

TESIS DE LICENCIATURA

DISCOS DE ACRECIÓN ALREDEDOR DE NÚCLEOS COMPACTOS DE MATERIA OSCURA FERMIÓNICA

Alumna: Carolina N. Millauro



Director: Carlos Argüelles



Co-directora: Florencia Vieyro



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires
Grupo de Cosmología - Universidad Nacional de La Plata

Agosto 2022

Agradecimientos

Llegar hasta acá implicó un largo recorrido. Un hermoso recorrido, que no tengo dudas que sin las personas que me sostuvieron y acompañaron en estos años, no lo hubiera disfrutado tanto.

Todo este trabajo fue posible gracias a la confianza que Charly y Flor, mis directores, tuvieron en mí. En haberme dado la oportunidad de trabajar con ellos, sin conocerme, realizando mi Licenciatura en una facultad distinta a la que ellos pertenecen. Que en el contexto de pandemia me acompañaron virtualmente, vía mails, whatsapps, videollamadas. Gracias por su dedicación y paciencia en cada paso. Gracias también a Valen por su ayuda.

Me alegra mucho poder decir que todos estos años los pasé en el Pabellón 1. Gracias al Departamento de Física por brindar tan linda educación. Gracias a todos los docentes y ayudantes que me fui cruzando materia tras materia. Por cada uno de ellos que fue dejándome una enseñanza más allá de la física. Como a quien en este momento me gustaría recordar, Martín, quien agradezco haberlo tenido en dos cursadas. Que sin dudas marcó a todos sus estudiantes y sentimos mucho su ausencia.

De lo que más agradezco sin dudas igualmente, es haberme cruzando y conocido a tan buena gente. Quienes en momentos de *crisis facultativas*, hacían que todo se haga llevadero. Por compartir tristezas, momentos de estrés, pero por sobre todo alegrías. Gracias a todas aquellas personas que me fui cruzando a lo largo de la carrera y fueron dejando algo de sí. Pero no quiero dejar de mencionar con quienes compartí muchos mates y juegos de cartas desde Mate 2, Li, Rama, Manu, Bruno, Gaspi y Drupy. Con quien corríamos el último Roca, Agus. Con quienes competimos muchos torneos de trucos y ping pong, y compartimos noches en el bar de deportes, Meli, Colo, Berna, Gastón, Nahue, Gonza, Kenny, José y Jero. Pero por sobre todo, con quien más crecí, no solo en cuestiones académicas, sino como persona. Con quien compartí toda mi carrera, y se convirtió en mi pilar fundamental. Que sin ella, estoy completamente segura que no hubiera llegado hasta acá, Belu. Agradezco tanto habernos conocido.

Agradezco a mi familia. A mis papás, quienes me apoyaron en cada decisión que tomé, celebraron cada uno de mis logros y fueron (son) mis pilares en todo. No me alcanzan las palabras para agradecerles todas las oportunidades que me dieron para llegar hoy acá. Agradezco a mis cuatro abuelos, por ponerse tan felices por cada uno de mis pasos. A mis tías, tíos, primos, primas. Que estando cerca o lejos, en diferentes localidades, provincias o continentes, siempre se hicieron sentir cerca, estando atentos a cada fecha importante y enviando mucho cariño y buenas energías. Los quiero mucho.

Agradezco a mis amigos. Por haber aguantado mis "*No puedo, rindo*". Por haber escuchado mis catarsis. Por haber salido a festejar cada paso y por haberme hecho compañía cuando lo necesitaba. Gracias, Ani, Kachi, Vani. Gracias a todos *los Morrones* y a ustedes Male, Maru y May. Gracias a mi mejor amigo Fran. Gracias a mis amigas *de gimnasia artística*, de hace muchos años, Lari, Ro, Ju y Tati. Gracias a un amigo y pilar fundamental, Eze. Gracias a mis amigas fieles, Jose, Lu, Juli y Yai. Gracias a Fede, Tincho, Ger, Alvita, Juani. Gracias al grupo de *Canyonero*. Gracias a *Las Bestias* por cada sábado. A todos, por estar SIEMPRE.

Y finalmente gracias a quien me acompañó en estos últimos tres años de carrera. Mi compañero desde fin de 2019 en más, Gui. Por ser tan atento, por toda tu paciencia. Por cebarme mates mientras estudiaba, investigaba o escribía mi tesis. Por apoyarme en cada paso que doy y alegrarte conmigo. Por confiar tanto en mí. Por simplemente, estar acá. Gracias por tanto amor.

A todos, y cada uno de ustedes... Gracias, gracias y más gracias.

Resumen

A lo largo del presente trabajo se estudia la dinámica, energía de ligadura y espectros de emisión, de discos α desarrollados por Shakura & Sunyaev (S&S) en 1973, bajo la hipótesis original que estos se ubican alrededor de núcleos compactos de materia oscura con aplicación a los centros galácticos. A diferencia de la solución estándar donde las soluciones de S&S se situaban típicamente alrededor de un agujero negro, en esta tesis los discos de acreción se encuentran embebidos en una distribución de materia oscura con morfología del tipo *núcleo compacto – halo diluido*. Tal distribución se corresponde con una solución de las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto compuesto por un sistema de fermiones neutros autogravitantes en equilibrio, las cuales han sido exitosamente aplicados al problema de la materia oscura en galaxias según el modelo de Ruffini-Argüelles-Rueda (RAR). Según este paradigma de materia oscura fermiónica, los núcleos compactos pueden funcionar como una alternativa a los agujeros negros supermasivos (o eventualmente colapsar en uno), mientras su región externa más diluida explica las curvas de rotación galácticas. Como principal resultado original de este trabajo, se obtiene la generalización a las soluciones de los discos de acreción de S&S en presencia de materia oscura, las cuales muestran diferencias apreciables a las dadas por el modelo de agujero negro de Schwarzschild. Para una misma masa del núcleo central en el rango de masas de agujeros negros masivos, se estudia la dependencia de las soluciones de los discos de acreción con la variación de la masa de los fermiones que conforman la materia oscura. Debido a que la compacidad de los núcleos de materia oscura puede ser comparable con aquella de un agujero negro, y que los discos de acreción pueden extenderse hacia el interior de tal núcleo (siendo este transparente), se muestra que es posible tener una mayor eficiencia en la acreción, así como lograr flujos de emisión más energéticos que en el caso estándar. Esto permite aplicar el modelo a núcleos de galaxias activas y comparar con el caso tradicional, abriendo nuevas puertas para el estudio de formación, y consecuente crecimiento de agujeros negros supermasivos en el Universo temprano.

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 8 |
| 2. Modelo RAR | 12 |
| 2.1. Contexto astrofísico | 12 |
| 2.2. Ecuaciones del modelo RAR | 13 |
| 2.3. Descripción de la distribución de masa | 14 |
| 2.4. Fluido perfecto en equilibrio | 14 |
| 2.5. Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales | 15 |
| 3. Discos de Acreción α | 21 |
| 3.1. Introducción | 21 |
| 3.2. La estructura local de discos delgados | 24 |
| 3.3. Espectro emitido | 25 |
| 3.4. La estructura de los discos- α estacionarios (el 'modelo estándar') | 26 |
| 4. Discos de Acreción α sobre núcleos supermasivos de materia oscura | 30 |
| 4.1. Introducción | 30 |
| 4.2. La estructura local de discos delgados | 33 |
| 4.3. La estructura de los discos- α estacionarios | 34 |
| 4.4. Eficiencia del disco | 36 |
| 5. Resultados | 41 |
| 5.1. Espectro emitido | 41 |
| 5.2. Estructura de discos- α | 46 |
| 6. Conclusiones | 54 |
| 7. Referencias | 57 |
| 8. Apéndice A | 61 |

Capítulo 1

1. Introducción

Distintos conjuntos de datos observacionales provenientes de: i) el fondo cósmico de radiación ('cosmic microwave background') ([1]); los picos acústicos bariónicos ('baryon acoustic peaks') en el espectro de potencias de galaxias obtenidos por ej. por el 2dF Galaxy Redshift Survey y el Sloan Digital Sky Survey ([2, 3]); la distribución de las estructuras conocidas en el Universo cercano (a escalas mayores a los 100 Mpc) ([4]); así como las curvas de rotación galácticas y las lentes gravitacionales ([5]), comprenden la fuente más precisa de datos que tenemos para demostrar la necesidad de existencia de materia y energía oscura (aproximadamente un 95% del total de materia-energía del Universo). Estos datos deben considerarse conjuntamente con los resultados teóricos sobre la abundancia de elementos livianos primordiales, He,D,etc. (aproximadamente el 5% del total) predicha por el modelo teórico estándar del Universo primitivo (Big Bang), y corroborada por observaciones de estos nucleoides en ambientes astrofísicos locales ([6]). De la combinación de estos resultados se concluye que la materia oscura debe de ser de naturaleza *no* bariónica. Es decir, la materia oscura no puede estar formada por materia ordinaria (como protones, neutrones o electrones), sino que debe estar conformada por alguna otra partícula neutra, que no emita ningún tipo de radiación electromagnética detectable.

La necesidad de suponer la existencia de una componente de materia oscura como parte esencial en la composición total materia-energía del Universo, es uno de los resultados centrales del modelo cosmológico estándar (LCDM) ([7]). Un tema abierto aún no resuelto y de gran relevancia en el área, es precisamente cómo se distribuye tal componente de materia a escalas galácticas, y cuál es la naturaleza y masa de las partículas que componen la materia oscura. La principal herramienta que existe en la actualidad para responder estas cuestiones está basada en las simulaciones cosmológicas (clásicas) de N-cuerpos, con condiciones iniciales adecuadas provistas por el paradigma de LCDM ([8]). Si bien este tipo de simulaciones logra explicar de buena manera la distribución de la materia oscura a grandes escalas ($> \text{Mpc}$), enfrenta varios desafíos y tensiones a corta escala (escala galáctica) aún por ser resueltos. Distintas alternativas están siendo provistas en los últimos años para solucionar estos problemas, incluyendo la posibilidad de que la materia oscura sea auto-interactuante ([9]), o la de considerar materia oscura tibia en vez de fría (con distinta física de desacople primordial) ([10]), o bien abandonar la hipótesis de partículas clásicas incorporando efectos cuánticos en las simulaciones ([11]), entre otras.

En las referencias ([12]-[13]) se introduce por el director del presente plan (y colaboradores) un enfoque alternativo (semianalítico) al propuesto por las simulaciones cosmológicas de N-cuerpos mencionadas anteriormente. La alternativa incluye la naturaleza cuántica de los candidatos a materia oscura, ofreciendo soluciones a algunos de los problemas que posee el paradigma de LCDM en cortas escalas. Esta teoría se basa en resolver las ecuaciones correspondientes a un sistemas autogravitantes de partículas fermiónicas neutras en equilibrio hidrostático y termodinámico en relatividad general. Las soluciones a este modelo se utilizan para describir los halos de materia oscura en estructuras galácticas desde el centro hacia la periferia: el modelo de Ruffini-Argüelles- Rueda (RAR). Tal modelo implica novedosos perfiles de densidad de materia oscura los cuales, debido a la naturaleza cuántica de los fermiones (principio de exclusión de Pauli) desarrollan una morfología de la

forma núcleo compacto - halo diluído, los cuales tienen la particularidad de depender de la masa de la partícula (a diferencia de otros perfiles disponibles en la literatura). Cuando la masa de los fermiones cae en el rango de $\approx 50 - 300 \text{ keV}/c^2$, las soluciones del modelo RAR explican las curvas de rotación galácticas a través del régimen diluído, y al mismo tiempo predicen la existencia de densos objetos super masivos (no singulares) hacia el centro por medio de su régimen cuántico (degeneración fermiónica). En el caso particular en que la masa del candidato a materia oscura es de $50 \text{ keV}/c^2$, las masas de estos núcleos densos y compactos de materia oscura van desde $\sim 10^3 M_\odot$ (para galaxias enanas) hasta algunos $10^8 M_\odot$ (para galaxias elípticas no activas) ([14]), pasando por el sugestivo valor de 4 millones de masas solares para el caso de la Vía Láctea ([13],[15],[16]). Es decir, el modelo RAR provee de manera natural una alternativa al paradigma de los agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias, mientras al mismo tiempo responde por los halos de materia oscura, ambos compuestos por fermiones neutros de spin $1/2$ y con masas en el rango del keV/c^2 .

Desde el punto de vista físico, los discos de acreción se clasifican en distintos regímenes según la tasa de acreción de materia sobre el objeto compacto ([17]). Para tasas de acreción altas, el flujo puede modelarse con la solución estándar de disco delgado y ópticamente grueso de Shakura-Sunyaev (SSD, ([18],[19])). Estos discos se caracterizan por extenderse hasta la última órbita estable cuando se forman alrededor de agujeros negros. De esta forma, permiten hacer estudios sobre los efectos relativistas en las regiones cercanas al objeto compacto (e.g., mediciones del spin, corrimiento al rojo gravitacional, entre otros efectos). Es por ello que son excelentes soluciones para estudiar posibles desviaciones de la Relatividad General (teorías $f(R)$, o STVG, ver, por ejemplo, ([20])); asimismo, permite analizar alternativas a la presencia de un agujero negro.

En este trabajo se estudiarán los discos de Shakura y Sunyaev los cuales se ubican alrededor de núcleos compactos de materia oscura situados en los centros galácticos predichos por el modelo RAR. Para ello, en la primera parte del trabajo, se desarrollará el modelo RAR y, debido a la complejidad de sus ecuaciones, se obtendrán soluciones del modelo computacionalmente. Para lograrlo, es necesario plantear diversas condiciones de contorno al sistema de ecuaciones diferenciales, bien estudiadas en ([13]-[14]). Con éstas, será posible comparar no sólo diferencias dentro del marco del modelo RAR (por ejemplo respecto a la compacidad del núcleo central), sino también con el ya conocido modelo de agujeros negros de Schwarzschild. En la segunda etapa del trabajo se desarrollará la teoría de Shakura y Sunyaev con sus respectivas modificaciones dentro del modelo RAR, así como su respectiva comparación con el caso estándar del agujero negro central. Para obtener la dinámica de los discos de acreción, es necesario plantear dos hipótesis: que el disco sea delgado y que sea altamente supersónico. A lo largo del trabajo se demuestra el cumplimiento de dichas hipótesis y se muestran los resultados obtenidos.

En resumen, el siguiente trabajo comprende los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2:** En este capítulo se desarrolla el modelo RAR extendido, dando una motivación general de sus hipótesis y detallando las ecuaciones diferenciales que surgen en este modelo. Además, se muestran algunos resultados obtenidos de estas ecuaciones.
- **Capítulo 3:** Se desarrolla todo lo que compete a la dinámica de los discos de acreción, desde sus hipótesis, la validación de las mismas, y los resultados obtenidos, dados por las soluciones alrededor de un agujero negro de Schwarzschild por Shakura y Sunyaev en 1973.
- **Capítulo 4:** Se desarrollan las modificaciones de los discos de acreción detallados en la Sec-

ción anterior dentro del modelo RAR. A su vez, para determinar el radio interno del disco de acreción dentro de este modelo, se estudia la energía gravitacional en este marco.

- **Capítulo 5:** Se presentan y analizan los resultados para los espectros y soluciones de los discos de acreción considerados a lo largo de este trabajo de tesis de Licenciatura.
- **Capítulo 6:** Se presentan las conclusiones obtenidas a partir de la investigación realizada a lo largo de este trabajo.

Capítulo 2

A lo largo de este capítulo se introduce el modelo a utilizar en este trabajo que describe la distribución de materia oscura a escala galáctica.

2. Modelo RAR

2.1. Contexto astrofísico

La formación, estabilidad y composición de sistemas autogravitantes de partículas no colisionales de materia oscura siguen siendo problemas actuales aún abiertos en la astronomía y la cosmología. Actualmente, las evidencias respaldan fuertemente el hecho de que el comportamiento de las estructuras a gran escala del Universo está regido por materia oscura fría, con la falencia de que, a escalas galácticas, todavía hay problemas sin resolver, como lo son la discrepancia núcleo-cúspide (*core-cusp* [21]) y el problema de los satélites faltantes (*missing satellite problem* [22]), entre otros.

En el intento de estudiar las estructuras galácticas en términos de principios físicos fundamentales, como la termodinámica y la física estadística, el problema más sutil es el de comprender los complejos procesos de relajación que tienen lugar antes de que un halo galáctico entre en los estados estacionarios en los que se los observan. El mecanismo de *relajación violenta* ([23]), es el principal mecanismo de relajación de halos galácticos. El mismo es del tipo de relajación no colisional, y su efecto es el de cambiar la energía de cada partícula del sistema durante el proceso de relajación lo cual ocurre debido a que el potencial gravitatorio del sistema en su camino a un estado cuasi-estable es dependiente del tiempo. En consecuencia, cualquier partícula del sistema sentirá un potencial gravitatorio variable en el tiempo generado por el resto de las partículas que conforman el sistema, conduciendo a que la energía de la partícula no se conserve durante el proceso de relajación.

Si se supone una naturaleza clásica en el gas que conforma el halo galáctico, su distribución de velocidades podrá evolucionar durante el proceso de formación del halo hacia una distribución maxwelliana de velocidades, lo cual produce perfiles de densidad que corresponden a los de una esfera isoterma ([23]). El problema es que la extensión espacial de las distribuciones de masa de esferas isotermas es infinita (su densidad va asintóticamente como $\propto 1/r^2$ a grandes r), al igual que sus masas totales, lo cual no se corresponde con alguna estructura astrofísica realista. Por tanto, para que los halos astrofísicos posean una distribución finita al alcanzar el estado de cuasi-equilibrio (donde se maximice la entropía) es necesario que ocurra un mecanismo de evaporación de partículas (si el sistema evoluciona aislado). Comenzando con la ecuación fundamental que rige la evolución temporal de la función de distribución en el espacio de fases ($f(r, v, t)$) para sistemas de partículas no-colisionales (la ecuación de Vlasov-Poisson), es posible (descomponiendo f como un promedio en el espacio de fases (\bar{f}) mas fluctuaciones) construir una teoría cinética para \bar{f} la cual ahora posee un término de interacción efectiva (puramente gravitatorio) caracterizado por una corriente de difusión ([24]). Esta corriente permite gradualmente incrementar la velocidad de alguna de las partículas, generando que posean una energía ligeramente positiva y se desliguen del sistema. El mecanismo de relajación violenta mencionado anteriormente corresponde a un proceso en el cual ocurre evaporación de partículas, y siendo posible obtener soluciones estacionarias para \bar{f} del tipo de Fermi-Dirac con un cut-off en la energía de las partículas ([25]) como la utilizada en esta Tesis en el caso de fermiones (ver 3). Puede ser acelerado este proceso debido a fuerzas de marea (si el sistema no está aislado),

lo cual impone un comportamiento en forma de corte en la distribución de masa, adquiriendo las velocidades un comportamiento similar. De esta manera, los mecanismos de relajación violenta para partículas clásicas admiten soluciones de Maxwell-Boltzmann para \tilde{f} con un corte en sus velocidades capaces de explicar el comportamiento de los halos galácticos ([25]).

Si en cambio se considera la naturaleza cuántica (fermiónica) de las partículas que conforman el halo de materia oscura, es posible obtener soluciones más generales para los mismos. Es decir, cuando la materia oscura se modeliza en términos de fermiones neutros de spin $1/2$, y debido al principio de exclusión de Pauli que actúa en un espacio de fases en presencia de gravedad, existen soluciones que presentan altas concentraciones de materia oscura formando un núcleo compacto altamente degenerado (gobernado por degeneración de Fermi), el cual está rodeado por un halo más diluido ([26, 12]). Como se verá en la Sección 2, estos núcleos degenerados internos, pueden considerarse como alternativa al paradigma del agujero negro supermasivo ([13]-[14]).

2.2. Ecuaciones del modelo RAR

El modelo *RAR*, denominado así por las iniciales de sus autores, Ruffini-Argüelles-Rueda, considera una distribución de masa acotada en radio y en equilibrio, con la suposición que ésta se encuentra compuesta de fermiones neutros autogravitantes en simetría esférica ([12]). En su versión más general del modelo (la cual incluye el efecto de evaporación de partículas), la distribución de masa depende de cuatro variables: el parámetro de degeneración, la energía de corte (o escape), la temperatura y la masa de la partícula ([13]). Las ecuaciones que gobiernan el sistema en equilibrio son las ecuaciones de Einstein acopladas con las ecuaciones de Tolman ([27]) y Klein ([28]) (es decir ley 0 y 1 de la termodinámica en Relatividad General), para un fluido perfecto.

Es de suma importancia destacar que deben elegirse condiciones de borde adecuadas para las variables antes mencionadas, dado que las mismas dependen de la distancia al centro de la distribución. La masa de la partícula de materia oscura es sólo una restricción (no aparece de manera explícita en el sistema de ecuaciones diferenciales cuando es escrito de manera adimensional) y sólo es necesaria para proporcionar las magnitudes correctas del halo de materia oscura (como escala de masa y radio astrofísicos). Es por ello que, el modelo *RAR* es la descripción más general de una distribución acotada de masa esféricamente simétrica y autogravitante de fermiones neutros en equilibrio termodinámico.

Este modelo no tiene en cuenta la producción de energía y los procesos de transporte llevados a cabo por la componente bariónica de la galaxia. En consecuencia, el modelo describe un sistema cuasi-estacionario donde sus parámetros podrían variar lentamente con el tiempo. Por otro lado, se considera que el sistema tiene simetría esférica, cuando en sistemas astrofísicos reales se presentan algún grado de anisotropía (aunque este es un efecto menor en la mayoría de los halos de materia oscura). Esta aproximación cobra especial interés para la aplicación de halos en galaxias que no han sufrido procesos de marea importantes, y ha sido aplicado de manera satisfactoria en galaxias esferoidales enanas, espirales y elípticas ([14]). Finalmente, las distribuciones de masas en el modelo *RAR* son naturalmente confinadas en su radio (gracias a su parámetro de corte en la energía de las partículas), siendo su densidad cero en el borde de la configuración. De esta manera el modelo *RAR* permite reproducir los tamaños finitos de las galaxias sin necesidad de realizar un corte espacial en densidad, y tener en cuenta procesos más realistas de relajación de las mismas.

2.3. Descripción de la distribución de masa

La ecuación de estado en el modelo RAR, y su correspondiente distribución de masa, es descrita a través de su densidad de masa $\rho(r)$ y su presión $P(r)$ ([13]):

$$\rho(r) = \frac{2m}{h^3} \int \bar{f}_c(\epsilon(p), r) \left(1 + \frac{\epsilon(p)}{mc^2}\right) d^3p, \quad (1)$$

$$P(r) = \frac{4}{3h} \int \bar{f}_c(\epsilon(p), r) \epsilon(p) \frac{1 + \epsilon(p)/2mc^2}{1 + \epsilon(p)/mc^2} d^3p. \quad (2)$$

Aquí, $\epsilon(p)$ es la energía de la partícula que viene dada por $\epsilon(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} - mc^2$, siendo p la norma del momento lineal de la partícula. h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y m es la masa del fermión que forma el sistema autogravitante de materia oscura. La integración es llevada a cabo en una región del espacio de momentos, acotada por la condición de corte donde $\epsilon \leq \epsilon_c(r)$, con ϵ_c la energía de corte. La cantidad $\bar{f}_c(\epsilon(p), r)$ es la función de distribución en el espacio de fases, la cual difiere de la función de distribución de Fermi-Dirac dada la presencia de la energía de corte como:

$$\bar{f}_c(\epsilon, r) = \begin{cases} \frac{1 - e^{(\epsilon - \epsilon_c(r))/kT(r)}}{1 + e^{(\epsilon - \mu_c(r))/kT(r)}} & \epsilon \leq \epsilon_c(r) \\ 0 & \epsilon > \epsilon_c(r) \end{cases} \quad (3)$$

μ es el potencial químico al cual se le ha sustraído la energía en reposo de la partícula de materia oscura, $T(r)$ es la temperatura de la distribución y k es la constante de Boltzmann.

El modelo no considera la presencia de antifermiones, tal que se consideran temperaturas $T(r) \ll mc^2/k$. De esta manera, los fermiones evitan alcanzar energías aptas para la creación de pares de partícula-antipartícula. Se trabaja en un marco relativista, con expresiones propias a dicho contexto. El conjunto de las variables de corte, degeneración y temperatura estarán dadas por:

$$\text{variable de temperatura} \rightarrow \beta(r) = \frac{kT(r)}{mc^2}, \quad (4)$$

$$\text{variable de degeneración} \rightarrow \theta(r) = \frac{\mu(r)}{kT(r)}, \quad (5)$$

$$\text{variable de corte} \rightarrow W_c(r) = \frac{\epsilon_c(r)}{kT(r)}. \quad (6)$$

2.4. Fluido perfecto en equilibrio

Tras haber planteado el modelo y la distribución de masa, se pueden plantear las ecuaciones que rigen la mecánica del sistema, como lo desarrollado en ([13]). El mismo consiste en resolver las ecuaciones de campo de Einstein del sistema, acopladas con las ecuaciones de Klein y Tolman. La información sobre la geometría del espacio-tiempo estará dada por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Por otro lado, la caracterización de la distribución de masa que genera curvatura en el espacio-tiempo estará descrita por el tensor (diagonal) de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Dado que el sistema presenta simetría esférica, se utiliza la métrica estándar para simetría esférica dada por:

$$g_{\mu\nu} = (e^{\nu(r)}, -e^{\lambda(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (7)$$

Las únicas incógnitas del sistema son las funciones métricas radiales $\nu(r)$ y $\lambda(r)$, dado que las ecuaciones proporcionadas por $\rho(r)$ y $P(r)$ en las ecuaciones 1 y 2, describen la distribución del sistema.

Teniendo en cuenta que la *masa acumulada* de la distribución de masa es definida como:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}, \quad (8)$$

y resolviendo las ecuaciones de Einstein (junto con las ecuaciones de Tolman y Klein), se obtiene que las ecuaciones diferenciales que compondrán al modelo RAR con:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (9)$$

$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{8\pi G}{c^4} P(r) r^2 + 1 \right) - 1 \right], \quad (10)$$

$$W(r) = \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\nu(r)/2}}{\beta_0}, \quad (11)$$

$$\theta(r) = \theta_0 - W_0 + W(r), \quad (12)$$

$$\beta(r) = e^{-\nu(r)/2} \beta_0. \quad (13)$$

La ecuación para la masa 9 así como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 10, son las únicas dos ecuaciones de Einstein relevantes del problema. Al ser ordinarias y de primer orden, se les debe indicar una condición de contorno (al origen) adecuada para resolverlas de manera unívoca. Siendo que se trabajará con soluciones regulares (no singulares) se toma $M(0) = M_0 = 0$. Mientras que para la función métrica temporal se tomará $\nu(0) = \nu_0$, según lo indicado en [29], con ν_0 tal que la solución RAR se empalme con la solución de Schwarzschild en el borde de la configuración (es decir continuidad de la métrica). Finalmente la ecuación 13 se deduce trivialmente de la ecuación de Tolman ([27]) mientras que 11 se deriva de las ecuaciones de Klein ([28]) (consistentes con la hipótesis de equilibrio termodinámico en relatividad general). Por último la ecuación 11 se deduce de la conservación de la energía de las partículas a lo largo de las geodésicas. Siendo en total los parámetros libres (adimensionales) al origen, la temperatura, degeneración y parámetro de corte en el origen de la distribución de masa. Los mismos son: $\beta(0) = \beta_0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $W(0) = W_0$ respectivamente.

2.5. Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales

Una vez presentado el modelo RAR, se puede resolver el sistema de manera numérica. Para hacerlo, conviene adimensionalizar las funciones y la variable radial involucrada en dicho sistema. Según ([29]), se definen:

$$\rho = \frac{c^2}{G\chi^2} \hat{\rho}, \quad (14)$$

$$P = \frac{c^4}{G\chi^2} \hat{P}, \quad (15)$$

$$M = \frac{c^2 \chi}{G} \hat{M}, \quad (16)$$

$$r = \chi \hat{r}. \quad (17)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Las cantidades con un *sombrero* son las variables adimensionalizadas. La constante χ se define como:

$$\chi = \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{m_p}{m} \right) \left(\frac{8\pi^3}{g} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

| Parámetro | $mc^2 = 56\text{keV}$ | $mc^2 = 100\text{keV}$ | $mc^2 = 378\text{keV}$ |
|------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| β_0 | $6,71186981 \cdot 10^{-3}$ | $5,511242814486 \cdot 10^{-5}$ | $5,114682603232 \cdot 10^{-3}$ |
| θ_0 | $3,93641124 \cdot 10^1$ | $3,893274051305 \cdot 10^1$ | $4,843123086688 \cdot 10^1$ |
| W_0 | $6,64406668 \cdot 10^1$ | $6,829299208749 \cdot 10^1$ | $7,891041498675 \cdot 10^1$ |

Tabla 1: Valores óptimos de los tres parámetros libres del modelo RAR para la Vía Láctea, para tres valores diferentes de la masa de la partícula de materia oscura, el cual también es un parámetro libre.

donde $\hbar = h/2\pi$, $m_p = \sqrt{\hbar c/G}$ es la masa de Plank y $g = 2s + 1$, es el factor de multiplicidad, siendo s el spín del fermión. En este caso, $s = 1/2$.

De esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver queda:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{M}(\hat{r})}{d\hat{r}} &= 4\pi\hat{r}^2\hat{\rho}(\hat{r}), & \hat{M}(0) &= \hat{M}_0 = 0, [1] \\
\frac{d\hat{v}(\hat{r})}{d\hat{r}} &= \frac{1}{\hat{r}} \left[\left(1 - \frac{\hat{M}(\hat{r})}{\hat{r}}\right)^{-1} (8\pi\hat{P}(\hat{r})\hat{r}^2 + 1) - 1 \right], & \hat{v}(0) &= \hat{v}_0, [2] \\
W(\hat{r}) &= \frac{1 + \beta_0 W_0 - e^{\hat{v}(\hat{r})/2}}{\beta_0}, & W(0) &= W_0, [3] \\
\theta(\hat{r}) &= \theta_0 - W_0 + W(\hat{r}), & \theta(0) &= \theta_0, [4] \\
\beta(\hat{r}) &= e^{-\hat{v}(\hat{r})/2} \beta_0, & \beta(0) &= \beta_0. [5]
\end{aligned} \tag{19}$$

La ecuación para la masa (19)[1] así como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (19 [2]), son las únicas dos ecuaciones de Einstein relevantes del problema. Al ser ordinarias y de primer orden, se les debe indicar una condición de contorno (al origen) adecuada para resolverlas de manera unívoca. Siendo que se trabajará con soluciones regulares (no singulares) se toma $\hat{M}(0) = \hat{M}_0 = 0$. Mientras que para la función métrica temporal se tomará $\hat{v}(0) = \hat{v}_0$, según lo indicado en ([30]), con \hat{v}_0 tal que la solución RAR se empalme con la solución de Schwarzschild en el borde de la configuración (es decir continuidad de la métrica). Para obtener las restantes ecuaciones, las cuales rigen el comportamiento de las tres variables indicadas en las Ecs. 4, 12 y 11, se debe suponer la hipótesis de equilibrio termodinámico en relatividad general. Además, se utilizan tres expresiones conservadas a lo largo de una dada geodésica radial, generando que intervengan en el modelo tres parámetros constantes, siendo en total los parámetros libres (adimensionales) al origen. Los mismos son la temperatura, degeneración y parámetro de corte en el origen de la distribución de masa: $\beta(0) = \beta_0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $W(0) = W_0$ respectivamente.

A lo largo del trabajo se utilizan masas para los fermiones de $mc^2 = 56\text{keV}$, $mc^2 = 100\text{keV}$ y $mc^2 = 378\text{keV}$. En la Tabla 1 se muestran los valores que ajustan a las condiciones de borde para la Vía Láctea dadas en la Tabla 2. El ajuste se realiza con el programa *optim_mass.py* el cual es propiedad del director del presente plan y colaboradores. A través de un método de mínimos cuadrados, el programa halla el conjunto de parámetros (β_0, θ_0, W_0) que optimice la solución del sistema de ecuaciones acorde a los valores dados de la masa acumulada en función del radio de la galaxia que se pretenda modelar.

En las Figuras 1, 2 y 3 se muestran los perfiles de masa y de densidad de la distribución obtenidos para cada caso. Puede apreciarse que los valores determinados observacionalmente dados en la Tabla 2 se ajustan al perfil de masa de la distribución de materia oscura del sistema para los tres casos de las masas de partículas. Cabe destacar que el primer valor de masa ($M_c = 3,5 \times 10^6 M_\odot$) que se pretende estimar se corresponde con la masa del objeto compacto supermasivo situado en el centro de nuestra

| Radio [kpc] | Masa acumulada [M_{\odot}] |
|----------------------|--------------------------------|
| $4,25 \cdot 10^{-7}$ | $3,50 \cdot 10^6$ |
| 12 | $3,63 \cdot 10^{10}$ |
| 40 | $2,27 \cdot 10^{11}$ |

Tabla 2: Condiciones de contorno utilizadas como datos de entrada del programa `optim_mass.py`. El primer valor de la masa acumulada y el radio son tomados de [15]; el segundo, de [31]; y el tercero, de [32]. En esta tabla se presenta como ejemplo el caso de $mc^2 = 56\text{keV}$.

| mc^2 [keV] | r_c [kpc] |
|--------------|----------------------|
| 56 | $4,27 \cdot 10^{-7}$ |
| 100 | $9,06 \cdot 10^{-8}$ |
| 378 | $1,37 \cdot 10^{-9}$ |

Tabla 3: Valores del radio del core obtenidos al variar la masa del fermión que conforma la materia oscura del sistema en estudio.

Galaxia (ver [15]). Es decir, se está pidiendo que el núcleo compacto de materia oscura reemplace al paradigma del agujero negro, según fue probado de manera exitosa en ([15, 16]) considerando la dinámica de las estrellas-S que orbitan alrededor de Sgr A* como observables ¹. Los otros dos valores de masa ($\sim 10^{10}M_{\odot}$, $\sim 10^{11}M_{\odot}$) se corresponden con valores inferidos observacionalmente a escalas del halo externo en ([33, 34]) respectivamente. Se observa un comportamiento similar en el perfil de densidad para los tres casos, donde se presenta una primera caída abrupta de la densidad en la zona del núcleo (debido a la transición desde el régimen de degeneración cuántico al clásico), y otra más externa debido a la existencia de la energía de corte en la distribución de la energía. Según fue probado en [29, 13], la variable de corte es una función decreciente del halo. Además satisface la condición de que $W(R) = 0$, ya que se impuso a la energía de corte $\epsilon_c(R) = 0$, en donde R es el radio de la distribución de masa. Es esperable entonces que para algún radio la densidad tienda a cero, como se ve en las figuras 1, 2 y 3.

Vale aclarar que, tal como fue mencionado anteriormente, la distribución de materia oscura se concentra en el centro formando un núcleo compacto altamente degenerado. Por ende, para establecer el valor del radio del núcleo, de ahora en más denominado como *radio del core* (r_c), se lo define como el radio para el cual la velocidad de la curva de rotación se hace máxima. En la Tabla 3 se muestran los valores correspondientes al radio r_c para cada masa de fermión elegida. Cabe mencionarse que la masa acumulada dentro de este radio es elegida para que sea comparable con la masa del Sgr A* (independientemente de la masa del fermión elegida). Esto se logra a través de fijar los parámetros iniciales de manera que los datos observacionales dados en la Tabla 2 coincidan con el modelo. Por ende, la masa del core (M_c) en todos los casos es $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_{\odot}$.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que, dada la regularidad del objeto central, no hay ISCO (*Innermost Stable Circular Orbit*) presente en el modelo RAR, debido a que se modela a toda la distribución de materia oscura fermiónica como transparente, es decir que existen geodésicas permi-

¹El por qué de la pequeña diferencia entre este valor de M_c y los casi 4 millones de masas solares que debe tener la masa total del objeto central, tiene que ver con la definición del radio del core, y su explicación se puede encontrar en [15].

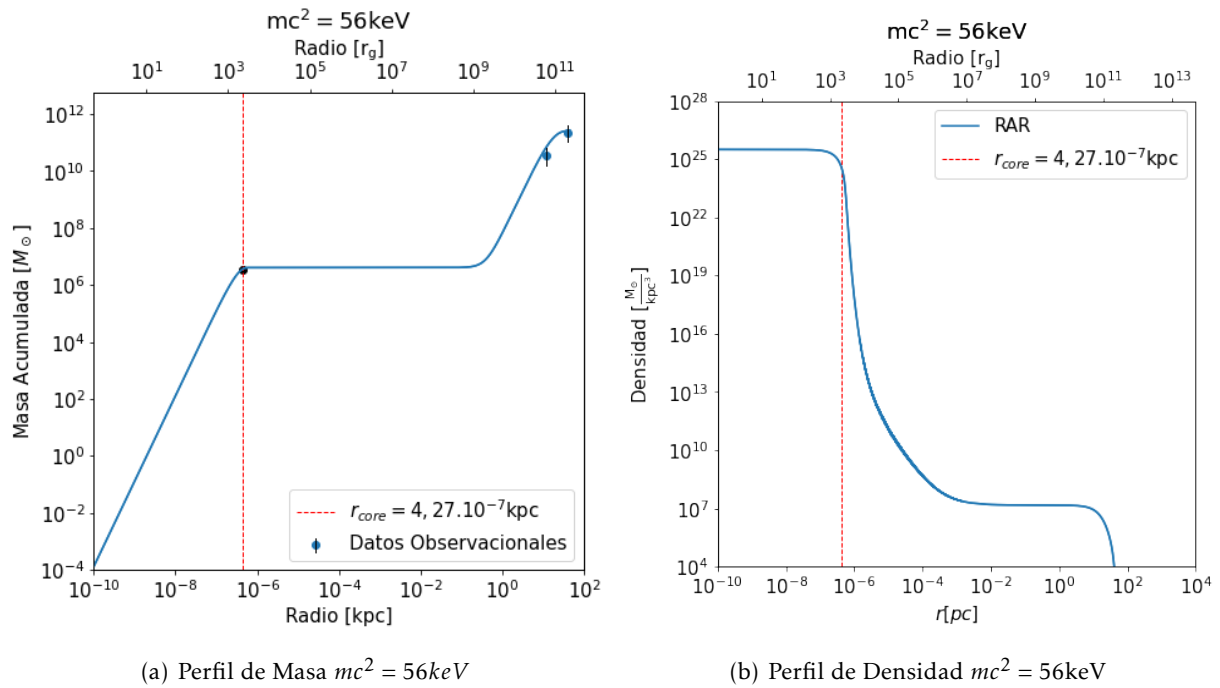


Figura 1: Gráficos correspondientes a una masa de partícula de materia oscura de $mc^2 = 56\text{keV}$. Por debajo se muestra la escala del radio en kpc, mientras que arriba se muestra en radios gravitacionales. A la izquierda se muestra la masa del sistema de materia oscura como función del radio de la galaxia. Los puntos azules detallan los valores determinados observacionalmente, correspondientes a la Tabla 2. El punto más interno corresponde al objeto compacto del núcleo de la Vía Láctea modelado como un sistema degenerado de fermiones. Los dos restantes valores corresponden a valores de la masa acumulada del halo de la Galaxia. A la derecha se muestra el perfil de densidad del sistema autogravitante de fermiones.

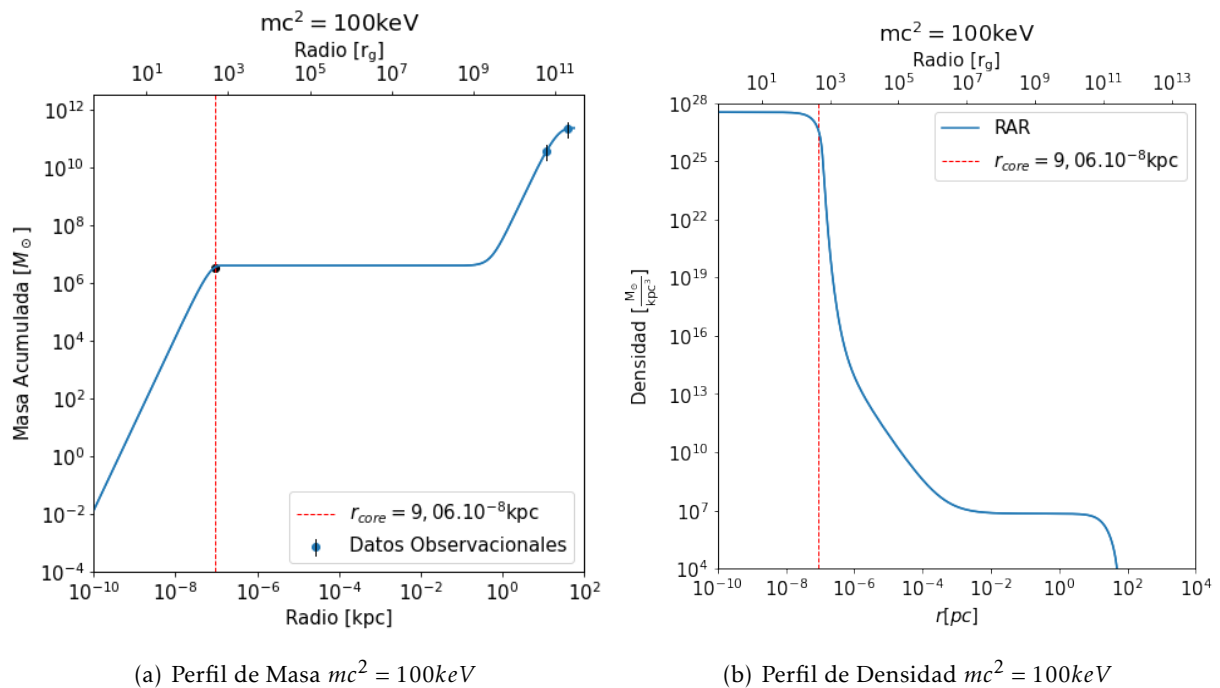


Figura 2: Gráficos correspondientes a una masa de partícula de materia oscura de $mc^2 = 100\text{keV}$. A la izquierda, la distribución de masa del sistema de materia oscura como función del radio de la galaxia. A la derecha, el perfil de densidad del sistema autogravitante de fermiones.

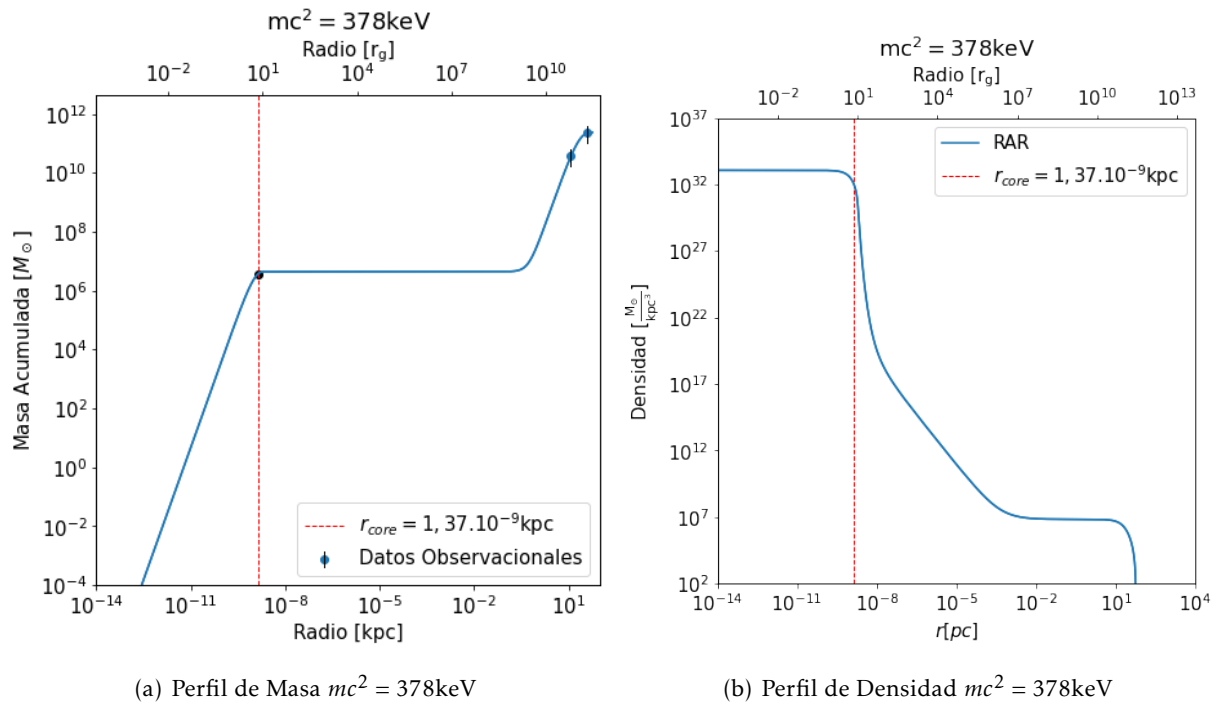


Figura 3: Gráficos correspondientes a una masa de partícula de materia oscura de $mc^2 = 378\text{keV}$. A la izquierda, la distribución de masa del sistema de materia oscura como función del radio de la galaxia. A la derecha, el perfil de densidad del sistema autogravitante de fermiones

tidas dentro y fuera del núcleo de materia oscura tanto para partículas masivas como no masivas, permitiendo obtener soluciones para radios menores que el radio del núcleo del objeto central. Este hecho, junto a la dependencia de la masa con el radio, presentan las dos diferencias significativas a lo que ocurre alrededor de las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el entorno de agujeros negros.

En la siguiente Sección y como primer trabajo de esta tesis, se desarrolla la teoría de discos- α de acreción desarrollada por Shakura & Sunyaev ([18]) en 1973.

Capítulo 3

El contenido de este capítulo está basado en los Cap. 4 y 5 de Frank et al ([35]) y de ([18]-[19]), donde se desarrolla la teoría de discos α publicada en 1973 por Shakura & Sunyaev.

3. Discos de Acreción α

3.1. Introducción

El proceso a través del cual se genera el disco de acreción, espiralando la materia hacia dentro, implica pérdida de momento angular. Si no hay torsión externa, para que pierda momento, debe haber transferencia del mismo hacia el exterior, a través de mecanismos de torsión internos. Luego, partes exteriores del disco ganan momento angular y espiralan hacia fuera. Como la velocidad angular depende del radio, los elementos de fluido deslizan entre sí, generando tensiones viscosas. Esto implica la existencia de viscosidad (denominada *shear viscosity*). Si hay movimiento caótico en un flujo en equilibrio, cada elemento tiene momento angular distinto. Esto implica que hay transporte de esta cantidad, debido al torque ejercido entre la corriente exterior sobre la interior y viceversa.

Para describir la dinámica del disco de acreción, se considera que en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) la materia se encuentra cerca del plano $z = 0$, es decir el disco es delgado y se satisface $z(R) \ll R$. A su vez, se asume que la materia se mueve en órbitas Keplerianas alrededor del objeto compacto, donde la velocidad angular está dada por:

$$\Omega = \Omega_K(R) = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

y la velocidad circular por:

$$v_\phi = R\Omega_K(R). \quad (21)$$

En cuanto a la componente radial de la velocidad, se considera que el gas posee una pequeña velocidad v_R , que es negativa cerca del objeto central, de forma que la materia es acretada. Teniendo en cuenta que la misma depende tanto del tiempo t como del radio R , el disco se caracteriza por su densidad superficial $\Sigma(R, t)$:

$$\Sigma(R, t) = \int_{-H}^H \rho dz \approx 2H\rho.$$

Esta densidad no es más que la masa por unidad de superficie del disco, dada al integrar la densidad del gas en la dirección z .

Para describir la estructura del disco, es necesario plantear las ecuaciones de conservación para la masa y el transporte de momento angular en el disco. Para un anillo del disco que se encuentra entre R y $R + \Delta R$, la masa total será $2\pi R\Delta R\Sigma$ con momento angular total de $2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega$. La tasa de cambio de ambas cantidades está dada por el flujo neto de los anillos vecinos.

Para la conservación de masa se tiene:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R\Sigma v_R) = 0. \quad (22)$$

Por otro lado, para poder escribir una ecuación de conservación de momento angular, se debe tener en cuenta el torque ejercido por el anillo exterior en el interior (el cual es opuesto al torque ejercido

por el interior del anillo sobre el exterior):

$$G(R) = 2\pi R\nu\Sigma R^2\Omega', \quad (23)$$

con ν la viscosidad cinemática y $\Omega' = \frac{d\Omega}{dr}$ el cambio en la velocidad angular. Así, se obtiene la ecuación de conservación:

$$R\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2\Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma\nu_R R^2\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (24)$$

Para el análisis de las Ecs. 22 y 24, se puede considerar un régimen estacionario, es decir $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, en aquellos sistemas cuyos discos posean estructuras estables. Para ello es necesario que las condiciones externas generen cambios en la estructura radial del disco en tiempos mayores que t_{visc} , dada por $t_{visc} \sim R^2/\nu$. De esta manera, la Ec. 22 hace referencia a un flujo entrante de masa a través de cada punto del disco. Como $\nu_R < 0$,

$$\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-\nu_R), \quad (25)$$

donde \dot{M} es la tasa de acreción (g s^{-1}).

Por otro lado, integrando en R la Ec. 24 en estado estacionario, se obtiene:

$$R\Sigma\nu_R R^2\Omega = \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi}, \quad (26)$$

con C una constante. Usando la Ec. 23:

$$-\nu\Sigma\Omega' = \Sigma(-\nu_R)\Omega + C/(2\pi R^3).$$

La constante C está relacionada con la tasa a la cual el momento angular fluye hacia el objeto compacto. En un agujero negro de Schwarzschild, el disco se extiende hasta la ISCO $R = R_{in}$, radio en el cual $G \equiv 0$ ([35]), y luego:

$$\Omega(R_{in} + b) = \left(\frac{GM}{R_{in}^3}\right)^{1/2} [1 + O(b/R_{in})]. \quad (27)$$

Dicha condición permite hallar el valor de la constante C , haciendo uso de la Ec. 26, junto con las Ecs. 25 y 27:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_{in}}{R}\right)^{1/2}\right]. \quad (28)$$

Debido a que los torques viscosos generan *disipación viscosa*, esta energía se irradia sobre las caras superior e inferior del disco, resultando en una disipación viscosa por unidad de área dada por:

$$D(R) = \frac{G\Omega'}{4\pi R} = \frac{1}{2} \nu\Sigma(R\Omega')^2. \quad (29)$$

Si se establece $\Omega = \Omega_K$ en esta expresión y se utiliza la Ec. 28, se obtiene:

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_{in}}{R}\right)^{1/2}\right]. \quad (30)$$

De aquí se desprende que la energía disipada a través de las caras de un disco delgado estacionario no depende de la viscosidad ν .

Por otra parte, la luminosidad producida por el disco entre dos radios R_1 y R_2 está dada por:

$$L_{disco} = 2 \int_{R_1}^{R_2} D(R) 2\pi R dR. \quad (31)$$

Antes de seguir con el estudio de la estructura del disco, para poder interpretar la ecuación 30, se considera la tasa total a la cual la energía es disipada en un anillo de radio R y $R+dR$:

$$2 \times 2\pi R dR D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{2R^2} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] dR. \quad (32)$$

De esta tasa total, la energía liberada a causa de energía de ligadura gravitatoria entre los radios R y $R + dR$ está dada por $GMMdR/2R^2$. El restante:

$$\frac{GMM}{R^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] dR, \quad (33)$$

es convectado hacia el centro. En la Sección 5 se realiza un análisis cuantitativo de la redistribución de la energía.

Se considera además, que la estructura radial y vertical del flujo están desacopladas y pueden tratarse de forma independiente. En el caso de la estructura vertical, como no hay flujo de materia en la dirección z , se considera al fluido en equilibrio hidrostático, resultando así:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (34)$$

Para un disco delgado, $z \ll R$ y la Ec. 34 se convierte en:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3}. \quad (35)$$

Si la escala típica en la dirección de z es H , se puede aproximar $\partial P/\partial z \sim P/H$ y $z \sim H$; la hipótesis de disco delgado implica $H \ll R$. Aproximando $P \sim \rho c_s^2$, con c_s la velocidad del sonido, se tiene:

$$H \approx c_s \left(\frac{R}{GM} \right)^{1/2} R \longrightarrow c_s \ll \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}, \quad (36)$$

lo que implica que para un disco delgado la velocidad local de Kepler es altamente supersónica. En la Sección 5 se demuestra la validez de dicha hipótesis.

Esta condición, a su vez implica que la componente azimutal de la velocidad v_ϕ permanece cercana al valor Kepleriano. Para analizarlo, se parte de la componente radial de la ecuación de Euler:

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\phi^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM}{R^2} = 0. \quad (37)$$

Dada la Ec. 36, se desprecia el término de la presión en comparación con el término gravitatorio. Para evaluar el primer término, se hace uso de las Ecs. 25 y 28 y se obtiene:

$$v_R = -\frac{3v}{2R} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (38)$$

En la Sección 3.4, se introduce la parametrización- α . Esto permite demostrar que la componente radial de la velocidad es altamente subsónica; mientras que la componente azimutal de la velocidad es Kepleriana y altamente supersónica.

3.2. La estructura local de discos delgados

Teniendo en cuenta las hipótesis del disco delgado, el cómputo de la estructura del disco se simplifica considerablemente. Para una isoterma en la dirección de z , de la Ec. 35 se obtiene:

$$\rho(R, z) = \rho_c(R)e^{-z^2/2H^2}, \quad (39)$$

donde H está dada por la Ec. 36 y $\rho_c(R)$ es la densidad en el disco central plano $z = 0$.

$$\rho = \Sigma/H,$$

$$H = Rc_s/v_\phi.$$

Por otro lado, la presión es la suma de las presiones:

$$P = \frac{\rho(R)kT_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c}T_c^4,$$

donde $T(R, z) \approx T_c(R) = T(R, 0)$ temperatura central del disco. Esta misma debe estar dada por una ecuación de energía que relacione el flujo de energía en la dirección vertical con la tasa de generación de energía por disipación viscosa. El mecanismo de transporte vertical de energía puede ser radiativo o convectivo, dependiendo de si el gradiente de temperatura requerido para el transporte radiativo es menor o mayor que el gradiente dado por la suposición adiabática. En este caso se supone que el mismo es radiativo. A su vez, debido a la aproximación del disco delgado, el medio del disco es esencialmente 'plano-paralelo' en cada radio, de modo que el gradiente de temperatura está efectivamente en la dirección z . En estas circunstancias, el flujo de energía radiante a través de una superficie $z = \text{constante}$ viene dado por:

$$F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (40)$$

con κ_R la opacidad media de Rosseland (la cual se introducirá en la Sección 3.4). Con esta expresión se asume implícitamente que el disco es ópticamente grueso, en el sentido que:

$$\tau = \rho H \kappa_R(\rho, T_c) = \Sigma \kappa_R, \quad (41)$$

es $\gg 1$, por lo que el campo de radiación está localmente muy cerca del valor del cuerpo negro: una vez que τ dado por la Ec. 41 se convierte en $\lesssim 1$, la Ec. 40 deja de ser válida ya que la radiación puede escapar directamente. La ecuación del balance de energía es:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Q^+,$$

donde Q^+ es la tasa de volumen de producción de energía por disipación viscosa. Se integra y se obtiene:

$$F(H) - F(0) = \int_0^H Q^+(z) dz = D(R),$$

ya que la tasa de disipación total a través de la mitad de la estructura vertical debe dar la tasa de disipación por unidad de superficie. Teniendo en cuenta la Ec. 40, se puede reescribir:

$$T^3 dT = \frac{F(z) 3\kappa_R \rho}{-16\sigma} dz.$$

Utilizando que:

$$dz = \frac{d\tau}{\rho\kappa_R},$$

se obtiene:

$$\frac{T^4}{4} \sim -\frac{3F(z)}{16\sigma}\tau \longrightarrow F(z) \sim (4\sigma/3\tau)T^4(z),$$

de modo que siempre que la temperatura central exceda la temperatura de la superficie lo suficiente como para hacer que $T_c^4 \gg T^4(H)$, se cumple:

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = D(R).$$

Para completar todo el set de ecuaciones se necesita una relación de la opacidad $\kappa_R = \kappa_R(\rho, T_c)$, una ecuación relacionando ν y Σ a \dot{M} , y una relación para ν , juntando todo se obtiene:

1. $\rho = \Sigma/H$,
2. $H = c_s R^{3/2}/(GM)^{1/2}$;
3. $c_s^2 = P/\rho$;
4. $P = \frac{\rho(R)kT_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4$;
5. $\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)\right]$;
6. $\tau = \Sigma\kappa_R(\rho, T_c) = \tau(\Sigma, \rho, T_c)$;
7. $\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$,
8. $\nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots)$.

Estas ecuaciones se resuelven para obtener ρ , P , T , ν , Σ , H , τ y ν_r como funciones de \dot{M} , M , R y algún parámetro relacionado con la viscosidad, como se verá en 3.4.

3.3. Espectro emitido

Si en la dirección de z el disco es ópticamente grueso, cada elemento de área de la cara del disco radía como un cuerpo negro, con una temperatura $T(R)$ que se asocia con la tasa de disipación $D(R)$ por unidad de área:

$$\sigma T^4 = D(R).$$

Por ende la misma juega un rol análogo a la temperatura efectiva de una estrella, con lo que el espectro emitido se puede aproximar por:

$$I_\nu = B_\nu[T(R)] = \frac{2h\nu^3}{c^2 e^{h\nu/kT(R)}} (\text{erg s}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}).$$

Donde ν es la frecuencia. La aproximación desprecia el efecto de la atmósfera del disco (es decir, esa parte del material del disco a profundidades ópticas $\tau \lesssim 1$ desde el infinito) en la redistribución de la radiación sobre la frecuencia ν . Para un observador a una distancia D cuya línea de visión forma un ángulo i con la normal al plano del disco, el flujo a la frecuencia ν es:

$$F_\nu = \frac{2\pi c \cos i}{D^2} \int_{R_{in}}^{R_{out}} I_\nu R dR.$$

Si se asume cuerpo negro queda:

$$F_\nu = \frac{4\pi h c \cos i \nu^3}{c^2 D^2} \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{R dR}{e^{h\nu/kT(R)} - 1}. \quad (42)$$

Para resolver la integral, primero debe determinarse qué radio externo R_{out} considerar como límite de integración. En la Sección 5 se analiza la elección del mismo y se estudia el comportamiento de dicha integral.

3.4. La estructura de los discos- α estacionarios (el 'modelo estándar')

Según lo estudiado en ([18]), un disco ópticamente grueso puede ser dividido en tres regiones:

1. Una región interna, donde domina la presión de radiación por sobre la presión del gas, y la opacidad está dominada por scattering por sobre la absorción free-free. (a)
2. Una región intermedia, donde la presión del gas domina la presión de radiación, y la opacidad que predomina continua siendo el scattering. (b)
3. Una región exterior, donde la presión del gas domina la presión de radiación, pero la opacidad está dominada por absorción free-free. (c)

Para especificar un modelo de disco usando el sistema 1-8 se necesita dar una prescripción para la viscosidad y una relación para la opacidad. Se toma prescripción- α :

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (43)$$

y se asume que ρ y T_c son tales que la opacidad media de Rosseland es bien aproximada por la ley de Kramer:

$$\kappa_R = 5 \times 10^{24} \rho T_c^{-7/2} \text{cm}^2 \text{g}^{-1}. \quad (44)$$

Cabe destacar que según lo reportado por Shakura & Sunyaev ([18]), la opacidad media de Rosseland utilizada es aquella dada por la absorción free-free:

$$\kappa_{abs} = 6,2 \times 10^{22} \rho T^{-7/2} \text{cm}^2 \text{g}^{-1}. \quad (45)$$

De todas formas, para densidades y temperaturas relevantes, opacidades bound-free contribuyen de manera significativa al total, y esta aproximación es inadecuada [36].

Además, para la región (c) presentada en 3, se desprecia el término de presión $(4\sigma/3c)T_c^4$ de la ecuación de estado. La solución se utiliza para chequear que esta hipótesis sea válida.

Con la elección de ν y κ_R el sistema 8 se puede resolver directamente. Se establece $f^4 = 1 - (R_*/R)^{1/2}$. De la Ec. 5 del sistema (usando 6, (44) y 2) se tiene:

$$T_c^8 \propto \Sigma^2 D M^{1/2} R^{-3/2}, \quad (46)$$

donde se utiliza 3 y 4 para escribir $c_s \propto T_c^{1/2}$. Combinando con 7 y 8, se obtiene:

$$\Sigma \propto \alpha^{-4/5} \dot{M}^{7/10} M^{1/4} R^{-3/4} f^{14/5}. \quad (47)$$

Una vez introducida la prescripción α , recordando la Ec. 38, como $v_R \approx v/R$, parametrizando según α :

$$v_R \approx \frac{v}{R} \approx \alpha c_s \frac{H}{R} \ll c_s. \quad (48)$$

Con lo que $v_R \partial v_R / \partial R$ es mucho menor que el gradiente de la presión. Se define el número de Mach $M = v_\phi / c_s$, e implica:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{R}} [1 + O(M^{-2})]. \quad (49)$$

Consecuentemente, en un disco delgado, la velocidad circular v_ϕ es Kepleriana y altamente supersónica; por el contrario, la velocidad radial es subsónica y la escala vertical pequeña.

Para tener una idea de las escalas típicas del disco, se expresan las soluciones en términos de $R_{10} = R/(10^{10} \text{cm})$, $m_1 = M/M_\odot$ y $\dot{M}_{16} = \dot{M}/(10^{16} \text{g s}^{-1})$. Se toma $\mu = 0,615$ para una mezcla de gases cósmicos completamente ionizados. La solución de Shakura-Sunyaev del disco en la región exterior es:

1. $\Sigma = 3,65 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} \text{ g cm}^{-2}$,
2. $H = 1,5 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm}$,
3. $\rho = 2,4 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} \text{ g cm}^{-3}$,
4. $T_c = 2,5 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}$,
5. $\tau = 177 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5}$,
6. $\nu = 2,7 \times 10^{14} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{3/4} f^{6/5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$,
7. $v_r = 4 \times 10^4 \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5} \text{ cm s}^{-1}$,

con $f = \left[1 - \left(\frac{R_{in}}{R}\right)^{1/2}\right]^{1/4}$. Se pueden destacar varias observaciones. Primero, que como las potencias del parámetro α son bajas, las cantidades calculadas para el disco no son sensibles al valor de α . Esto tiene como consecuencia que no puede medirse el valor de α a través de mediciones observables del disco estacionario. Por otro lado, la estructura global del disco es altamente afectada por las opacidades κ_{es} (opacidad de scattering) y κ_{ff} (opacidad free-free), ya que determinan las regiones $a-c$ mencionadas en (1-3). Es por ello que se puede determinar el radio del borde de cada región. En este caso, en la región exterior, el borde se encontrará cuando $\kappa_{es} \approx \kappa_{ff}$:

$$R_{bc} \approx \left(\frac{\kappa_{es}}{\kappa_{ff} \cdot 2,4 \times 10^{-8} \cdot 2,5 \times 10^{-14}} \right)^{4/3} f^{8/3} \dot{M}_{16}^{2/3} m_1^{1/3} (1 \cdot 10^{10}) \text{cm}. \quad (50)$$

En el Apéndice A (Sección 8) se muestran los sistemas de ecuaciones obtenidos para los tres regímenes mencionados anteriormente junto a sus condiciones de borde.

Cabe destacar que la condición de borde externo del disco debe ser determinada. Según lo estudiado en ([36]), el radio externo R_{out} está dado por el requerimiento de que el disco se vuelva localmente autogravitante. El mismo se evalúa utilizando el criterio de estabilidad para un disco rotante diferencial:

$$Q_T = c_s \Omega / \pi G \Sigma \gg 1, \quad (51)$$

donde Ω es la velocidad angular dada en (20). La condición $Q_T = 1$ define el radio autogravitante:

$$R_{out} = (M/\pi\rho)^{1/3}. \quad (52)$$

Conociendo la densidad del disco de acreción, se puede determinar el radio externo del mismo. El disco puede terminar en cualquiera de las tres regiones mencionadas en (1-3), y debe utilizarse la densidad correspondiente a dicha región. En la Sección 5 se discute la elección del mismo.

Capítulo 4

En el siguiente capítulo se siguen los pasos realizados en la Sección 3 aplicándolos al modelo RAR descrito en la Sección 2. Luego, se presenta el cálculo de la energía de ligadura correspondiente al modelo RAR, a partir del cual se estima el radio interno relevante para la teoría de discos de acreción.

4. Discos de Acreción α sobre núcleos supermasivos de materia oscura

4.1. Introducción

Tal como se realizó en la Sección 3, se desea describir la dinámica del disco de acreción. Nuevamente se adoptan órbitas Keplerianas, donde la velocidad angular está dada por:

$$\Omega = \Omega_K(R) = \left(\frac{GM(R)}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (53)$$

lo que desprende una velocidad circular de:

$$v_\phi = R\Omega_K(R). \quad (54)$$

En estas expresiones, la masa depende del radio $M(R)$, a diferencia de lo que ocurre en un agujero negro de Schwarzschild.

La segunda diferencia radica en la condición de borde que se debe imponer sobre el radio R_{in} del disco. Se considera por ahora que en un dado R_{in} se da la condición de $G(R) = 0$, tal que la constante de integración resulta:

$$\begin{aligned} \frac{C}{2\pi} &= R^3 \Sigma (v_{Rin} \Omega - \underbrace{v\Omega'}_{=0}) \longrightarrow C = 2\pi R_{in}^3 \Sigma v_R \Omega(R_{in}), \\ C &= -\underbrace{2\pi R_{in}(-v_R) R_{in}^2}_{=\dot{M}} \Omega(R_{in}), \\ C &= -\dot{M} R_{in}^2 \Omega(R_{in}) = -\dot{M} R_{in}^2 \left(\frac{GM(R_{in})}{R_{in}^3} \right)^{1/2} \longrightarrow C = -\dot{M} [GM(R_{in}) R_{in}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (55)$$

En 4.4 se discutirá el valor adoptado para R_{in} .

Para poder encontrar las ecuaciones que caracterizan al disco, se comienza con el cálculo de Ω' , recordando la Ec. 53 y derivando respecto de R :

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{d}{dR} \left[\left(\frac{GM(R)}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{GM(R)}{R^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-3 \frac{GM(R)}{R^4} + \frac{G}{R^3} \frac{dM(R)}{dR} \right], \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{GM(R)}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\Omega} \left(-\frac{3}{R} \right) \left[-\frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} + 1 \right], \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\Omega}{R} \left[1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right], \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{GM(R)}{R^5} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Substituyendo esta expresión junto con la Ec. 55, en la Ec. 26 se encuentra:

$$\begin{aligned}
 R^3 \Sigma (v_R \Omega - v \Omega') &= \frac{-\dot{M} R_{in}^2 \Omega_{in}}{2\pi}, \\
 \underbrace{2\pi R^3 \Sigma v_R \Omega - 2\pi R^3 \Sigma v \Omega'}_{-\dot{M} R^2 \Omega} &= -\dot{M} R_{in}^2 \Omega_{in}, \\
 -2\pi R^3 \Sigma v \Omega' &= -\dot{M} R_{in}^2 \Omega_{in} + \dot{M} R^2 \Omega, \\
 -v \Sigma &= \frac{\dot{M}}{2\pi R^3 \Omega'} \left[-R_{in}^2 \Omega_{in} + R^2 \Omega \right], \\
 -v \Sigma &= \frac{\dot{M}}{2\pi R^3 \Omega'} \sqrt{G} \left[(MR)^{1/2} - (M(R_{in})R_{in})^{1/2} \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, en esta expresión hallada reemplazando 56:

$$\begin{aligned}
 -v \Sigma &= \frac{\dot{M}}{2\pi} \left(\frac{GM}{R^5} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{M(R_{in})R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \frac{1}{-\frac{3}{2} \left(\frac{GM(R)}{R^5} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right]}, \\
 v \Sigma &= \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}}. \tag{57}
 \end{aligned}$$

Se presentan diferencias respecto a la Ec. 28 dada la dependencia de la masa con el radio. A su vez, se presentan diferencias en la energía irradiada sobre las caras superior e inferior del disco a causa de los torques viscosos que generan *disipación viscosa*. Se parte de la Ec. 29 y se substituyen las Ecs. 56 y 57:

$$\begin{aligned}
 D(R) &= \frac{1}{2} \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}} R^2 \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{GM(R)}{R^5} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right] \right]^2, \\
 D(R) &= \frac{3\dot{M}}{8\pi} \frac{GM(R)}{R^3} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right). \tag{58}
 \end{aligned}$$

La luminosidad producida por el disco entre radios R_{in} e ∞ está dada por la Ec. 31, substituyendo la expresión correspondiente (Ec. 58) para la disipación viscosa.

Para poder interpretar la ecuación 58, se considera la tasa total a la cual la energía es disipada en un anillo de radio R y $R+dR$:

$$2 \times 2\pi R dR D(R) = \left[\frac{3\dot{M}GM(R)}{2R^2} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right) \right] dR. \tag{59}$$

De esta tasa total, se desea analizar por separado la energía liberada a causa de la energía gravitacional, y analizar la energía restante que es acretaada hacia el interior. Para el caso RAR:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \phi(R) dM(R), \\
 d\dot{W} &= \frac{GM(R)\dot{M}}{2R^2}. \tag{60}
 \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta que la energía total disipada en un anillo entre radio R y $R+dR$ está dada por la ecuación 58, el resto de la energía será:

$$\frac{GM(R)\dot{M}}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{GM(R)\dot{M}}{R^2} \left[\frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} + \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] dR.$$

Reordenando:

$$\frac{GM(R)\dot{M}}{R^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} + \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right) \right) \right] dR. \quad (61)$$

Y esta es la energía que será acretaada hacia el centro. Análogamente al caso estándar, esto implica la redistribución de la energía en el modelo RAR.

Para chequear las hipótesis consideradas en la teoría de discos de acreción, ya sea que la velocidad azimutal v_ϕ local permanece cerca de su valor Kepleriano, y que el disco es delgado ($H \ll R$), se desea reescribir dentro del marco del modelo RAR la Ecuación 34. Mientras que el potencial gravitatorio para un agujero negro de Schwarzschild está dado por:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (62)$$

en el caso RAR, se tiene una contribución por parte de radios menores al radio del core por un lado, y radios externos por otro. Es por ello que el potencial en este modelo está dado por:

$$\phi(r) = -4\pi G \left[\int_0^r \frac{\rho(r')}{r} r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right],$$

con $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$. Lo que es igual a:

$$\phi(r) = -\frac{GM(r)}{(R^2 + z^2)^{1/2}} + 4\pi G \int_{R_{rar}}^r \rho(r') r' dr'.$$

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{GM(R)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2z + 4\pi G \underbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}_{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \int_{R_{rar}}^r \rho(r') r' dr'}_{\rho(r)r}.$$

Y como $z \ll R$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{GM(R)}{R^3} z + 4\pi G \rho(R) R \frac{z}{R}.$$

Si se tiene en cuenta que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\rho_{disk}} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GM(R)}{R^3} z - 4\pi G \rho(R) R \frac{z}{R}. \quad (63)$$

Se puede aproximar: $\frac{dP}{dz} \approx -\frac{P}{H}$ y $z \approx H$:

$$\underbrace{\frac{P}{\rho}}_{c_s^2} \frac{1}{H} = \frac{GM(R)}{R^3} H + 4\pi G \rho(R) R \frac{H}{R},$$

$$\frac{c_s^2}{H} = \left(\frac{GM(R)}{R} + 4\pi G \rho(R) R^2 \right) \frac{H}{R^2}, \quad (64)$$

$$\frac{H}{R} = c_s \left(\frac{GM(R)}{R} + 4\pi G\rho(R)R^2 \right)^{-1/2} \ll 1.$$

Como, de las ecuaciones del modelo RAR se obtiene que la densidad es:

$$\rho(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM(R)}{dR},$$

se puede concluir:

$$c_s \ll \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2}. \quad (65)$$

Vale aclarar que tomando el límite $M(R) \rightarrow M$ y $dM(R)/dR \rightarrow 0$ se recupera lo obtenido para el modelo estándar en la Ec. 36. Consecuentemente, la hipótesis de disco delgado implica que la velocidad circular v_ϕ sea cercana al valor Kepleriano.

Para analizar la componente radial de la velocidad, se parte de la componente radial de la ecuación de Euler 37, donde se necesita derivar el potencial gravitatorio respecto del radio. El mismo se calcula a partir de la Ec. 62:

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{GM(R)}{R^2}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación 65, nuevamente se desprecia el término $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R}$ en comparación con el término gravitatorio. Para ver el término convectivo de la velocidad radial, se hace uso de $\dot{M} = 2\pi\Sigma R(-v_R)$ y la ecuación 57, y se obtiene:

$$v_R = -\frac{\dot{M}}{2\pi R\Sigma} \rightarrow v_R = -\frac{\dot{M}v}{2R\pi \dot{M}} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right]^{-1} \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right).$$

Como $v_R \approx v/R$, parametrizando según α :

$$v_R \approx \frac{v}{R} \approx \alpha c_s \frac{H}{R} \ll c_s.$$

Con lo que $v_R \partial v_R / \partial R$ es mucho menor que el gradiente de la presión. Definiendo el número de Mach $M = v_\phi/c_s$, se reduce a:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} [1 + O(M^{-2})]. \quad (66)$$

Lo que implica que en un disco delgado, la velocidad v_ϕ es Kepleriana y altamente supersónica y por el contrario, la velocidad radial es subsónica y la escala vertical pequeña.

Finalmente, se puede reescribir:

$$\left. \begin{aligned} H &\approx M^{-1}R, \\ v_R &\approx \alpha M^{-1}c_s. \end{aligned} \right\}$$

4.2. La estructura local de discos delgados

Para estudiar la estructura vertical del disco en el modelo RAR, se desea resolver la Ec. 35:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{GM(r)}{r^3} z + 4\pi G\rho(r)z, \\ c_s^2 \frac{\partial \rho}{\rho} &= \left(\frac{GM(R)}{R^3} z + 4\pi G\rho(R)z \right) dz, \\ c_s^2 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) &= G \left(\frac{M(R)}{R^3} + 4\pi\rho(R) \right) \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

Y si se recuerda la relación 64

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \underbrace{\frac{GH^2}{r^2} \left(\frac{M(R)}{R} + 4\pi\rho(R)R^2 \right)}_{c_s} = G \left(\frac{M(R)}{R^3} + 4\pi\rho(R) \right) \frac{z^2}{2},$$

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \left(\frac{M(R)}{R} + 4\pi\rho(R)R^2 \right) \left(\frac{M(R)}{R} + 4\pi\rho(R)R^2 \right)^{-1} \frac{z^2}{2H^2},$$

$$\rho(R, z) = \rho_0(R) e^{\left(\frac{z^2}{2H^2} \right)}.$$

Análogo al caso estándar.

En este caso, el set de ecuaciones dadas en el sistema 1-8 resulta:

1. $\rho = \Sigma/H,$
2. $H = c_s \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1/2} R,$
3. $c_s^2 = P/\rho,$
4. $P = \frac{\rho(R)kT_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4,$
5. $\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3\dot{M}}{8\pi} \frac{GM(R)}{R^3} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right),$
6. $\tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c) = \tau(\Sigma, \rho, T_c),$
7. $\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2} \right] \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}},$
8. $\nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots).$

Si valen las hipótesis de disco delgado, este sistema puede resolverse directamente. Para ello, se tiene en cuenta la prescripción- α de la viscosidad ν dada en la Ec. 43 y la opacidad de Kramer dada en la Ec. 44. En este caso, para resolver el sistema se toma $f^4 = 1 - \left(\frac{M_{in}R_{in}}{M(R)R} \right)^{1/2}$.

4.3. La estructura de los discos- α estacionarios

Se desea estudiar la existencia de los tres regímenes mencionados en Schwarzschild. Comenzando con la región exterior, donde la presión del gas domina la presión de radiación y la opacidad free-free domina la presión de scattering, reescribiendo la Ec. 5 usando Ec. 6:

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\Sigma \kappa_R} = D(R).$$

Se introduce 44:

$$\frac{4T_c^4 \sigma}{3\Sigma 5 \times 10^{24} \rho T_c^{-7/2}} = D \rightarrow \frac{4}{3 \cdot 5 \times 10^{24}} \frac{\sigma}{\Sigma} T_c^{15/2} \frac{1}{\rho} = D.$$

Se utiliza Ec. 1:

$$\frac{4}{3 \cdot 5 \times 10^{24}} \frac{\sigma}{\Sigma^2} T_c^{15/2} H = D.$$

Luego Ec. 2:

$$\frac{4}{3 \cdot 5 \times 10^{24}} \frac{\sigma}{\Sigma^2} T_c^{15/2} c_s \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1/2} R = D.$$

A su vez utilizando la Ec. 3:

$$\frac{4}{3 \cdot 5 \times 10^{24}} \frac{\sigma}{\Sigma^2} T_c^{15/2} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1/2} R = D.$$

Despreciando presión de radiación y se usa la Ec. 4:

$$\frac{4}{3 \cdot 5 \times 10^{24}} \frac{\sigma}{\Sigma^2} T_c^{15/2} \sqrt{\frac{k}{\mu m_p}} T_c^{1/2} \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1/2} R = D.$$

Con lo que se obtiene:

$$T^8 = \frac{3 \cdot 5 \times 10^{24}}{4} \frac{\sqrt{\mu m_p}}{\sqrt{k} \sigma} \Sigma^2 D \left(G \frac{M(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2} R^{-1},$$

$$T^8 \propto \Sigma^2 D \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2} R^{-1}.$$

Por otro lado, si se utiliza la Ec. 7:

$$\Sigma \propto \frac{\dot{M}}{\nu} f^4 \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}} \propto \frac{\dot{M}}{\alpha c_s H} f^4 \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}}.$$

Haciendo uso de la Ec. 2:

$$\Sigma \propto \frac{\dot{M}}{\alpha c_s^2 R} f^4 \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}} \left(\frac{GM(R)}{R} + G \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2}.$$

Se considera $c_s^2 \propto T$:

$$\Sigma \propto \frac{\dot{M}}{\alpha T R} f^4 \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}} \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2}.$$

Y se hace uso de la relación 4.3:

$$\Sigma \propto \frac{\dot{M}}{\alpha \Sigma^{1/4} D^{1/8} R} f^4 \frac{1}{1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR}} \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{1/2} \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1/16} R^{1/16},$$

$$\Sigma^{5/4} \propto \dot{M} \alpha^{-1} D^{-1/8} R^{-15/16} \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1} \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{7/16}.$$

Se tiene en cuenta que:

$$D \propto \dot{M} f^4 \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-1},$$

$$\Sigma^{5/4} \propto \dot{M}^{7/8} \alpha^{-1} f^{7/2} \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-9/8} \left(\frac{M(R)}{r} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{7/16}.$$

Finalmente, se despeja:

$$\Sigma \propto \dot{M}^{7/10} \alpha^{-4/5} f^{14/5} \left(1 - \frac{R}{3M(R)} \frac{dM(R)}{dR} \right)^{-7/10} \left(\frac{M(R)}{R} + \frac{dM(R)}{dR} \right)^{7/20}.$$

Para poder comparar con las soluciones de Shakura-Sunyaev, nuevamente se escribe las soluciones en términos de escalas típicas del disco: $R_{10} = R/(10^{10} \text{cm})$, $m_1 = M/M_{sun}$ y $\dot{M}_{16} = \dot{M}/(10^{16} \text{gs}^{-1})$. Se toma $\mu = 0,615$ para una mezcla de gases cósmicos completamente ionizados. Entonces, se obtiene:

1. $\Sigma = 3,65\alpha^{-4/5} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{7/20} R_{10}^{-2/5} f^{14/5} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-9/10} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{-1/10} \text{g cm}^{-2},$
2. $H = 1,5 \times 10^8 \alpha^{-1/10} f^{3/5} \dot{M}_{16}^{3/20} R_{10}^{7/10} m_1^{1/20} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dM_1}{dR_{10}} \right)^{-17/40} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-1/20} \text{cm},$
3. $\rho = 2,4 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} R_{10}^{-11/10} f^{11/5} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{-3/20} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{31/40} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-17/20} \text{gcm}^{-3},$
4. $T_c = 2,5 \times 10^4 \alpha^{-1/5} R_{10}^{-3/5} \dot{M}_{16}^{3/10} f^{6/5} m_1^{1/10} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{3/20} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-1/10} \text{K},$
5. $\tau = 177 \alpha^{-4/5} R_{10}^{3/5} f^{4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} m_1^{-3/5} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{3/5} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-7/5},$
6. $v = 2,7 \times 10^{14} \alpha^{4/5} f^{6/5} \dot{M}_{16}^{3/10} R_{10}^{2/5} m_1^{1/10} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-7/20} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-1/10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1},$
7. $v_R = 4 \times 10^4 \alpha^{4/5} f^{-14/5} \dot{M}_{16}^{3/10} R_{10}^{-3/5} m_1^{1/10} \left(\frac{m_1}{R_{10}} + \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{-7/20} \left(1 - \frac{R_{10}}{3m_1} \frac{dm_1}{dR_{10}} \right)^{9/10} \text{cms}^{-1}.$

Se pueden realizar varias observaciones. Primero, que la potencia de α para el caso RAR en cada una de estas magnitudes es del mismo orden que el obtenido en el caso estándar de Shakura-Sunyaev 1-8. Es por ello que, análogamente, como las potencias son bajas, las cantidades calculadas para el disco no son sensibles al valor de α . Esto tiene como consecuencia que no puede medirse el valor de α a través de mediciones observables de disco estacionario. A su vez, de existir las tres regiones mencionadas en (a-c) en 3, como la estructura global del disco está altamente afectada por la opacidad, pueden plantearse condiciones de borde para cada una de las regiones. En este caso (región exterior):

$$R_{bc} \approx \left(\frac{\kappa_{es}}{\kappa_{ff} \cdot 2,4 \times 10^{-8} \cdot 2,5 \times 10^{-14}} \right) f^2 \dot{M}_{16}^{1/2} m_1^{1/2} A^{-1/4} B^{1/2} (1,0 \times 10^{10}) \text{cm}. \quad (67)$$

Finalmente, puede notarse que cuando $\frac{dm_1}{dR_{10}} \rightarrow 0$, $M(R) \rightarrow M_{in}$, se recuperan las soluciones obtenidas por Shakura y Sunyaev dadas en el sistema 7. En el Apéndice A 8 se muestran los cálculos para las demás regiones del disco, tanto de las soluciones como las condiciones de borde. Nuevamente, el radio exterior del disco estará dado por 52, cuando el disco se vuelve autogravitante.

4.4. Eficiencia del disco

Tal como es sabido en astrofísica, la acreción gravitacional es un mecanismo capaz de convertir eficientemente la energía gravitacional en cinética. Esta energía cinética puede convertirse a su vez en calor y radiación. Es por ello que, se desea calcular la energía correspondiente a una órbita circular en el marco del modelo RAR. El radio en el cual la eficiencia del disco de acreción presenta un máximo, se elige como el radio interno relevante del disco.

Se define la energía de ligadura gravitacional como la energía mínima que debe ganar un cuerpo en un estado ligado gravitacionalmente para pasar a estar en un estado libre, es decir, sin estar bajo influencia de un campo gravitatorio. Es por ello que se estudia la energía de ligadura gravitacional en el disco de acreción orbitando alrededor de un cuerpo central masivo y compacto en el modelo RAR.

Se parte de la simetría esférica dada en la Ec. 7, definiendo las variables como se muestran a continuación:

$$ds^2 = \underbrace{e^{\nu(r)}}_{=A(r)} dt^2 - \underbrace{e^{-\lambda(r)}}_{=B(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$, y siguiendo la ecuación de las geodésicas para partículas masivas, teniendo en cuenta el parámetro afín, se obtienen como constantes de movimiento:

$$p_t = e^{\nu(r)} \dot{t} = E, \quad p_\phi = r^2 \dot{\phi} = L.$$

Por normalización:

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = m^2 \longrightarrow e^{\nu(r)} (p^t)^2 - e^{-\lambda(r)} (p^r)^2 - r^2 (p^\phi)^2 = m^2.$$

Reemplazando las constantes de movimiento y despejando, se obtiene:

$$\dot{r}^2 = -e^{\lambda(r)} - e^{\lambda(r)} \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + \tilde{E}^2 e^{-\nu(r)} e^{\lambda(r)}.$$

Aquí, $\tilde{L} = L/m$ y $\tilde{E} = E/m$. Si se reescribe \dot{r}^2 en términos de $A(r)$ y $B(r)$:

$$\dot{r}^2 = -\frac{1}{B(r)} - \frac{\tilde{L}^2}{B(r)r^2} + \frac{\tilde{E}^2}{A(r)B(r)}.$$

Cabe destacarse que para órbitas circulares $\dot{r} = 0$, lo cual permite despejar el valor de la energía circular:

$$\tilde{E}_c^2 = A(r) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r_c^2} \right).$$

Para hallar el valor de \tilde{L} en el radio de la órbita circular, se despeja la derivada del potencial efectivo, que, como se trata de un mínimo, su valor es cero.

$$\frac{dV_{eff}(r_c)}{dr} = \frac{1}{2} \left(A(r_c) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r_c^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[A'(r_c) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r_c^2} \right) - 2A(r_c) \frac{\tilde{L}^2}{r_c^3} \right] = 0 \longrightarrow \tilde{L}^2 = \frac{r_c^3 A'(r_c)}{-r_c A'(r_c) + 2A(r_c)}.$$

Finalmente,

$$E_{binding} = \frac{mc^2 - E_c}{mc^2} = 1 - \sqrt{A(r) \left(1 + \frac{r_c A'(r_c)}{2A(r_c) - r_c A'(r_c)} \right)}. \quad (68)$$

En la Figura 4 se muestran los gráficos obtenidos para $mc^2 = 56,100,378\text{keV}$. Puede observarse que la eficiencia del disco satura en un valor máximo. Dicho valor se corresponde con un radio circular interior al radio del núcleo, R_{in} . Esto es posible ya que se modela a toda la distribución de materia oscura fermiónica como transparente, es decir que existen geodésicas permitidas dentro y fuera del núcleo de materia oscura tanto para partículas masivas como no masivas.

Para determinar el valor del radio interno, se calcula el error relativo en la energía de ligadura en $r_0 = 0$. Se toma como cota 0,1%, 1% y 10%. En la Tabla 4 se muestran los valores de la energía de ligadura gravitacional en cada caso. Si se toma como error relativo 1% o 0,1%, la energía varía en el tercer decimal en los tres casos. Por ende, se opta tomar el radio interno del sistema calculando la saturación de la eficiencia con un error relativo del 1%, es decir:

$$\frac{|E_b(r_{in}) - E_b(r_{min})|}{E_b(r_{in})} \leq 0,01. \quad (69)$$

Finalmente, en la Tabla 5 se muestran los valores del radio interno para cada masa del fermión considerada junto a la eficiencia del proceso de acreción para transformar energía en reposo en energía cinética. Se puede notar que la eficiencia para una masa del fermión de $mc^2 = 378\text{keV}$ es del 28,5%, ampliamente superior a la obtenida por fusión de hidrógeno (0,5%) y por acreción sobre un agujero negro de Schwarzschild (5,7%). Sin embargo, la eficiencia es menor que la de un agujero negro rotante de Kerr (42%).

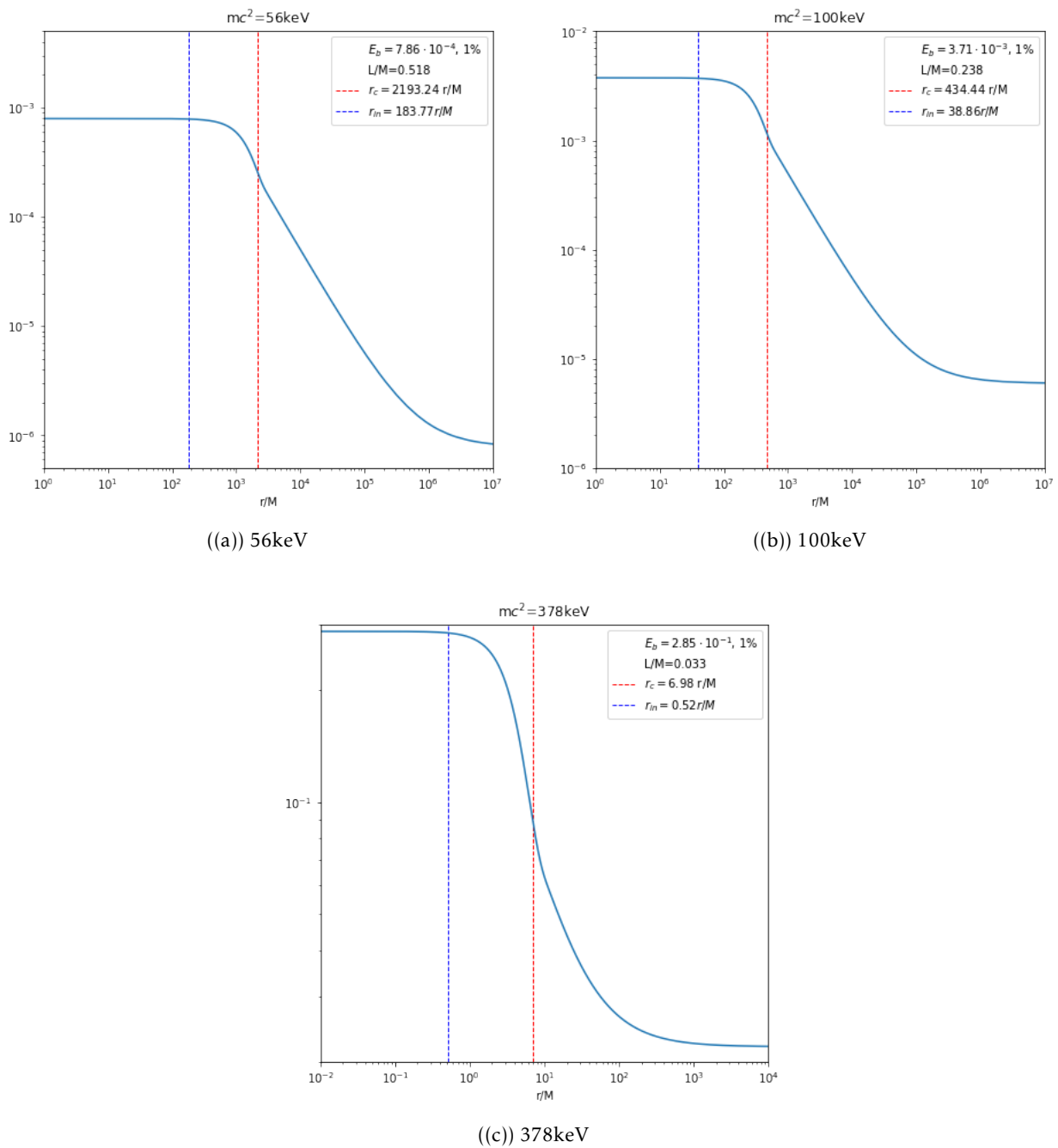


Figura 4: Energía de ligadura gravitacional para tres soluciones RAR con energías de $mc^2 = 56, 100, 378 \text{ keV}$ (a, b, c). La línea punteada roja de cada una de las figuras corresponde con el radio del núcleo del objeto compacto. La línea punteada azul corresponde con el radio interno donde la energía de ligadura satura en su valor máximo. Además se muestran los valores de las eficiencias máximas dadas en R_{in} , con sus respectivos valores de los momentos angulares adimensionales para órbitas circulares en estos radios.

| % | 56keV | 100keV | 378keV |
|-----|----------|---------|--------|
| 0.1 | 0.000789 | 0.00374 | 0.288 |
| 1 | 0.000786 | 0.00371 | 0.285 |
| 10 | 0.000714 | 0.00337 | 0.259 |

Tabla 4: Valores de la energía de ligadura del disco calculada para una masa del fermión de $mc^2 = 56, 100$ y 378keV variando el error relativo de la misma.

| $mc^2[\text{keV}]$ | $R_{in}[\text{kpc}]$ | Efficiency [%] |
|--------------------|-----------------------|----------------|
| 56 | $3,58 \cdot 10^{-8}$ | 0.07 |
| 100 | $7,57 \cdot 10^{-9}$ | 0.37 |
| 378 | $1,01 \cdot 10^{-10}$ | 28.5 |

Tabla 5: Valores del radio interno considerados para cada caso de la masa del fermión elegida y la eficiencia de la energía gravitacional. Todos los valores están calculados tomando un error relativo del 1% de la binding energy.

Capítulo 5

5. Resultados

5.1. Espectro emitido

El objetivo principal de esta Sección es el estudio de la aplicación de los modelos descritos en las Secciones 3 y 4 a galaxias con núcleos activos cuyos discos cumplen con ser estacionarios, ópticamente gruesos y geoméricamente delgados. Se estudian diferentes tipos de galaxias, como la presentada en la Sección 2 siendo del tipo *Milky-Way Like* (es decir una galaxia hipotética de igual tamaño y distribución de masa que la Vía Láctea, pero donde la física de acreción central sea consistente con un SSD), como también para galaxias activas cuyos objetos centrales tienen masas del orden $\sim 10^7 M_\odot$ y $\sim 10^8 M_\odot$. Finalmente, el modelo se aplicará a galaxias astrofísicas que satisfagan la relación de Ferrarese [37], que relaciona los halos de materia oscura con núcleos centrales supermasivos.

Siguiendo lo presentado en las Secciones 3 y 4, en una primera instancia, se estudia el flujo de energía disipado a través de las caras de un disco delgado estacionario. Dentro del modelo RAR, se trabaja con una masa del fermión de $mc^2 = 378\text{keV}$, que cumple con las restricciones de la Vía Láctea, presentadas en la Tabla 2. La masa del objeto central ($M_c = \text{Masa del core}$) se establece $M_c = 3,5 \times 10^6 M_\odot$. En la Fig. 5 se muestra la redistribución de la energía para el caso estándar (Ecs. 30, 32 y 33) y su comparación con el modelo RAR (Ecs. 58, 60 y 61).

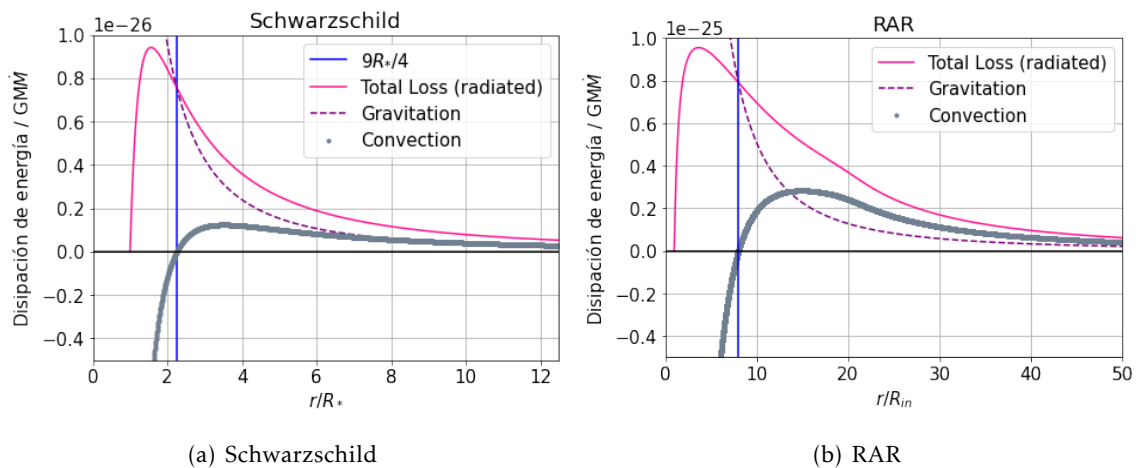


Figura 5: Para ambos modelos: redistribución de la energía a causa de la disipación viscosa en función del radio (adimensional). En rosa, la energía total irradiada sobre las caras superior e inferior del disco; en violeta, la energía liberada a causa de la energía gravitacional; en gris, la energía conveccionada hacia el centro; en azul, radio en el cual cambia el comportamiento de la energía.

De la misma se observa que, para un agujero negro de Schwarzschild, cuando $R/R_* = 9/4$, como la energía radiada es mayor que la energía gravitatoria, la convección de la energía va desde radios internos a radios externos, con el fin de disminuir el impulso angular. Para compensar las altas tasas del flujo, para radios menores a $R/R_* = 9/4$, la energía de ligadura gravitatoria es mayor que la conveccionada hacia afuera. Se concluye entonces que los efectos viscosos no pueden cambiar la tasa de

energía total, sino que únicamente pueden redistribuir la misma. Por otro lado, para el modelo RAR, se observa un comportamiento análogo de redistribución de la energía.

En una segunda instancia, se tiene en cuenta la Ec. 42, para calcular el flujo del disco a la frecuencia ν . Para efectuar la integral primero debe determinarse qué radio externo elegir como límite de integración. Se estudian los siguientes límites de integración:

1. $R_{out} = 10^3 R_{in}$,
2. $R_{out} = 3,25 \times 10^3 R_{in}$,
3. $R_{out} = 5,5 \times 10^3 R_{in}$,
4. $R_{out} = 7,75 \times 10^3 R_{in}$,
5. $R_{out} = 10^4 R_{in}$.

Para una masa del fermión del $mc^2 = 378\text{keV}$, se muestra en la Fig. 6 la comparación de los flujos y luminosidades obtenidos en cada caso.

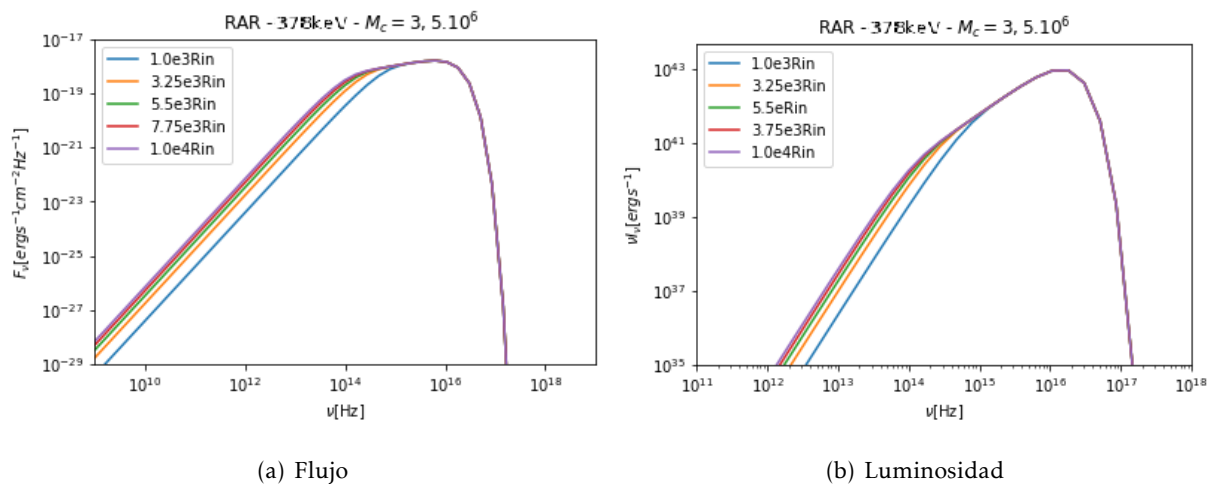
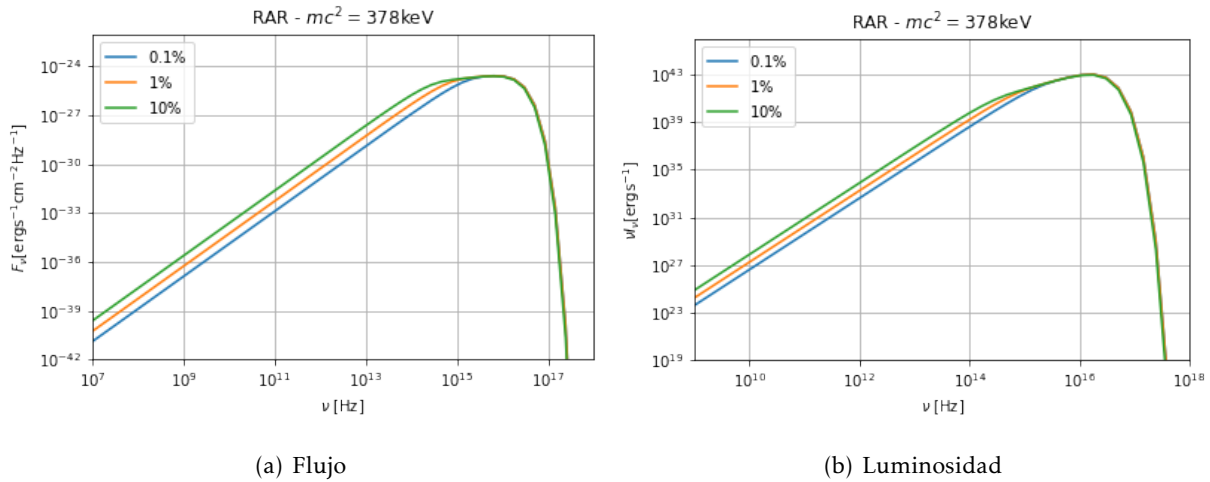


Figura 6: Comparación de flujo y luminosidad para $R_{out} = 10^3 R_{in}$, $R_{out} = 3,25 \times 10^3 R_{in}$, $R_{out} = 5,5 \times 10^3 R_{in}$, $R_{out} = 7,75 \times 10^3 R_{in}$, $R_{out} = 10^4 R_{in}$ para una masa del fermión de $mc^2 = 378\text{keV}$.

Se puede ver que en todos los casos el flujo y la luminosidad son máximos para la misma frecuencia, independientemente del radio externo elegido como límite de integración. Esto ocurre debido a que, al integrar entre $10^3 R_{in}$ y $10^4 R_{in}$, equivale a integrar de 10^{-5}kpc a 10^{-4}kpc . Si se analizan los perfiles de densidad y masa de la figura 3, se observa que entre estos radios la masa es constante, y por ende los flujos no cambian.

A su vez, se pueden distinguir tres regímenes: cuando $\nu \ll kT(R_{out})/h$, la función de Planck B_ν toma la forma de Rayleigh-Jeans $2kT\nu^2/c^2$; con lo que $L \propto \nu^2$. Cuando $\nu \gg kT(R_{in})/h$ la función de Planck B_ν asume la forma de Wein $2h\nu^3 c^{-2} e^{-h\nu/kT}$; y luego la integral en 42 está dominada por las partes más calientes del disco ($T \approx T(R_{in})$) y la integral es exponencial. Para las partes intermedias, donde $kT(R_{out})/h \ll \nu \ll kT(R_{in})/h$, la integral en 42 se puede aproximar por $\propto \nu^{1/3}$, que corresponde a la parte *chata* del flujo.

Es importante analizar la variación de los espectros de flujo y luminosidad del disco si se hubiese considerado como cota al error relativo de la energía de ligadura gravitacional 0,1% o 10%, en lugar de 1%. En la Fig. ?? se muestran los gráficos obtenidos.



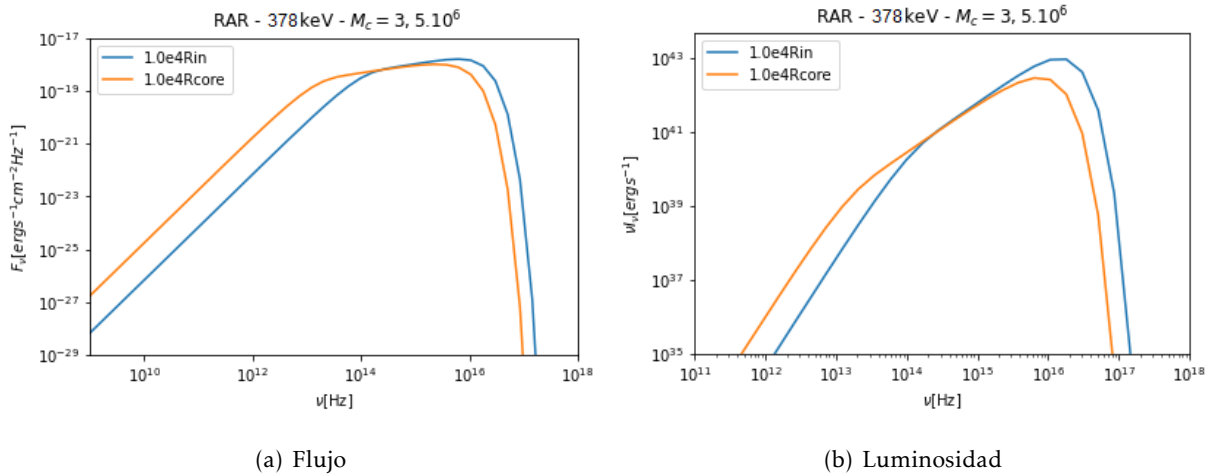
(a) Flujo

(b) Luminosidad

Figura 7: Comparación de flujo y luminosidad para integraciones para diferentes cotas del error relativo considerado de la energía de ligadura gravitacional.

Puede observarse que, tanto al considerar una cota del error relativo menor o mayor (correspondiéndose en cada caso con un radio interno mayor y menor al obtenido con la cota del 1%), no se presentan contribuciones significativas a ninguno de los dos espectros. Con lo que se valida de esta manera la elección de cota relativa del error considerada inicialmente.

Por otro lado se estudia la diferencia de la contribución al flujo integrando desde R_{in} o desde R_{core} . En la Fig. 8 se observa dicha diferencia. Se ve que el flujo es mayor integrando desde un radio interno más chico al radio del núcleo. Esto coincide con lo mencionado en la Sección 2, dado que, la eficiencia del disco alcanza su máximo valor en un radio interno menor al radio del núcleo.



(a) Flujo

(b) Luminosidad

Figura 8: Comparación de flujo y luminosidad para integraciones entre $R_{in}-R_{out} = 10^4 R_{in}$ (línea azul) y $R_{core}-R_{out} = 10^4 R_{core}$ (línea naranja) para $mc^2 = 378\text{keV}$.

A su vez, se compara el flujo y la luminosidad obtenidas para las masas $mc^2 = 56\text{KeV}$, $mc^2 = 100\text{KeV}$, $mc^2 = 378\text{keV}$ y su comparación con el agujero negro supermasivo Sgr A* ($M_{SgrA^*} = 4,075 \cdot 10^6 M_\odot$). Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 9. El comportamiento coincide con las eficiencias que se muestran en la Tabla 5 y la eficiencia por acreción sobre un agujero negro de Schwarzschild (0,57). A menor eficiencia, menor máximo tanto en el flujo como en la luminosidad, y a mayor eficiencia,

mayor máximo tanto en flujo como en luminosidad.

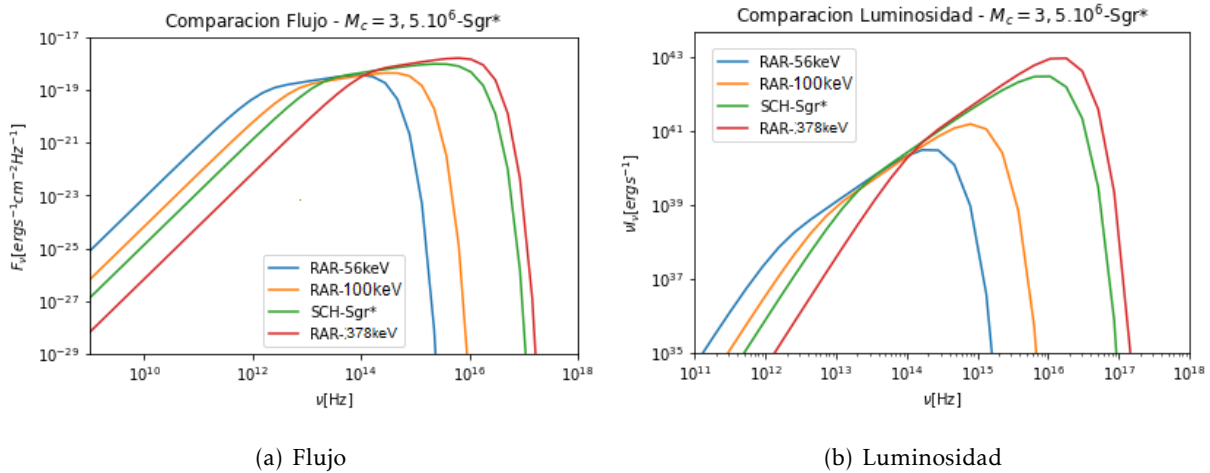


Figura 9: Comparación de flujo y luminosidad para $mc^2 = 56\text{KeV}$, $mc^2 = 120\text{KeV}$, $mc^2 = 345\text{KeV}$ y $M_{bh} \approx 4,1 \times 10^6 M_{\odot}$.

Finalmente, en [37] se estudia la relación entre M_c y la masa del halo de las galaxias (M_h) para diferentes familias de soluciones astrofísicas del modelo RAR (con $mc^2 = 48\text{keV}$), junto con las relaciones de mejor ajuste inferidas observacionalmente encontradas en Ferrarese [38] y Bogdán y Goulding [39]. Se tienen en cuenta entonces las siguientes soluciones del modelo RAR que satisfacen dicha relación:

1. $M_c = 2,3 \cdot 10^5 M_{\odot} - M_h = 1,0 \cdot 10^{11} M_{\odot}$; $r_c = 1,59 \cdot 10^{-6} \text{kpc}$; $r_{in} = 1,35 \cdot 10^{-7} \text{kpc}$,
2. $M_c = 1,5 \cdot 10^6 M_{\odot} - M_h = 3,0 \cdot 10^{11} M_{\odot}$; $r_c = 8,48 \cdot 10^{-7} \text{kpc}$; $r_{in} = 7,12 \cdot 10^{-8} \text{kpc}$,
3. $M_c = 9,5 \cdot 10^6 M_{\odot} - M_h = 1,0 \cdot 10^{12} M_{\odot}$; $r_c = 4,59 \cdot 10^{-7} \text{kpc}$; $r_{in} = 3,84 \cdot 10^{-8} \text{kpc}$,
4. $M_c = 6,6 \cdot 10^7 M_{\odot} - M_h = 3,0 \cdot 10^{12} M_{\odot}$; $r_c = 2,27 \cdot 10^{-7} \text{kpc}$; $r_{in} = 1,88 \cdot 10^{-8} \text{kpc}$.

Los resultados se muestran en la Fig. 10. Se observa que a medida que incrementa la masa del núcleo compacto, el valor máximo de flujo y luminosidad se encuentra en frecuencias mayores. Dicho comportamiento presenta una diferencia significativa con el caso de Schwarzschild, (Fig. 11) donde a mayor masa del agujero negro, mayor $r_s = 2GM/c^2$, menor compacidad del objeto central, lo que concluye que los máximos de los flujos emitidos se mueven a frecuencias menores. En cambio, en el modelo RAR y para una m fija, a mayor masa del núcleo central (en una solución no crítica) mayor compacidad del mismo. En consecuencia, los radios del núcleo son menores y los núcleos más densos, lo que se implica un comportamiento de los máximos en los flujos opuesto al caso de Schwarzschild. Por un lado, aquí se encuentra una diferencia cualitativa que sería (potencialmente) capaz de diferenciar ambos paradigmas (agujero negro y núcleo de materia oscura). Lamentablemente, los datos observacionales que puedan ser asociados a los máximos de los flujos emitidos son escasos (y casi inexistentes para galaxias activas con masas de objetos centrales menores a $10^8 M_{\odot}$), lo cual prohíbe al momento usar esta predicción para descartar un modelo u otro, aunque puede ser de gran relevancia para el futuro.

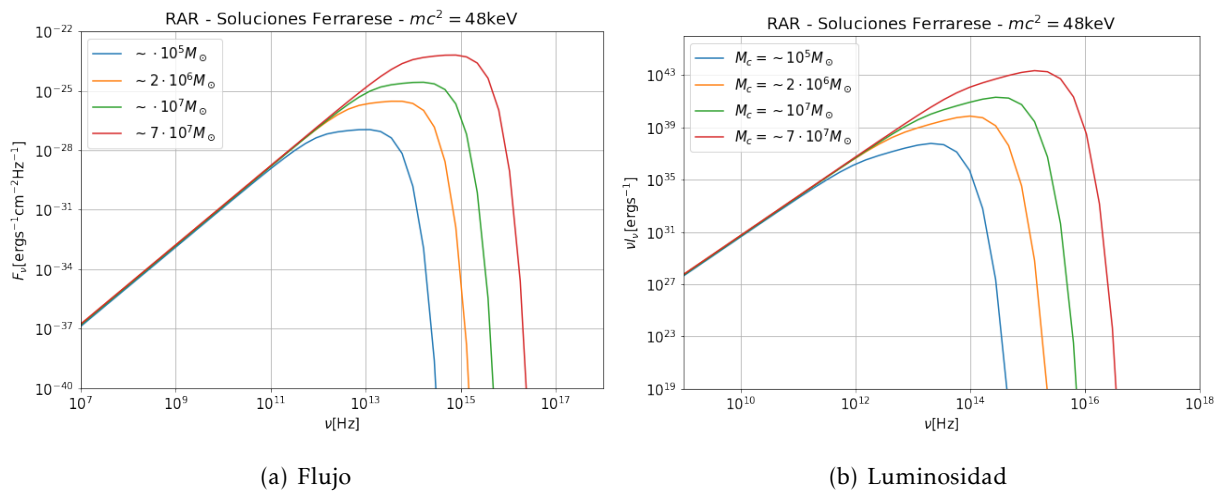


Figura 10: Comparación de flujo y luminosidad para $mc^2 = 48\text{KeV}$ para aquellas soluciones pertenecientes a la relación de Ferrarese.

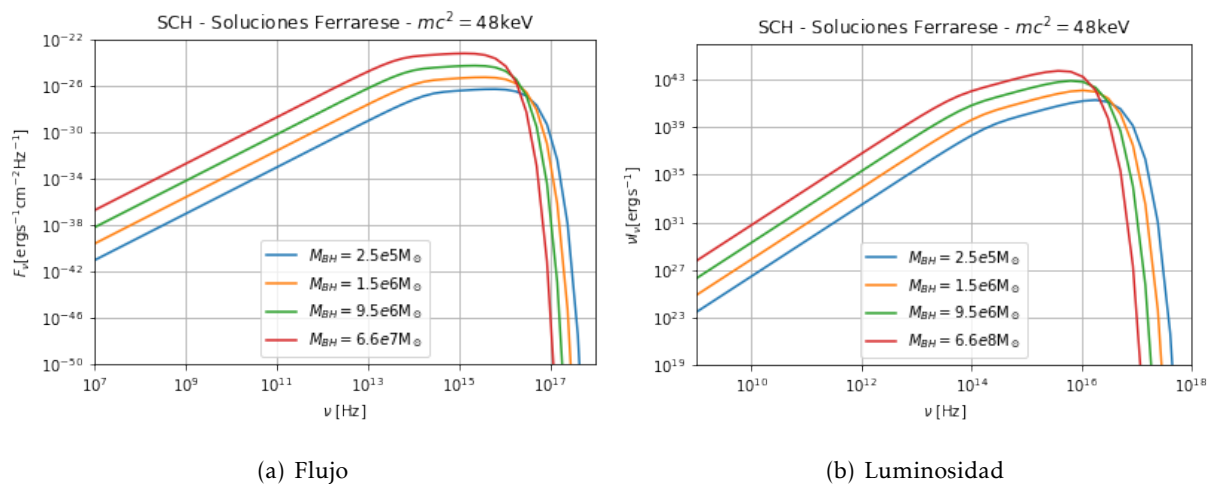


Figura 11: Comparación de flujo y luminosidad para aquellas soluciones pertenecientes a la relación de Ferrarese en Schwarzschild.

5.2. Estructura de discos- α

En una segunda instancia del trabajo, se estudia la estructura de los discos de Shakura y Sunyaev, tanto para el modelo estándar como para el modelo RAR. Para un agujero negro de Schwarzschild cuya masa es de $M_{BH} = 4,075 \times 10^6 M_{\odot}$, con una tasa de acreción correspondiente a $\dot{M} = 0,1 \cdot M_{edd} \cdot M_{BH} \approx 6,67 \times 10^{23} \text{ g s}^{-1}$, y tomando $\alpha = 0,1$, se presentan los diferentes regímenes descritos en (1-3) y la validez de sus hipótesis para las presiones y opacidades en cada una de ellas en la Fig. 12.

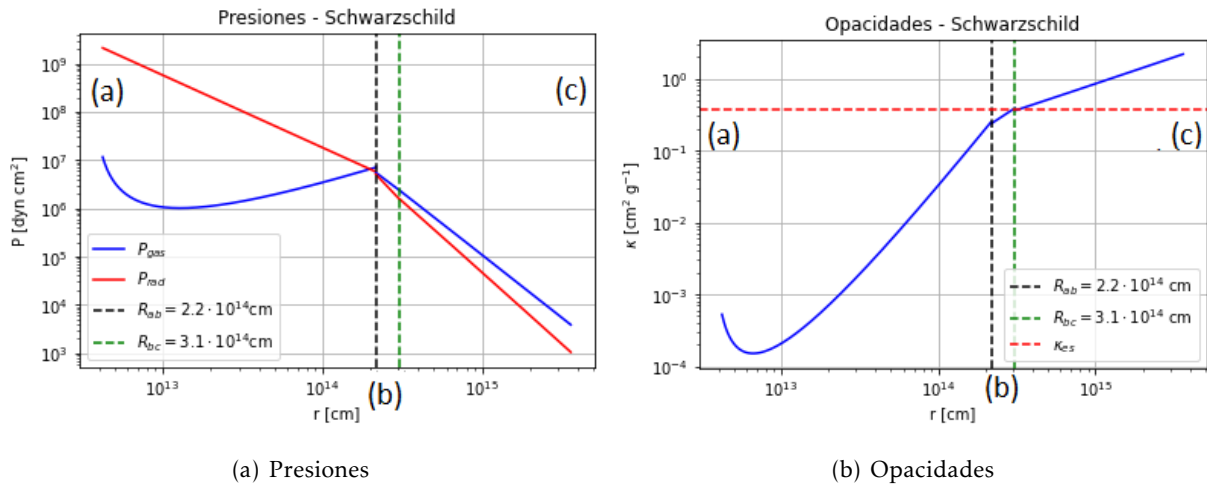


Figura 12: A la izquierda, comparación de la presión de radiación con la presión del gas en función del radio; a la derecha, comparación de la opacidad free-free con la opacidad de scattering (ver el Apéndice para mayor detalle en las distintas opacidades). Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios donde cambian los regímenes del disco.

Cabe mencionarse que distintas hipótesis han sido mencionadas a lo largo de las Secciones 3.1 y 3.4. Por un lado, se establece que la componente circular de la velocidad v_{ϕ} debe permanecer Kepleriana (demostrado en la Sección 3.1) y altamente supersónica. Por otro lado, según la Ec. 48, la velocidad radial debe ser menor que la velocidad del sonido del disco. En la Fig. 13 se muestra la validez de ambas hipótesis.

Finalmente, en la Fig. 14 se demuestra que el disco es geoméricamente delgado y ópticamente grueso ($\tau \gg 1$).

Se realiza un procedimiento análogo para obtener las soluciones de los discos dentro del modelo RAR. En las Figs. 15, 16 y 17 se presentan los resultados para una masa del fermión de $mc^2 = 378 \text{ keV}$, para una galaxia Milky-Way like, misma tasa de acreción que en Schwarzschild ($\dot{M} \approx 6,67 \times 10^{23} \text{ g s}^{-1}$) y valor de α (0,1) con $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_{\odot}$, $M_{in} = 4,9 \times 10^3 M_{\odot}$ y $R_{in} = 1,01 \times 10^{-10} \text{ kpc}$. Se validan cada una de las hipótesis planteadas. Respecto a las regiones observadas, son análogas a los perfiles de Schwarzschild. Se observa inicialmente la región interna, donde domina la presión de radiación por sobre la presión del gas y la opacidad de scattering ($R_{in} - R_{ab} \approx 5,7 \cdot 10^{13} \text{ cm}$). Luego, en la región interior, domina la presión del gas por sobre la de radiación y la opacidad scattering (R_{ab} a $R_{bc} \approx 1,4 \cdot 10^{14} \text{ cm}$). Finalmente, a partir de este radio, domina la opacidad free-free y la presión del gas.

Por otro lado, se estudia la condición del radio externo del disco estándar y RAR estudiado utilizando la Ec. 52. En el caso estándar, el radio externo obtenido es $R_{out} = 6,25 \times 10^{15} \text{ cm}$, mayor al borde de las regiones 2 – 3, de $3,1 \times 10^{14} \text{ cm}$. De lo que, se pueden concluir dos observaciones. En primer lugar, que existen las tres regiones del disco como fue mostrado en las Figs. 12, 13, 14. En segundo lugar, que dicho radio se corresponde con $R_{out} \approx 10^3 R_{in}$, lo cual coincide con lo estudiado en 5.1.

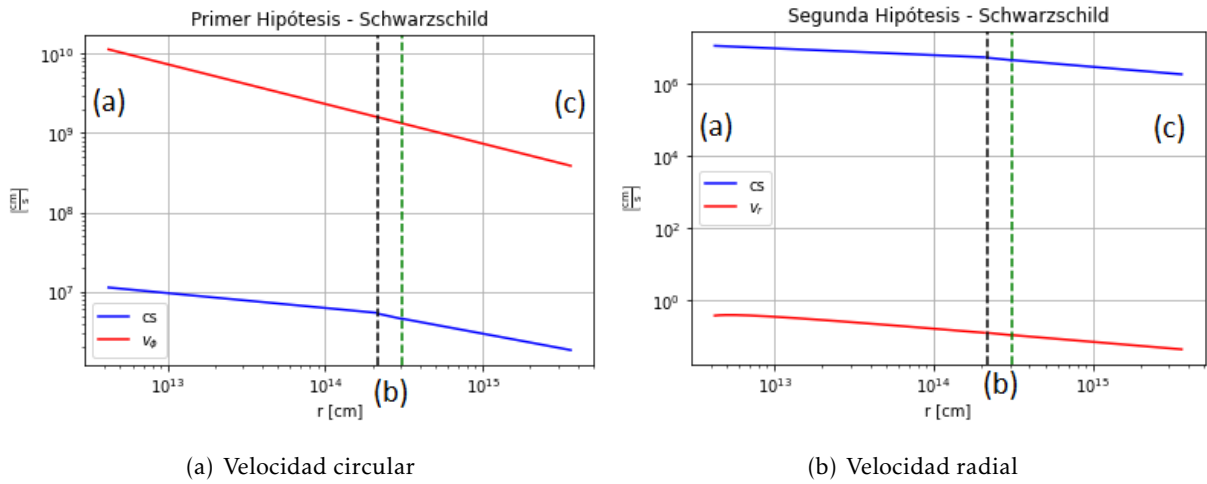


Figura 13: Validez de las hipótesis formuladas para la teoría de estructura de discos- α . A la izquierda, comparación de la componente circular de la velocidad y la velocidad del sonido del disco, donde se valida $c_s \ll (GM/R^3)^{1/2}$; a la derecha, comparación de la componente radial de la velocidad con la velocidad del sonido del disco, donde se valida $v_r \approx \alpha c_s H/r \ll c_s$. Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios en los cuales cambian los regímenes del disco.

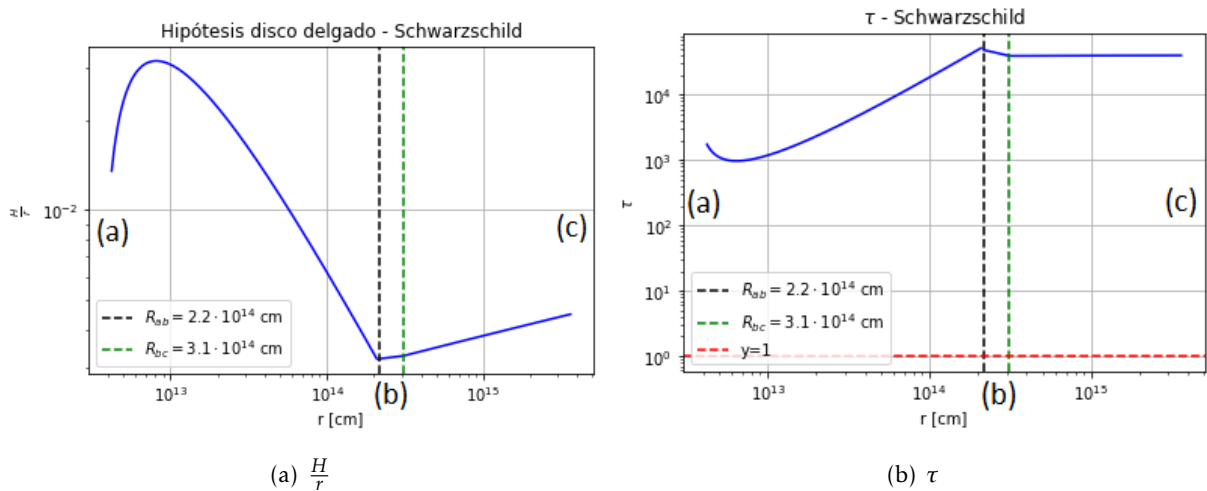


Figura 14: A la izquierda, validez de hipótesis del disco delgado; a la derecha, validez del disco ópticamente grueso. Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios en los cuales cambian los regímenes del disco.

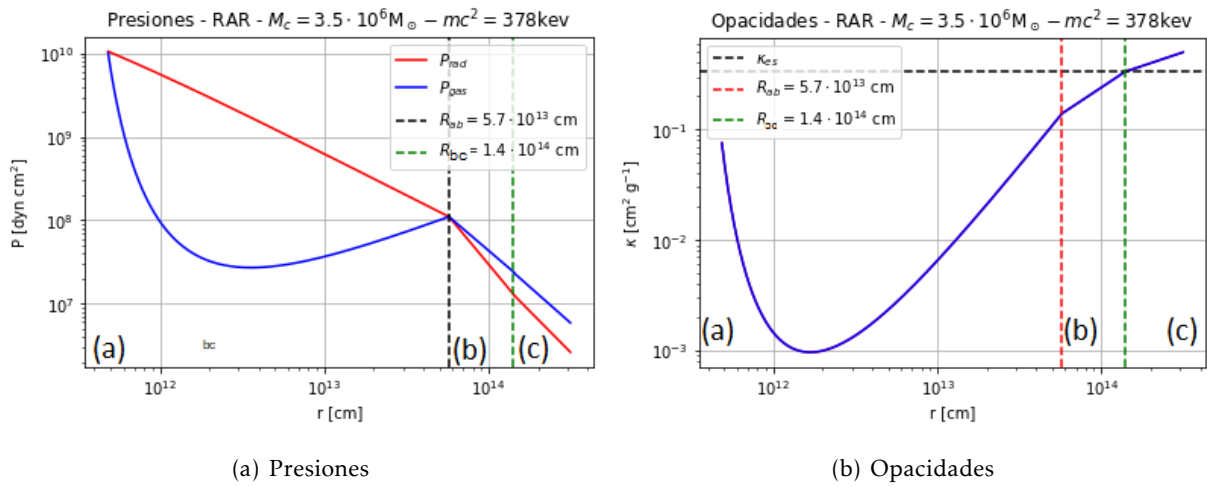


Figura 15: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 378keV y $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_\odot$. A la izquierda, comparación de la presión de radiación con la presión del gas en función del radio; a la derecha, comparación de la opacidad free-free con la opacidad de scattering. Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios en los cuales cambian los regímenes del disco.

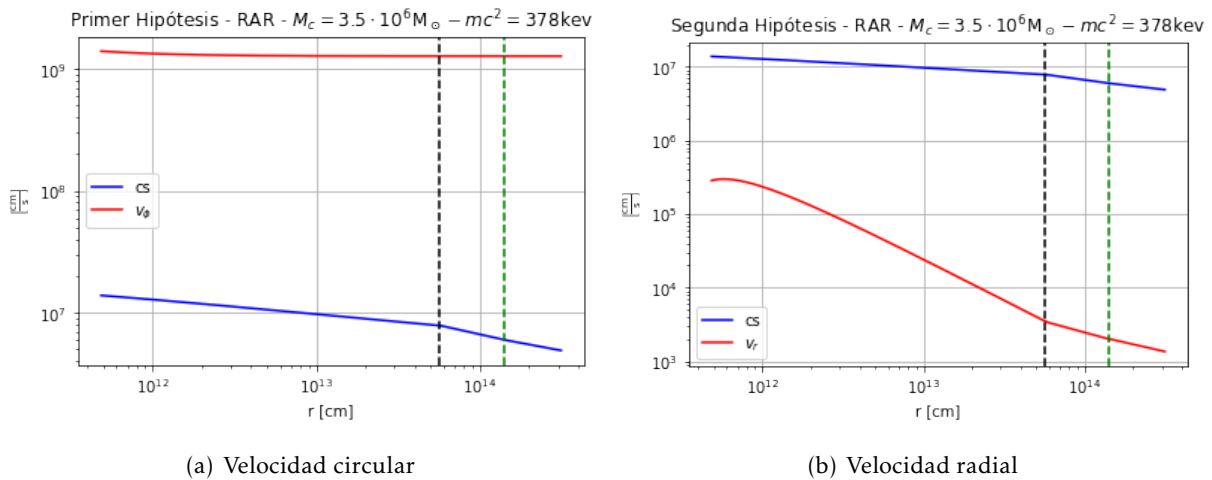


Figura 16: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 378keV y $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_\odot$. A la izquierda, comparación de la componente circular de la velocidad y la velocidad del sonido del disco, donde se valida $c_s \ll (GM(R)/R^3)^{1/2}$; a la derecha, comparación de la componente radial de la velocidad con la velocidad del sonido del disco, donde se valida $v_r \approx \alpha c_s H/r \ll c_s$. Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios en los cuales cambian los regímenes del disco.

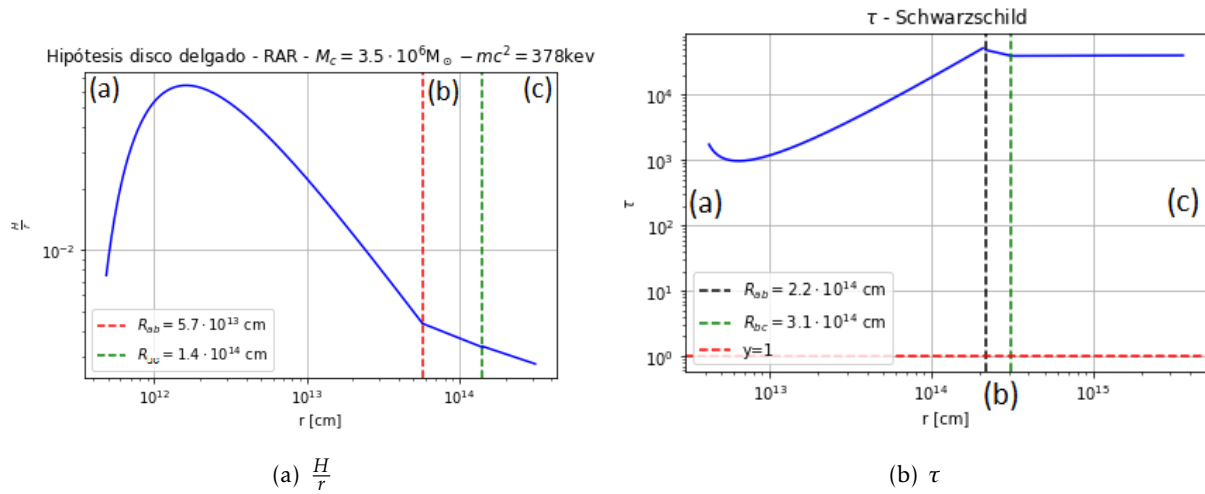


Figura 17: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 378keV y $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_\odot$. A la izquierda, validez de hipótesis del disco delgado; a la derecha, validez del disco ópticamente grueso. Las líneas punteadas negra y verde señalan los radios en los cuales cambian los regímenes del disco.

Es interesante comparar con una misma masa del núcleo correspondiente a $M_c = 3,5 \cdot 10^6 M_\odot$, tasa de acreción $\dot{M} \approx 6,67 \times 10^{23} \text{ g s}^{-1}$, pero considerando masas del fermión de 56keV y 100keV. En la Fig. 18 se observan los perfiles de presión de radiación y del gas para ambas masas del fermión. A su vez, en la Fig. 19 se muestra la opacidad en función del radio. A diferencia de lo obtenido para $mc^2 = 378 \text{ keV}$, no se reproducen las tres regiones del disco, existiendo únicamente la región exterior, donde domina la opacidad free-free y la presión del gas. Dicho resultado se condice con el hecho de que la compacidad de los objetos para $mc^2 = 56 \text{ keV}$ y $mc^2 = 100 \text{ keV}$ es menor en comparación con $mc^2 = 378 \text{ keV}$ (ver Tablas 3 y 5), y por ende, la temperatura de los discos alcanzada es menor (ver Fig. 20).

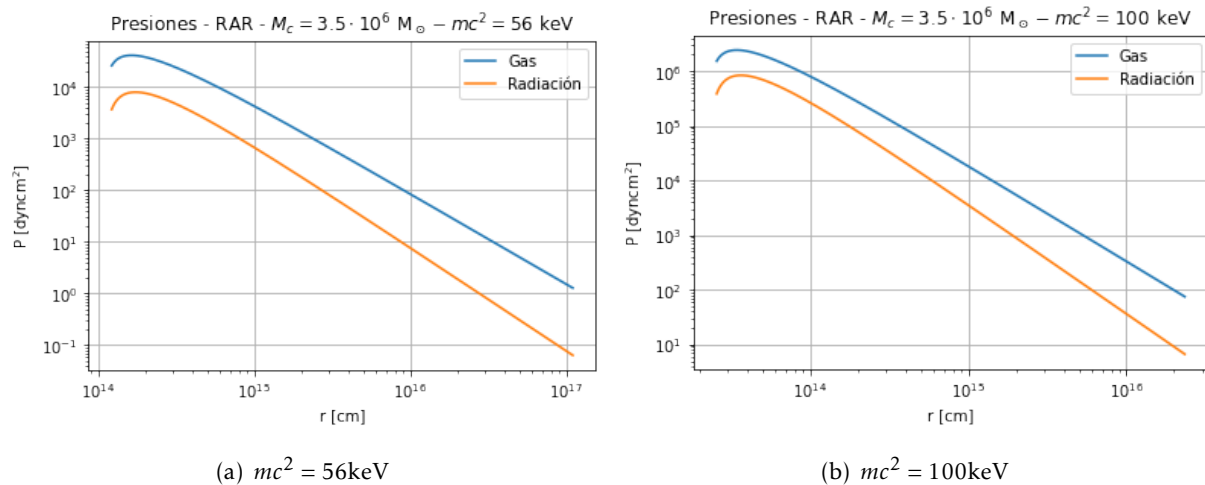


Figura 18: Perfiles de presiones de radiación y del gas en función del radio. A la izquierda, correspondientes a una masa del fermión de 56keV; a la derecha, correspondientes a una masa del fermión de $mc^2 = 100 \text{ keV}$.

Finalmente, se considera una solución al modelo RAR cuyo núcleo compacto es crítico, es decir, tiene la masa gravitacional crítica para colapsar en un agujero negro. Para ello, los parámetros utilizados para una masa del fermión de $mc^2 = 56 \text{ keV}$ son $\theta_0 = 3,96 \cdot 10^1$, $W_0 = 6,44 \cdot 10^1$, $\beta_0 = 6,79 \cdot 10^{-3}$.

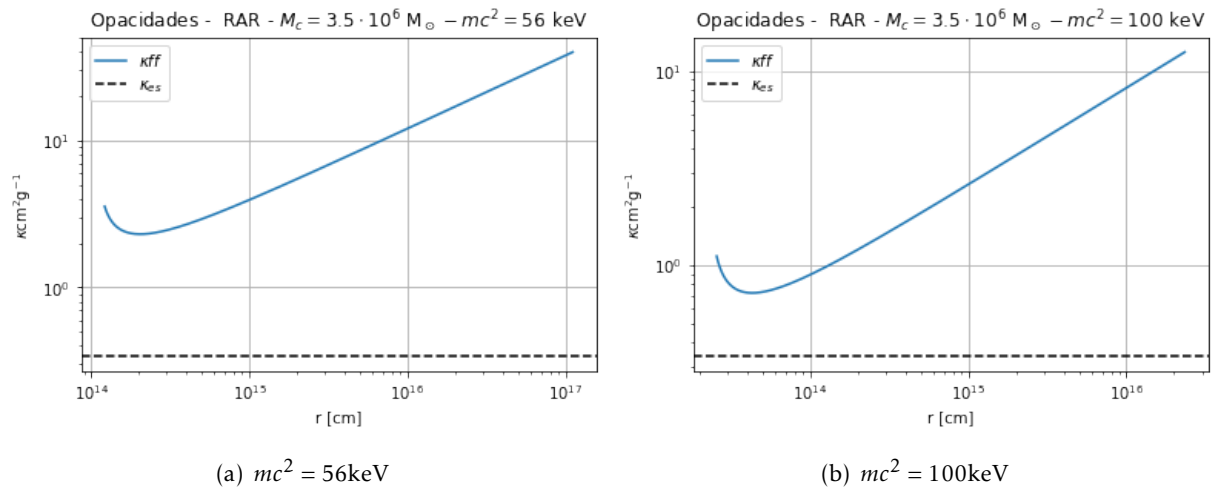


Figura 19: Perfiles de opacidad free-free y su comparación con la opacidad de scattering en función del radio. A la izquierda, correspondientes a una masa del fermión de 56keV; a la derecha, correspondientes a una masa del fermión de $mc^2 = 100 \text{ keV}$.

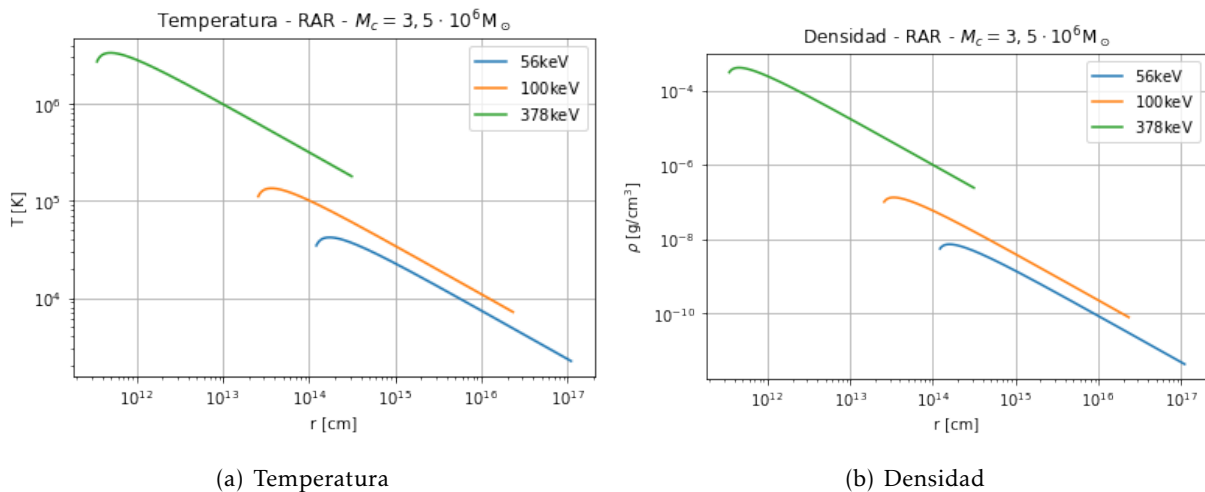


Figura 20: Comparación de los perfiles de temperatura (izquierda) y densidad (derecha) para un núcleo compacto con $M_c = 3,5 \times 10^6 M_\odot$, tasa de acreción $\dot{M} = 3,67 \times 10^{23} \text{ gs}^{-1}$ y diferentes masas del fermión: $mc^2 = 56, 100, 378 \text{ keV}$.

La masa del núcleo compacto es de $M_c = 1,4 \times 10^8 M_\odot$, y $r_{core} = 5,93 \cdot 10^{-8} \text{kpc}$. Dicha solución se compara con un agujero negro de Schwarzschild de $1,4 \times 10^8 M_\odot$. La tasa de acreción considerada $\dot{M} = 0,1 \cdot L_{edd} \cdot M_{BH} \approx 3 \times 10^{25} \text{gs}^{-1}$. Según lo planteado en [36], para dicha masa del agujero negro y dicha tasa de acreción, tomando un valor $\alpha \gtrsim 0,003$, la región c (3) no existe. Tomando $\alpha = 0,007$, si se calcula el valor del radio en el borde de la región intermedia-exterior, utilizando la Ec. 50, el valor obtenido es $R_{bc} \approx 1,07 \times 10^{16} \text{cm}$. Por otro lado, utilizando la Ec. 52, el radio en el cual el disco se vuelve autogravitante es de $R_{out} \approx 8,11 \times 10^{15} \text{cm}$, el cual es menor que la condición de borde a partir de la cual comienza a existir la región exterior.

Por otro lado, para el caso RAR, ocurre un comportamiento análogo, dado que $R_{bc} \approx 8,3 \times 10^{15} \text{cm}$ y $R_{out} \approx 4,9 \times 10^{15} \text{cm}$, con lo que tampoco existe la región exterior. En las Figs. 21-23 se muestran los perfiles de presiones y opacidades correspondientes a cada región, como así también la validez de las hipótesis planteadas para los discos de acreción.

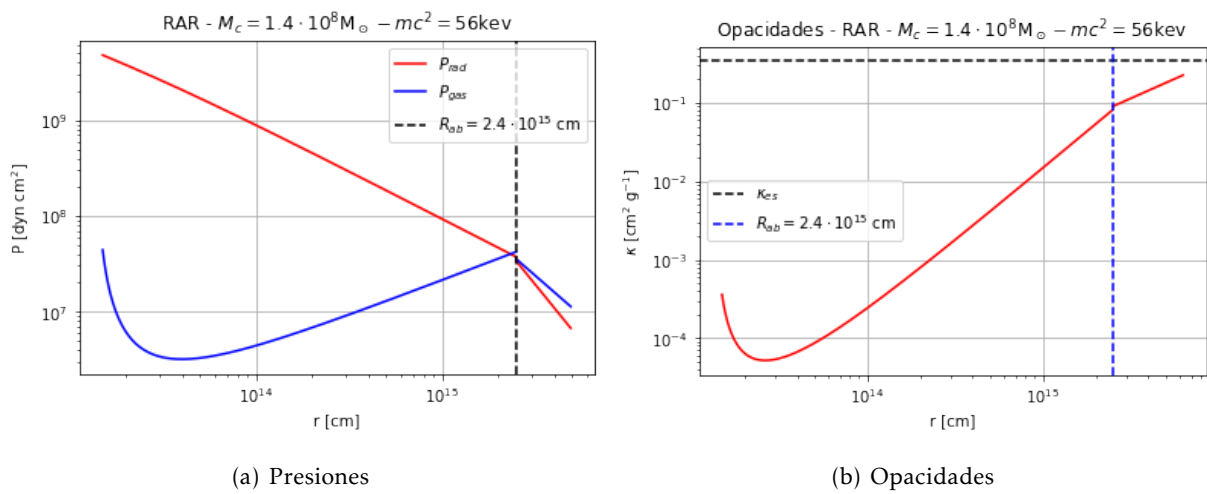


Figura 21: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 56keV y $M_c = 1,2 \cdot 10^8 M_\odot$. A la izquierda, comparación de la presión de radiación con la presión del gas en función del radio; a la derecha, comparación de la opacidad free-free con la opacidad de scattering. Las líneas punteadas negra señala el radio en el cual cambia el régimen del disco.

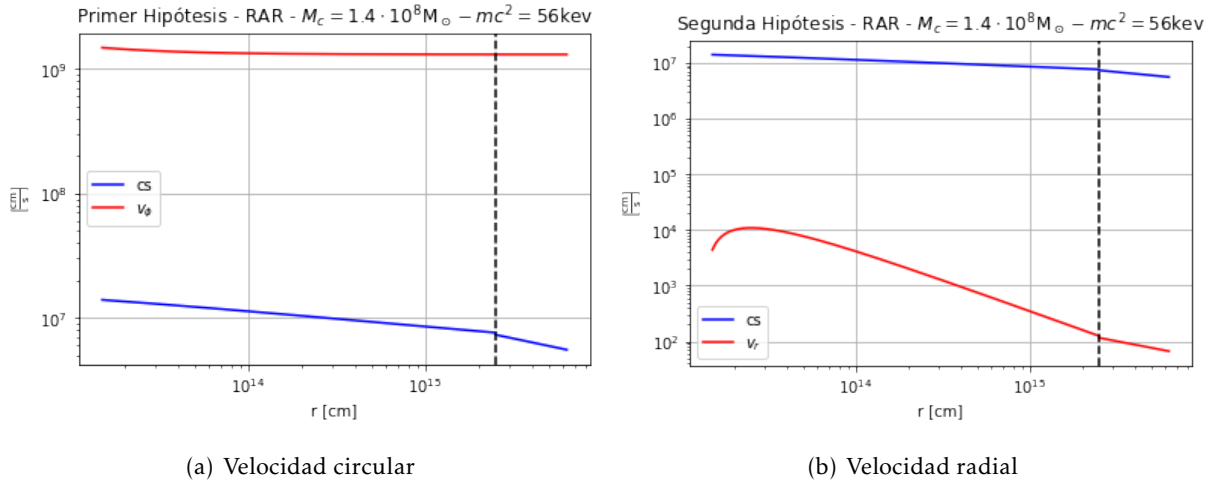


Figura 22: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 56keV y $M_c = 1,2 \cdot 10^8 M_\odot$. A la izquierda, comparación de la componente circular de la velocidad y la velocidad del sonido del disco, donde se valida $cs \ll (GM(R)/R^3)^{1/2}$; a la derecha, comparación de la componente radial de la velocidad con la velocidad del sonido del disco, donde se valida $v_r \approx \alpha c_s H/r \ll c_s$. Las líneas punteadas negra señala el radio en el cual cambia el régimen del disco.

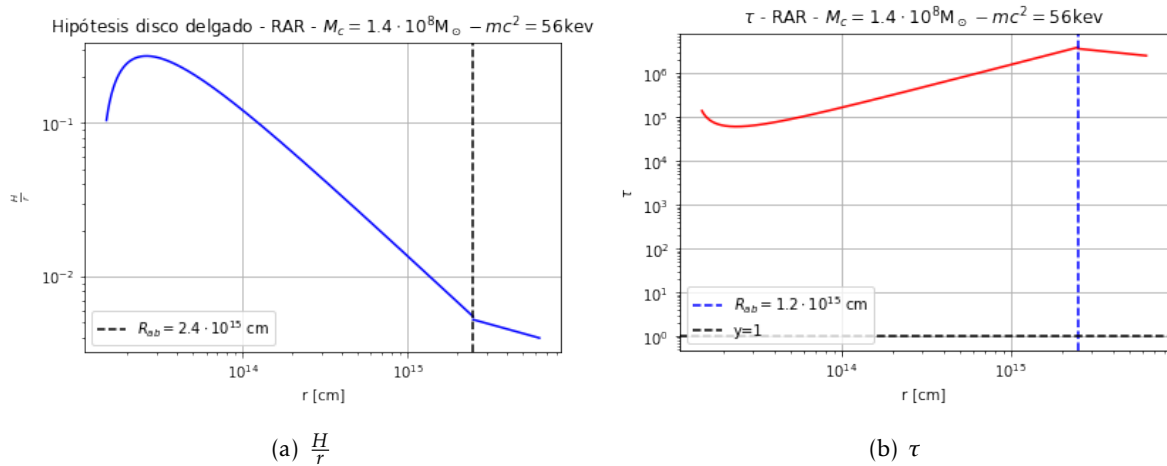


Figura 23: Perfiles correspondientes a una masa del fermión de 56keV y $M_c = 1,2 \cdot 10^8 M_\odot$. A la izquierda, validez de hipótesis del disco delgado; a la derecha, validez del disco ópticamente grueso. Las línea punteadas negra señala el radio en el cual cambia el régimen del disco.

Capítulo 6

6. Conclusiones

El objetivo de la presente tesis de licenciatura fue investigar la eficiencia, espectro y estructura de los discos de acreción alrededor de núcleos compactos de materia oscura fermiónica. A través de la solución de los discos de acreción de Shakura y Sunyaev ([18]), se encontraron las soluciones modificadas aplicadas al modelo RAR.

En una primera instancia, se utilizó el código numérico en Python *optim.mass.py*, con el objetivo de manipular el modelo RAR. Luego, se calculó la energía de ligadura gravitacional, que permitió establecer un radio interno adecuado para el disco de acreción dentro del modelo. La eficiencia máxima siempre ocurre en un radio menor al radio del núcleo del objeto compacto, variando desde 0,07% – 28,5% de conversión de energía en reposo de la partícula en energía radiada. Para una energía de $mc^2 = 378\text{keV}$, la eficiencia (28,5%) es ampliamente superior a la obtenida por fusión de hidrógeno (0,5%) y por acreción sobre un agujero negro de Schwarzschild (5,7%) lo cual puede tener gran relevancia para un ulterior estudio de física de acreción y crecimiento de agujeros negros supermasivos durante intervalos cosmológicos .

En una segunda instancia, el trabajo fue aplicado a diferentes tipos de galaxias, variando desde la Vía Láctea, cuyo objeto central supermasivo es Sgr A* con una masa $\sim 4 \times 10^6 M_\odot$, hasta galaxias con núcleos activos cuyos objetos compactos varían entre $10^7 M_\odot$ y $\sim 10^8 M_\odot$. Se estudiaron los perfiles de flujo y luminosidad para diferentes masas de núcleos compactos y masas de fermiones. Se estudió qué radio externo considerar para el disco de acreción, estudiando la variación de los flujos y luminosidades con la variación de R_{out} . Al variar el radio externo entre tres y cuatro órdenes de magnitud mayor respecto al radio interno considerado, no se presentaron variaciones en los picos de flujo y luminosidad y la frecuencia en la cual los mismos ocurren, debido a que a esas escalas radiales equivale variar en el perfil de masa donde el mismo tiene un valor constante (o ‘plateau’).

Por otro lado, se analizaron los espectros correspondientes a soluciones RAR que satisfacen la relación de Ferrarese, variando la masa del núcleo compacto entre $M_c \sim 10^6 M_\odot$ y $M_c \sim 7,7 \cdot 10^7 M_\odot$. El comportamiento observado fue opuesto al esperado por Schwarzschild. Mientras que para Schwarzschild a mayor masa del agujero negro, en menor frecuencia se observan los picos de flujo y luminosidad, en RAR es contrario, dado que a mayor masa del objeto central, mayor compacidad del núcleo central, y por ende las frecuencias donde los flujos adquieren sus máximos tienden a ser mayores.

En una tercera instancia, se estudiaron discos estacionarios, ópticamente gruesos y geométricamente delgados, para rangos de tasas de acreción y masas de núcleos compactos donde estos modelos son autoconsistentes, comparando a su vez con los obtenidos con el modelo estándar. Finalmente, siguiendo el análisis en ([36]), se estudió un segundo método para determinar el radio exterior del disco, analizando en qué valor el disco se vuelve autogravitante. Los resultados obtenidos coincidieron con lo estudiado mediante los espectros de los flujos y luminosidades. De esta manera, no sólo pudieron reproducirse las tres regiones descritas por Shakura&Sunyaev ([18]) para $mc^2 = 378\text{keV}$, sino que también, según lo reportado en ([36]), para un objeto con masa $M_c \approx 2,2 \times 10^8 M_\odot$ y tasa

de acreción $\dot{M} \approx 3 \times 10^{25} \text{gs}^{-1}$ no se observa la región externa, donde domina la presión del gas y la opacidad free-free. En el caso de considerar como masa del fermión $mc^2 = 56 \text{keV}$ o $mc^2 = 100 \text{keV}$, la única región observada es la exterior, dado que al tener compacidad menor, la temperatura de los discos alcanzada también es menor.

7. Referencias

Referencias

- [1] Planck Collaboration y col. “Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood”. En: 571, A15 (nov. de 2014), A15. doi: 10.1051/0004-6361/201321573. arXiv: 1303.5075 [astro-ph.CO].
- [2] Shaun Cole, Will J. Percival, John A. Peacock, Peder Norberg, Carlton M. Baugh, Carlos S. Frenk, Ivan Baldry, Joss Bland-Hawthorn, Terry Bridges, Russell Cannon, Matthew Colless, Chris Collins, Warrick Couch, Nicholas J. G. Cross, Gavin Dalton, Vincent R. Eke, Roberto De Propris, Simon P. Driver, George Efstathiou, Richard S. Ellis, Karl Glazebrook, Carole Jackson, Adrian Jenkins, Ofer Lahav, Ian Lewis, Stuart Lumsden, Steve Maddox, Darren Madgwick, Bruce A. Peterson, Will Sutherland y Keith Taylor. “The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications”. En: 362.2 (sep. de 2005), págs. 505-534. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09318.x. arXiv: astro-ph/0501174 [astro-ph].
- [3] Daniel J. Eisenstein, Idit Zehavi, David W. Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R. Blanton, Robert C. Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, Scott F. Anderson, Jim Annis, Neta Bahcall, Jon Brinkmann, Scott Burles, Francisco J. Castander, Andrew Connolly, Istvan Csabai, Mamoru Doi, Masataka Fukugita, Joshua A. Frieman, Karl Glazebrook, James E. Gunn, John S. Hendry, Gregory Hennessy, Zeljko Ivezić, Stephen Kent, Gillian R. Knapp, Huan Lin, Yeong-Shang Loh, Robert H. Lupton, Bruce Margon, Timothy A. McKay, Avery Meiksin, Jeffery A. Munn, Adrian Pope, Michael W. Richmond, David Schlegel, Donald P. Schneider, Kazuhiro Shimasaku, Christopher Stoughton, Michael A. Strauss, Mark Subbarao, Alexander S. Szalay, István Szapudi, Douglas L. Tucker, Brian Yanny y Donald G. York. “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies”. En: 633.2 (nov. de 2005), págs. 560-574. doi: 10.1086/466512. arXiv: astro-ph/0501171 [astro-ph].
- [4] Margaret J. Geller y John P. Huchra. “Mapping the Universe”. En: *Science* 246.4932 (nov. de 1989), págs. 897-903. doi: 10.1126/science.246.4932.897.
- [5] Gianfranco Bertone. *Particle Dark Matter : Observations, Models and Searches*. 2010.
- [6] Gary Steigman. “Primordial Nucleosynthesis: Successes and Challenges”. En: *International Journal of Modern Physics E* 15.1 (ene. de 2006), págs. 1-35. doi: 10.1142/S0218301306004028. arXiv: astro-ph/0511534 [astro-ph].
- [7] Matthews A.M. Condon J.J. “ Λ CDM for Astronomers”. En: <https://arxiv.org/pdf/1804.10047.pdf> (2018).
- [8] Greengard L. “The Numerical Solution to the N-Body Problem”. En: *Computer in Physics* 4 (1990), pág. 142.

-
- [9] Kuwahara T. Kamada A. Jung Kim H. “Maximally self-interacting dark matter: models and predictions”. En: (2020).
- [10] Correa C. C.Y. Ng K. Dekker A. Ando S. “Warm Dark Matter Constraints Using Milky-Way Satellite Observations and Subhalo Evolution Modeling”. En: (2021).
- [11] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh y Tom Broadhurst. “Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave”. En: *Nature Physics* 10.7 (jul. de 2014), págs. 496-499. doi: 10.1038/nphys2996. arXiv: 1406.6586 [astro-ph.GA].
- [12] R. Ruffini, C. R. Argüelles y J. A. Rueda. “On the core-halo distribution of dark matter in galaxies”. En: 451.1 (jul. de 2015), págs. 622-628. doi: 10.1093/mnras/stv1016. arXiv: 1409.7365 [astro-ph.GA].
- [13] C. R. Argüelles, A. Krut, J. A. Rueda y R. Ruffini. “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables I: The Milky Way”. En: *Physics of the Dark Universe* 21, 82 (sep. de 2018), pág. 82. doi: 10.1016/j.dark.2018.07.002. arXiv: 1810.00405 [astro-ph.GA].
- [14] C. R. Argüelles, A. Krut, J. A. Rueda y R. Ruffini. “Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables II: Galaxy scaling relations”. En: *Physics of the Dark Universe* 24, 100278 (mar. de 2019), pág. 100278. doi: 10.1016/j.dark.2019.100278.
- [15] Krut A. Rueda J.A. Ruffini R. Becerra-Vergara A. Argüelles C.R. “Geodesic motion of S2 and G2 as a test of the fermionic dark matter nature of our Galactic core”. En: *A&A* 641 (2020), A34.
- [16] Krut A. Rueda J.A. Ruffini R. Becerra-Vergara A. Argüelles C.R. “Hinting a dark matter nature of Sgr A* via the S-stars”. En: *MNRAS Lett.* 505 (2021), pág. L64.
- [17] Abramowicz M. A. Lasota J. P. et al. Chen X. “Unified Description of Accretion Flows around Black Holes”. En: *ApJ Lett.* 443 (1995), pág. L61.
- [18] Sunyaev R. A. Shakura N. I. “Black holes in binary systems. Observational appearance”. En: *A&A* 500 (1973), pág. 33.
- [19] Thorne K. S. Novikov I. D. “Astrophysics of black holes”. En: *Les Astres Occlus* (1973), págs. 343-450.
- [20] Perez Bergliaffa S.E. Pérez D. Romero G.E. “Accretion disks around black holes in modified strong gravity”. En: *A&A* 551 (2013), A4,15.
- [21] Koribalski B.S. Dettmar R.J. Van Eymeren J. Trachternach C. “Non-circular motions and the cusp-core discrepancy in dwarf galaxies”. En: *A&* (2009).
- [22] Bullock J. “Notes on the missing satellites problem”. En: *Cambridge University Press* (2013).
- [23] Tremaine S. Binney J. “Galactic Dynamics: Second Edition.” En: *Princeton University Press* (2008).
- [24] Pierre-Henri Chavanis. “On the ‘coarse-grained’ evolution of collisionless stellar systems”. En: 300.4 (nov. de 1998), págs. 981-991. doi: 10.1046/j.1365-8711.1998.01867.x.
- [25] Méhats F. Chavanis P.-H. Lemou M. En: *Physical Review D* 91 (2015), pág. 063531.
- [26] Pierre-Henri Chavanis, Mohammed Lemou y Florian Méhats. “Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic King model”. En: 92.12, 123527 (dic. de 2015), pág. 123527. doi: 10.1103/PhysRevD.92.123527. arXiv: 1409.7840 [astro-ph.CO].

-
- [27] Tolman R. C. En: *Physical Review Journals Archive* 35 (1930), pág. 904.
- [28] Klein O. En: *Reviews of Modern Physics* 21 (1949), pág. 531.
- [29] Fraga B. M. O. Geralico A. Quevedo H. Rueda J. A. Siutsou I. Ruffini R. Argüelles C. R. En: *International Journal of Modern Physics D* 22 (2013), pág. 1360008.
- [30] Carlos R. Argüelles, Manuel I. Díaz, Andreas Krut y Rafael Yunis. “On the formation and stability of fermionic dark matter haloes in a cosmological framework”. En: 502.3 (abr. de 2021), págs. 4227-4246. doi: 10.1093/mnras/staa3986. arXiv: 2012.11709 [astro-ph.GA].
- [31] Sofue Y. En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 65, 1 (2013).
- [32] Evans N. W. Gibbons S. L. J. Belokurov V. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 445, 3788 (2014).
- [33] Yoshiaki Sofue. “Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center - From Black Hole to Entire Galaxy”. En: 65, 118 (dic. de 2013), pág. 118. doi: 10.1093/pasj/65.6.118. arXiv: 1307.8241 [astro-ph.GA].
- [34] S. L. J. Gibbons, V. Belokurov y N. W. Evans. “‘Skinny Milky Way please’, says Sagittarius”. En: 445.4 (dic. de 2014), págs. 3788-3802. doi: 10.1093/mnras/stu1986. arXiv: 1406.2243 [astro-ph.GA].
- [35] Raine D. Frank J. King A. “Accretion power in astrophysics”. En: *Cambridge University Press* (2002).
- [36] Szuszkiewicz E. Burderi L. King A. “Does the Thermal Disc Instability Operate in Active Galactic Nuclei?” En: *A&A* (1998).
- [37] Rueda J. Ruffini R. Argüelles C. Krut A. En: *Physics of the Dark Universe* 21 (2018), págs. 82-89.
- [38] L. Ferrarese. “Beyond the bulge: A fundamental relation between supermassive black holes and dark matter halos”. En: *Astrophys. J.* 578 (2002), págs. 90-97.
- [39] Bodgan A. Goulding A.D. En: *The Astrophysical Journal* 800.2 (2015), pág. 128. doi: 10.1088/0004-637X/800/2/124.

8. Apéndice A

Schwarzschild

En los Apéndices A y B se presentan las expresiones para todas las características del disco en función del radio utilizadas a lo largo de este trabajo de tesis. En primer lugar, se estableció como opacidad de scattering $\kappa_{es} = 0,22(1 + X)c^2 \text{ g}^{-1}$, donde X es el contenido de Hidrógeno por masa (utilizando X=0.7 como lo reportado en [36]). Para la opacidad media de Roseeland está dada en la Ec. 44.

En segundo lugar, para tener una idea de las escalas típicas del disco, se grafican las soluciones en términos de $R_{10} = R/(10^{10} \text{ cm})$, $\dot{M}_{16} = \dot{M}/(10^{16} \text{ g s}^{-1})$ y $m_1 = M/M_{\odot}$.

Para la región interna (a), donde domina la presión de radiación por sobre la presión del gas ($P_{rad} \gg P_{gas}$) y la opacidad de scattering por sobre la opacidad free-free ($\kappa_{es} \gg \kappa_{ff}$):

1. $H = \frac{3 \cdot \kappa_{es}}{8 \cdot \pi \cdot c} \dot{M} f^4 \text{ cm}$
2. $\Sigma = \frac{G^{-1/2}}{3\pi} \left(\frac{8\pi c}{3 \cdot \kappa_{es}} \right)^2 \alpha^{-1} f^{-4} M^{-1/2} \dot{M}^{-1} R^{3/2} \text{ g cm}^{-2}$
3. $\rho = \frac{G^{-1/2}}{3\pi} \left(\frac{8\pi c}{3 \cdot \kappa_{es}} \right)^3 \alpha^{-1} f^{-8} M^{-1/2} \dot{M}^{-2} R^{3/2} \text{ g cm}^{-3}$
4. $T_c = \left(\frac{2c^2 \sqrt{G}}{3 \cdot \kappa_{\sigma}} \right)^{1/4} \alpha^{-1/4} M^{1/8} R^{-3/8} \text{ K}$

El radio para el cual cambia la región del disco:

$$R_{ab} \approx (2,3 \times 10^{-10})^{8/21} \alpha^{2/21} m_1^{1/3} f^{64/21} \dot{M}_{16}^{16/21} (10^{10} \text{ cm})$$

Para la región intermedia (b), donde domina la presión del gas por sobre la presión de radiación ($P_{gas} \gg P_{rad}$) y aún la opacidad de scattering es la predominante ($\kappa_{es} \gg \kappa_{ff}$), se tiene:

1. $H = \sqrt{k/(\mu m_p)} G^{-1/2} \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{1/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} M^{-7/20} \dot{M}^{1/5} R^{21/20} f^{4/5} \text{ cm},$
2. $\Sigma = \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{-1/5} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{-1/5} \alpha^{-4/5} f^{12/5} M^{1/5} \dot{M}^{3/5} R^{-3/5} \text{ g cm}^{-2},$
3. $\rho = \sqrt{\mu m_p/k} G^{1/2} \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{-3/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{9/10} \alpha^{-7/10} M^{11/20} \dot{M}^{2/5} R^{9/20} f^{8/5} \text{ g cm}^{-3},$
4. $T_c = \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{1/5} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{9/10} \alpha^{1/5} M^{3/10} \dot{M}^{2/5} R^{-9/10} f^{8/5} \text{ K}.$

El radio para el cual vale la región intermedia es:

$$R_{bc} \approx (4,87 \cdot 10^{-5})^{2/3} f^{8/3} \dot{M}_{16}^{2/3} m_1^{1/3} \text{ cm}$$

Para la región exterior (c), donde domina la presión del gas por sobre la presión de radiación ($P_{gas} \gg P_{rad}$) y ahora domina la opacidad free-free ($\kappa_{ff} \gg \kappa_{es}$), se tiene:

1. $H = \sqrt{k/(\mu m_p)} G^{-1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{3/40} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} M^{-3/8} \dot{M}^{3/20} R^{9/8} f^{3/5} \text{ cm},$

2. $\Sigma = \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{-1/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{4/5} \alpha^{-4/5} f^{14/5} M^{1/4} \dot{M}^{7/10} R^{-3/4} \text{ g cm}^{-2},$
3. $\rho = \sqrt{\mu m_p/k} G^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{-7/40} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{7/10} \alpha^{-1/10} f^{3/5} M^{-3/8} \dot{M}^{3/20} R^{9/8} \text{ g cm}^{-2},$
4. $T_c = \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{3/20} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/5} \alpha^{-1/5} M^{1/4} \dot{M}^{3/10} R^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}.$

RAR

Análogamente se presentan las soluciones del disco en cada región dentro del modelo RAR.

Para la región interna (a), donde $P_{rad} \gg P_{gas}$ y $\kappa_{es} \gg \kappa_{ff}$:

1. $H = \frac{3\kappa_{es}}{8\pi c} M^{-7/20} R^{21/20} \dot{M}^{1/5} f^{4/5} \text{ cm},$
2. $\Sigma = \frac{G^{-1/2}}{3\pi} \left(\frac{8\pi c}{3\kappa_{es}} \right)^2 \alpha^{-4/5} f^{12/5} B^{-2} A M^{1/5} \dot{M}^{3/5} R^{-3/5} \text{ g cm}^{-2},$
3. $\rho = \frac{G^{-1/2}}{3\pi} \left(\frac{8\pi c}{3\kappa_{es}} \right)^3 \alpha^{-4/5} f^{8/5} B^{-2} A M^{11/20} \dot{M}^{2/5} R^{-33/20} \text{ g cm}^{-3},$
4. $T_c = \left(\frac{2c^2 \sqrt{G}}{3\kappa_{es} \sigma} \right)^{1/4} \alpha^{-1/5} M^{3/10} B^{-1/2} A^{1/4} R^{-9/10} \dot{M}^{2/5} f^{8/5} \text{ K}.$

El radio para el cual cambia la región del disco:

$$R_{ab} \approx (2,3 \times 10^{-10})^{1/4} \alpha^{1/16} m_1^{1/2} f^2 \dot{M}_{16}^{1/2} B^{1/2} A^{-11/32} (10^{10} \text{ cm})$$

Para la región intermedia (b), donde $P_{gas} \gg P_{rad}$ y $\kappa_{es} \gg \kappa_{ff}$:

1. $H = \sqrt{k/(\mu m_p)} G^{-1/2} \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{1/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} M^{1/10} \dot{M}^{1/5} R^{3/5} f^{4/5} A^{-9/20} \text{ cm},$
2. $\Sigma = \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{-1/5} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{-1/5} \alpha^{-4/5} f^{12/5} M^{-1/5} \dot{M}^{3/5} R^{-1/5} A^{2/5} B^{-1} \text{ g cm}^{-2},$
3. $\rho = \sqrt{\mu m_p/k} G^{1/2} \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{-3/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{9/10} \alpha^{-7/10} M^{-3/10} \dot{M}^{2/5} R^{-4/5} f^{8/5} A^{13/20} B^{-1} \text{ g cm}^{-3},$
4. $T_c = \left(\frac{9G\kappa_{es}}{32\pi\sigma} \right)^{1/5} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{9/10} \alpha^{-1/5} M^{1/5} \dot{M}^{2/5} R^{-4/5} f^{8/5} A^{1/10} \text{ K}.$

El radio para el cual cambia la región del disco:

$$R_{bc} \approx (4,87 \times 10^{-10})^{1/2} m_1^{1/2} f^2 \dot{M}_{16}^{1/2} B^{1/2} A^{-1/4} (10^{10} \text{ cm})$$

Finalmente, para la región exterior (a), donde $P_{gas} \gg P_{rad}$ y $\kappa_{ff} \gg \kappa_{es}$:

1. $\Sigma = \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{-1/10} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{4/5} f^{12/5} \alpha^{-4/5} M_1^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/5} R_{10}^{-1/5} A^{2/5}$
2. $T_c = \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{3/20} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/5} \alpha^{-1/5} M_1^{1/5} \dot{M}_{16}^{2/5} R_{10}^{-4/5} f^{8/5} A^{1/10}$
3. $H = \sqrt{k/(\mu m_p)} G^{-1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{3/40} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} f^{4/5} M_1^{1/10} \dot{M}_{16}^{1/5} A^{-9/20} R_{10}^{3/5}$
4. $\rho = \sqrt{\mu m_p/k} G^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu m_p}{k}} \frac{9\kappa_{ff} G^{3/2}}{32\pi\sigma} \right)^{-7/40} \left(\frac{G^{1/2} \mu m_p}{3\pi k} \right)^{7/10} \cdot 10^{-7} \alpha^{-7/10} M_1^{-3/10} \dot{M}_{16}^{2/5} R_{10}^{-4/5} f^{8/5} A^{17/20} B^{-1} \text{ g cm}^{-3}$

Cabe mencionarse que tomando el límite $M(r) \rightarrow M$ y $dM(R)/dR \rightarrow 0$ se recuperan las soluciones del disco presentadas para un agujero negro de Schwarzschild.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina.

Buenos Aires, 2022