibbons-Hawking, como  $M_1$  es extremo de la acción y  $\hat{M}_n$  tiene el mismo borde que  $M_n$ , para  $n$  muy próximo a 1 el término entre corchetes en la ecuación (3.30) se anula. Por lo tanto, nos queda

$$S = \frac{\text{Área}(X)}{4G}, \quad (3.31)$$

que es precisamente la fórmula de Ryu-Takayanagi para la entropía de entrelazamiento de una región  $A$  de una CFT, siendo  $X = X_1 = \gamma_A$  la superficie de área mínima en el bulk y que tiene como borde a la frontera de  $A$ .

Para derivar el resultado (3.31) consideramos soluciones clásicas del *bulk*. Esto corresponde a una teoría con infinitos grados de libertad en el borde de AdS. En la siguiente sección veremos cómo incluir las correcciones cuánticas a este resultado, lo cual fue logrado en [15, 16].

### 3.3. Correcciones cuánticas a la fórmula de Ryu-Takayanagi

La aproximación de punto silla (3.24) corresponde al orden más bajo en  $\hbar$ . Esto resulta evidente al restituir unidades en la expresión de la función de partición  $Z_n$ :

$$Z_n = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi \exp \left( -\frac{1}{\hbar} I[g, \phi] \right). \quad (3.32)$$

Para obtener el resultado a todo orden en  $\hbar$ , deberíamos resolver exactamente esta integral. En principio, esto no es posible sin una teoría cuántica de la gravedad. Ahora bien, podemos ir a todo orden en  $\hbar$  si consideramos un régimen en el que las fluctuaciones de la métrica son despreciables frente a las de los campos (régimen semi-clásico) [15, 16]. Esto corresponde a considerar  $N \gg 1$  campos  $\phi$  manteniendo el producto  $NG$  finito. Para calcular  $Z_n$  en este régimen, escribamos

$$Z_n = \int \mathcal{D}g e^{-I_{EH}[g]} \int \mathcal{D}\phi e^{-I_{mat}[g, \phi]}. \quad (3.33)$$

La integral sobre los campos  $\phi$  es la función de partición de dichos campos sobre una dada métrica  $g$ , es decir,

$$Z_{mat}[g] = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_{mat}[g, \phi]}. \quad (3.34)$$

Definiendo una acción efectiva

$$I_{ef} = I_{EH}[g] - \log(Z_{mat}[g]), \quad (3.35)$$

la ecuación (3.33) queda escrita como

$$Z_n = \int \mathcal{D}g e^{-I_{ef}[g]} \simeq e^{-I_{ef}(M_n)}, \quad (3.36)$$

donde en el último paso aproximamos la función de partición por la solución  $M_n$  que minimiza  $I_{ef}$  con condición de borde  $\partial M_n = B_n$ , siendo  $B_n$  la variedad construida a partir del truco de réplicas. Las soluciones que extreman  $I_{ef}$  son aquellas que satisfacen la ecuación de Einstein semi-clásica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (3.37)$$

con  $G_{\mu\nu}$  el tensor de Einstein y  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  el valor de expectación del tensor de energía-momento de los campos de materia.

Usando la aproximación (3.36), la entropía de entrelazamiento queda

$$S = \partial_n [I_{ef}(M_n) - n I_{ef}(M_1)]_{n=1}. \quad (3.38)$$

Nuevamente, vamos a suponer que la solución  $M_n$  tiene simetría de réplicas. Utilizando el mismo método que en la sección anterior, construimos  $\widetilde{M}_n$  y  $\hat{M}_n$ , cuya superficie de puntos fijos es  $X_n$ , y escribimos a la parte gravitatoria de la acción como

$$I_{EH}(M_n) = n I_{EH}(\hat{M}_n) + (n-1) \frac{\text{Área}(X_n)}{4G}. \quad (3.39)$$

Para hallar una expresión para  $\log Z_{mat}(M_n)$ , recordemos la ecuación (2.34) del truco de réplicas. En este caso,  $M_n$  es la variedad replicada formada por  $n$  copias de  $\hat{M}_n$ . De acuerdo con el truco de réplicas, la entropía de Rényi de orden  $n$  de los campos sobre una región espacial de  $\hat{M}_n$  con borde  $X_n$  es

$$S_n(X_n) = \frac{\log Z_{mat}(M_n) - n \log Z_{mat}(\hat{M}_n)}{1-n}. \quad (3.40)$$

Aquí hay cierta ambigüedad en la elección de la región de  $\hat{M}_n$  que estamos considerando, puesto que la superficie  $X_n$  delimita dos regiones en el *bulk*. Si los campos del *bulk* se encuentran en un estado puro, la elección de cualquiera de las dos regiones dará el mismo resultado para la entropía de entrelazamiento ya que se trata de regiones complementarias.

Vamos a convenir que la región en cuestión es aquella cuya frontera es  $X_n \cup A$  (ver región sombreada de la figura 3.4, delimitada por  $A$  y  $\gamma_A$ ), donde, recordemos,  $A$  es la región del borde a la que pretendemos calcularle la entropía .

De la relación (3.40) podemos despejar  $\log Z_{mat}(M_n)$  en función de  $\hat{M}_n$  y  $X_n$ . Junto con la ecuación (3.39), reescribimos la acción efectiva en términos de  $(\hat{M}_n, X_n)$ :

$$I_{ef}(M_n) = n I_{ef}(\hat{M}_n) + (n - 1) \left[ \frac{\text{Área}(X_n)}{4G} + S_n(X_n) \right] \equiv I_n(\hat{M}_n, X_n). \quad (3.41)$$

Dado que  $M_n$  es la solución que extrema  $I_{ef}$ ,  $(\hat{M}_n, X_n)$  debe extremar  $I_n$  con condiciones de borde fijas:  $\partial\hat{M}_n = B$  y  $\partial X_n = \partial A$ . Nuevamente, podemos tomar  $\hat{M}_n$  y  $X_n$  como variables independientes y el cálculo es completamente análogo al de la sección anterior. Ahora, la superficie  $X_n$  no minimiza sólo el área en el *bulk*, sino toda la expresión entre corchetes en la ecuación (3.41).

Finalmente, la entropía de entrelazamiento resulta

$$S = \partial_n \left\{ n \left[ I_{ef}(\hat{M}_n) - I_{ef}(M_1) \right] + (n - 1) \left[ \frac{\text{Área}(X_n)}{4G} + S_n(X_n) \right] \right\}_{n=1}. \quad (3.42)$$

Usando los mismos argumentos que en la sección anterior obtenemos

$$S = \frac{\text{Área}(X)}{4G} + S(X). \quad (3.43)$$

En conclusión, en el régimen en que las fluctuaciones de la métrica son despreciables frente a las de los campos, al término de área debemos añadirle la contribución de la entropía de los campos en la región de  $M_1$  delimitada por  $X$ , y este resultado vale para todo orden en  $\hbar$ . La entropía de los campos  $S(X)$  es también llamada *entropía semi-clásica* dado que es la entropía de entrelazamiento usual de los campos de materia viviendo en el *bulk*. Por este motivo, de aquí en adelante la denotaremos  $S_{semi-cl}(X)$ . A partir del resultado (3.43), podemos construir una función de  $X$  que llamaremos *entropía generalizada* [16],  $S_{gen}(X)$ , tal que

$$S_{gen}(X) = \frac{\text{Área}(X)}{4G} + S_{semi-cl}(X). \quad (3.44)$$

Por consiguiente, la entropía (3.43) puede escribirse como

$$S = \text{mín} \{ \text{ext}_X [S_{gen}(X)] \}. \quad (3.45)$$

Esta expresión nos da una “receta” para calcular  $S$ : primero, hallar las superficies de codimensión 2 en el *bulk* ancladas al borde de  $A$  que extreman  $S_{gen}(X)$ , y luego, de entre todas ellas, elegir la que minimiza  $S_{gen}(X)$ .

Recapitulando, hemos derivado a partir del truco de réplicas una prescripción para calcular la entropía de entrelazamiento en teorías conformes con un dual holográfico. Esta dualidad nos permitió escribir la función de partición  $Z_n$  de la teoría en el borde como una integral de caminos en el *bulk* (ver ecuación (3.21)). En la siguiente sección veremos cómo aplicar estas ideas al problema de la paradoja de la información de Hawking.

### 3.4. Fórmula de islas

La prescripción (3.45) fue utilizada en el contexto de la evaporación de agujeros negros para dar con una fórmula para el cálculo de la entropía de la radiación de Hawking. Dicha fórmula, cuya expresión daremos luego, fue denominada *fórmula de islas*. Haciendo uso de la correspondencia AdS/CFT y de los resultados conseguidos en este contexto, los autores de [10–12] calcularon la entropía de la radiación de Hawking en modelos con condiciones de borde adaptadas y lograron reproducir exitosamente la curva de Page. Trabajos más recientes [7, 17, 18] han propuesto que, dado que la prescripción en el cálculo de la entropía holográfica se obtiene aplicando el truco de réplicas y usando la integral de caminos gravitatoria (3.21), la fórmula de islas puede ser derivada independientemente de la correspondencia AdS/CFT. En esta sección veremos cómo obtener dicha fórmula únicamente a partir del truco de réplicas y del formalismo de la integral de caminos gravitatoria introducido en la ecuación (3.2).

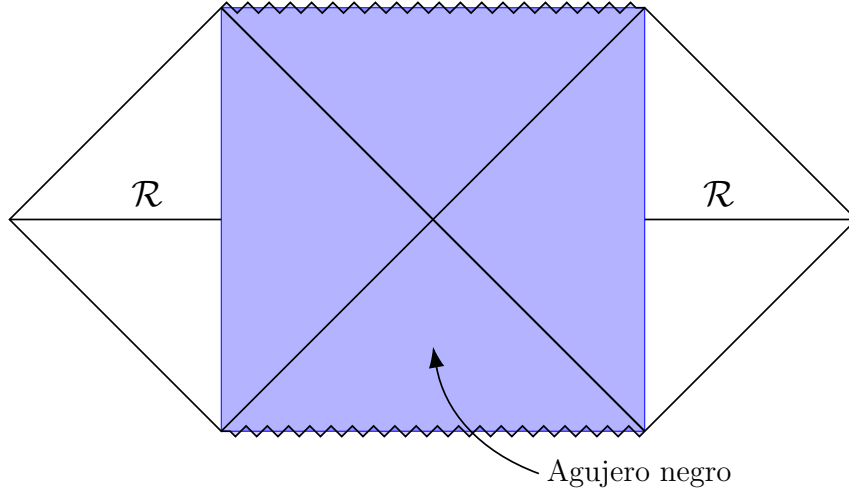
En la figura 3.7 se muestra el diagrama de Penrose del agujero negro de Schwarzschild extendido, marcando la región a la cual pretendemos calcularle la entropía. Llamaremos a esta región  $\mathcal{R}$ . Para calcular  $S_R$ , usamos el truco de réplicas (2.35). En el cálculo semi-clásico de Hawking, la función de partición venía dada por la integral de caminos

$$Z_n = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_{mat}[\phi]} \quad (3.46)$$

sobre la variedad euclídea replicada de la figura 3.8. Sin embargo, por lo que hemos discutido en este capítulo, la expresión exacta para la función de partición no es (3.46), sino

$$Z_n = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi e^{-I_{EH}[g] - I_{mat}[g, \phi]}, \quad (3.47)$$

Es decir, debemos incluir las fluctuaciones de la métrica y *luego* realizar la aproximación de punto silla. Veremos que de esta manera se puede hallar un nuevo término en la entropía de la radiación que modifica el resultado de Hawking.



**Figura 3.7:** Diagrama de Penrose de Schwarzschild extendido. La región azul es la correspondiente al agujero negro y la blanca, a la radiación. La región  $\mathcal{R}$  está contenida en la sección ( $t = 0$ ).

Si ignoramos la gravedad en la región de radiación, pero no en la del agujero negro, la ecuación (3.21) implica que debemos integrar sobre métricas que tengan como borde a  $B_n$ , siendo  $B_n$  la versión replicada de la superficie imaginaria que delimita al agujero negro. Escribamos, como antes,

$$Z_n = \int \mathcal{D}g e^{-I_{EH}[g]} \int \mathcal{D}\phi e^{-I_{mat}[g,\phi]} = \int \mathcal{D}g e^{-I_{EH}[g]} Z_{mat}[g] = \int \mathcal{D}g e^{-I_{ef}[g]}, \quad (3.48)$$

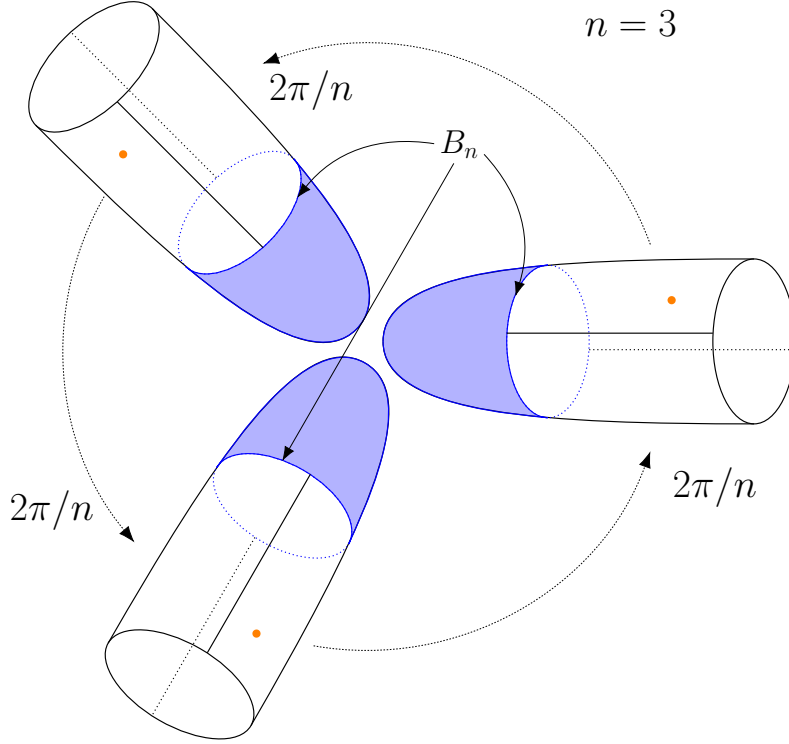
donde definimos, al igual que en la sección anterior, a la función de partición de los campos (3.34) y a la acción efectiva (3.35). Ahora sí, podemos aplicar la aproximación de punto silla. Si asumimos que las fluctuaciones de la métrica son despreciables frente a las de los campos, obtenemos

$$Z_n \simeq e^{-I_{ef}(M_n)}, \quad (3.49)$$

siendo  $M_n$  el extremo de mínima acción efectiva cuyo borde es  $B_n$ . Otra vez, asumimos que  $M_n$  posee simetría de réplicas. Una solución posible es la ya mencionada (figura 3.8). De acuerdo con la figura, podemos pensar a la simetría de réplicas como simetría de rotación en múltiplos enteros de  $2\pi/n$ .

Otra solución es aquella en la que las réplicas están conectadas por un agujero de gusano euclídeo (*replica wormhole*), como se ilustra en la figura 3.9. Esta solución es posible debido a que en la integral (3.48) estamos sumando también sobre diferentes topologías.





**Figura 3.8:** Variedad euclídea replicada correspondiente a la configuración de la figura 3.7. Se graficó para  $n = 3$ . La simetría de réplicas se presenta como una simetría de rotación en múltiplos enteros de  $2\pi/n$ .

La geometría del *replica wormhole* posee dos puntos fijos  $X_n$  de la simetría de réplicas en la región del agujero negro, además de los puntos fijos en los bordes de  $\mathcal{R}$ . Por lo tanto, al construir la variedad cocientada  $\hat{M}_n$  como hicimos en la sección anterior se obtiene la geometría de la figura 3.10, donde  $\mathcal{I}$  es la región espacial que conecta ambos puntos.  $\mathcal{I}$  es llamada *isla* por encontrarse en la región del agujero negro, desconectada de  $\mathcal{R}$ . La entropía de Rényi asociada a  $Z_{mat}(M_n)$  es la de la región limitada por estos puntos fijos, es decir,  $S_n(\mathcal{R} \cup \mathcal{I})$ . Entonces, si definimos a la entropía generalizada como

$$S_{gen}(X) = \frac{\text{Área}(X)}{4G} + S_{semi-cl}(\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_X), \quad (3.50)$$

donde la isla  $\mathcal{I}_X$  es función de sus extremos  $X$ , los mismos argumentos de la sección anterior dan como resultado que la entropía de la radiación es

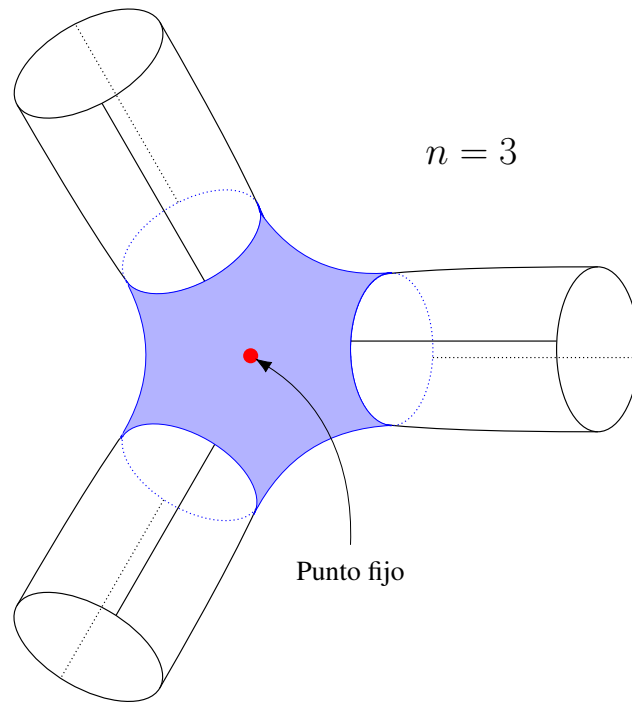
$$S_R = \text{mín} \{ \text{ext}_X [S_{gen}(X)] \}. \quad (3.51)$$

La ecuación establece que la superficie  $X$  a partir de la cual se calcula la entropía de la radiación debe ser aquella que extrema la entropía generalizada, y de todas las superficies

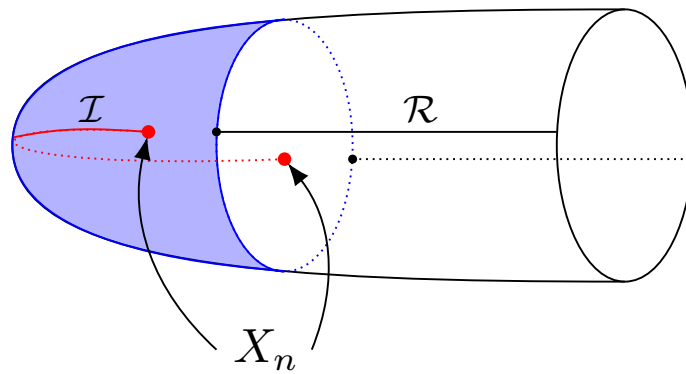
que cumplen esto se debe elegir la que la minimiza. Esta fórmula se denomina *fórmula de islas* y resulta de estar considerando a la radiación acoplada a los grados de libertad de la gravedad. Notemos que, a pesar de esto, el resultado obtenido es semi-clásico, dado que hicimos la aproximación de punto silla. Si la solución de mínima acción es la de la figura 3.8, entonces la entropía de la radiación se reduce al cálculo usual de campos en un *background* fijo

$$S_R = S_{semi-cl}(\mathcal{R}). \quad (3.52)$$

Esta relación no es válida en general, como hemos visto, motivo por el cual es importante distinguirlas. La verdadera entropía de la radiación viene dada por la ecuación (3.51). En el siguiente capítulo emplearemos esta fórmula para calcular la curva de Page en un ejemplo explícito.



**Figura 3.9:** *Replica wormhole.* En esta solución encontramos dos puntos fijos de la simetría de réplicas, además de los extremos de  $\mathcal{R}$ . Uno se indica en la figura y el otro se ubica por detrás de éste.



**Figura 3.10:** Variedad  $\hat{M}_n$  para el replica wormhole. La isla  $\mathcal{I}$  es la región en el interior del agujero negro que tiene como extremos a los puntos fijos  $X_n$ . Esta región está desconectada de la de la radiación  $\mathcal{R}$ .

# Capítulo 4

## Ejemplo: modelo JT+CFT<sub>2</sub>

El objetivo de este capítulo es calcular explícitamente la curva de Page en un caso concreto. Esto conlleva el cálculo de entropías de entrelazamiento en teoría cuántica de campos, por lo que vamos a precisar los resultados de la sección 2.3. Estos resultados obtenidos en 1+1 dimensiones no son conocidos en dimensiones mayores. Por lo tanto, para poder aplicarlos debemos considerar un modelo de agujero negro en dos dimensiones. Debido a que la gravedad de Einstein 2-dimensional es patológica, vamos a emplear una modificación de dicha teoría que se conoce como *modelo de gravedad de Jackiw–Teitelboim*. Consideraremos la solución del modelo con constante cosmológica negativa ( $AdS_2$ ) y le adosaremos una región plana asintótica. Como resultado obtendremos un espacio-tiempo 2-dimensional con la estructura causal de un agujero negro eterno. Sobre este *background* colocaremos una CFT en el estado de Hartle-Hawking, incorporando así la radiación al modelo, y calcularemos la entropía de entrelazamiento. El contenido de este capítulo está basado en lo realizado en [18].

### 4.1. Gravedad de Jackiw–Teitelboim

El modelo de Jackiw–Teitelboim (JT) es una teoría de gravedad 2-dimensional acoplada a un campo escalar denominado dilatón. La teoría de la relatividad general formulada en 2 dimensiones es patológica debido a que el término

$$\int d^2x \sqrt{-g} R \tag{4.1}$$

es un invariante topológico, es decir que no depende de la métrica. Esto implica que el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} = 0$  para toda métrica. Como las ecuaciones de Einstein en vacío

son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2)$$

si  $\Lambda = 0$ , entonces todas las métricas satisfacen (4.2), pero si  $\Lambda \neq 0$ , entonces ninguna lo hace. Para evitar este problema, el modelo de gravedad JT incorpora un campo escalar  $\phi$  de manera que la acción de la teoría se escribe como<sup>1</sup>

$$I_{\text{JT}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^2x \sqrt{-g} \phi (R - 2\Lambda) \quad (4.3)$$

Aquí, hemos vuelto a referirnos a la acción escrita en signatura lorentziana. Notemos que incorporar  $\phi$  es equivalente a reemplazar a la constante  $G$  en la acción de Einstein-Hilbert por un campo.

Para motivar un poco la elección de la teoría JT, veamos que el dilatón  $\phi$  puede ser interpretado como el tamaño de una dimensión adicional. Consideremos una variedad 3-dimensional de la forma  $M_2 \times S^1$ , con métrica

$$ds_3^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + r^2(x) d\varphi^2, \quad (4.4)$$

siendo  $x$  las coordenadas de  $M_2$ . De acuerdo con [33], el escalar de curvatura en este caso puede descomponerse en un término correspondiente a  $M_2$  y otro término correspondiente a la esfera  $S^1$ :

$$R_3 = R_2 - \frac{2}{r} \nabla^2 r, \quad (4.5)$$

donde  $R_2$  es el escalar de curvatura de  $M_2$ . Además, la raíz del determinante de la métrica es

$$\sqrt{-g_3} = \sqrt{-g_2} r. \quad (4.6)$$

Planteando, entonces, la acción de Einstein-Hilbert obtenemos

$$I_3 = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g_3} (R_3 - 2\Lambda) = 2\pi \int d^2x \sqrt{-g_2} r \left( R_2 - \frac{2}{r} \nabla^2 r - 2\Lambda \right), \quad (4.7)$$

donde el segundo miembro resulta de integrar en la coordenada  $\varphi$ . En esta última expresión, el segundo término del paréntesis es una derivada total que no contribuye a las ecuaciones de movimiento, por lo que podemos ignorarlo en este desarrollo. De esta manera, la acción quedará escrita como

$$I_3 = \frac{1}{16\pi G} \int_{M_2} d^2x \sqrt{-g_2} (2\pi r) (R_2 - 2\Lambda) \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>Al escribir la acción de Einstein-Hilbert hemos omitido, por practicidad, el término de borde de Gibbons-Hawking que deberíamos incluir para cancelar las variaciones de las derivadas de  $\phi$  y de la métrica en el borde.

Esta expresión es equivalente a (4.3) si reemplazamos  $2\pi r$  por  $\phi$ . Vemos así que el modelo JT puede obtenerse haciendo una reducción dimensional de una variedad en 3 dimensiones de la forma  $M_2 \times S^1$ , donde interpretamos al dilatón  $\phi$  como la longitud de la 1-esfera.

Como ya hemos mencionado, vamos a utilizar el modelo de gravedad JT para el cálculo de la curva de Page. Para especificar más en detalle en qué consiste el modelo, en las secciones siguientes calcularemos las soluciones de la teoría -restringiéndonos al caso  $\Lambda < 0$ - y obtendremos la temperatura y entropía termodinámica. Veremos cómo el resultado obtenido se asemeja a la estructura de un agujero negro y completaremos el diagrama de Penrose incorporando dos regiones planas asintóticas (o “alas”).

### 4.1.1. Ecuaciones de movimiento y soluciones

Para obtener las ecuaciones de movimiento, calculemos el cambio a primer orden en la acción ante cualquier variación de la métrica y del dilatón. La variación de  $I_{\text{JT}}$  ignorando términos de borde resulta [34]

$$\begin{aligned} \delta I_{\text{JT}} = & \frac{1}{16\pi G} \int_M d^2x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \delta\phi + \\ & + \frac{1}{16\pi G} \int_M d^2x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} (R - 2\Lambda) \phi g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \phi + \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} \nabla^2 \phi \right] \delta g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $R^{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci. Imponiendo que  $\delta I_{\text{JT}} = 0$ , obtenemos las ecuaciones

$$R = 2\Lambda, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) \phi g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \phi + \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} \nabla^2 \phi = 0. \quad (4.11)$$

Veamos cómo simplificar la segunda ecuación. Si reemplazamos (4.10) en (4.11), recordando que en 2 dimensiones  $R^{\mu\nu} = \frac{R}{2} g^{\mu\nu}$ , la traza de (4.11) resulta

$$\nabla^2 \phi = -R\phi. \quad (4.12)$$

Reemplazando esta expresión en (4.11) se obtiene

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}) \phi = 0, \quad (4.13)$$

que es la ecuación de movimiento para el dilatón.

En  $d$  dimensiones, el tensor de Riemann tiene  $n = \frac{d^2(d^2-1)}{12}$  componentes independientes. Como en este caso  $d = 2$ , entonces  $n = 1$  y el tensor de Riemann queda completamente

determinado por el escalar de curvatura  $R$ . Por lo tanto, las únicas soluciones posibles de la ecuación de movimiento (4.10) son la métrica de de Sitter si  $\Lambda > 0$ , la métrica de anti-de Sitter si  $\Lambda < 0$  ó la métrica plana si  $\Lambda = 0$ . Por otra parte, la solución de la ecuación (4.13) para el dilatón estará determinada por el valor de  $\phi$  y  $\nabla_\mu \phi$  en algún punto  $P$ . Conocidos estos tres datos, la ecuación (4.13) da todas las derivadas de  $\phi$  en el punto  $P$ , de modo que se puede calcular la serie de Taylor de  $\phi$ . Con esto vemos que el conjunto de soluciones de las ecuaciones de movimiento (4.10) y (4.13) es muy pequeño.

Consideremos que la constante cosmológica es negativa, en unidades tales que  $\Lambda = -1$ . Entonces, las ecuaciones (4.10) y (4.13) resultan

$$R = -2, \tag{4.14}$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}) \phi = 0. \tag{4.15}$$

La primera ecuación implica que el espacio-tiempo es  $AdS_2$  con radio  $\ell = 1$ . Esta geometría es la del 2-hiperboloide

$$-(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 = -1. \tag{4.16}$$

inmerso en un espacio de Minkowski 3-dimensional con métrica

$$ds^2 = -(dX^{-1})^2 - (dX^0)^2 + (dX^1)^2. \tag{4.17}$$

Pasando a coordenadas globales

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{\cos \tau}{\cos \rho}, \\ X^0 &= \frac{\sin \tau}{\cos \rho}, \\ X^1 &= \tan \rho, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde  $\tau \in (-\infty, +\infty)$  y  $\rho \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , la métrica (4.17) puede escribirse como

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \rho} (-d\tau^2 + d\rho^2). \tag{4.19}$$

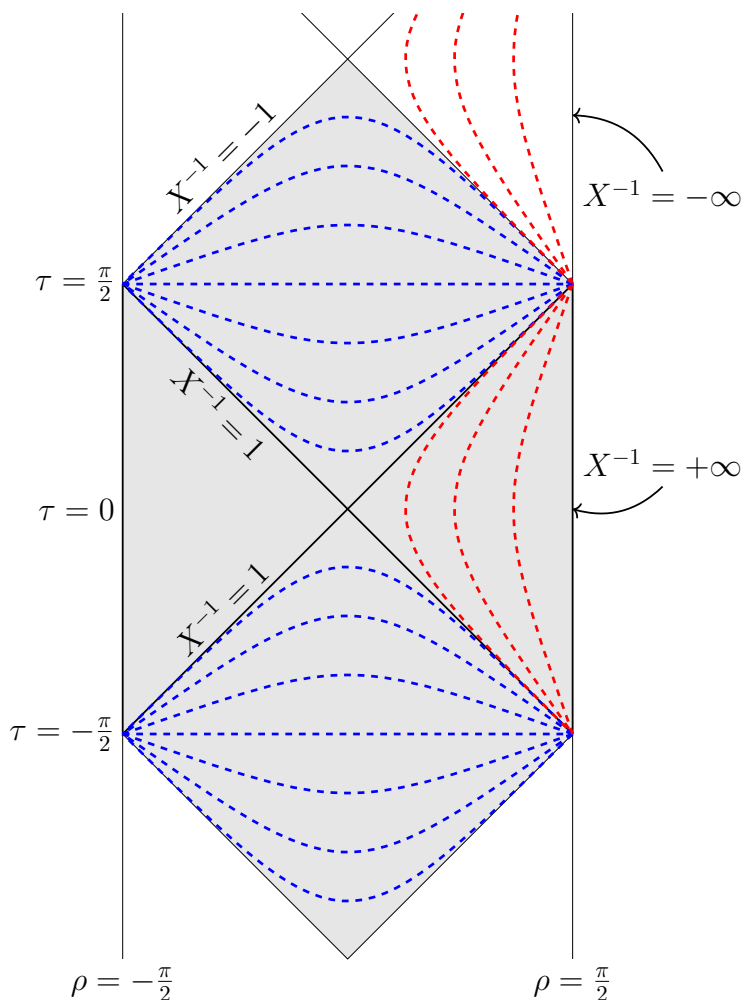
Hallemos ahora las soluciones de la ecuación (4.15). Se puede comprobar que

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \tag{4.20}$$

es solución para cualquier vector  $\mathbf{A} = (A^{-1}, A^0, A^1)$ , siendo  $\mathbf{X} = (X^{-1}, X^0, X^1)$ . Como tiene tres parámetros libres (las tres componentes de  $\mathbf{A}$ ), esta solución es la más general. Nos quedaremos con el caso en que  $\mathbf{A}$  sólo tiene componente en  $X^{-1}$ , con lo cual

$$\phi = AX^{-1}. \tag{4.21}$$

Notemos que esta solución rompe la simetría de AdS ya que las únicas isometrías de AdS que dejan invariante al dilatón son los *boosts* en el plano  $X^0X^1$ . Las órbitas de estos boosts en AdS son las curvas  $X^{-1} \equiv \text{cte}$ . Usando las coordenadas globales (4.18), las podemos representar en el diagrama de Penrose de AdS como se muestra en la figura (4.1). El Killing que genera estas órbitas no es globalmente temporal; sólo lo es en las cuñas  $X^{-1} > 1$  y  $X^{-1} < -1$ . Esto es análogo a lo que ocurre en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Cada cuña  $X^{-1} > 1$  es análoga a la región exterior del agujero negro en la geometría de Schwarzschild y las rectas  $X^{-1} = 1$  son los horizontes: para un observador en la cuña derecha, las rectas son su horizonte pasado y futuro. El valor del dilatón en el horizonte es



**Figura 4.1:** Diagrama de Penrose de AdS, donde se señaló en azul y rojo (ver pdf en color) las curvas  $\phi \equiv \text{cte}$  espaciales y temporales, respectivamente.



$$\phi_h = \phi(X^{-1} = 1) = A. \quad (4.22)$$

Un sistema de coordenadas que cubre la cuña derecha es

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{r}{r_s}, \\ X^0 &= \sqrt{\left(\frac{r}{r_s}\right) - 1} \sinh(r_s t), \\ X^1 &= \sqrt{\left(\frac{r}{r_s}\right) - 1} \cosh(r_s t), \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $r \in (r_s, +\infty)$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$  y  $r_s$  es una constante que cumple el rol del radio de Schwarzschild (1.2). En estas coordenadas, la métrica y el dilatón quedan escritos de la siguiente manera:

$$ds^2 = -(r^2 - r_s^2)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 - r_s^2}, \quad (4.24)$$

$$\phi = \phi_h \frac{r}{r_s}. \quad (4.25)$$

Vemos que las curvas  $\phi \equiv \text{cte}$  corresponden a  $r \equiv \text{cte}$ . De esta forma, es evidente que existe un Killing temporal  $\partial_t$  que deja  $\phi$  invariante y además es clara la analogía con Schwarzschild.

#### 4.1.2. Temperatura y entropía termodinámica

Pasando a tiempo euclídeo  $t \rightarrow -it_E$  en la expresión (4.24), vemos que la periodicidad de  $t_E$  resulta

$$t_E = t_E + \frac{2\pi}{r_s}. \quad (4.26)$$

Por lo tanto, el horizonte tiene temperatura

$$\beta^{-1} = \frac{r_s}{2\pi}, \quad (4.27)$$

respecto a la coordenada temporal  $t$ .

Para calcular la entropía termodinámica de la solución, podemos usar la técnica de Gibbons-Hawking descrita en la sección 3.1. Esto se hizo en [34] y el resultado es

$$S_{\text{termo}} = 2 \frac{\phi_h}{4G}. \quad (4.28)$$

Esto no debe sorprendernos, ya que el valor del dilatón en el horizonte juega el rol del área, y el factor 2 corresponde al hecho de que existen dos regiones exteriores.

### 4.1.3. Incorporación de las “alas”

Vamos a incorporarle una región plana al modelo de forma tal que la geometría tendrá la estructura de un agujero negro. Volvamos a situarnos en la cuña descrita por las coordenadas  $(r, t)$  según las ecuaciones (4.23). Realizando el siguiente cambio de coordenadas

$$r = -r_s \coth(r_s \sigma), \quad (4.29)$$

con  $\sigma < 0$ , la solución toma la forma

$$ds^2 = \frac{r_s^2}{\sinh^2(r_s \sigma)} (-dt^2 + d\sigma^2), \quad (4.30)$$

$$\phi = -\phi_h \coth(r_s \sigma). \quad (4.31)$$

La ecuación (4.30) junto con el dominio de  $\sigma$  revelan que esta métrica es conforme a la mitad del espacio-tiempo de Minkowski. Para agregar una región plana a la derecha de esta cuña, simplemente permitimos que  $\sigma$  tome valores positivos, siendo la métrica

$$ds_{ala}^2 = -dt^2 + d\sigma^2. \quad (4.32)$$

Aplicando el mismo razonamiento para la cuña izquierda, incorporamos las dos alas al modelo, de modo que el diagrama de Penrose queda finalmente como en la figura 4.2. Con esta incorporación, la geometría tiene la estructura de un agujero negro: los observadores en la región interior respecto al horizonte no pueden escapar a la región plana. Notemos, a su vez, que la coordenada  $t$  es el tiempo propio de los observadores estáticos en las alas, de modo que (4.27) es la temperatura percibida por éstos.

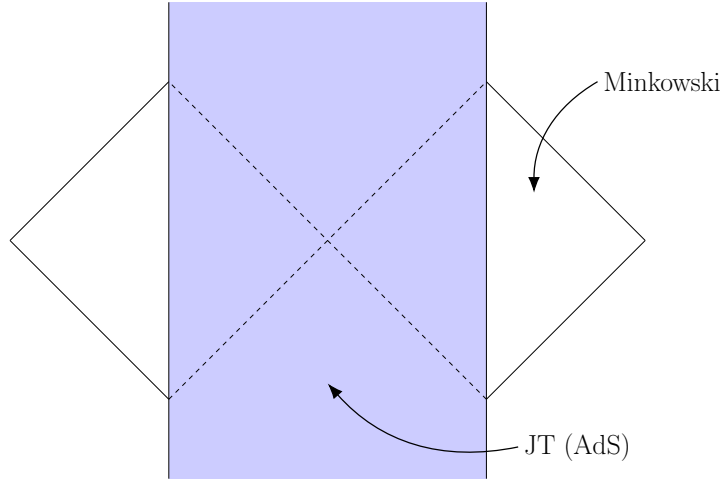
Definamos coordenadas que cubran toda la región sombreada de la figura 4.1, es decir, la correspondiente a  $X^{-1} > -1$ . Tomemos  $(x^0, x^1)$  tales que

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{1+x^2}{1-x^2}, \\ X^\mu &= \frac{2x^\mu}{1-x^2}, \quad \mu = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2$  y  $x^2 < 1$ . En este sistema de coordenadas, los límites  $X^{-1} \rightarrow +\infty$  corresponden a  $x^2 = 1$  y la solución resulta

$$ds^2 = \frac{4}{(1-x^2)^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.34)$$

$$\phi = \phi_h \frac{1+x^2}{1-x^2}. \quad (4.35)$$



**Figura 4.2:** Diagrama de Penrose de la solución de gravedad JT a la que se le adicionó un par de regiones planas a cada lado.

La relación entre las coordenadas  $(t, \sigma)$  y  $(x^0, x^1)$  es

$$\begin{aligned} -\coth(r_s \sigma) &= \frac{1+x^2}{1-x^2}, \\ \coth(r_s t) &= \frac{x^1}{x^0}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Extendiendo estas ecuaciones a  $\sigma > 0$ , vemos que la región de las alas corresponde a  $x^2 > 1$ . Pasando a coordenadas nulas

$$\begin{aligned} \sigma^\pm &= \sigma \pm t, \\ x^\pm &= x^1 \pm x^0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

las ecuaciones (4.36) se reducen a

$$x^\pm = e^{r_s \sigma^\pm} \quad (4.38)$$

y se obtiene que la métrica de las alas es

$$ds_{ala}^2 = d\sigma^+ d\sigma^- = \frac{dx^+ dx^-}{r_s^2 x^+ x^-} = \frac{1}{r_s^2 x^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.39)$$

En síntesis, la métrica global, es decir, la métrica de  $AdS_2$  más las alas queda escrita en coordenadas  $(x^0, x^1)$  en forma explícitamente conforme a Minkowski:

$$ds^2 = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.40)$$

con  $x^\mu \in (-\infty, \infty)$  y factor conforme

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-x^2}, & \text{si } x^2 < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2}}, & \text{si } x^2 > 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

en donde hemos fijado  $r_s = 1$ , lo cual, según la ecuación (4.27), equivale a considerar una temperatura inversa  $\beta = 2\pi$ .

Observemos que el factor conforme diverge en el borde de AdS. No vamos a preocuparnos por esto porque arriba de esta geometría vamos a colocar una CFT, que es hasta cierto punto insensible al factor conforme.

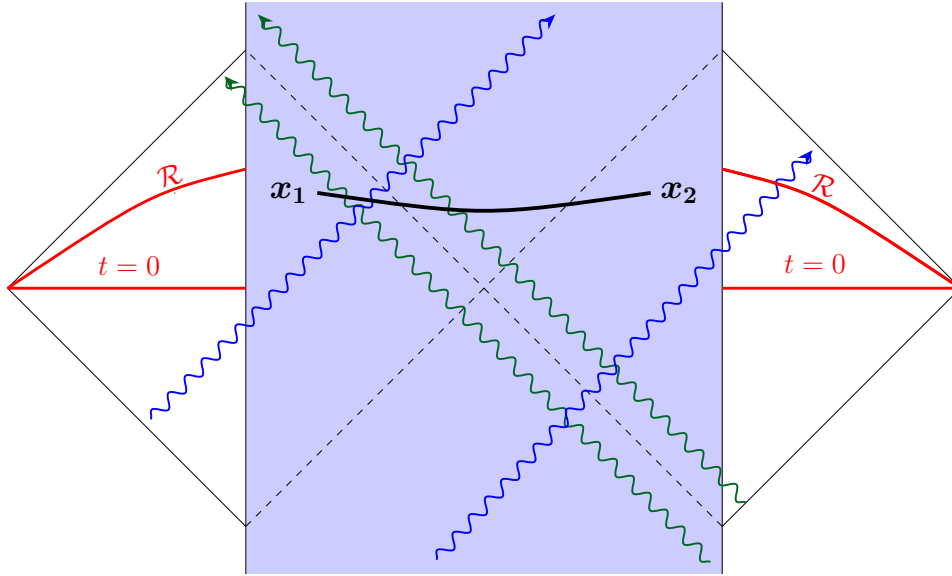
Por último, recordemos que en este modelo  $\phi^{-1}$  hace las veces de la constante  $G$  y, entonces,  $\phi \rightarrow \infty$  en el borde de AdS corresponde a  $G \rightarrow 0$ . Es decir que se puede pensar al borde como una región donde no hay gravedad. Con esta idea, agregar las alas resulta un poco más natural, ya que simplemente significa extender esta región sin gravedad.

## 4.2. Obtención de la curva de Page

### 4.2.1. Preliminares

Para incorporar la radiación al modelo de agujero negro que hemos desarrollado hasta ahora, vamos a considerar que tenemos una CFT en el estado de Hartle-Hawking en el *background* de la solución de gravedad JT + alas de la figura (4.2). El estado de Hartle-Hawking es el estado puro cuya reducción a una sola región exterior es un estado térmico a la temperatura del agujero negro. En la figura 4.3 representamos esquemáticamente este estado en el diagrama de Penrose. Podemos ver que el esquema es muy similar al de la figura 1.11. Nuevamente, en términos de la formulación del dogma central, la región azul es la correspondiente al agujero negro y la región de las alas, a la radiación. Como se explicó en la sección 1.7, el agujero negro no se evapora incluso teniendo en cuenta el *backreaction* de la CFT sobre la geometría puesto que éste está siendo constantemente alimentado con radiación. Siguiendo los argumentos descritos en aquella sección, el cálculo semi-clásico de la entropía de von Neumann de la radiación ( $S_R$ ) da como resultado una entropía que crece monótonamente en el tiempo. Como ya hemos visto, esto viola el dogma central. Sin embargo, de acuerdo con la fórmula de islas (3.51), la manera correcta de calcular dicha entropía a tiempos grandes es adicionando una “isla” como la que se muestra en la figura 4.3.

Cualitativamente, usando la analogía de los pares de partículas entrelazadas, se puede ver que la propuesta de la fórmula de islas logra resolver la paradoja. De acuerdo con esa



**Figura 4.3:** CFT en el background de la solución de gravedad JT+alga. Vemos que el intervalo  $(x_1, x_2)$  -la isla- captura a una de las partículas del par azul que no alcanza a  $\mathcal{R}$ . Además, la isla captura a ambas partículas del par verde (ver versión en color del pdf). Esto nos da una idea de cómo la incorporación de la isla hace disminuir la entropía de la radiación.

fórmula, a cada tiempo  $t$  hay que extremar la entropía generalizada

$$S_{gen}(X) = \frac{\text{Área}(X)}{4G} + S_{semi-cl}(\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_X) \quad (4.42)$$

y, si hay más de un extremo, quedarse con la superficie  $X$  con entropía generalizada más pequeña. En el modelo 2-dimensional que estamos considerando, la superficie  $X$  es una colección de pares de puntos (los puntos  $x_1$  y  $x_2$  en la figura 4.3) y el área es reemplazada por el valor del dilatón en esos puntos. La superficie vacía (ningún par de puntos) siempre es un extremo de la entropía generalizada, porque no puede ser perturbada. A tiempo  $t < t_{Page}$ , dicha superficie es el extremo con entropía generalizada más pequeña y entonces la entropía de la radiación  $S_R$  está bien descrita por el cálculo semi-clásico

$$S_R = S_{semi-cl}(\mathcal{R}) \quad (4.43)$$

Sin embargo, a partir del tiempo de Page, cuando  $S_{semi-cl}(\mathcal{R})$  ha crecido tanto que supera la entropía termodinámica del agujero negro, la superficie vacía deja de ser el extremo dominante, y éste pasa a ser el borde  $(x_1, x_2)$  de una isla ubicada en la región azul de la

figura 4.3. Entonces, el valor de la entropía a  $t > t_{Page}$  resulta

$$S_R = \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2)}{4G} + S_{semi-cl} [\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}]. \quad (4.44)$$

Para simplificar la notación, llamemos

$$S_{semi-cl} \equiv S_{semi-cl}(\mathcal{R}) \quad (4.45)$$

y

$$S_{islas} \equiv \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2)}{4G} + S_{semi-cl} [\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}]. \quad (4.46)$$

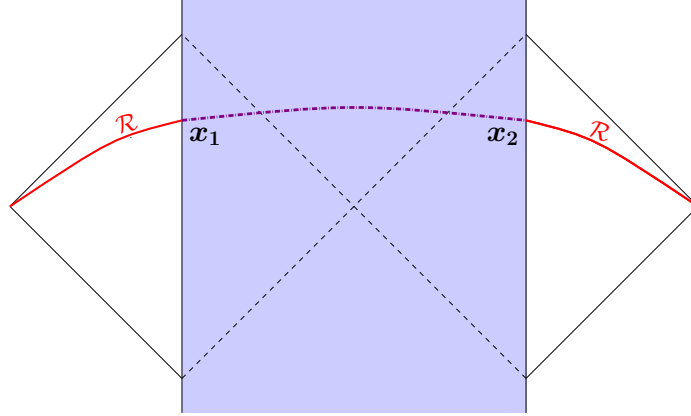
A pesar de que la expresión (4.46) involucra un término de área que no aparece en (4.45), se cumple que  $S_{islas} < S_{semi-cl}$  a  $t > t_{Page}$ . Esto se debe a que la isla logra capturar algunos miembros del par de partículas que escapan de  $\mathcal{R}$ , reduciendo el valor de la entropía semi-clásica. Por lo tanto, la entropía de von Neumann de la radiación resulta

$$S_R = \begin{cases} S_{semi-cl}, & \text{si } t < t_{Page} \\ S_{islas}, & \text{si } t > t_{Page} \end{cases} \quad (4.47)$$

La elección precisa de la isla está sujeta a que el término de área no sea demasiado grande para que la entropía generalizada (4.42) sea mínima. En otras palabras, si extendemos demasiado los extremos de la isla, lograremos reducir  $S_{semi-cl} [\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}]$  en la expresión (4.46), pero el área aumentará. De esta manera, ambos términos compiten al analizar cuál es la superficie  $X$  adecuada. A tiempo infinito, los extremos de la isla coinciden con el horizonte, por lo que  $S_{islas}$  (y  $S_R$ ) es igual a la entropía termodinámica. De esta forma, reconstruimos cualitativamente la curva de Page de la figura 1.12, resolviendo así la paradoja de la información. El objetivo es obtener esta curva calculándola explícitamente, lo cual llevaremos a cabo a continuación.

### 4.2.2. Cálculo semi-clásico

Comencemos realizando el cálculo semi-clásico de la entropía de la radiación. Para ello, consideremos la región  $\mathcal{R}$  localizada en las alas, incluida en una sección  $t \equiv \text{cte}$ , como la señalada en rojo en la figura 4.4. Esta es la región a la cual pretendemos calcularle la entropía. Como el estado global de la CFT es puro, esta entropía es igual a la del complemento señalado en línea punteada en la figura 4.4, de extremos  $x_1$  y  $x_2$ . Calculemos, pues, la entropía de la región punteada. Dado que se trata de un único intervalo, podemos



**Figura 4.4:** Región  $\mathcal{R}$  a la que pretendemos calcularle la entropía y su región complementaria señalada en línea punteada.

usar el resultado conocido de entropía de entrelazamiento de una CFT en un intervalo. Debemos tener en cuenta que el *background* en este caso no es Minkowski, sino la métrica conforme a Minkowski de la ecuación (4.40). Recordando la expresión (2.21), donde  $S_{Mink}$  viene dada por (2.18), obtenemos

$$S(x_1, x_2) = \frac{c}{6} \log \left[ \frac{(x_1 - x_2)^2}{\epsilon^2} \Omega(x_1) \Omega(x_2) \right]. \quad (4.48)$$

Teniendo en cuenta que el intervalo es simétrico de forma tal que

$$x_2^0 = x_1^0 \quad y \quad x_2^1 = -x_1^1 \quad (4.49)$$

y usando las relaciones (4.38) para despejar el resultado en términos de  $t$  (que es el tiempo de los observadores en las alas), se puede ver que la entropía semi-clásica de la radiación es

$$S_{semi-cl} = S(x_1, x_2) = \frac{c}{3} \log \left( \frac{2}{\epsilon} \cosh t \right). \quad (4.50)$$

Tal como esperábamos, la entropía crece monótonamente con  $t$ , y para  $t \gg 1$  es aproximadamente lineal. Es decir que el cálculo reproduce el comportamiento representado en la figura 1.12.

Como es natural en QFT, el resultado (4.50) depende de un *cutoff* ultravioleta  $\epsilon$ , y diverge en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Sin embargo, los parámetros de la acción de JT (la constante de Newton  $G$  y otra constante que implícitamente hemos fijado a cero, la cual acompaña un término topológico) también dependen de  $\epsilon$  para absorber las divergencias de la acción efectiva de la CFT. Un análisis cuidadoso de estas dependencias muestra que la diferencia

entre la entropía termodinámica del agujero negro y la entropía de la radiación (que es lo que nos interesa evaluar) es independiente del *cutoff*, por lo que podemos darle a  $\epsilon$  el valor que queramos. El valor que hace las expresiones más sencillas es  $\epsilon = 2$ , así que tomaremos este valor a partir de ahora. Así,

$$S_{semi-cl} = \frac{c}{3} \log(\cosh t). \quad (4.51)$$

Tendremos en cuenta que con esta elección de *cutoff*, debemos hacer el cambio

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{c}{6} \log 2 \quad (4.52)$$

al calcular la entropía según la fórmula de islas (4.46).

### 4.2.3. Cálculo usando la fórmula de islas

Volvamos a escribir la fórmula de islas:

$$S_R = \min \left\{ \text{ext}_X \left[ \frac{\text{Área}(X)}{4G} + S_{semi-cl}(\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_X) \right] \right\}. \quad (4.53)$$

La expresión entre corchetes es lo que llamamos entropía generalizada  $S_{gen}(X)$ . Recordemos que en el modelo que estamos considerando, el área viene dada por el valor del dilatón  $\phi$ . En principio,  $\mathcal{I}_X$  podría tener  $N$  componentes conexas, es decir, podrían existir  $N$  islas.  $X$  es extremal si  $S_{gen}(X)$  no cambia bajo pequeñas deformaciones de sus componentes. Como ya dijimos, la superficie vacía ( $N = 0$ ) es siempre un extremo. En consecuencia,  $S_{semi-cl}$  es siempre un candidato a  $S_R$ . Además de éste, deberíamos considerar los candidatos con  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Nosotros estudiaremos sólo el caso en el que la isla es un único intervalo ( $N = 1$ ) puesto que el argumento de las partículas entrelazadas de la figura 4.3 sugiere que ésta es la contribución que minimiza la entropía generalizada.

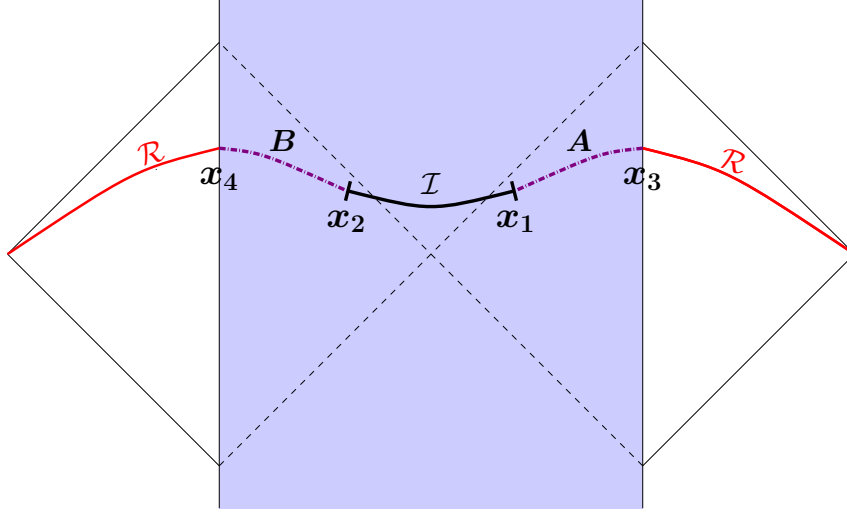
Como ya mencionamos, en el modelo que estamos considerando, si  $N = 1$ ,  $X$  está formada por dos puntos  $(x_1, x_2)$  (ver figura 4.5) y la entropía (4.46) depende de esos puntos:

$$S_{islas}(x_1, x_2) = \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2)}{4G} + S_{semi-cl}[\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}]. \quad (4.54)$$

El argumento de los pares de partículas entrelazadas sugiere que si  $\mathcal{R}$  es una región simétrica, entonces el intervalo  $\mathcal{I}_X$  que minimiza  $S_{gen}(X)$  es también simétrico. Vamos a proponer, entonces,  $\mathcal{I}_X$  simétrico, como el que se puede ver en la figura 4.5. Esto implica que

$$\phi(x_2) = \phi(x_1) = -\phi_h \coth(\sigma_1), \quad (4.55)$$





**Figura 4.5:** En línea punteada se muestra el complemento  $A \cup B$  de  $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}$ .

donde en la última igualdad usamos la ecuación (4.31) para expresar al dilatón en términos de las coordenadas  $(t_1, \sigma_1)$  que corresponden al punto  $x_1$ .

Enfoquémonos ahora en calcular  $S_{semi-cl} [\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}]$ . Dado que el estado global de la CFT es puro, la entropía de entrelazamiento de la región  $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}$  es igual a la de su complemento  $A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son los intervalos de extremos  $(x_1, x_3)$  y  $(x_2, x_4)$ , respectivamente (ver figura 4.5):

$$S_{semi-cl} [\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_{(x_1, x_2)}] = S_{semi-cl} [A \cup B]. \quad (4.56)$$

Así, el problema se reduce a calcular la entropía semi-clásica para dos intervalos.

Ahora bien, la entropía de entrelazamiento en dos intervalos es un resultado que se conoce en muy pocos casos, entre ellos para el fermión libre sin masa. Por lo tanto, a continuación, vamos a restringirnos a este caso. De acuerdo con las ecuaciones (2.19) y (2.21), la entropía de entrelazamiento del fermión sin masa en los intervalos  $A \cup B$  se calcula como

$$S_{semi-cl} [A \cup B] = \frac{c}{6} \log \left[ \frac{|x_{13}^2 x_{24}^2 x_{14}^2 x_{23}^2|}{|x_{12}^2 x_{34}^2| \epsilon^4} \Omega(x_1) \Omega(x_2) \Omega(x_3) \Omega(x_4) \right], \quad (4.57)$$

siendo la carga central  $c = 1$  y donde

$$x_{ij}^2 = -(x_i^0 - x_j^0)^2 + (x_i^1 - x_j^1)^2. \quad (4.58)$$

Teniendo en cuenta que los intervalos son simétricos:

$$x_2^0 = x_1^0, \quad x_2^1 = -x_1^1, \quad (4.59)$$

$$x_4^0 = x_3^0, \quad x_4^1 = -x_3^1, \quad (4.60)$$

y usando las relaciones (4.37), (4.38) y (4.41) se puede ver que

$$S_{semi-cl} [A \cup B] = \frac{1}{3} \log \left\{ \frac{4 \cosh(t_a) \cosh(t) |\cosh(a) - \cosh(t_a - t)|}{\sinh(a) [\cosh(a) + \cosh(t_a + t)] \epsilon^2} \right\}, \quad (4.61)$$

donde hemos reemplazado  $(t_3, \sigma_3) = (t, 0)$  y  $(t_1, \sigma_1) \equiv (t_a, -a)$ . Reemplazando (4.55) y (4.61) en (4.54), fijando  $\epsilon = 2$  y usando (4.52) nos queda

$$S_{islas}(a, t_a) = \frac{2\phi_h \coth(a)}{4G} + \frac{1}{3} \log \left\{ \frac{2 \cosh(t_a) \cosh(t) |\cosh(a) - \cosh(t_a - t)|}{\sinh(a) [\cosh(a) + \cosh(t_a + t)]} \right\}, \quad (4.62)$$

donde hemos hecho explícito que esta entropía depende de los parámetros  $a$  y  $t_a$ . Para que  $S_{islas}$  sea un extremo de la entropía generalizada (4.42), se debe cumplir

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial S_{islas}(a, t_a)}{\partial t_a} \right)_{ext} = 0, \\ \left( \frac{\partial S_{islas}(a, t_a)}{\partial a} \right)_{ext} = 0. \end{cases} \quad (4.63)$$

A  $t = 0$ , este sistema de ecuaciones tiene solución sólo si  $\frac{\phi_h}{4G} \ll 1$ . Vamos a suponer que el agujero negro es grande en unidades planckianas, de forma que pueda ser descrito en la aproximación semi-clásica. En el contexto de este modelo, eso corresponde a  $\frac{\phi_h}{4G} \gg 1$ . En ese caso, el tiempo al que la entropía semiclásica (4.52) supera la entropía termodinámica del agujero negro (es decir, el tiempo de Page) es grande, así que la contribución de la isla sólo va a ser relevante a tiempos grandes. Supongamos entonces que  $t, t_a \gg a$ . La ecuación (4.62) resulta

$$S_{islas}(a, t_a) = 2 \frac{\phi_h \coth(a)}{4G} + \frac{1}{3} \log \left[ \frac{|\cosh(a) - \cosh(t_a - t)|}{\sinh(a)} \right]. \quad (4.64)$$

Planteando la condición de extremalidad (4.63) en este límite, se obtiene que

$$t_a = t \quad (4.65)$$

y

$$\sinh(a) = 6 \frac{\phi_h}{4G}. \quad (4.66)$$

Usando que  $\frac{\phi_h}{4G} \gg 1$ , esto implica  $a \gg 1$  y por lo tanto  $a \simeq \log \left( 12 \frac{\phi_h}{4G} \right)$ . Para tiempos del orden del tiempo de Page, se cumple efectivamente  $t, t_a \gg a$ .

Reemplazando (4.66) en (4.64) nos queda

$$S_{islas} = \frac{1}{3} \left\{ \cosh a + \log \left[ \tanh \left( \frac{a}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4.67)$$

donde el valor de  $a$  está definido por el valor del dilatón en el horizonte  $\phi_h$  a través de la relación (4.66). Se puede corroborar que  $S_{islas} \leq S_{termo}$ , donde, recordemos,  $S_{termo}$  viene dada por (4.28). Si usamos nuevamente que  $a \gg 1$ , resulta  $\cosh a \simeq \sinh a$  y entonces

$$S_{islas} \simeq 2 \frac{\phi_h}{4G}. \quad (4.68)$$

Es decir que esta entropía es igual a la entropía termodinámica (4.28).

En síntesis, obtuvimos:

$$S_{islas} \simeq S_{termo} = 2 \frac{\phi_h}{4G}, \quad (4.69)$$

$$S_{semi-cl} = \frac{1}{3} \log(\cosh t), \quad (4.70)$$

donde tuvimos en cuenta que el valor de la carga central para el fermión libre es  $c = 1$ . En la figura 4.6 graficamos las entropías (4.69) y (4.70) para  $\frac{\phi_h}{4G} = 100$ . La solución  $S_{islas}$  que hemos hallado es un extremo de la entropía generalizada siempre que  $t \gg a$ , con  $a \simeq \log(12 \frac{\phi_h}{4G})$ . Para  $\frac{\phi_h}{4G} = 100$ , esto implica  $t \gg 3$ , por lo que la solución es extremo mucho antes del tiempo de Page

$$t_{Page} \simeq 6 \frac{\phi_h}{4G} = 600. \quad (4.71)$$

Además, a  $t = 0$  no hay solución para las ecuaciones (4.63) en el régimen  $\frac{\phi_h}{4G} \gg 1$ , por lo que el único extremo es  $S_{semi-cl}$ . Es decir que, inicialmente, el valor correcto de la entropía de la radiación,  $S_R$ , es (4.70). A tiempos posteriores, tales que  $t \gg 3$ , debemos escoger el mínimo entre  $S_{semi-cl}$  y  $S_{islas}$ , de acuerdo con la fórmula de islas:

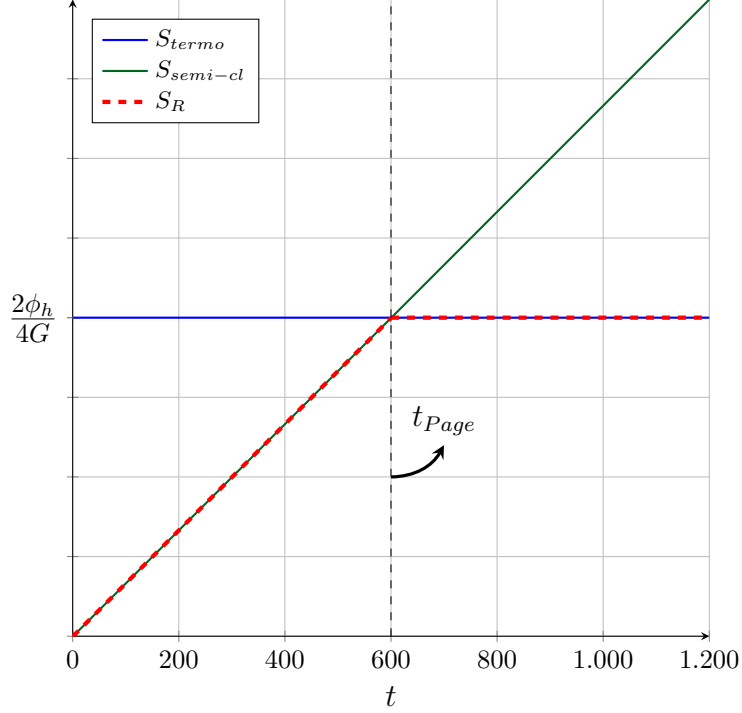
$$S_R = \min \{S_{semi-cl}, S_{islas}\}. \quad (4.72)$$

Como se puede ver en la figura 4.6,  $S_R$  resulta

$$S_R = \begin{cases} S_{semi-cl}, & \text{si } t < t_{Page} \\ S_{islas}, & \text{si } t > t_{Page} \end{cases} \quad (4.73)$$

Este resultado es consistente con la propuesta de Page. Inicialmente,  $S_{semi-cl}$  es mínima, pero como crece linealmente en el tiempo y  $S_{islas}$  no depende de  $t$ , inevitablemente en algún instante de tiempo  $S_{semi-cl}$  supera  $S_{islas}$ . De esta forma, la paradoja queda resuelta.

A pesar de que nos hemos restringido al caso del fermión para efectuar el cálculo, el resultado que hemos obtenido es más general. Para ver esto, consideremos nuevamente una CFT genérica y supongamos por un momento que en lugar de ser AdS, la métrica en la



**Figura 4.6:** Curva de Page obtenida para  $\frac{\phi_h}{4G} = 100$ .

región del agujero negro es Minkowski. Si la distancia entre los intervalos  $A$  y  $B$  es mucho mayor que su tamaño, entonces las correlaciones entre ambos son pequeñas y se cumple

$$\rho_{AB} \simeq \rho_A \otimes \rho_B, \quad (4.74)$$

donde  $\rho_{AB}$  es la matriz densidad de la región  $A \cup B$ , y  $\rho_A$  y  $\rho_B$ , de los intervalos individuales  $A$  y  $B$ , respectivamente. Esto implica que la información mutua (2.16) es

$$I(A : B) = S_A + S_B - S_{AB} \simeq 0. \quad (4.75)$$

A partir de la expresión (2.21), resulta evidente que la información mutua es invariante ante transformaciones conformes  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$ . Por lo tanto, (4.75) vale incluso cuando la métrica es (4.40). Esto implica que

$$S_{\text{semi-cl}}(A \cup B) \simeq 2 S_{\text{semi-cl}}(A), \quad (4.76)$$

donde hemos usado que los intervalos son simétricos.

Utilizando las fórmulas (2.18) y (2.21) para una CFT en un intervalo en un espacio-tiempo conforme a Minkowski, recordando las relaciones (4.37) y (4.38) y teniendo en cuenta que los extremos de  $A$  tienen coordenadas  $(t_a, -a)$  y  $(t, 0)$ , se puede ver que

$$S_{\text{semi-cl}}(A) = \frac{c}{6} \log \left( \frac{2|\cosh(a) - \cosh(t_a - t)|}{\epsilon^2 \sinh(a)} \right), \quad (4.77)$$

En consecuencia,

$$S_{islas}(a, t_a, t) = 2\frac{\phi_h}{4G} \coth(a) + \frac{c}{3} \log \left[ \frac{|\cosh(a) - \cosh(t_a - t)|}{\sinh(a)} \right], \quad (4.78)$$

donde usamos (4.55) y (4.52), reemplazando  $\epsilon = 2$ . Éste es el mismo resultado que habíamos obtenido para el fermión en el límite  $t_a, t \gg a$  (ecuación (4.64)). A partir de este punto, entonces, el procedimiento y los resultados son los mismos que ya hemos mostrado: hallamos  $a$  y  $t_a$  extremando  $S_{islas}(a, t_a)$ , con lo cual obtenemos las ecuaciones (4.65), (4.66) y (4.67), y con esto logramos reproducir la curva de Page de la figura 4.6.

Para que estas conclusiones sean válidas, debemos verificar la hipótesis que hemos usado, es decir, que la separación entre los intervalos  $A$  y  $B$  es efectivamente menor que su tamaño en la métrica de Minkowski. Calculemos entonces

$$x_{13}^2 = -(x_1^0 - x_3^0)^2 + (x_1^1 - x_3^1)^2 = 4e^{-a} \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right), \quad (4.79)$$

siendo  $x_{13}$  el tamaño del intervalo  $A$ , y

$$x_{12}^2 = -(x_1^0 - x_2^0)^2 + (x_1^1 - x_2^1)^2 = 4e^{-2a} \cosh^2(t), \quad (4.80)$$

con  $x_{12}$  la distancia entre los dos extremos de  $A$  y  $B$ . La condición para que  $|x_{13}| \ll |x_{12}|$  resulta pues

$$e^{a/2} \sinh\left(\frac{a}{2}\right) \ll \cosh(t), \quad (4.81)$$

lo cual se cumple para  $t \gg a$ . Vemos así que este límite  $t \gg a$  que consideramos al calcular (4.64) corresponde al caso en que la entropía de entrelazamiento de los dos intervalos simétricos puede aproximarse por dos veces la entropía de uno solo.

En este capítulo, hemos calculado la entropía de la radiación en un modelo sencillo en dos dimensiones usando la fórmula de islas. Vimos que dicho cálculo describe la curva de Page. De esta forma, se resuelve la paradoja de la información, puesto que, a tiempos posteriores al tiempo de Page, la entropía de la radiación no está dada por el cálculo semi-clásico que crece linealmente en el tiempo, sino por la entropía termodinámica (4.69). Esta comprobación de la fórmula de islas es relevante, a pesar de haber sido realizada en un modelo muy sencillo. Esperamos que aplicando la fórmula en modelos de agujeros negros más realistas, la paradoja de la información sea, asimismo, resuelta.

# Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado los desarrollos recientes hacia la resolución de la paradoja de la información de los agujeros negros. La hipótesis del dogma central, la cual establece que el agujero negro puede ser descrito como un sistema cuántico ordinario con  $A_h/(4G)$  grados de libertad efectivos, es muy sugerente, pero parece entrar en conflicto con la unitariedad de la mecánica cuántica. Esto es la *paradoja de la pérdida de la información* de los agujeros negros. Como argumentó Page en [9, 24], para reconciliar el dogma central con la unitariedad de la mecánica cuántica, la entropía de von Neumann de la radiación debería ser siempre menor a la entropía termodinámica del agujero negro, y, en consecuencia, su evolución temporal debería desviarse mucho de la que se obtiene en el cálculo *naive* de la entropía, describiendo la curva llamada *curva de Page*. En esta tesis hemos estudiado trabajos recientes [10–19] que muestran que el cálculo *naive* de la entropía de la radiación es incorrecto, y que un cálculo cuidadoso da lugar a una fórmula, llamada *fórmula de islas*, que sí es consistente con la curva de Page, con lo cual el dogma central está a salvo.

Con el objetivo de comprender la derivación cuantitativa de la curva de Page, introducimos algunos conceptos y herramientas importantes de QFT. Estudiamos la definición y propiedades de la entropía de entrelazamiento y mencionamos resultados conocidos para teorías conformes en dos dimensiones. Vimos que una manera de calcular la entropía de entrelazamiento en QFT es a través del truco de réplicas. Esta técnica, derivada a partir de la integral de caminos en el espacio euclídeo, resulta fundamental en la deducción de la fórmula de Ryu-Takayanagi y de la fórmula de islas.

A partir de la definición de integral de caminos gravitatoria y de la aproximación semi-clásica, hicimos el cálculo de Gibbons-Hawking y re-obtuvimos la entropía termodinámica del agujero negro. Luego, empleando un procedimiento muy similar, estudiamos cómo se deriva la fórmula de Ryu-Takayanagi y sus correcciones cuánticas a partir de la correspondencia AdS/CFT. La fórmula de Ryu-Takayanagi proporciona una prescripción

para calcular la entropía de entrelazamiento en teorías conformes con un dual holográfico, la cual involucra una superficie de codimensión 2 en el *bulk* que extrema la entropía generalizada (3.45). Finalmente, por un método análogo obtuvimos la fórmula de islas, que corrige el cálculo *naive* de la entropía de von Neumann de la radiación y da un resultado consistente con la curva de Page. De acuerdo con esta fórmula, el error en el cálculo *naive* no radica en la aproximación semi-clásica, sino en realizar dicha aproximación de forma incorrecta.

En el último capítulo, calculamos explícitamente la curva de Page, utilizando la fórmula de islas en un modelo sencillo en dos dimensiones. Usamos un modelo 2-dimensional ya que el cálculo explícito involucra calcular entropías de entrelazamiento, y éstas se conocen sobre todo en dos dimensiones. Como resultado, obtuvimos que la entropía de la radiación describe la curva de Page. Una propuesta a futuro es extender este cálculo a un modelo más realista en 3 ó 4 dimensiones.

# Referencias

- [1] S. W. Hawking, *Gravitational radiation from colliding black holes*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344–1346 (1971).
- [2] J. D. Bekenstein, *Black holes and the second law*, Lett. Nuovo Cim. **4**, 737–740 (1972).
- [3] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. **D7**, 2333–2346 (1973).
- [4] J. M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking., *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. math. Phys. **31**, 161-170 (1973).
- [5] S. W. Hawking, *Black hole explosions*, Nature **248**, 30–31 (1974).
- [6] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199–220 (1975).
- [7] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian y A. Tajdini, *The entropy of Hawking radiation*, Rev. Mod. Phys. **93**, 035002 (2021), [arXiv:2006.06872 [hep-th]].
- [8] S. W. Hawking, *Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse*, Phys. Rev. **D14**, 2460–2473 (1976).
- [9] D. N. Page, *Information in black hole radiation*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3743–3746 (1993), [arXiv:hep-th/9306083 [hep-th]].
- [10] G. Penington, *Entanglement Wedge Reconstruction and the Information Paradox* (2019), [arXiv:1905.08255 [hep-th]].
- [11] A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf y H. Maxfield, *The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole* (2019), [arXiv:1905.08762 [hep-th]].



- [12] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena y Y. Zhao, *The Page curve of Hawking radiation from semiclassical geometry* (2019), [arXiv:1908.10996 [hep-th]].
- [13] S. Ryu y T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006), [arXiv:hep-th/0603001].
- [14] V. E. Hubeny, M. Rangamani, and T. Takayanagi, *A Covariant holographic entanglement entropy proposal*, JHEP **07**, 062 (2007), [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [15] T. Faulkner, A. Lewkowycz y J. Maldacena, *Quantum corrections to holographic entanglement entropy*, JHEP **11**, 074 (2013), [arXiv:1307.2892 [hep-th]].
- [16] N. Engelhardt y A. C. Wall, *Quantum Extremal Surfaces: Holographic Entanglement Entropy beyond the Classical Regime*, JHEP **01**, 073 (2015), [arXiv:1905.08762 [hep-th]].
- [17] G. Penington, S. H. Shenker, D. Stanford, y Z. Yang, *Replica wormholes and the black hole interior* (2019), [arXiv:1911.11977 [hep-th]].
- [18] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, y A. Tajdini, *Replica wormholes and the Entropy of Hawking Radiation* JHEP **05**, 013 (2020), [arXiv:1911.12333 [hep-th]].
- [19] A. Lewkowycz y J. Maldacena, *Generalized gravitational entropy*, JHEP **08**, 090 (2013), [arXiv:1304.4926 [hep-th]].
- [20] W. G. Unruh, *Notes on black hole evaporation*, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976).
- [21] S. W. Hawking y D. N. Page, *Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space* Commun. Math. Phys. **87**, 577-588 (1983).
- [22] A. Strominger y C. Vafa, *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, Physics Letters B **379**, 99-104 (1996), [hep-th/9601029].
- [23] W. G. Unruh y R. M. Wald, *Information Loss*, Reports on Progress in Physics **80**, 092002 (2017), [arXiv:1703.02140 [hep-th]].
- [24] D. N. Page, *Time Dependence of Hawking Radiation Entropy*, JCAP **1309**, 028 (2013), [arXiv:1301.4995 [hep-th]].

- [25] P. Calabrese y J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 504005 (2009), [arXiv:0905.4013].
- [26] H. Casini, C. D. Fosco y M. Huerta, *Entanglement and alpha entropies for a massive Dirac field in two dimensions*, J. Stat. Mech. **0507**, P07007 (2005), [arXiv:cond-mat/0505563].
- [27] P. Calabrese y J. Cardy, *Entanglement Entropy and Quantum Field Theory*, J. Stat. Mech. **0406**, P06002 (2004), [arXiv:hep-th/0405152 [hep-th]].
- [28] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **15**, 2752–2756 (1977).
- [29] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics **2**, 231–252 (1998), [arXiv:hep-th/9711200].
- [30] T. Faulkner, *The Entanglement Renyi Entropies of Disjoint Intervals in AdS/CFT* (2013), [arXiv:1303.7221 [hep-th]].
- [31] T. Hartman, *Entanglement Entropy at Large Central Charge* (2013), [arXiv:1303.6955[hep-th]].
- [32] A. Vilenkin, *Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings*, Phys. Rev. D **23**, 231–252852–857 (1981).
- [33] A. Ghosh, H. Maxfield y G. J. Turiaci, *A universal Schwarzian sector in two-dimensional conformal field theories*, JHEP **5** (2020), [arXiv:1912.07654 [hep-th]].
- [34] D. Harlow y D. Jafferis, *The Factorization Problem in Jackiw-Teitelboim Gravity* (2018), [arXiv:1804.01081 [hep-th]].

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina Buenos Aires, 2022.