



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA JUAN JOSÉ GIAMBIAGI

Nuevas soluciones de Sitter no perturbativas  
en cosmología invariante ante dualidad

TESIS DE LICENCIATURA EN CIENCIAS FÍSICAS

**Facundo Emanuel Rost**

Directora: Dra. Carmen A. Núñez

Junio 2021

TEMA: Nuevas soluciones de Sitter no perturbativas en cosmología invariante ante dualidad.

ALUMNO: Facundo Emanuel Rost

LU N°: 787/15

LUGAR DE TRABAJO: Instituto de Astronomía y Física del Espacio  
(IAFE-CONICET-UBA)

DIRECTORA DEL TRABAJO: Dra. Carmen A. Núñez

FECHA DE INICIACIÓN: 22/09/2020

FECHA DE FINALIZACIÓN: 28/06/2021

FECHA DE EXAMEN: 28/06/2021

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

.....

.....

Directora

Jurado

.....

.....

Profesora  
de Tesis de Licenciatura

Jurada

.....

.....

*Dedicado a mi papá*

# Agradecimientos

En lo académico, le quiero agradecer particularmente a mi directora Carmen Núñez por todo. Es una grosa y una excelente directora de quien aprendí muchísimo.

También al grande de Ricardo Depine por todo.

Y a las y los increíbles profesores y JTPs que tuve durante la carrera, tanto en la UBA como en la UNLP, que me volaron la cabeza con sus clases.

En lo personal, quisiera agradecer a mi familia por todo su incondicional apoyo. A mamá, a Tadeo, y a papá que ya no está para verme recibido. También a todo el resto de mi familia: Mis abuelos, tíos, primos, en particular a mi tía Belén que siempre me ha hecho reír.

A Lei le dedico un agradecimiento especial por compartir conmigo casi toda la carrera viviendo momentos hermosos, y por todas las juntadas, charlas y los viajes inolvidables.

A Fer, con quien hice el inicio de la carrera y los labos pasándola muy bien, que siempre estuvo ahí para ayudarme.

A Samy, que también me ha ayudado un montón últimamente.

A Alexis que es un amigazo.

A todas las lindas amistades que hice durante la carrera en el entrañable pabellón 1. Especialmente a Yamil, Tomi Chase, Facu Emina, Facu Pereyra, el Pelado, Juan Pablo, Yamila, Tincho, Luisa, el Chanta, Tomi Noten, Mati H, Gabo, Jose, Juli G, Mati L, Gabi, Aye, Osqui, Gonza, Juliana, Guido por todas salidas al barcito de deportes para pedir la infalible promo de pizza+birra y otras grandes juntadas. También a Maxi, Tomi Chase, Joaco, Tobías, Alan, Sol por esos altos viajes hacia y desde La Plata.

Y fuera de la facultad, les agradezco a mis amigos del secundario Mallea, Solari, Kalestein, Mirraji, Lopez y Harry por todos los viajes y las juntadas en las que la pasé excelente, y por todas las anécdotas de las cuales me sigo riendo.

Y a las restantes amistades con las que compartí momentos de mi carrera.

# Resumen

La cosmología invariante ante dualidad desarrollada por Hohm y Zwiebach clasifica las teorías invariantes ante  $O(d, d; \mathbb{R})$  que involucran la métrica, el campo  $b$  y el dilatón que solo dependen del tiempo, a todo orden en  $\alpha'$ . Algunas de estas teorías poseen soluciones no perturbativas isotrópicas de Sitter en el marco de cuerdas, generadas por el número infinito de términos con muchas derivadas de los multipletes  $O(d, d; \mathbb{R})$ . Extendiendo el ansatz isotrópico, construimos soluciones de Sitter no perturbativas, estables e inestables, en el marco de cuerdas y de Einstein. Las ecuaciones de movimiento generalizadas admiten nuevas soluciones, incluyendo métricas  $d + 1$ -dimensionales y campo  $b$  no nulo. En particular, hallamos geometrías  $dS_{n+1} \times T^{d-n}$  con dilatón constante, y métricas con factores de escala acotados en las dimensiones espaciales con campo  $b$  no trivial. Discutimos también la estabilidad, el carácter no perturbativo de las soluciones, y posibles aplicaciones.

El presente trabajo fue publicado en [1].

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Cosmología invariante ante dualidad</b>	<b>6</b>
2.1. La acción y sus campos . . . . .	6
2.2. Ecuaciones de movimiento con correcciones de múltiples trazas . . . . .	8
<b>3. Soluciones dS no perturbativas en <math>n + 1 \leq d + 1</math> y <math>b = 0</math></b>	<b>14</b>
3.1. Métrica no isotrópica y campo $b$ nulo . . . . .	15
3.2. Soluciones dS en el marco de cuerdas . . . . .	18
3.3. Soluciones dS en el marco de Einstein . . . . .	19
3.4. Estabilidad y tipos de soluciones dS . . . . .	22
<b>4. Ansatz generalizado de matrices conmutantes</b>	<b>25</b>
4.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	28
4.2. Conservación de la carga de Noether y dinámica del campo $b$ . . . . .	32
<b>5. Vacíos dS generalizados no perturbativos</b>	<b>36</b>
5.1. Soluciones dS en el marco de Einstein y ejemplos . . . . .	37
5.2. Estabilidad de las soluciones dS . . . . .	39
<b>6. Sutilezas en el carácter no perturbativo de las soluciones dS</b>	<b>41</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Aspectos de la clasificación de teorías cosmológicas invariantes ante dualidad</b>	<b>49</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
<b>B. Ecuaciones de movimiento en el ansatz generalizado</b>	<b>53</b>
B.1. Ecuaciones de movimiento diagonalizadas . . . . .	56
<b>C. <math>h_i</math> constante y <math>\mathcal{Q} = 0</math></b>	<b>58</b>
<b>D. Sutilezas en el carácter no perturbativo de las soluciones dS generalizadas</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las observaciones astronómicas resultan compatibles con un universo espacialmente plano cuya expansión actualmente se está acelerando, en una fase que puede ser aproximada por una geometría de Sitter (dS). Por otro lado, la construcción de vacíos dS consistentes en 1+3 direcciones no compactas en teoría de cuerdas resulta ser extremadamente difícil [2]. Más aún, existe un teorema no-go según el cual no hay soluciones (macroscópicas)  $dS_n$  estables o inestables para  $n \geq 4$  a nivel árbol en las teorías de cuerdas heteróticas y de tipo II (en la ausencia de flujos RR) [3], y además se conjetura que no pueden existir vacíos dS estables o meta-estables en una teoría cuántica consistente de gravedad [4].

Entender las consecuencias cosmológicas que la teoría clásica de cuerdas induce en las ecuaciones de Einstein requiere del conocimiento de las infinitas correcciones en potencias de  $\alpha'$ , la inversa de la tensión de las cuerdas (es decir, de todos los términos de la expansión perturbativa, que incluyen un número arbitrario de derivadas de los campos). Pero hasta ahora, solo los órdenes más bajos se han computado explícitamente. Puesto que la expansión truncada puede no mostrar las propiedades de la teoría de cuerdas completa, se han construido modelos alternativos para la evolución del universo a partir de teorías invariantes ante dualidad que incluyen correcciones a todo orden en  $\alpha'$  relevantes para cosmología [5]-[8].

La motivación para la cosmología invariante ante dualidad se origina en la observación de Sen [9] de que la teoría efectiva de cuerdas a bajas energías en  $d + 1$  dimensiones posee una simetría ante  $O(d, d; \mathbb{R})$ , también denominada simetría ante dualidad, a todo orden en  $\alpha'$ , cuando los campos no dependen de las  $d$  coordenadas espaciales. Como se discutió en [10], la teoría reducida dimensionalmente se puede obtener a partir de una compactificación en un  $d$ -



toro  $T^d$ , ignorando las excitaciones de Kaluza-Klein (masivas) que surgen de configuraciones de los campos en las cuales hay una dependencia en las coordenadas compactificadas. En este caso, la simetría (continua) de dualidad ante  $O(d, d; \mathbb{R})$  emerge en la teoría efectiva de cuerdas a bajas energías a partir de la simetría ante T-dualidad, que es una simetría discreta ante  $O(d, d; \mathbb{Z})$  de la teoría de cuerdas compactificada en un  $d$ -toro [11].

Todos los términos consistentes con invarianza ante dualidad y con derivadas de orden arbitrario fueron clasificados en los papers fundamentales [5] para campos solo dependientes del tiempo. Usando multipletes de  $O(d, d; \mathbb{R})$  como campos de la teoría, y asumiendo que sus transformaciones ante dualidad no cambian a ningún orden en  $\alpha'$ , toda la expansión perturbativa pudo reescribirse en términos con una o múltiples trazas, que solo involucran derivadas primeras de los campos. Esta simplificación se logra a partir de realizar redefiniciones de campos covariantes ante dualidad orden a orden en  $\alpha'$ , y asumiendo que toda la dependencia en el dilatón sin derivar está contenida en el prefactor exponencial de la medida de integración. Implementando un ansatz con una métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker isotrópica y de dimensión  $d + 1$ , con campo de Kalb-Ramond nulo, Hohm y Zwiebach mostraron que la cosmología invariante ante dualidad admite soluciones dS no perturbativas en el marco de cuerdas [5]. Este tipo de soluciones también fueron obtenidas en presencia de fuentes de materia en [6], mientras que las condiciones para obtener un vacío dS en el marco de Einstein con dilatón no constante fueron deducidas en [7] en términos de una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para una función que describe al Lagrangiano, que resulta ser bastante no trivial.

Un modelo cosmológico más realista fue construido en [8], extendiendo el ansatz isotrópico de [5] a geometrías con dos factores de escala: uno dinámico en  $n < d$  dimensiones espaciales, y uno constante en las restantes  $d - n$  coordenadas espaciales. Inspirados por el escenario de cosmología de un gas de cuerdas [12], se mostró en [8] que las ecuaciones no perturbativas de la cosmología invariante ante dualidad son (en principio) compatibles con un mecanismo dinámico en el cual el universo emerge de una fase con geometría  $\mathbb{R} \times T^9$  del espacio-tiempo, con materia hecha de un gas de cuerdas, que evoluciona hacia cuatro dimensiones espacio-temporales grandes. En este escenario tres dimensiones espaciales se decompactifican (se agranda su tamaño, su radio), mientras que las restantes seis dimensiones espaciales internas se estabilizan alrededor de la longitud de la cuerda (no se decompactifican).

En la primera parte de este trabajo, reconsideramos el ansatz no isotrópico de [8] en el vacío y reobtenemos las ecuaciones de movimiento. Hallamos las siguientes condiciones para tener soluciones dS en el marco de cuerdas en  $n + 1 \leq d + 1$  dimensiones cuando la carga de Noether asociada a la simetría global  $O(d, d)$  se anula:

$$F'_n(H_0) = 0 \quad , \quad F_n(H_0) = c^2 \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c \quad , \quad (1.0.1)$$

donde  $F_n(H)$  describe al Lagrangiano de la teoría y está bien definido para valores no infinitesimales de  $\sqrt{\alpha'}H$ ,  $H = H_0 = \text{cte}$  es el parámetro de Hubble,  $\Phi$  es el dilatón generalizado, y  $c$  es una constante real. Las configuraciones descritas por  $(H_0, c)$  tienen dilatón constante si  $c = nH_0$  y son dS tanto en el marco de cuerdas como en el marco de Einstein. Las condiciones para obtener vacíos dS en el marco de Einstein, ahora son simples ecuaciones algebraicas porque el dilatón es constante. Estas soluciones son estables (inestables) si  $c > 0$  ( $c < 0$ ), y pueden ser fácilmente clasificadas en geometrías dS expansivas o contractivas. Las soluciones dS en el marco de cuerdas con  $c \neq 0$  son nuevas en la literatura, y en especial las soluciones dS que son dS en ambos marcos (es decir, que tienen dilatón constante, lo cual ocurre si  $c = nH_0$ ) son también nuevas.

Tanto el ansatz isotrópico como el no isotrópico considerado en [5]-[8] poseen la simplificación adicional de que los términos con múltiples trazas se pueden absorber en los términos con una sola traza porque dan la misma contribución estructural. De todos modos, para métricas más heterogéneas o un campo de Kalb-Ramond no nulo, los términos con múltiples trazas no pueden ser absorbidos, y deben ser considerados. Esta última situación es estudiada en la segunda parte del presente trabajo. Incluimos las correcciones de múltiples trazas en las ecuaciones de movimiento de la cosmología invariante ante  $O(d, d)$  y examinamos un ansatz generalizado en el cual la (parte espacial  $g_{ij}$  de la) métrica, su derivada temporal, y la derivada temporal del campo  $b_{ij}$  son matrices conmutantes. A pesar de que parece una suposición algo general, resulta que la simetría ante dualidad nos permite tomar a la métrica como diagonal, y tomar al campo  $b$  y su derivada temporal como matrices diagonales por bloques, sin pérdida de generalidad.

A pesar de que las correcciones de múltiples trazas no pueden ser absorbidas en correcciones de una sola traza, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento, que permiten soluciones dS no perturbativas isotrópicas y anisotrópicas en  $n \leq d$  dimensiones espaciales.

Estas soluciones pueden tener dilatón constante, siendo geometrías dS estables o inestables tanto en el marco de cuerdas como en el de Einstein. Los nuevos vacíos dS también se encuentran en el sector con carga de Noether de  $O(d, d)$  nula  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ , que resulta ser un sector rico en soluciones dS no perturbativas. Por otro lado, se halló un efecto interesante de la dinámica de campo  $b$ , que debe ser no trivial en dimensiones con autovalores no nulos de un bloque de la carga de Noether (luego en el sector con  $\mathcal{Q} \neq \mathbf{0}$ ), y los factores de escala de dichas dimensiones espaciales deben ser acotados, prohibiendo así soluciones dS.

Además de la equivalencia entre los marcos de cuerdas y de Einstein, las soluciones con dilatón constante  $\phi_0$  tienen la ventaja de que uno puede tomar  $g_s = e^{\phi_0} \ll 1$  para todo tiempo, pues es constante. Esto es consistente con las teorías clásicas de cuerdas, que son puntos particulares en el espacio de teorías invariantes ante dualidad.

Por otra parte, el Lagrangiano de la teoría efectiva de cuerdas a bajas energías es una expansión asintótica en potencias de  $\alpha'$ . Aun si todas las contribuciones perturbativas fueran conocidas, argumentaremos en el capítulo 6 que se necesita información no perturbativa para determinar si la teoría admite soluciones dS no perturbativas. En cualquier caso, especificar las condiciones que permiten dS y otras soluciones curiosas en teorías invariantes ante dualidad es un resultado interesante que revela características generales que pueden ser aplicadas a la teoría de cuerdas con todas las correcciones  $\alpha'$ .

El presente trabajo se organiza de la siguiente forma: En el capítulo 2, presentamos un breve resumen de los fundamentos de cosmología invariante ante dualidad (dejando algunos detalles para el apéndice A), y deducimos las ecuaciones de movimiento incluyendo correcciones con múltiples trazas (lo cual es nuevo en la literatura). Considerando un ansatz con un factor de escala dinámico en  $n \leq d$  dimensiones espaciales y uno constante en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales con campo  $b$  nulo, determinamos en el capítulo 3 las condiciones para obtener soluciones dS con dilatón constante (y no constante también). Además, analizamos la estabilidad de las soluciones y las clasificamos. En el capítulo 4 introducimos el ansatz generalizado de matrices conmutantes y calculamos las correspondientes ecuaciones de movimiento, donde los detalles del cálculo se encuentran en el apéndice B. Hallamos soluciones dS de las nuevas ecuaciones en el capítulo 5, con geometrías anisotrópicas o con campo  $b$  no nulo. Estas tienen  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ , que resulta ser un sector rico en soluciones dS, como se explica en el apéndice C. En el capítulo 6 y en el apéndice D se puede ver un resumen del

procedimiento para obtener soluciones dS no perturbativas y una discusión sobre su carácter no perturbativo. Finalmente, las conclusiones y posibles futuras direcciones están contenidas en el capítulo 7.

# Capítulo 2

## Cosmología invariante ante dualidad

En este capítulo repasamos brevemente la cosmología invariante ante  $O(d, d; \mathbb{R})$  a todo orden en  $\alpha'$  introducida por Hohm y Zwiebach [5], dejando algunos detalles para el apéndice A, y establecemos la notación. En 2.2 generalizamos la derivación de las ecuaciones de movimiento para incluir las contribuciones de las correcciones de múltiples trazas, que permiten la construcción de soluciones no isotrópicas y con campo  $b$  no nulo (que desarrollaremos en los próximos capítulos).

### 2.1. La acción y sus campos

El formalismo desarrollado en [5] se basa en la observación de Sen [9] de que la teoría efectiva a bajas energías del sector gravitatorio universal de la teoría de cuerdas en  $D = d + 1$  dimensiones posee una simetría  $O(d, d; \mathbb{R})$  global a todo orden en  $\alpha'$ , cuando los campos no dependen de las  $d$  coordenadas espaciales. Esta simetría, también denominada ‘dualidad’, contiene la dualidad del factor de escala  $a \leftrightarrow a^{-1}$  [13, 14]. Siguiendo [15] y usando argumentos de la teoría de campos de cuerdas [16], Hohm y Zwiebach asumieron que las transformaciones  $O(d, d; \mathbb{R})$  poseen la misma forma a todo orden en  $\alpha'$  si la teoría se expresa en términos del dilatón generalizado invariante ante dualidad  $\Phi$ ,

$$e^{-\Phi} = \sqrt{\det g_{ij}} e^{-2\phi}, \quad (2.1.1)$$

y la matriz covariante  $O(d, d; \mathbb{R})$   $\mathcal{S}$ , que debe verificar los vínculos  $\mathcal{S}^2 = 1$  y  $\mathcal{S}^t = \eta \mathcal{S} \eta$ , siendo  $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  la métrica invariante ante  $O(d, d)$ . Toda matriz  $\mathcal{S}$  que cumple estos vínculos se

puede escribir en términos de una matriz simétrica  $g$  y una antisimétrica  $b$  como

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} bg^{-1} & g - bg^{-1}b \\ g^{-1} & -g^{-1}b \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

donde  $g$  y  $b$  son las componentes espaciales  $g_{ij}$  y  $b_{ij}$  de la métrica del espacio-tiempo y el campo de Kalb-Ramond, respectivamente, que se toman como <sup>1</sup>:

$$g_{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} -n^2(t) & 0 \\ 0 & g_{ij}(t) \end{pmatrix} \text{ con } n(t) > 0 \text{ y } b_{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Más aún, asumiendo que toda la dependencia de la acción en el dilatón (no derivado) está contenida en el factor exponencial de la medida de integración, y realizando redefiniciones covariantes ante dualidad de los campos <sup>2</sup>, Hohm y Zwiebach mostraron que toda acción invariante ante  $O(d, d)$  y ante reparametrizaciones temporales que describe la dinámica de  $\mathcal{S}$  y  $\Phi$  puede llevarse a la forma:

$$I(\mathcal{S}, \Phi, n) = \int dt n e^{-\Phi} [-(\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})], \quad (2.1.4)$$

donde  $\Phi(t)$  y  $\mathcal{S}(t)$  son escalares ante reparametrizaciones temporales, mientras que  $n(t)$  es una densidad. Al aplicar una transformación  $h \in O(d, d; \mathbb{R}) \iff h\eta h^t = \eta$  con  $h = \text{cte}$ ,  $\mathcal{S}$  transforma como  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' = h\mathcal{S}h^{-1}$  preservando los vínculos, mientras que  $\Phi$  y  $n$  son invariantes.  $\mathcal{D} \equiv \frac{1}{n(t)} \frac{\partial}{\partial t}$  es la derivada temporal covariante, y siempre se puede elegir una parametrización temporal  $t_S$  tal que  $n(t_S) = 1$ .

La función  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})$  se define por la siguiente expansión asintótica.

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) \equiv -c_1 \text{tr} [(\mathcal{D}\mathcal{S})^2] - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha'^{k-1} \sum_{P \in \text{Part}(k, 2)} c_{k,P} \prod_{m \in P} \text{tr} [(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m}], \quad (2.1.5)$$

que contiene todas las correcciones  $\alpha'$ .  $\text{Part}(k, 2)$  es el conjunto de  $p(k, 2) = p(k) - p(k-1)$  particiones  $P$  del número  $k$  con números mayores o iguales a 2. Notar que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})$  contiene correcciones con una sola traza (que corresponden a particiones con un solo elemento), y correcciones con múltiples trazas (que corresponden a particiones con más de un elemento,  $|P| \geq 2$ ). Los coeficientes  $c_1, c_{k,P}$  son constantes reales adimensionales arbitrarias que

<sup>1</sup>Sin pérdida de generalidad para campos que solo dependen de la coordenada temporal (no periódica). Para entender porqué, ver la referencia al pie 1 en el apéndice A.

<sup>2</sup>Para más detalles sobre estas redefiniciones, ver el apéndice A. Y para entenderlo de forma explícita, ver la sección 2 de [5].

parametrizan y clasifican las teorías  $I(\mathcal{S}, \Phi, n)$  (bien definidas perturbativamente en  $\alpha'$ ) invariantes ante dualidad y reparametrizaciones temporales. En particular, los valores  $c_1 = -\frac{1}{8}$  y  $c_{2,\{2\}} = \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$  ó 0 se corresponden a la acción efectiva de bajas energías reducida dimensionalmente de las teorías de cuerdas bosónica, heterótica y tipo II, respectivamente, y los coeficientes  $c_{k,P}$  de mayor orden son solo parcialmente conocidos en teoría de cuerdas.

Dado que  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  solo depende de trazas de potencias pares de  $\mathcal{DS}$ , es fácil chequear que es un escalar (ante reparametrizaciones temporales) invariante ante transformaciones globales de dualidad, y ante inversión temporal  $t \rightarrow -t$ . Por lo tanto, toda la acción  $I(\mathcal{S}, \phi, n)$  es invariante ante  $O(d, d; \mathbb{R})$ , ante reparametrizaciones temporales y (a menos de un signo) también ante inversión temporal. Luego, las ecuaciones de movimiento también deberían verificar estas simetrías.

Es conveniente definir una función escalar adimensional  $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{X}}) \equiv \alpha' \mathcal{F}(\mathcal{DS})$  que solo dependa de la variable matricial adimensional  $\tilde{\mathcal{X}} \equiv \sqrt{\alpha'} \mathcal{DS}$ , y verifica  $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{X}}) = \tilde{\mathcal{F}}(-\tilde{\mathcal{X}})$ . Luego, la teoría clásica descrita por la acción  $I(\mathcal{S}, \Phi, n)$  puede ser estudiada perturbativamente, orden a orden en  $\alpha'$  (asumiendo valores infinitesimales de  $\tilde{\mathcal{X}}^2$ ), o no perturbativamente.

Finalmente, notar que es posible añadir un término de constante cosmológica  $2\Lambda_S = \mathcal{O}(\alpha'^{-1})$  en la definición de  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  al considerar la teoría de forma no perturbativa. Esto se corresponde a añadir una constante  $c_0 \equiv 2\alpha' \Lambda_S = \mathcal{O}(\alpha'^0)$  adimensional a  $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{X}})$ . Por ejemplo,  $2\Lambda_S = \frac{2(D - D_c)}{3\alpha'}$  en la acción efectiva de bajas energías de una teoría de cuerdas en una dimensión no crítica  $D \neq D_c$ .

## 2.2. Ecuaciones de movimiento con correcciones de múltiples trazas

En esta sección deducimos las ecuaciones de movimiento que se obtienen de extremar la acción (2.1.4). Generalizamos los resultados obtenidos en [5] para incluir las correcciones de múltiples trazas, que son necesarias para considerar soluciones con campo  $b$  no nulo o métricas genéricas anisotrópicas.

Variando la acción  $I(\Phi, \mathcal{S}, n)$  con respecto a  $\Phi, \mathcal{S}$  y  $n$ ,

$$\delta_{\Phi, \mathcal{S}, n} I = \int dt n e^{-\Phi} \left( \delta\Phi E_\Phi + \text{tr}(\delta\mathcal{S} F_\mathcal{S}) + \frac{\delta n}{n} E_n \right), \quad (2.2.1)$$

se definen  $E_\Phi$ ,  $F_S$  y  $E_n$ , que son escalares ante reparametrizaciones temporales. Por un lado,  $E_\Phi = 0$  y  $E_n = 0$  son las ecuaciones de movimiento para  $\Phi$  y  $n$ , respectivamente. Por otro lado,  $F_S = 0$  no es la ecuación de movimiento para  $\mathcal{S}$  porque la variación  $\delta\mathcal{S}$  debe verificar las condiciones  $\delta\mathcal{S} = -\mathcal{S}\delta\mathcal{S}$  y  $\delta\mathcal{S}^t = \eta\delta\mathcal{S}\eta$  para preservar los vínculos  $\mathcal{S}^2 = \mathbf{1}$  y  $\mathcal{S}^t = \eta\mathcal{S}\eta$ , respectivamente.

Para imponer los vínculos en  $\mathcal{S}$  y  $\delta\mathcal{S}$ , definimos los proyectores

$$P_0(A) \equiv \frac{1}{2}(A - \mathcal{S}A\mathcal{S}) \text{ sobre el subespacio de matrices que verifican } A = -\mathcal{S}A\mathcal{S},$$

$$P_\pm(A) \equiv \frac{1}{2}(A \pm \eta A^t \eta) \text{ sobre el subespacio de matrices que verifican } A = \pm \eta A^t \eta,$$

$$P_T \equiv P_+ \circ P_0 = P_0 \circ P_+ \text{ sobre el subespacio de matrices que verifican } A = -\mathcal{S}A\mathcal{S} \text{ y } A = \eta A^t \eta.$$

Todos estos operadores lineales  $P$  son efectivamente proyectores ( $P^2 = P$ ) y también verifican la propiedad

$$\text{tr}[P(A)B] = \text{tr}[AP(B)] = \text{tr}[P(A)P(B)], \quad (2.2.2)$$

para toda matriz  $A, B \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ . Más aún, considerando una variación local  $\delta X_P = P(\delta X)$  que para verificar un cierto vínculo, debe pertenecer a la imagen de un cierto proyector lineal  $P$  (que asumimos que verifica la propiedad (2.2.2)), las condiciones impuestas sobre la matriz  $A$  satisfacen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \int dt n \text{tr}(\delta X_P A) = 0 \quad \forall \delta X_P(t) = P(\delta X) \in \text{Im}(P) \text{ restricto} \\ \iff \int dt n \text{tr}[\delta X P(A)] = 0 \quad \forall \delta X(t) \text{ irrestricto} \iff P(A) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Luego, la única información relevante en  $A$  para una variación restricta (a pertenecer a  $\text{Im}(P)$ ) es su proyección  $P(A)$ <sup>3</sup>.

En particular, considerando  $\delta X$  irrestricto, podemos imponer ambos vínculos en  $\delta\mathcal{S}$  tomando:

$$\delta\mathcal{S} = P_T(\delta X) = \frac{1}{4}(\delta X + \eta\delta X^t\eta - \mathcal{S}\delta X\mathcal{S} - \mathcal{S}\eta\delta X^t\eta\mathcal{S}). \quad (2.2.5)$$

<sup>3</sup>Tomando  $A = A_1 - A_2$  en (2.2.3) y usando que  $P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_2)$ , se puede mostrar que

$$\int dt n \text{tr}(\delta X_P A_1) = \int dt n \text{tr}(\delta X_P A_2) \quad \forall \delta X_P(t) \in \text{Im}(P) \text{ restricto} \iff P(A_1) = P(A_2) \quad (2.2.4)$$



Entonces, de acuerdo a (2.2.3), la ecuación de movimiento para variaciones restringidas de  $\mathcal{S}$  es

$$E_{\mathcal{S}} = P_T(F_{\mathcal{S}}) = 0, \quad (2.2.6)$$

y usando (2.2.2), se tiene que  $\text{tr}(\delta\mathcal{S}F_{\mathcal{S}}) = \text{tr}(\delta X E_{\mathcal{S}}) = \text{tr}(\delta\mathcal{S}E_{\mathcal{S}})$ . Esto es consistente con la definición  $E_{\mathcal{S}} = P_0(F_{\mathcal{S}})$  usada en [5], porque se verifica que  $\eta E_{\mathcal{S}}^t \eta = E_{\mathcal{S}}$ .

Más aún, notando que la imagen de  $P_-$  es el álgebra de Lie

$$\mathfrak{so}(d, d) = \{\tau \in \mathbb{R}^{2d \times 2d} : \tau\eta + \eta\tau^t = 0\}, \quad (2.2.7)$$

la variación  $\delta\mathcal{S}$  en (2.2.5) puede ser escrita como

$$\delta\mathcal{S} = [\tau, \mathcal{S}], \quad (2.2.8)$$

con  $\tau \equiv P_-(\delta X \mathcal{S}/2) \in \mathfrak{so}(d, d)$ . Por lo tanto, vemos que toda variación  $\delta\mathcal{S}$  que preserva los vínculos puede ser escrita como una transformación local infinitesimal de  $O(d, d; \mathbb{R})$  como (2.2.8). Por el contrario, toda transformación local infinitesimal de dualidad de la forma  $\delta_{\tau}\mathcal{S} = [\tau, \mathcal{S}]$  preserva los vínculos. En efecto,  $\delta\mathcal{S} = -\mathcal{S}\delta\mathcal{S}\mathcal{S}$  se verifica por (2.2.8) y  $\delta\mathcal{S} = \eta\delta\mathcal{S}^t\eta$  dado que  $\tau \in \mathfrak{so}(d, d)$ . En particular, para  $\tau$  cte,  $O(d, d; \mathbb{R})$  es una simetría global de la teoría y hay una carga asociada de Noether conservada  $\mathcal{Q}$ .

La relación explícita entre  $\mathcal{Q}$  y la ecuación de movimiento de  $\mathcal{S}$  se deduce observando que

$$\delta I = \int dt n e^{-\Phi} \text{tr}(\delta\mathcal{S}F_{\mathcal{S}}) = \int dt n e^{-\Phi} \text{tr}[\tau 2\mathcal{S}P_0(F_{\mathcal{S}})], \quad (2.2.9)$$

por la ecuación (2.2.8). Luego, imponiendo  $\tau \in \mathfrak{so}(d, d)$ , se puede proyectar  $P_-(\mathcal{S}P_0(F_{\mathcal{S}})) = \mathcal{S}P_+(P_0(F_{\mathcal{S}})) = \mathcal{S}E_{\mathcal{S}}$ . Además, recordando el truco usual para computar la carga de Noether

$$\delta_{\tau}I = \int dt n \text{tr}[(\mathcal{D}\tau)\mathcal{Q}] = - \int dt n \text{tr}(\tau\mathcal{D}\mathcal{Q}),$$

se puede tomar  $\mathcal{Q}, \mathcal{D}\mathcal{Q} \in \mathfrak{so}(d, d)$  puesto que  $\tau, \mathcal{D}\tau \in \mathfrak{so}(d, d)$ , y usar (2.2.4) en la referencia al pie 3 para hallar la relación

$$\mathcal{D}\mathcal{Q} = -2e^{-\Phi}\mathcal{S}E_{\mathcal{S}}. \quad (2.2.10)$$

Entonces la ecuación de movimiento para  $\mathcal{S}$  resulta ser equivalente a la conservación de la carga de Noether  $\mathcal{Q}$ . Esto generaliza el resultado hallado en [5] para funciones  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})$  que

solo contienen correcciones de una traza, a funciones genéricas que involucran correcciones de múltiples trazas.

Para hallar la expresión precisa de  $\mathcal{Q}$ , es conveniente definir  $J$  como

$$\delta_\tau I = \int dt n \operatorname{tr} [\mathcal{D}(\delta_\tau \mathcal{S}) J] = \int dt n \operatorname{tr} ((\mathcal{D}\tau)[\mathcal{S}, J]) , \quad (2.2.11)$$

donde usamos (2.2.8) y asumimos que  $J$  es una combinación lineal de potencias impares de  $\mathcal{D}\mathcal{S}$  (mostraremos debajo que se verifica esto) de forma que  $[\mathcal{D}\mathcal{S}, J] = 0$ . Por lo tanto, usando (2.2.4) y  $[\mathcal{S}, (\mathcal{D}\mathcal{S})^{2k-1}] = 2\mathcal{S}(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2k-1} \in \mathfrak{so}(d, d)$ , lo cual se deduce de los vínculos de  $\mathcal{S}$ , podemos identificar

$$\mathcal{Q} = P_-([\mathcal{S}, J]) = P_-(2\mathcal{S}J) = 2\mathcal{S}J \in \mathfrak{so}(d, d) . \quad (2.2.12)$$

Variando la forma explícita de la acción, obtenemos

$$\delta_\tau I = - \int dt n e^{-\Phi} \delta_\tau [\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})] = - \int dt n e^{-\Phi} \operatorname{tr} [\delta_\tau(\mathcal{D}\mathcal{S}) \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] , \quad (2.2.13)$$

donde definimos la derivada  $\mathcal{F}'(A)$  de una función escalar  $\mathcal{F}(A)$  con respecto a la matriz  $A$ , como una matriz tal que  $\delta[\mathcal{F}(A)] = \operatorname{tr} [\delta A \mathcal{F}'(A)]$  [17], y luego

$$J = -e^{-\Phi} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) \implies \mathcal{Q} = -2 e^{-\Phi} \mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) . \quad (2.2.14)$$

Vemos que  $J$  es de hecho una combinación lineal de potencias impares  $(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2k-1}$ , a partir de derivar explícitamente la expansión asintótica (2.1.5):

$$\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = -2c_1 \mathcal{D}\mathcal{S} - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^{k-1} \sum_{P \in \operatorname{Part}(k,2)} c_{k,P} \sum_{m_0 \in P} 2m_0 (\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m_0-1} \prod_{m \in P - \{m_0\}} \operatorname{tr} [(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m}] , \quad (2.2.15)$$

donde usamos  $\frac{\partial \{\operatorname{tr} [g(X)]\}}{\partial X} = g'(X)$  para  $g(X)$  polinomio, ya que  $\delta[\operatorname{tr}(X^n)] = \operatorname{tr} [\delta X nX^{n-1}]$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  [17]. Entonces, confirmamos que  $\mathcal{Q}$  es una combinación lineal de términos como  $\mathcal{S}(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m_0-1} \in \mathfrak{so}(d, d)$ , y en consecuencia  $\mathcal{Q} \in \mathfrak{so}(d, d)$ .

Nos concentramos en las ecuaciones de movimiento para  $\Phi$  y  $n$ . La primera es trivial

$$E_\Phi = 2\mathcal{D}^2\Phi - (\mathcal{D}\Phi)^2 + \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) = 0 . \quad (2.2.16)$$

Para calcular  $E_n$ , consideramos

$$\delta_n [\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})] = \operatorname{tr} [\delta_n(\mathcal{D}\mathcal{S}) \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] = -\frac{\delta n}{n} \operatorname{tr} [\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] \quad (2.2.17)$$

y

$$\delta_n [(\mathcal{D}\Phi)^2] = -2\frac{\delta n}{n} (\mathcal{D}\Phi)^2, \quad (2.2.18)$$

de lo cual se deduce

$$\delta_n I = \int dt n e^{-\Phi} \frac{\delta n}{n} \{(\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) + \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})]\}, \quad (2.2.19)$$

de donde podemos identificar  $E_n$ .

Resumiendo, las ecuaciones de movimiento incluyendo las correcciones de múltiples trazas son

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) + \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] = 0 \quad (2.2.20a)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] = 0 \quad (2.2.20b)$$

$$E_S = -\frac{1}{2}e^\Phi \mathcal{S} \mathcal{D}\mathcal{Q} = \mathbf{0} \iff \mathcal{D}\mathcal{Q} = \mathbf{0} \iff \mathcal{Q} = \text{cte} \in \mathfrak{so}(d, d) \quad (2.2.20c)$$

Nótese que la primera es un vínculo entre  $\mathcal{D}\Phi$  y  $\mathcal{D}\mathcal{S}$ , mientras que las otras dos determinan la dinámica de  $\Phi$  y  $\mathcal{S}$ , puesto que contienen segundas derivadas. Todas las ecuaciones son invariantes ante  $O(d, d; \mathbb{R})$  y ante reparametrizaciones temporales. También son invariantes ante inversión temporal  $t \rightarrow -t$  como era esperado, ya que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S})$  solo contiene potencias pares de  $\mathcal{D}\mathcal{S}$ . En otras palabras, para una cierta solución  $\mathcal{S}(t), \Phi(t), n(t)$ , hay también una solución invertida temporalmente  $\tilde{\mathcal{S}}(t) \equiv \mathcal{S}(-t), \tilde{\Phi}(t) \equiv \Phi(-t), \tilde{n}(t) \equiv n(-t)$ .

Además, al aplicar una reparametrización temporal infinitesimal  $t \rightarrow t' = t - \lambda(t)$  (usando que  $\Phi, \mathcal{S}$  transforman como escalares, y  $n$  transforma como una densidad)

$$\delta_\lambda \Phi = \lambda \dot{\Phi} = \lambda n \mathcal{D}\Phi \quad , \quad \delta_\lambda \mathcal{S} = \lambda \dot{\mathcal{S}} = \lambda n \mathcal{D}\mathcal{S} \quad , \quad \frac{\delta_\lambda n}{n} = \frac{1}{n} \partial_t(\lambda n) = \mathcal{D}(\lambda n) \quad , \quad (2.2.21)$$

la variación 2.2.1 debe ser nula debido a la invarianza de la acción ante reparametrizaciones temporales, luego (integrando por partes el último término):

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\lambda I_0 = \int dt n e^{-\Phi} (\lambda n (\mathcal{D}\Phi) E_\Phi + \lambda n \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S}) E_S) + \mathcal{D}(\lambda n) E_n) \\ &= \int dt n e^{-\Phi} n \lambda ((\mathcal{D}\Phi) E_\Phi + \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S}) E_S) - e^\Phi \mathcal{D}(e^{-\Phi} E_n)) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Y como es válido para  $\lambda(t)$  arbitrario (infinitesimal), el integrando se anula, y obtenemos la identidad de Bianchi:

$$\mathcal{D}E_n = (\mathcal{D}\Phi)(E_\Phi + E_n) + \text{tr}[(\mathcal{D}\mathcal{S}) E_S] \quad (2.2.23)$$

Luego, si  $\mathcal{D}\Phi \neq 0$  para (casi) todos los tiempos, solo es necesario resolver las ecuaciones

$$E_n = 0 \quad , \quad E_S = \mathbf{0} \iff \mathcal{Q} = \text{cte} \quad , \quad (2.2.24)$$

dado que implican (junto con la identidad de Bianchi) que  $E_\Phi + E_n = 0$ .

Además, siempre es suficiente resolver

$$E_\Phi + E_n = 0 \quad , \quad E_S = \mathbf{0} \iff \mathcal{Q} = \text{constante} \quad , \quad E_n(t_0) = 0 \quad , \quad (2.2.25)$$

donde  $E_n(t_0)$  está evaluado en un cierto tiempo inicial  $t_0$ , ya que implican  $E_n(t) = 0$  para todo tiempo  $t$ .

Para resolver las ecuaciones perturbativamente, se debe reemplazar  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  y  $\mathcal{F}'(\mathcal{DS})$  por sus expansiones asintóticas hasta un cierto orden. Más precisamente, se deben resolver las ecuaciones hasta dos derivadas, y luego corregirlas perturbativamente. Por otra parte, para hallar soluciones no perturbativas, se debe considerar a  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  como una función escalar genérica de  $\mathcal{DS}$ , o más precisamente considerar  $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{X}})$  como una función escalar genérica adimensional de la matriz adimensional  $\tilde{\mathcal{X}}^2$ , que puede tomar valores no infinitesimales.

Nótese que añadir una constante cosmológica  $2\Lambda_S$ , resulta en añadir una constante a  $\mathcal{F}(\mathcal{DS}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{DS}) + 2\Lambda_S$ , sin modificar  $\mathcal{F}'(\mathcal{DS})$ . Consecuentemente, el único cambio en (2.2.25) es la condición inicial, que pasa a ser  $E_n(t_0) - 2\Lambda_S = 0$ .

En los siguientes capítulos, buscaremos soluciones dS de estas ecuaciones, es decir soluciones con una métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker con curvatura  $k = 0$  y factor de escala  $a(t) = e^{H_0 t}$ , con un parámetro de Hubble  $H_0$  cte.

## Capítulo 3

# Soluciones dS no perturbativas en

$$n + 1 \leq d + 1 \text{ y } b = 0$$

Tomando  $b = 0$  y la métrica espacial como  $g_{ij} = a(t)^2 \delta_{ij}$ , se mostró en [5] que las ecuaciones de movimiento (2.2.20) se reducen a las ecuaciones (de cuerdas) de Friedmann (halladas por ejemplo en [18]) corregidas con derivadas de mayor orden. Estas ecuaciones pueden ser integradas perturbativamente a todo orden arbitrario en  $\alpha'$ , y además se argumentó que pueden admitir soluciones dS en el marco de cuerdas que son no perturbativas en  $\alpha'$ . Una condición necesaria para tener soluciones dS de  $d + 1$  dimensiones en el marco de Einstein con dilatón no constante fue hallada en [7], que tiene la forma de una ecuación diferencial ordinaria (ODE) no lineal de segundo orden para la función que describe las correcciones  $\alpha'$ . Adicionalmente, soluciones dS isotrópicas de dimensión  $d + 1$  también fueron discutidas incluyendo fuentes de materia covariantes ante dualidad en [6].

En este capítulo consideramos la extensión más simple posible del ansatz isotrópico, que es una métrica con un solo factor de escala dinámico  $a(t)$  en  $n < d$  dimensiones espaciales isotrópicas<sup>1</sup> y otro factor de escala constante  $a_0$  en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales isotrópicas, es decir

$$b = 0 \quad , \quad a_i = \begin{cases} a(t) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ a_0 = \text{cte} & \text{si } n + 1 \leq i \leq d \end{cases} \quad (3.0.1)$$

---

<sup>1</sup>Debe ser claro a partir del contexto cuando  $n$  se refiere al número de dimensiones espaciales con factor de escala dinámico, o a la componente  $g_{00} = -n^2(t)$  de la métrica.

Este ansatz fue analizado en [8] en presencia de materia.

Si se consideran factores de escala constantes  $a_{j,0}$  y posiblemente diferentes para cada una de las  $d - n$  dimensiones espaciales  $x^j$ , se puede aplicar una transformación global  $O(d, d; \mathbb{R})$  que corresponde a una reparametrización  $x^j \rightarrow x'^j = \frac{a_0}{a_{j,0}} x^j$  [9, 10], que resulta en reemplazar todos los factores de escala constantes distintos  $a_{j,0}$  por uno solo, obteniendo (3.0.1) (el campo  $b$  no se afecta porque  $b = \mathbf{0}$ ). El intervalo  $ds^2 = -n^2(t)dt^2 + \sum_{i=1}^n a^2(t)dx^i dx^i + \sum_{j=n+1}^d a_0^2 dx^j dx^j$  ciertamente podría describir nuestro universo de dimensión 4 si  $n = 3$ . En principio, cualquier rotación que mezcle las  $n$  dimensiones espaciales con factor de escala dinámico con las restantes  $d - n$  no es una simetría de la teoría.

Como fue observado en [8], en este caso no es necesario incluir las correcciones de múltiples trazas en (2.1.5). La función  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  resulta ser una función  $F_n(H)$  (dependiente de  $n$ ) que depende solo del único parámetro de Hubble dinámico  $H = \mathcal{D} \ln(a) = \frac{\mathcal{D}a}{a}$  como en [5].

### 3.1. Métrica no isotrópica y campo $b$ nulo

Con una métrica diagonal  $g_{ij} = a_i^2(t)\delta_{ij}$  con diferentes factores de escala  $a_i(t)$  para cada dirección espacial  $x^i$  y  $b = \mathbf{0}$ , la matriz  $\mathcal{S}$  toma la forma

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ g^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(a_i^2) \\ \text{diag}(a_i^{-2}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

y su derivada covariante temporal es

$$\mathcal{DS} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(H_i a_i^2) \\ \text{diag}(-H_i a_i^{-2}) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (\mathcal{DS})^2 = -4 \begin{pmatrix} \text{diag}(H_i^2) & 0 \\ 0 & \text{diag}(H_i^2) \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

$H_i \equiv \mathcal{D} \ln(a_i)$  es el parámetro de Hubble asociado a  $x^i$ . Eligiendo la parametrización temporal  $t_S$  tal que  $n(t_S) = 1$ , podemos expresar  $H_i = \partial_{t_S} \ln(a_i)$ .

En el ansatz más simple (3.0.1) con  $g = \text{diag}_n(a^2(t), a_0^2) \equiv \text{diag}(\underbrace{a^2(t), \dots, a^2(t)}_n, \underbrace{a_0^2, \dots, a_0^2}_{d-n})$ , se simplifica la matriz  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}_n(a^2(t), a_0^2) \\ \text{diag}_n(a^{-2}(t), a_0^{-2}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Su derivada temporal covariante es

$$\mathcal{DS} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}_n(Ha^2(t), 0) \\ \text{diag}_n(-Ha^{-2}(t), 0) & 0 \end{pmatrix} \equiv 2H\mathcal{J}_n, \quad (3.1.4)$$

donde  $H \equiv \mathcal{D}(\ln(a(t)))$  es el único parámetro de Hubble no trivial, y

$$(\mathcal{DS})^2 = -4H^2 \begin{pmatrix} \text{diag}_n(1, 0) & 0 \\ 0 & \text{diag}_n(1, 0) \end{pmatrix} \equiv -4H^2\mathcal{I}_n \quad (3.1.5)$$

puesto que  $\mathcal{J}_n^2 = -\mathcal{I}_n$ . Luego, se espera que  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  se pueda expresar como una función de una variable  $F_n(H)$  y que las correcciones de múltiples trazas puedan ser absorbidas en correcciones de una traza.

Para probar esto, calculamos  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  considerando que  $\mathcal{I}_n$  es idempotente ( $\mathcal{I}_n^2 = \mathcal{I}_n \implies \mathcal{I}_n^m = \mathcal{I}_n$ ). Entonces  $(\mathcal{DS})^{2m} = (-1)^m 2^{2m} H^{2m} \mathcal{I}_n$  y  $\text{tr}[(\mathcal{DS})^{2m}] = (-1)^m 2^{2m} H^{2m} 2n$ , de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{DS}) &= 8nc_1H^2 - 2n \sum_{k=2}^{\infty} \alpha'^{k-1} (-1)^k 2^{2k} H^{2k} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} (2n)^{|P|-1} c_{k,P} \\ &= 2n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'^{k-1} (-1)^{k-1} 2^{2k} H^{2k} c_k^{(n)} \equiv F_n(H), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

donde se absorbieron los coeficientes  $c_{k,P}$  para  $P \in \text{Part}(k, 2)$  en un coeficiente (dependiente de  $n$ )  $c_k^{(n)} \equiv \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} (2n)^{|P|-1} c_{k,P}$  para cada  $k \geq 2$ , y  $c_1^{(n)} \equiv c_1$ . Esto se relaciona con la forma en la que las correcciones de múltiples trazas se absorben como correcciones de una traza en [5]<sup>2</sup>. En efecto, expresamos explícitamente  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  como una función de una variable  $F_n(H)$  del único parámetro de Hubble no trivial. Evaluando en  $n = d$ , recuperamos la función  $F(H)$  definida en [5] (con coeficientes  $c_k = c_k^{(d)}$ ).

<sup>2</sup>Más generalmente, las correcciones de múltiples trazas pueden ser absorbidas como correcciones de una traza si  $\prod_{m \in P} \text{tr}[(\mathcal{DS})^{2m}] = d_P \text{tr}[(\mathcal{DS})^{2k}]$  para toda  $P \in \text{Part}(k, 2)$ , con  $d_P$  una constante que puede depender de  $P$ . Este siempre es el caso si  $(\mathcal{DS})^2$  es proporcional a una matriz idempotente (con autovalores 0 y 1), cuya traza debe ser un entero no negativo constante.

También va a ser útil calcular

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(\mathcal{DS}) &= -2c_1 \mathcal{DS} - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha'^{k-1} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} c_{k,P} \sum_{m_0 \in P} (2m_0) (\mathcal{DS})^{2m_0-1} \prod_{m \in P - \{m_0\}} \text{tr}((\mathcal{DS})^{2m}) \\
 &= \mathcal{DS} \left[ -2c_1 \mathbf{1} - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha'^{k-1} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} c_{k,P} \sum_{m_0 \in P} (2m_0) (\mathcal{DS})^{2(m_0-1)} \prod_{m \in P - \{m_0\}} \text{tr}((\mathcal{DS})^{2m}) \right].
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Usando que  $(\mathcal{DS})^{2m} = (-4)^m H^{2m} \mathcal{I}_n$  y  $\text{tr}[(\mathcal{DS})^{2m}] = 2n (-4)^m H^{2m}$ , se puede ver que la matriz entre corchetes de (3.1.7) es diagonal, con componentes iguales a  $-2c_1$  en los elementos que corresponden a los ceros de  $\mathcal{I}_n$ . Además, un cálculo sencillo muestra que las componentes diagonales restantes que corresponden a los elementos 1 de  $\mathcal{I}_n$  son iguales a  $-\frac{F'_n(H)}{8nH}$ . Entonces, podemos expresar

$$\mathcal{F}'(\mathcal{DS}) = -\frac{1}{4n} F'_n(H) \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}_n(a^2, 0) \\ \text{diag}_n(-a^{-2}, 0) & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4n} F'_n(H) \mathcal{J}_n. \tag{3.1.8}$$

Ahora se pueden calcular las ecuaciones de movimiento, considerando que

$$\text{tr}[\mathcal{DS} \mathcal{F}'(\mathcal{DS})] = -\frac{2H}{4n} F'_n(H) \text{tr}(\mathcal{J}_n^2) = \frac{H}{2n} F'_n(H) \text{tr}(\mathcal{I}_n) = HF'_n(H) \tag{3.1.9}$$

y

$$\mathcal{Q} = -2e^{-\Phi} \mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{DS}) = \frac{1}{2n} e^{-\Phi} F'_n(H) \begin{pmatrix} \text{diag}_n(-1, 0) & 0 \\ 0 & \text{diag}_n(1, 0) \end{pmatrix}. \tag{3.1.10}$$

Luego  $\mathcal{Q} = \text{cte} \in \mathfrak{so}(d, d) \iff q \equiv e^{-\Phi} F'_n(H) = \text{cte}$ . Por lo tanto, en el ansatz (3.1.3) las ecuaciones de movimiento (2.2.20) toman la forma

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - F_n(H) + HF'_n(H) = 0 \tag{3.1.11a}$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + HF'_n(H) = 0 \tag{3.1.11b}$$

$$q \equiv e^{-\Phi} F'_n(H) = \text{cte} \iff \mathcal{D}(e^{-\Phi} F'_n(H)) = 0 \tag{3.1.11c}$$

Estas son precisamente las ecuaciones de Friedmann con sus correcciones  $\alpha'$  halladas en [5] para el ansatz isótropico  $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ , con la única diferencia de que la función  $F_n(H)$  reemplaza a  $F(H)$ . Entonces las soluciones perturbativas con  $n = d$  halladas en [5] también



resuelven las ecuaciones de movimiento con  $n \neq d$ , simplemente reemplazando  $d \rightarrow n$  en todos lados (incluyendo los coeficientes  $c_k^{(n)}$ , es decir  $c_k = c_k^{(d)} \rightarrow c_k^{(n)}$ ). En particular, es fácil ver que no hay soluciones dS perturbativas.

Para discutir las soluciones no perturbativas, es conveniente separar en los casos  $q \neq 0$  y  $q = 0$ . Dado que  $q = \text{cte}$ , estos dos casos obviamente no se solapan y cubren todas las posibilidades.

Las soluciones para el caso  $q \neq 0$  si  $n \neq d$  son aquellas con  $n = d$  halladas en la sección 5.1 de [5], reemplazando  $F(H)$  por  $F_n(H)$ , o equivalentemente reemplazando  $d \rightarrow n$  en todos lados. En particular, hay una solución de Minkowski no muy interesante con  $H = 0 = \text{cte}$ , pero no hay cosmologías dS en el marco de cuerdas.

Por otro lado, el caso más interesante  $q = 0$  que exploraremos a continuación, resulta contener varias soluciones dS no perturbativas.

## 3.2. Soluciones dS en el marco de cuerdas

Si  $q = 0$ , la ecuación  $e^{-\Phi} F'_n(H) = q$  necesariamente implica que

$$F'_n(H) = 0 \text{ para todos los tiempos} \implies H = H_0 = \text{cte} \quad (3.2.1)$$

es decir,  $H(t)$  es una constante  $H_0$  que es un cero de  $F'_n(H)$ . Si  $H(t)$  no fuera una constante, la ecuación  $F'_n(H(t)) = 0$  sería válida en un entorno abierto de un cierto  $H(t_0) = H_0$ . En este caso,  $F'_n(H)$  debe ser la función nula  $F'_n(H) = 0$  para todo  $H$ , lo cual es absurdo dado que estamos considerando que la expansión asintótica de  $F'_n$  es no trivial.

El hecho de que  $F'_n(H) = 0$  implica que la conservación de  $q = e^{-\Phi} F'_n(H) = 0$  es trivial para cualquier función  $\Phi(t)$ . Luego, no hay más información que pueda ser obtenida de la ecuación  $E_S = 0$ , pero sí podemos explotar las restantes ecuaciones de movimiento

$$0 = E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + HF'_n(H) = 2\mathcal{D}^2\Phi \implies \mathcal{D}^2\Phi = 0 \iff \mathcal{D}\Phi = -c = \text{constante} \in \mathbb{R}, \quad (3.2.2)$$

donde usamos  $F'_n(H) = 0$  y definimos la constante real  $c$  (con  $\text{signo}(c) = -\text{signo}(\mathcal{D}\Phi) = \pm$ ),  
y

$$0 = E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - F_n(H) + HF'_n(H) = c^2 - F_n(H) \implies F_n(H) = c^2 = \text{cte} \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Concluimos que las soluciones con  $q = 0$  son aquellas con  $H = H_0 = \text{constante}$  tales que

$$F'_n(H_0) = 0 \quad , \quad F_n(H_0) = c^2 \geq 0 \quad , \quad \mathcal{D}\Phi = -c \quad , \quad (3.2.4)$$

para alguna constante  $c$  que puede tomar cualquier valor real.

Dado que  $H = H_0 = \text{cte}$ , estas son todas soluciones dS en el marco de cuerdas. Son no perturbativas porque hay correcciones  $\alpha'$  no triviales que deben mezclarse entre ellas para asegurar que  $F'_n(H_0) = 0$  y  $F_n(H_0) = c^2 \geq 0$ . Están descritas por las constantes dimensionales  $(H_0, c)$  que pueden ser medidas (no perturbativamente) en unidades de  $1/\sqrt{\alpha'}$ .

Notar que la inversión temporal de una de estas soluciones  $(H_0, c)$  es una nueva solución dS con  $(-H_0, -c)$ , que verifica trivialmente (3.2.4) puesto que  $F_n(-H_0) = F_n(H_0)$  y  $F'_n(-H_0) = -F'_n(H_0)$ . Además, invirtiendo el factor de escala  $a(t) \leftrightarrow a(t)^{-1}$  de una solución dS  $(H_0, c)$ , lo cual es una simetría incluida en  $O(d, d)$ , se obtiene otra solución dS descrita por  $(-H_0, c)$ . Entonces, de alguna de estas soluciones dS, siempre es posible construir otra que sea expansiva en el marco de cuerdas, eligiendo  $H_0 > 0$ , y que también verifique  $c > 0$  por ejemplo (considerando  $H_0, c \neq 0$ ).

Estas soluciones dS con  $q = 0$  y  $c \neq 0$  son nuevas en la literatura. Un análisis detallado de este caso se presenta en las siguientes secciones, donde se describirá un interesante zoológico de geometrías dS estables e inestables que pueden llegar a ser dS también en el marco de Einstein.

### 3.3. Soluciones dS en el marco de Einstein

En el caso  $q = 0$ , se obtuvieron soluciones dS no perturbativas con  $H = \text{cte} \neq 0$  y  $\mathcal{D}\Phi = 0$  en [5] para el ansatz isotrópico (o sea  $n = d$ ). Estas son métricas dS en el marco de cuerdas, que pueden ser trivialmente generalizadas al caso  $n < d$  reemplazando  $F(H)$  por  $F_n(H)$ . De todos modos, en el marco de Einstein se corresponden con un parámetro de Hubble dependiente del tiempo, y consecuentemente no se corresponden con una geometría dS que describa el universo observable.

Para ver esto, recordemos el reescalo estándar de Weyl de la métrica que relaciona el marco de cuerdas con el de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = e^{-4\phi/(d-1)} g_{\mu\nu} . \quad (3.3.1)$$

Para métricas de la forma (2.1.3), se tiene que  $-n_E^2 \equiv G_{00} = -e^{-4\phi/(d-1)}n^2$ . Luego, una derivada temporal covariante en el marco de Einstein puede ser definida como  $\mathcal{D}_E \equiv \frac{1}{n_E(t)} \frac{\partial}{\partial t}$ , con las mismas propiedades que  $\mathcal{D}$ , ya que  $n_E(t)$  es trivialmente una densidad ante reparametrizaciones temporales. Ambas derivadas temporales covariantes se relacionan de la forma  $\mathcal{D}_E = e^{2\phi/(d-1)}\mathcal{D}$ . Siempre podemos elegir una parametrización temporal  $t_E$  tal que  $n_E(t_E) = 1 \iff \mathcal{D}_E = \frac{\partial}{\partial t_E}$ , luego  $n(t_E) = e^{2\phi(t_E)/(d-1)} \iff \mathcal{D} = e^{-2\phi(t_E)/(d-1)} \frac{\partial}{\partial t_E}$ .

Tomando métricas diagonales  $g = \text{diag}(a_i^2(t))$ , los factores de escala en ambos marcos se relacionan por

$$a_{E,i}(t) = e^{-2\phi/(d-1)}a_i(t). \quad (3.3.2)$$

En consecuencia, el parámetro de Hubble asociado a la dirección  $x^i$  en el marco de Einstein es

$$H_{E,i} \equiv \mathcal{D}_E(\ln(a_{E,i}(t))) = e^{2\phi/(d-1)} \left( H_i - \frac{2}{d-1} \mathcal{D}\phi \right). \quad (3.3.3)$$

En particular, para un dilatón constante  $\phi = \phi_0 = \text{cte}$ , el reescalo de Weyl (3.3.1) solo resulta en multiplicar a la métrica por una constante global. Entonces, una métrica dS en el marco de cuerdas con parámetros de Hubble  $H_i = H_{i,0} = \text{cte}$  es también una métrica dS en el marco de Einstein con parámetros de Hubble  $H_{E,i} = H_{E,i,0} = e^{2\phi_0/(d-1)}H_{i,0} = \text{cte}$ .

Por lo tanto, el dilatón  $\phi$  no puede ser constante en una solución con  $H_0 = \text{cte} \neq 0$  y  $\mathcal{D}\Phi = 0$  en el marco de cuerdas, ya que  $2\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\Phi + nH_0 \neq 0$ . Luego esta solución lleva a un parámetro de Hubble dependiente del tiempo en el marco de Einstein, y no hay una geometría dS propia en este caso.

En cambio, las soluciones  $(H_0, c)$  con  $\mathcal{D}\Phi = -c = \text{cte}$  descritas por (3.2.4) admiten cosmologías dS con dilatón constante cuando  $c \neq 0$ . En efecto, imponiendo la condición

$$2\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\Phi + \mathcal{D}(\ln(\sqrt{\det g_{ij}})) = \mathcal{D}\Phi + \sum_{i=1}^d H_i = 0 \quad (3.3.4)$$

en el ansatz  $g = \text{diag}_n(a^2(t), a_0^2)$  y  $b = 0$ , resulta en

$$0 = 2\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\Phi + nH_0 + (d-n) \cdot 0 = -c + nH_0 \iff c = nH_0. \quad (3.3.5)$$

Entonces, las soluciones no perturbativas dS de la forma  $(H_0, c) = (H_0, nH_0)$  en el marco de cuerdas tienen dilatón constante  $\phi = \phi_0$ . En el marco de Einstein, esto se corresponde a una

geometría dS con  $H_E = H_{E,0} = e^{2\phi_0/(d-1)}H_0 = \text{cte}$  en  $n$  dimensiones espaciales y parámetro de Hubble nulo en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales. Si esto fuera una solución de la teoría de cuerdas, el acoplamiento de la cuerda se puede tomar como  $g_s = e^{\phi_0} = \text{cte} \ll 1$  para todo tiempo, de forma consistente con la teoría perturbativa de cuerdas a género 0.

Este resultado parece contradecir el teorema no-go de [5], que establece que no hay soluciones dS en el marco de Einstein con dilatón constante  $\phi$ . Sin embargo, las nuevas soluciones (3.3.5) tienen  $\Phi \neq \text{cte}$  (o sea  $c \neq 0$ ), lo cual viola la hipótesis del teorema, según la cual las únicas soluciones dS en el marco de cuerdas son aquellas con  $\Phi = \text{cte}$  (o sea  $c = 0$ ). Luego, el caso  $q = 0$  es una fuente de soluciones dS en ambos marcos (ya que  $\phi = \text{cte} \iff c = nH_0$ , en particular  $c = nH_0 \neq 0$ ).

Nótese que para toda solución dS  $(H_0, c)$  con dilatón constante (es decir,  $c = nH_0$ ), está también su solución dS invertida temporalmente  $(-H_0, -c)$  con dilatón constante ya que  $-c = n(-H_0)$ . Entonces, hay dos tipos de soluciones dS con dilatón constante: las cosmologías expansivas  $(H_0, c = nH_0)$  con  $H_0 > 0$ , y las contractivas  $(-H_0, -c = n(-H_0))$  con  $-H_0 < 0$ .

Por otra parte, una solución dS en el marco de cuerdas descrita por  $(H_0, c)$  con dilatón no constante debe verificar  $c > nH_0 \iff \mathcal{D}\phi = \text{cte} < 0$  o  $c < nH_0 \iff \mathcal{D}\phi = \text{cte} > 0$ . En el primer (segundo) caso, el acoplamiento de la cuerda  $g_s = e^{\phi}$  es pequeño solo para tiempos tardíos (tempranos). El parámetro de Hubble en el marco de Einstein de estas soluciones es de la forma

$$H_E = \frac{e^{2\phi(t)/(d-1)}}{d-1} [c + (d-n-1)H_0] , \quad (3.3.6)$$

con  $\phi(t) = \phi_0 + \frac{(nH_0 - c)}{2} \int_{t_0}^t dt n(t)$ . Luego  $H_E$  es una constante no nula si y solo si  $\phi = \text{cte} \iff c = nH_0$ . Si  $c \neq nH_0$ , se obtiene una solución expansiva (contractiva) en el marco de Einstein (que no es dS) si  $c + (d-n-1)H_0$  es positivo (negativo), ver Figura 1b.

Alternativamente, se podrían buscar geometrías dS en el marco de Einstein con dilatón no constante (es decir, que no verifican (3.2.4) y que no son dS en el marco de cuerdas). En general, tienen que satisfacer condiciones muy no triviales. En el caso de una métrica isotrópica  $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$  y  $b = 0$ , la función  $F(H) = F_{n=d}(H)$  que describe las correcciones

$\alpha'$  debe verificar la ODE no lineal de segundo orden

$$-\frac{(d+1)}{2} HF'(H) + F(H) + dH^2 = \pm \sqrt{-HF'(H) + F(H)} \left( (d-1) \frac{F'(H)}{F''(H)} + (d+1)H \right) \quad (3.3.7)$$

con  $\pm = -\text{signo}(\mathcal{D}\Phi)$  [7]. Esto es una ODE porque  $H = H(t) \neq \text{cte}$  puede tomar cualquier valor en un entorno abierto de un cierto  $H(t_0)$ , si el dilatón  $\phi$  no es constante. Una solución posible es  $F(H) = -H^2 + BH$  para toda constante  $B \in \mathbb{R}$  si  $\pm = \text{signo}(H)$ , pero esto no se corresponde con la teoría de cuerdas. Aún en el caso  $B = 0$  (que asegura  $F(H) = F(-H)$ ), el término  $\mathcal{O}(H^2)$  no coincide con  $F(H) = -dH^2 + \dots$  en la expansión asintótica (3.1.6). Además de esta, debería haber otra solución con otra constante de integración (además de  $B$ ), que debería ser una función *acceptable*  $F(H)$  de acuerdo a [7] para ser una posible solución dS no perturbativa de la teoría de cuerdas a nivel árbol. Por ejemplo, el acoplamiento de la cuerda (no constante) debe verificar  $g_s = e^\phi \ll 1$  para todo tiempo.

Nótese que las geometrías dS en el marco de Einstein con dilatón constante se corresponden a  $H = H_0 = \text{cte} \neq 0$  en el marco de cuerdas, en particular en el caso  $n = d$ . Luego, las únicas soluciones posibles para una métrica isotrópica son aquellas con  $q = 0$ , es decir  $F'(H_0) = 0$ ,  $F(H_0) = c^2$  y  $\mathcal{D}\Phi = -c$ . Reemplazando esto en la ODE (3.3.7), con  $\pm = -\text{signo}(\mathcal{D}\Phi) = \text{signo}(c)$ , lleva a

$$c^2 + dH_0^2 = \text{signo}(c)|c|(d+1)H_0 = (d+1)cH_0 \iff 0 = c^2 - (d+1)H_0c + dH_0^2 = (c - dH_0)(c - H_0).$$

Entonces, hay dos soluciones posibles: Una con  $c = H_0$ , lo cual implica

$$(d-1)H_0 - 2\mathcal{D}\phi = (d-1)H_0 - (-c + dH_0) = c - H_0 = 0 \implies H_E = 0,$$

es decir, una métrica de Minkowski en el marco de Einstein; y la otra con  $c = dH_0$ , que es la solución dS con dilatón constante (3.3.5) (en el caso  $n = d$ ). Pero ahora la hallamos por un camino distinto, resolviendo una ecuación algebraica en vez de una ODE. De hecho, para  $H = H_0$  y  $\phi$  ctes, la ODE se torna algebraica.

### 3.4. Estabilidad y tipos de soluciones dS

Siguiendo [19], para estudiar la estabilidad de las soluciones dS halladas previamente, es conveniente definir  $y \equiv \mathcal{D}\Phi$  y recordar que las ecuaciones de movimiento (3.1.11c) y

(3.1.11b) son ecuaciones diferenciales de primer orden para  $y$  y  $H$ , mientras que (3.1.11a) es un vínculo entre ellas. Por lo tanto, la variación de las variables dinámicas  $\delta y = \delta(\mathcal{D}\Phi)$  y  $\delta H$  debe preservar el vínculo (3.1.11a),

$$0 = \delta E_n = 2y \delta y + HF_n''(H) \delta H. \quad (3.4.1)$$

Luego, las variaciones de las primeras derivadas  $\mathcal{D}y$  y  $\mathcal{D}H$  ante  $\delta y$  y  $\delta H$  están determinadas por las ecuaciones (3.1.11b) y (3.1.11c) como

$$\delta(\mathcal{D}y) = -\frac{1}{2} (F_n'(H) + HF_n''(H)) \delta H, \quad (3.4.2)$$

$$F_n''(H)\delta(\mathcal{D}H) = F_n'(H) \delta y + yF_n''(H) \delta H - F_n'''(H)\mathcal{D}H \delta H.$$

Evaluando en las soluciones dS (3.2.4) descritas por  $(H_0, c)$  en el marco de cuerdas e imponiendo  $\mathcal{D}H = \mathcal{D}(H_0) = 0$ ,  $F_n'(H_0) = 0$  y  $y = \mathcal{D}\Phi = -c$ , podemos reescribir las variaciones como

$$\delta(\mathcal{D}y) = -c \delta y \quad \text{y} \quad \delta(\mathcal{D}H) = -c \delta H, \quad (3.4.3)$$

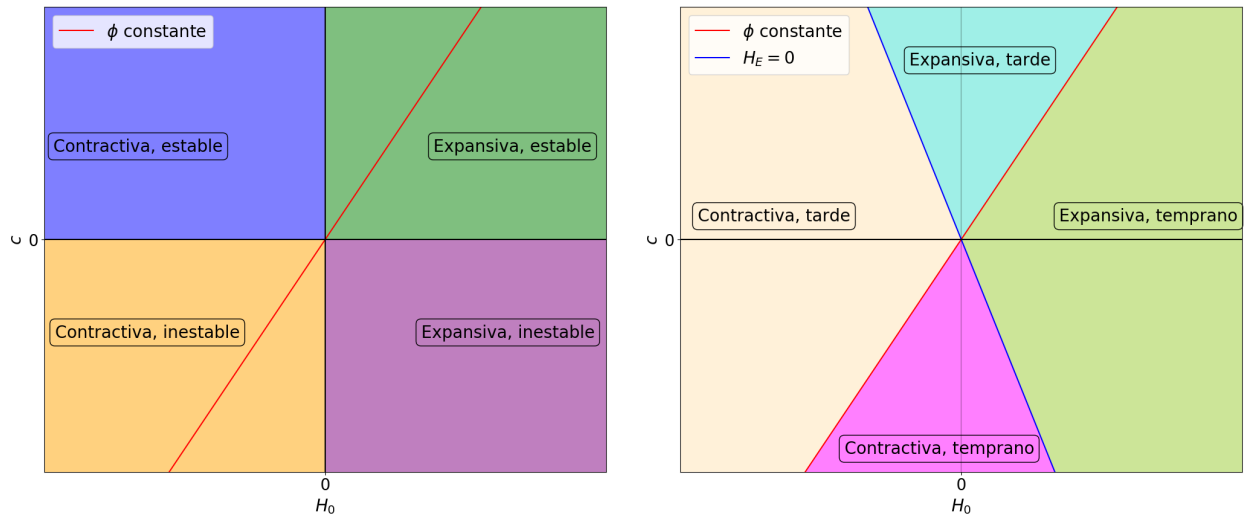
donde también aplicamos el vínculo (3.4.1), y asumimos  $F_n''(H_0) \neq 0$ .

Por lo tanto, vemos que una solución dS en el marco de cuerdas descrita por  $(H_0, c)$  es estable si  $c > 0$ , e inestable si  $c < 0$ , para las dinámicas de  $H$  e  $y$ . Nótese que si  $H_0, c \neq 0$  y si  $\delta y$  puede tomar valores no nulos, el vínculo (3.4.1) necesariamente implica  $F_n''(H_0) \neq 0$ . En el caso  $c = 0$  (en el cual  $F_n''(H_0) = 0$  si  $\delta H$  puede tomar valores no nulos, por (3.4.1)), se requiere más análisis para establecer la estabilidad de la solución.

Entonces, hay cuatro tipos de soluciones dS en el marco de cuerdas con  $H_0, c \neq 0$  (ver Figura 1a): Una solución dS  $(H_0, c)$  expansiva y estable con  $H_0 > 0$ ,  $c > 0$ ; su solución invertida temporalmente  $(-H_0, -c)$  que es contractiva e inestable; la solución  $(-H_0, c)$  que se obtiene a partir de una inversión del factor de escala que es contractiva y estable; y la solución  $(H_0, -c)$  que se obtiene a partir de una inversión del factor de escala y una inversión temporal que es expansiva e inestable. Luego, siempre se puede elegir una solución dS estable en el marco de cuerdas.

En particular, una solución dS  $(H_0, c = nH_0)$  con dilatón constante es estable si  $c = nH_0 > 0$ , es decir si es una solución expansiva. En efecto, la condición  $c = nH_0$  implica  $\text{signo}(H_0) = \text{signo}(c)$ . Así, toda solución dS no perturbativa expansiva con dilatón constante es estable.

Resumimos las propiedades de las soluciones dS  $(H_0, c)$  en el marco de cuerdas y de Einstein (expansión/contracción, estabilidad, y tiempos para los cuales  $g_s = e^{\phi(t)} \ll 1$ ) en la Figura 1. Notar que para  $n < d$ , toda solución dS expansiva y estable en el marco de cuerdas (cuadrante verde de la Figura 1a), se corresponde a una geometría expansiva y estable  $H_E(t) > 0$  en el marco de Einstein (regiones celeste y verde claro en la Figura 1b), mientras que para  $n = d$  esto solo ocurre para  $c > H_0$ . Recordar la relación precisa entre los parámetros de Hubble dada en (3.3.6).



(a) soluciones dS  $(H_0, c)$  en el marco de cuerdas

(b) soluciones dS  $(H_0, c)$  vistas en el marco de Einstein

**Figura 1:** (a) expansión  $H_0 > 0$ /contracción  $H_0 < 0$  y estabilidad. La línea roja es la región  $\phi = \text{cte} \iff c = nH_0$ . (b) expansión  $H_E(t) > 0$ /contracción  $H_E(t) < 0$ . Tarde y temprano se refieren a los tiempos en los cuales  $g_s = e^{\phi(t)} \ll 1$ . La línea azul es la región  $H_E = 0 \iff c = -(d - n - 1)H_0$  y la línea roja es la región  $\phi = \text{cte}$  con  $g_s = e^{\phi_0} \ll 1$ .

# Capítulo 4

## Ansatz generalizado de matrices conmutantes

Habiendo resuelto las ecuaciones de movimiento en un ansatz simplificado que involucra una métrica de FLRW y campo  $b$  nulo, vamos a extender el análisis para campos más generales. Primero discutiremos un ansatz generalizado en el cual las matrices  $g, \mathcal{D}(g), \mathcal{D}b$  se toman de forma que conmuten entre ellas, y mostraremos que asumiendo esto, la simetría  $O(d, d)$  nos permite tomar una métrica diagonal y matrices  $b, \mathcal{D}b$  diagonales por bloques, sin pérdida de generalidad. Luego mostraremos que en este caso las ecuaciones de movimiento se pueden diagonalizar, lo cual simplifica enormemente la búsqueda de soluciones.

Para estudiar la cosmología invariante ante dualidad de forma genérica, dado que los términos en las funciones  $\mathcal{F}(\mathcal{DS})$  o  $\mathcal{F}'(\mathcal{DS})$  son potencias pares o impares de  $\mathcal{DS}$ , es conveniente calcular primero la matriz  $(\mathcal{DS})^2$ . Después de un cálculo algo tedioso, dicha matriz siempre se puede escribir como:

$$(\mathcal{DS})^2 = \begin{pmatrix} A & bg^{-1}Ag - Ab + (g - bg^{-1}b)Cg \\ C & g^{-1}Ag - g^{-1}bCg - Cb \end{pmatrix}, \quad (4.0.1)$$

donde  $A \equiv \mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g^{-1}) + (\mathcal{D}(b)g^{-1})^2 + bC$  y  $C \equiv \mathcal{D}(g^{-1})\mathcal{D}(b)g^{-1} - g^{-1}\mathcal{D}(b)\mathcal{D}(g^{-1})$  contienen todas las derivadas temporales en la anterior expresión.

Esta expresión parece bastante complicada. Pero, si se considera que las matrices  $g, \mathcal{D}(g), \mathcal{D}b$  conmutan entre sí, entonces  $g^{-1}, \mathcal{D}(g^{-1})$  también pertenecen a dicho conjunto de matrices que conmutan, y  $C = \mathbf{0}$  mientras que  $A = -g^{-2}(\mathcal{D}g)^2 + g^{-2}(\mathcal{D}b)^2$  es una matriz simétrica



semi-definida negativa. En este caso, (4.0.1) se simplifica a

$$(\mathcal{DS})^2 = \begin{pmatrix} A & [b, A] \\ 0 & A \end{pmatrix}. \quad (4.0.2)$$

La suposición de que las matrices  $g$ ,  $\mathcal{D}(g)$ ,  $\mathcal{D}b$  conmutan entre sí es un ansatz algo genérico. Sin embargo, explotando la invarianza global ante  $O(d, d)$  (en particular la invarianza ante rotaciones globales de las coordenadas espaciales, y traslaciones constantes en el campo  $b$  [9, 10], que preservan la suposición del ansatz general), veremos que en este caso, la métrica  $g$  siempre se puede tomar como diagonal, y que  $\mathcal{D}b$  puede tomarse como diagonal por bloques, sin pérdida de generalidad.

En efecto, como  $g$  y  $\mathcal{D}g$  son matrices reales, simétricas y que conmutan, entonces existe una matriz ortogonal  $R = R(t)$ , que puede depender del tiempo, que las diagonaliza:  $g = Rg_D R^{-1}$  y  $\mathcal{D}g = R D_g R^{-1}$  con  $g_D$  y  $D_g$  matrices diagonales para todo tiempo. Tomando la derivada temporal de la primer igualdad,

$$\mathcal{D}g = \mathcal{D}(Rg_D R^{-1}) = R (\mathcal{D}g_D + [R^{-1}\mathcal{D}R, g_D]) R^{-1}, \quad (4.0.3)$$

donde usamos  $\mathcal{D}(R^{-1}R) = 0$ , y usando la segunda igualdad llegamos a:

$$\mathcal{D}g_D + [R^{-1}\mathcal{D}R, g_D] = D_g.$$

Puesto que  $\mathcal{D}g_D$  y  $D_g$  son matrices diagonales,  $[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D]$  también es diagonal. Luego, para elementos matriciales  $(g_D)_{ij} = a_i^2(t)\delta_{ij}$  (sin perder generalidad pues  $g_D$  es diagonal), el conmutador viene dado por  $[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D]_{ij} = (R^{-1}\mathcal{D}R)_{ij}(a_j^2 - a_i^2)$ . En particular, los elementos diagonales  $[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D]_{ii}$  son cero, y como  $[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D]$  es diagonal, se tiene que:

$$[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D] = \mathbf{0} \iff \mathcal{D}g_D = D_g = \text{diag}(2a_i^2 H_i). \quad (4.0.4)$$

Más aún, si  $a_i \neq a_j$ , entonces  $[R^{-1}\mathcal{D}R, g_D] = \mathbf{0} \implies (R^{-1}\mathcal{D}R)_{ij} = 0$ .

Consideremos, por ejemplo, la métrica diagonal

$$g_D = \text{diag}(a_1^2(t)\mathbf{1}_{s_1}, a_2^2(t)\mathbf{1}_{s_2}, \dots, a_{r_b}^2(t)\mathbf{1}_{s_{r_b}}), \quad (4.0.5)$$

donde cada uno de los  $r_b$  bloques  $a_r^2(t)\mathbf{1}_{s_r}$  es proporcional a la identidad  $\mathbf{1}_{s_r}$  de  $s_r \times s_r$ , y  $a_r(t) \neq a_{r'}(t)$  si  $r \neq r'$ . En otras palabras, todas las direcciones con el mismo factor de escala

para todo tiempo se agrupan en el mismo bloque. De  $(R^{-1}\mathcal{D}R)_{ij} = 0$  si  $a_i \neq a_j$ , se obtiene que

$$-R^{-1}\mathcal{D}R = \mathcal{D}(R^{-1})R \equiv E(t) = \text{diag}(E^{(1)}(t), E^{(2)}(t), \dots, E^{(r_b)}(t)), \quad (4.0.6)$$

es decir, que  $E(t)$  es una matriz diagonal en bloques, con bloques  $E^{(r)}(t)$  que corresponden a los bloques  $g^{(r)} = (a^{(r)})^2 \mathbf{1}_{s_r}$  de la métrica (4.0.5) proporcionales a la identidad. Nos referiremos a estos bloques como bloques con igual factor de escala  $a^{(r)}$ .

La condición inicial para  $R(t)$  siempre puede ser llevada a la forma  $R(t_0) = R^{-1}(t_0) = \text{Id}$  con una transformación global  $O(d, d)$ , que se corresponde a una rotación de las coordenadas espaciales con una matriz ortogonal constante  $R_0 = R(t_0)^{-1}$ , que transforma a los campos como  $g \rightarrow R_0 g R_0^{-1}$  (es decir,  $R(t) \rightarrow R_0 R(t)$ ),  $b \rightarrow R_0 b R_0^{-1}$ , de forma que  $R(t_0) = \text{Id}$ . Luego, la ecuación diferencial (4.0.6) es la ecuación de Schrodinger para el operador de evolución temporal (con  $U(t) = R^{-1}(t)$  y el Hamiltoniano  $(i\hbar)^{-1}H(t) = n(t)E(t)$ ), con la condición inicial  $R^{-1}(t_0) = \text{Id}$ . Entonces, puede ser formalmente resuelta con una serie de Dyson:

$$R^{-1}(t) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[ \int_{t_0}^t dt n(t) E(t) \right] \right\}, \quad (4.0.7)$$

donde  $\mathcal{T}$  es el operador de ordenamiento cronológico. Consecuentemente, la matrix ortogonal  $R^{-1}(t)$  (así como  $R(t)$ ) debe también ser una matriz diagonal por bloques, con los mismos bloques que  $E(t)$  y  $g_D$ .

Por lo tanto, considerando que cada bloque de  $g_D$  es proporcional a la matriz identidad y que  $R(t), R^{-1}(t)$  son diagonales por bloques, la métrica  $g = g_D$  puede ser tomada como (4.0.5) (diagonal), que es lo que vamos a hacer a partir de ahora.

Con respecto al campo  $b$ , dado que  $\mathcal{D}b$  conmuta con  $g = g_D$ , debe ser una matriz diagonal por bloques, con bloques que corresponden a los bloques  $g^{(r)} = (a^{(r)})^2 \mathbf{1}_{s_r}$  de  $g$  de la ecuación (4.0.5) (es decir, bloques con igual factor de escala):

$$\mathcal{D}b = \text{diag}(\mathcal{D}b^{(1)}, \mathcal{D}b^{(2)}, \dots, \mathcal{D}b^{(r_b)}), \quad (4.0.8)$$

siendo cada bloque  $\mathcal{D}b^{(r)}$  una matriz real y antisimétrica. Con una transformación global de  $O(d, d)$  que se corresponde a una traslación constante del campo  $b$ , siempre podemos tomar  $b(t_0) = \mathbf{0}$  sin pérdida de generalidad, y  $b(t) = \int_{t_0}^t dt' n(t') \mathcal{D}b(t')$  también debe ser una matriz diagonal por bloques con igual factor de escala  $a^{(r)}$ . Por lo tanto,  $b(t)$  conmuta con  $g, g^{-1}, \mathcal{D}g$ , y además  $[b, A] = g^{-2}[b, (\mathcal{D}b)^2]$ .

Resumiendo, el ansatz generalizado de matrices conmutantes nos permite tomar, sin pérdida de generalidad, una métrica diagonal  $g$  y una matriz diagonal por bloques  $\mathcal{D}b$  (con bloques con igual  $a^{(r)}$ ) con  $b(t_0) = \mathbf{0}$ , lo cual implica que  $b(t)$  conmuta con  $g, g^{-1}, \mathcal{D}g$ . Esto incluye varios casos interesantes, como una métrica diagonal genérica  $g_{ij} = a_i^2(t) \delta_{ij}$  y  $b = \mathbf{0}$ ; una métrica isotrópica  $g_{ij} = a^2(t) \delta_{ij}$  y un campo  $b \neq \mathbf{0}$  genérico; una métrica con dos (o más) factores de escala dinámicos, por ejemplo  $g = \text{diag}_n(a_1^2(t), a_2^2(t))$ , y una matriz diagonal por bloques  $\mathcal{D}b \neq \mathbf{0}$  con los mismos dos (o más) bloques que  $g$ ; etc.

## 4.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento en el ansatz de matrices conmutantes son deducidas en el apéndice B, y son de la forma:

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}_a(A) + 2 \text{tr}(A\mathcal{F}'_a(A)) = 0, \quad (4.1.1a)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + 2 \text{tr}(A\mathcal{F}'_a(A)) = 0, \quad (4.1.1b)$$

$$\mathcal{Q}_2 \equiv e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(A) - b\mathcal{Q}_1 = \text{constante} \iff \mathcal{D}(e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(A)) - \mathcal{D}b \mathcal{Q}_1 = \mathbf{0}, \quad (4.1.1c)$$

$$\mathcal{Q}_1 \equiv e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b)\mathcal{F}'_a(A) = \text{constante} \iff \mathcal{D}(e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b)\mathcal{F}'_a(A)) = \mathbf{0}, \quad (4.1.1d)$$

donde  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) \equiv \mathcal{F}_a(A)$  ya que solo depende de  $\text{tr}(\mathcal{D}\mathcal{S}^{2m}) = 2 \text{tr}(A^m)$ , y  $\mathcal{Q}_2$  y  $\mathcal{Q}_1$  son constantes de integración matriciales simétrica y antisimétrica (respectivamente). Las últimas dos ecuaciones son las ecuaciones de movimiento para variaciones de  $\mathcal{S}$ , y son equivalentes a la conservación de la carga de Noether

$$\mathcal{Q} \equiv -2 \begin{pmatrix} -\mathcal{Q}_2 & -g^2(t_0)\mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Como se demuestra en B.1, las ecuaciones (4.1.1) pueden ser diagonalizadas en términos

de una matriz compleja unitaria  $U(t)$ , y resultan ser

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}_a(-4D^2) + 2 \operatorname{tr}((-4D^2) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) = 0, \quad (4.1.3a)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + 2 \operatorname{tr}((-4D^2) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) = 0, \quad (4.1.3b)$$

$$D_1 = e^{-\Phi} g^{-2}(D_b)\mathcal{F}'_a(-4D^2) = \text{constante}, \quad (4.1.3c)$$

$$\mathbf{0} = D_b D_1 + \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(-4D^2)), \quad (4.1.3d)$$

$$\mathbf{0} = [U^{-1}\mathcal{D}U, D_1] = \mathcal{D}(g) [U^{-1}\mathcal{D}U, \mathcal{F}'_a(-4D^2)], \quad (4.1.3e)$$

donde  $D_b$ ,  $D_1$  y  $D^2$  son las matrices diagonales reales (la última con elementos no negativos):

$$\mathcal{D}b(t) = U(t)(iD_b(t))U^{-1}(t), \quad \mathcal{Q}_1 = U(t)(iD_1)U^{-1}(t), \quad (4.1.4)$$

$$A = U(t)(-g^{-2}(\mathcal{D}g)^2 - g^{-2}D_b^2)U^{-1}(t) \equiv U(t)(-4D^2)U^{-1}(t), \quad (4.1.5)$$

Notar que las ecuaciones (4.1.3a)-(4.1.3d), que determinan  $\Phi$ , la métrica y  $D_b$ , pueden ser resueltas sin preocuparse por la matriz unitaria  $U(t)$ . Entonces es conveniente separar dichas ecuaciones de la ecuación (4.1.3e), pues esta última determina  $U(t)$  y en consecuencia también determina la base en la cual  $\mathcal{D}b$  está escrita. En particular, podemos tomar  $U(t) = U_0 = \text{cte}$  como una solución válida de dicha ecuación.

Usando la invarianza ante  $O(d, d)$ , podemos reemplazar  $\mathcal{D}b(t) \rightarrow R_{b,0}\mathcal{D}b(t)R_{b,0}^{-1}$ , o equivalentemente  $U(t) \rightarrow R_{b,0}U(t)$ , donde  $R_{b,0}$  puede ser cualquier matriz ortogonal constante y diagonal por bloques, con bloques con igual factor de escala (para preservar la forma de  $g, \mathcal{D}g, g^{-1}$ ). Tomando  $U(t) = U_0 = \text{cte}$ ,  $R_{b,0}$  puede ser elegida de forma que cada bloque  $\mathcal{D}b^{(r)}$  de  $\mathcal{D}b$  sea una matriz diagonal por bloques de la forma

$$\mathcal{D}b^{(r)}(t) = \operatorname{diag} \left( \beta_1^{(r)} i\sigma_2, \beta_3^{(r)} i\sigma_2, \dots, \beta_{2c_r-1}^{(r)} i\sigma_2, \mathbf{0} \right), \quad (4.1.6)$$

con  $c_r$  bloques de  $2 \times 2$  proporcionales a la matriz de Pauli  $\sigma_2$ , y un bloque igual a la matriz cero de  $(s_r - 2c_r) \times (s_r - 2c_r)$ . Los autovalores de  $-i\mathcal{D}b$  son de la forma  $\pm\beta_1^{(r)}, \pm\beta_3^{(r)}, (\dots), \pm\beta_{2c_r-1}^{(r)}, 0$ , y luego el bloque  $r$ -ésimo de la matriz diagonal  $D_b = U_0^{-1}(-i)\mathcal{D}bU_0$  es igual a:

$$D_b^{(r)}(t) = \operatorname{diag} \left( \beta_1^{(r)}, -\beta_1^{(r)}, \beta_3^{(r)}, -\beta_3^{(r)}, \dots, \beta_{2c_r-1}^{(r)}, -\beta_{2c_r-1}^{(r)}, 0, \dots, 0 \right). \quad (4.1.7)$$

Definimos  $\beta_\alpha^{(r)} \equiv (D_b^{(r)})_{\alpha\alpha}$  con  $1 \leq \alpha \leq s_r$ . Nótese que si  $\beta_\alpha^{(r)} \neq 0$  hay otro autovalor  $\beta_{\alpha'}^{(r)} = -\beta_\alpha^{(r)}$ . Más aún, con esta elección,  $(\mathcal{D}b)^2 = U_0(iD_b)^2U_0^{-1} = -D_b^2$  es diagonal, y entonces  $A = U_0(-4D^2)U_0^{-1} = -4D^2$  también es diagonal con elementos  $-4(H^{(r)})^2 - (a^{(r)})^{-4} (\beta_\alpha^{(r)})^2$ .

Dado que  $b(t_0) = \mathbf{0}$ , el campo  $b(t) = \int_{t_0}^t dt' n(t') \mathcal{D}b(t')$  toma la forma de una matriz diagonal por bloques, con el bloque  $r$ -ésimo

$$b^{(r)}(t) = \text{diag} \left( B_1^{(r)} i\sigma_2, B_3^{(r)} i\sigma_2, \dots, B_{2c_r-1}^{(r)} i\sigma_2, \mathbf{0} \right), \quad (4.1.8)$$

donde  $B_\alpha^{(r)}(t) \equiv \int_{t_0}^t dt' n(t') \beta_\alpha^{(r)}(t')$  son autovalores genéricos de  $-ib(t)$ . Notar que  $b(t)$  conmuta con  $\mathcal{D}b(t)$ , y luego  $[b, A] = \mathbf{0}$ .

Por otro lado, si se considera que la solución  $U(t)$  de la ecuación (4.1.3e) es dependiente del tiempo,  $\mathcal{D}b$  no puede tomar la forma simple (4.1.6), pero  $D_b$  puede todavía tomar la forma (4.1.7). Más aún, en principio  $b(t)$  no puede ser tan simple como (4.1.8) y no conmuta con  $\mathcal{D}b$ . De todos modos, la información en  $U(t)$  no es relevante para las primeras cuatro ecuaciones en (4.1.3), y luego no es significativa para la dinámica de  $\Phi$ , de los factores de escala (o sea de la métrica) y de los autovalores de  $-i\mathcal{D}b$ .

Considerando la métrica en el bloque  $r$ -ésimo  $g^{(r)} = (a^{(r)})^2 \mathbf{1}_{s_r}$ , la componente  $\alpha$  de las ecuaciones (4.1.3c) y (4.1.3d) pueden ser escritas como:

$$-Q_\alpha^{(r)}/8 = e^{-\Phi} (a^{(r)})^{-4} \beta_\alpha^{(r)} (\mathcal{F}'_b(-4D^2))_{\alpha\alpha}^{(r)} = \text{constante}, \quad (4.1.9a)$$

$$0 = -\beta_\alpha^{(r)} Q_\alpha^{(r)}/8 + \mathcal{D} \left( e^{-\Phi} 2H^{(r)} (\mathcal{F}'_a(-4D^2))_{\alpha\alpha}^{(r)} \right), \quad (4.1.9b)$$

donde definimos a un autovalor genérico de  $8 i\mathcal{Q}_1$  como  $Q_\alpha^{(r)} \equiv -8(D_1^{(r)})_{\alpha\alpha}$  para  $1 \leq \alpha \leq s_r$ . Nótese que (4.1.9b) es equivalente a

$$-Q_\alpha^{\prime (r)}/8 = -B_\alpha^{(r)} Q_\alpha^{(r)}/8 + e^{-\Phi} 2H^{(r)} (\mathcal{F}'_a(-4D^2))_{\alpha\alpha}^{(r)} = \text{constante}, \quad (4.1.10)$$

donde  $-Q_\alpha^{\prime (r)}/8$  y  $B_\alpha^{(r)}$  son autovalores genéricos de  $\mathcal{Q}_2$  y  $b$  respectivamente, si  $U(t) = U_0$ . Esto es porque  $\mathcal{Q}_2$  conmuta con  $\mathcal{D}b$ , puesto que  $b$  conmuta con  $\mathcal{D}b$  siempre y cuando  $U(t) = U_0$ , y luego puede ser diagonalizada en la misma base que  $\mathcal{D}b$ . En cambio, si  $U(t)$  no es constante en el tiempo,  $-Q_\alpha^{\prime (r)}/8$  y  $B_\alpha^{(r)}$  no pueden ser interpretados como autovalores genéricos de  $\mathcal{Q}_2$  y  $b(t)$ , respectivamente. Solo pueden ser interpretados respectivamente como una constante de integración relacionada con  $\mathcal{Q}_2$ <sup>1</sup> y como una primitiva del autovalor  $\beta_\alpha^{(r)}(t)$  de  $-i\mathcal{D}b$ . Más aún, no podemos concluir que  $b$  y  $\mathcal{Q}_2$  conmutan con  $\mathcal{D}b$ .

<sup>1</sup>Definiendo  $\mathcal{Q}_2^U(t) \equiv U^{-1}(t)\mathcal{Q}_2U(t)$  y  $b^U(t) \equiv U^{-1}(t)b(t)U(t)$ , (4.1.1c) implica

$$-8(\mathcal{Q}_2^U)_{\alpha\alpha}^{(r)} = Q_\alpha^{\prime (r)} - Q_\alpha^{(r)} i((b^U)_{\alpha\alpha}^{(r)} - iB_\alpha^{(r)}), \quad -8(\mathcal{Q}_2^U)_{\alpha'\alpha}^{(r)} = -Q_\alpha^{(r)} i(b^U)_{\alpha'\alpha}^{(r)} \quad \text{para } \alpha' \neq \alpha.$$

aún para  $U(t)$  dependiente del tiempo. Como  $\mathcal{Q}_2, b(t), U(t)$  son matrices diagonales por bloques, los bloques

Además, definiendo

$$h_\alpha^{(r)} = (D^{(r)})_{\alpha\alpha} = \pm \sqrt{(H^{(r)})^2 + \frac{1}{4}(a^{(r)})^{-4}(\beta_\alpha^{(\alpha)})^2} \quad (4.1.11)$$

para  $1 \leq \alpha \leq s_r$  y  $1 \leq r \leq r_b$ , y sin especificar el signo por el momento, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{DS}) &= \mathcal{F}_a(A) = \mathcal{F}_a(-4D^2) \\ &= 8c_1 \sum_{i=1}^d h_i^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-\alpha')^{k-1} 2^{2k} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} 2^{|P|} c_{k,P} \prod_{m \in P} \sum_{i=1}^d h_i^{2m} \\ &\equiv F_h(h_1, h_2, \dots, h_d) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

es una función de múltiples variables que depende de los autovalores de  $A$  ( $h_\alpha^{(r)}$  se pueden reetiquetar como  $h_i$  para  $1 \leq i \leq d$  ya que  $\sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} = \sum_{i=1}^d = d$ ).

Adicionalmente,  $\mathcal{F}'_a(-4D^2)$  es una matriz real diagonal con elementos

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}'_a(-4D^2))_{ii} &= \\ &= \frac{-1}{8h_i} \left( 16c_1 h_i + \sum_{k=2}^{\infty} (-\alpha')^{k-1} 2^{2k} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} 2^{|P|} c_{k,P} \sum_{m_0 \in P} 2m_0 h_i^{2m_0-1} \prod_{m \in P - \{m_0\}} \sum_{i'=1}^d h_{i'}^{2m} \right) \\ &= -\frac{1}{8h_i} \frac{\partial F_h(h_1, h_2, \dots, h_d)}{\partial h_i}. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Observar que si  $h_i = 0$ , o equivalentemente si  $H_i$  y  $\beta_i$  son ambos cero, esta expresión es igual a  $-2c_1$ . Entonces

$$\text{tr}(\mathcal{DS} \mathcal{F}'(\mathcal{DS})) = 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_a(A)) = 2 \text{tr}((-4D^2) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) = \sum_{i=1}^d h_i \frac{\partial F_h}{\partial h_i}, \quad (4.1.14)$$

y las ecuaciones de movimiento diagonalizadas pueden ser reescritas en términos de la función

no diagonales (con  $r \neq r'$ ) de  $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_2^U(t), b(t), b^U(t)$  son cero. Notar que  $Q_\alpha^{(r)} = 0 \forall (r, \alpha) \implies \mathcal{Q}_1 = \mathbf{0}$ . Si además  $Q_\alpha'^{(r)} = 0 \forall (r, \alpha)$ , entonces  $\mathcal{Q}_2^U = \mathbf{0} \implies \mathcal{Q}_2 = \mathbf{0}$ , y finalmente  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ . A la inversa, si  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  entonces  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = \mathbf{0}$  y  $\mathcal{Q}_2^U = \mathbf{0}$ , por lo tanto  $Q_\alpha^{(r)} = Q_\alpha'^{(r)} = 0$  para todo  $(r, \alpha)$ .

de múltiples variables  $F_h(h_1, \dots, h_d)$  y sus derivadas parciales de primer orden como

$$Q_\alpha^{(r)} = e^{-\Phi} (a^{(r)})^{-4} \beta_\alpha^{(r)} \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = \text{constante}, \quad (4.1.15a)$$

$$0 = Q_\alpha^{(r)} \beta_\alpha^{(r)} + \mathcal{D} \left( e^{-\Phi} 2H^{(r)} \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} \right), \quad (4.1.15b)$$

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - F_h(h_1, \dots, h_d) + \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0, \quad (4.1.15c)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0, \quad (4.1.15d)$$

Notar que la segunda ecuación es equivalente a

$$Q_\alpha^{(r)} = Q_\alpha^{(r)} B_\alpha^{(r)} + e^{-\Phi} 2H^{(r)} \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = \text{constante}, \quad (4.1.16)$$

en términos de la primitiva  $B_\alpha^{(r)}$  de  $\beta_\alpha^{(r)}$ .

## 4.2. Conservación de la carga de Noether y dinámica del campo $b$

Para analizar las condiciones de la conservación de la carga de Noether  $\mathcal{Q}$ , recordemos que son equivalentes a la conservación de todas las cargas de Noether escalares  $Q_\alpha^{(r)}$  y  $Q_\alpha^{\prime(r)}$ , junto con la condición (4.1.3e) para  $U(t)$  (que la podemos ignorar desde ahora, dado que no afecta a las otras ecuaciones). Consideraremos solo una componente diagonal  $i$  (o  $r, \alpha$ ) y trabajaremos por separado con los casos *i*)  $Q_\alpha^{(r)} = Q_\alpha^{\prime(r)} = 0$ ; *ii*)  $Q_\alpha^{(r)} = 0$ ,  $Q_\alpha^{\prime(r)} \neq 0$  y *iii*)  $Q_\alpha^{(r)} \neq 0$ .

***i*)  $Q_\alpha^{(r)} = 0$  y  $Q_\alpha^{\prime(r)} = 0$ :**

En este caso, las ecuaciones (4.1.15a) y (4.1.16) implican

$$0 = \left[ (H^{(r)})^2 + \frac{1}{4} (a^{(r)})^{-4} (\beta_\alpha^{(r)})^2 \right] \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}}, \quad (4.2.1)$$

y entonces se tiene que vale  $\frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0$  o que vale  $h_\alpha^{(r)} = 0 \iff H^{(r)} = \beta_\alpha^{(r)} = 0$ . Más aún, la solución  $h_\alpha^{(r)} = 0$  está contenida en la ecuación

$$\frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0, \quad (4.2.2)$$

y luego esta ecuación es equivalente a (4.1.15a) y (4.1.16). Podemos elegir  $\pm = \text{signo}(h_\alpha^{(r)}) = \text{signo}(H^{(r)})$ , o si  $H^{(r)} = 0$  podemos elegir  $\pm = \text{signo}(h_\alpha^{(r)}) = \text{signo}(\beta_\alpha^{(r)})$ , sin pérdida de generalidad.

**ii)  $Q_\alpha^{(r)} = 0$  y  $Q_\alpha'^{(r)} \neq 0$ :**

$$Q_\alpha'^{(r)} \neq 0 \implies \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} \neq 0 \text{ y luego } Q_\alpha^{(r)} = 0 \implies \beta_\alpha^{(r)} = 0, \quad (4.2.3)$$

lo cual trivialmente verifica (4.1.15a). Por otra parte, puesto que  $\beta_\alpha^{(r)} = 0 \implies h_\alpha^{(r)} = H^{(r)}$  (eligiendo  $\pm = \text{signo}(h_\alpha^{(r)}) = \text{signo}(H^{(r)})$ ), (4.1.16) implica  $h_\alpha^{(r)} = H^{(r)} \neq 0$  y toma la forma

$$\frac{1}{2} Q_\alpha'^{(r)} \equiv q_\alpha^{(r)} = e^{-\Phi} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = \text{constante} \neq 0. \quad (4.2.4)$$

**iii)  $Q_\alpha^{(r)} \neq 0$ :**

En este caso  $\frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} \neq 0$  y  $\beta_\alpha^{(r)} \neq 0$  para todo tiempo. Entonces, (4.1.15a) puede ser reescrita como:

$$e^{-\Phi} \frac{1}{h_\alpha^{(r)}} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = Q_\alpha^{(r)} \frac{(a^{(r)})^4}{\beta_\alpha^{(r)}} \quad (4.2.5)$$

Reemplazando esto en (4.1.16), esta ecuación es equivalente a:

$$B_\alpha^{(r)} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}((a^{(r)})^4)}{\mathcal{D}(B_\alpha^{(r)})} = \frac{Q_\alpha'^{(r)}}{Q_\alpha^{(r)}} \equiv q_\alpha'^{(r)} = \text{constante} \quad (4.2.6)$$

$$\iff \mathcal{D}((a^{(r)})^4 + (B_\alpha^{(r)})^2 - 2q_\alpha'^{(r)} B_\alpha^{(r)}) = \mathcal{D}((a^{(r)})^4 + (B_\alpha^{(r)} - q_\alpha'^{(r)})^2) = 0,$$

que puede ser expresado en términos de una constante de integración no negativa  $R_r^2$  como:

$$(a^{(r)})^4 + (B_\alpha^{(r)} - q_\alpha'^{(r)})^2 = R_r^2 = \text{constante} \geq 0, \quad (4.2.7)$$

o equivalentemente como:

$$\begin{cases} (a^{(r)})^2 = R_r \cos(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \implies 2H^{(r)}(a^{(r)})^2 = -R_r \sin(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}(t) \\ B_\alpha^{(r)} - q_\alpha'^{(r)} = R_r \sin(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \implies \beta_\alpha^{(r)} = R_r \cos(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}(t) \end{cases} \quad (4.2.8)$$

con  $\theta_\alpha^{(r)}(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$  de forma que  $(a^{(r)})^2 \geq 0$ . El hecho de que  $\beta_\alpha^{(r)} \neq 0$  implica que  $R_r \neq 0$ ,  $a^{(r)}(t) \neq 0$  y  $\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}(t) \neq 0$ .

Observar que  $(a^{(r)}(t))^2 \leq R_r < \infty$  está acotado, y que esto no se puede corresponder a una cosmología dS en el marco de cuerdas en las  $s_r$  direcciones espaciales del bloque  $r$ -ésimo. Esta es una curiosa característica de la dinámica del sistema cuando el campo  $b$  tiene una



dinámica no trivial en este caso: El factor de escala  $a^{(r)}$  correspondiente a un autovalor no trivial  $\beta_\alpha^{(r)}(t)$  de  $\mathcal{D}b$  está acotado.

Más aún, usando (4.2.8) y eligiendo  $\pm = \text{signo}(h_\alpha^{(r)}) = -\text{signo}(\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)})$ , vemos que:

$$H^{(r)} = -\frac{1}{2} \tan(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \mathcal{D}(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \quad \text{y} \quad h_\alpha^{(r)} = -\frac{\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}}{2 \cos(\theta_\alpha^{(r)})},$$

luego  $\pm = \text{signo}(h_\alpha^{(r)}) = -\text{signo}(\beta_\alpha^{(r)})$  y

$$\frac{h_\alpha^{(r)} (a^{(r)})^4}{\beta_\alpha^{(r)}} = h_\alpha^{(r)} (a^{(r)})^2 \frac{(a^{(r)})^2}{\beta_\alpha^{(r)}} = -\frac{\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}}{2} R_r \frac{1}{\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}} = -\frac{R_r}{2}. \quad (4.2.9)$$

Así, volviendo a (4.1.15a), se obtiene:

$$e^{-\Phi} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = -\frac{R_r Q_\alpha^{(r)}}{2} \equiv q_\alpha^{(r)} = \text{constante} \neq 0. \quad (4.2.10)$$

Resumiendo, en el ansatz generalizado, las ecuaciones de movimiento (diagonalizadas) son:

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - F_h(h_1, \dots, h_d) + \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0, \quad (4.2.11a)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0, \quad (4.2.11b)$$

$$e^{-\Phi} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = q_\alpha^{(r)} = \text{constante} \quad (4.2.11c)$$

$$q_\alpha^{(r)} \neq 0 \implies \begin{cases} \text{caso ii): } Q_\alpha^{(r)} = 0 \text{ y } Q_\alpha^{\prime (r)} \neq 0 \implies \beta_\alpha^{(r)} = 0 \\ \text{caso iii): } Q_\alpha^{(r)} \neq 0 \implies \begin{cases} h_\alpha^{(r)} = -\frac{\mathcal{D}\theta_\alpha^{(r)}}{2 \cos(\theta_\alpha^{(r)})} \\ (a^{(r)})^2 = R_r \cos(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \\ B_\alpha^{(r)} - q_\alpha^{\prime (r)} = R_r \sin(\theta_\alpha^{(r)}(t)) \end{cases} \end{cases} \quad (4.2.11d)$$

donde (4.2.11c) y (4.2.11d) para todo par de índices  $(r, \alpha)$  son equivalentes a la ecuación de movimiento (diagonalizada) para variaciones de  $\mathcal{S}$ .

La ecuación (4.2.11c) para todo  $(r, \alpha)$ , junto con (4.2.11a) y (4.2.11b), determinan la dinámica de los parámetros  $h_\alpha^{(r)}(t)$  y del dilatón generalizado  $\Phi$ .

Adicionalmente, la ecuación (4.2.11d) establece que  $\beta_\alpha^{(r)} = 0$  y  $H^{(r)} = h_\alpha^{(r)}$  en el caso ii); mientras que en el caso iii), determina  $\theta_\alpha^{(r)}(t)$  con una ecuación diferencial de primer orden

en términos de  $h_\alpha^{(r)}(t)$ , que a su vez determina  $(a^{(r)})^2$ ,  $B_\alpha^{(r)} - q_\alpha^{(r)}$  y luego también  $H^{(r)}(t)$  y  $\beta_\alpha^{(r)}(t)$ .

En el caso *i)*  $q_\alpha^{(r)} = 0$ , o equivalentemente  $Q_\alpha^{(r)} = Q_\alpha^{\prime(r)} = 0$ , la componente  $(r, \alpha)$  de la ecuación de movimiento diagonalizada para  $\mathcal{S}$  es equivalente solo a la ecuación  $\frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0$ .

Si las ecuaciones de movimiento son consideradas perturbativamente hasta orden  $\mathcal{O}(\alpha'^0)$ , entonces  $F_h(\vec{h}) = 8c_1 \sum_{i=1}^d h_i^2 + \mathcal{O}(\alpha')$ , y luego (4.2.11c) implican  $(e^{-\Phi} h_\alpha^{(r)})_0 = \frac{(q_\alpha^{(r)})_0}{16c_1} = \text{cte}$ .

Para construir una solución dS perturbativa en al menos una componente (o sea  $H^{(r)} = H_0^{(r)} \neq 0$  para al menos un  $r$ ), se necesita que  $Q_\alpha^{(r)} = 0$  para todo  $1 \leq \alpha \leq s_r$  (para evitar un factor de escala acotado), y  $(Q_\alpha^{\prime(r)})_0 = 2(q_\alpha^{(r)})_0 \neq 0$  (para evitar una solución de Minkowski con  $(H_0^{(r)})_0 = 0$ ). Nos queda entonces el caso *ii)*, en el cual  $\beta_\alpha^{(r)} = 0$ ,  $h_\alpha^{(r)} = H^{(r)} \neq 0$ .

La ecuación  $e^{-\Phi_0(t)}(H^{(r)})_0 = (q_\alpha^{(r)})_0 = \text{cte}$  solo permite un parámetro de Hubble constante no nulo  $(H^{(r)})_0$  si  $\Phi_0(t)$  es constante, pero la ecuación (4.1.15d) implica  $0 = |2(\mathcal{D}^2\Phi)_0| = \left| \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} \left( h_\alpha^{(r)} \frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} \right)_0 \right| = 16|c_1| \sum_{r=1}^{r_b} \sum_{\alpha=1}^{s_r} (h_\alpha^{(r)})_0^2 \implies (h_\alpha^{(r)})_0 = 0 \implies (H^{(r)})_0 = 0$ , entonces no hay solución de la ecuación con hasta dos derivadas con un parámetro de Hubble constante

y no nulo. Por lo tanto, vemos que en el ansatz generalizado, la teoría no permite soluciones dS perturbativas hasta  $\mathcal{O}(\alpha'^0)$ , ni siquiera en una componente espacial. Aunque solo se demostró esto al orden más bajo, tiene sentido que no hayan soluciones dS perturbativas a todo orden ya que  $H_i = \text{cte}$  debería tener unidades de  $1/\sqrt{\alpha'}$ , y luego no sería perturbativo. Es por esto que ahora nos concentraremos en buscar soluciones no perturbativas.

De forma similar al caso del ansatz isotrópico considerado en el capítulo previo, el sector con carga de Noether nula resulta muy interesante porque contiene muchas soluciones dS no perturbativas, tanto con campo  $b$  nulo como con campo  $b$  no nulo. En efecto, se demostró en el apéndice C que si todo  $h_i$  es constante, lo cual es una clave para la construcción de soluciones dS, entonces  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ .

# Capítulo 5

## Vacíos dS generalizados no perturbativos

Para buscar soluciones dS en el caso  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ , se recuerdan las ecuaciones de movimiento (2.2.20), copiadas aquí por conveniencia

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) + \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] = 0, \quad (5.0.1a)$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})] = 0, \quad (5.0.1b)$$

$$E_S = -\frac{1}{2}e^\Phi \mathcal{S} \mathcal{D}\mathcal{Q} = \mathbf{0} \iff \mathcal{D}\mathcal{Q} = \mathbf{0} \iff \mathcal{Q} = \text{constante} \in \mathfrak{so}(d, d). \quad (5.0.1c)$$

La condición  $\mathcal{Q} = -2 e^{-\Phi} \mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = \mathbf{0}$  necesariamente implica que  $\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = \mathbf{0}$  para todo tiempo cuando  $e^{-\Phi} \neq 0$  y  $\mathcal{S}$  es invertible. Luego (5.0.1b) implica  $\mathcal{D}^2\Phi = 0 \iff \mathcal{D}\Phi = -c = \text{cte} \in \mathbb{R}$  y (5.0.1a) requiere que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) = c^2$ . Resumiendo, las soluciones genéricas con carga de Noether nula deben satisfacer:

$$\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) = c^2 \geq 0 \quad , \quad \mathcal{D}\Phi = -c \quad , \quad (5.0.2)$$

que son una generalización natural de las condiciones (3.2.4).

Considerando que  $\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) = \mathcal{G}(\mathcal{D}\mathcal{S}^2)$  solo depende de  $(\mathcal{D}\mathcal{S})^2$  y  $\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = 2 \mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{G}'(\mathcal{D}\mathcal{S}^2)$ , en principio solo podemos concluir de (5.0.2) que  $\mathcal{G}'(\mathcal{D}\mathcal{S}^2)$  pertenece al subespacio de matrices que es aniquilado al ser multiplicado por  $\mathcal{D}\mathcal{S}$ . Las soluciones que verifican (5.0.2) pueden ser construidas imponiendo  $(\mathcal{D}\mathcal{S})^2 = \text{cte}$  de forma que  $\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{G}'(\mathcal{D}\mathcal{S}^2) = \mathbf{0}$  y  $\mathcal{G}(\mathcal{D}\mathcal{S}^2) = c^2 \geq 0$ .

Imponer  $\mathcal{D}\mathcal{S}^2 = \text{cte}$  sin un ansatz que simplifique la expresión (4.0.1) parece bastante no trivial, puesto que es necesario asegurar que tanto los bloques de la primera columna  $A, C$

como los de la segunda columna (escritos en términos de  $A$ ,  $C$ ) sean todos constantes. Sin embargo, en el ansatz generalizado de matrices conmutantes, esta expresión toma la forma simple (4.0.2), y  $\mathcal{DS}^2 = \text{cte}$  es equivalente a  $A = \text{cte}$ , lo cual implica que  $h_i = \text{cte}$ .

Como se explicó en el capítulo previo, con el ansatz de matrices conmutantes la condición  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  es equivalente a  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = \mathbf{0}$  o a cargas de Noether escalares nulas  $Q_\alpha^{(r)} = Q'_\alpha{}^{(r)} = 0$  para todo  $(r, \alpha)$ . Por lo tanto, como se demostró en el caso  $i$  de la sección 4.2, las ecuaciones (4.1.15a) y (4.1.16) en este caso son equivalentes a  $\frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0$  para cada  $(r, \alpha)$ .

Las restantes ecuaciones de movimiento  $E_n = E_\Phi + E_n = 0$  implican que  $\mathcal{D}\Phi = -c = \text{cte} \in \mathbb{R}$  y  $F_h(h_1, \dots, h_d) = c^2$  (ver ecuaciones (4.1.15c) y (4.1.15d)). Por lo tanto, la condición (5.0.2) para una solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  resulta ser equivalente a

$$\frac{\partial F_h}{\partial h_\alpha^{(r)}} = 0 \iff \nabla F_h = \vec{0} \quad , \quad F_h(h_1, \dots, h_d) = c^2 \geq 0 \quad , \quad \mathcal{D}\Phi = -c \quad , \quad (5.0.3)$$

para lo cual se requiere que los parámetros  $h_\alpha^{(r)}$  sean constantes, de forma de asegurar que valga la condición  $\nabla F_h = \vec{0}$ . De nuevo, estas soluciones son la generalización natural de las condiciones (3.2.4), ahora escritas en términos de la función multi-variable  $F_h(h_1, \dots, h_d)$ . Estas soluciones tienen  $h_\alpha^{(r)} = \text{cte}$ , lo cual no es equivalente a  $H^{(r)} = \text{cte}$ , excepto por ejemplo si  $\mathcal{D}b = \mathbf{0}$  donde  $h_\alpha^{(r)} = H^{(r)}$ .

Entonces, imponer que  $H^{(r_0)} = \text{constante}$  para un cierto bloque  $r_0$ , es decir una solución dS en el marco de cuerdas para dicho bloque, requiere que valga  $\beta_\alpha^{(r_0)}(t) = \text{cte}_\alpha \cdot (a^{(r_0)}(t))^2$ , o equivalentemente  $\mathcal{D}b^{(r_0)}(t) = (a^{(r_0)}(t))^2 Y^{(r_0)}$  para el caso  $U(t) = U_0$ , con  $Y^{(r_0)}$  una matriz real antisimétrica y constante de  $s_{r_0} \times s_{r_0}$ . De todos modos, para esta solución en el sector  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ , la condición  $(h_\alpha^{(r)})^2 = \text{cte}$  debe ser verificada para todo valor de  $r$ , no solo para  $r_0$ . En principio, algunos parámetros de Hubble pueden no ser constantes si hay un campo  $b$  no trivial que compense la dependencia temporal de  $H^{(r)}(t)$  y si la dimensión  $s_r$  del bloque es par, ya que  $D_b^{(r)}$  no puede tener un elemento igual a cero. Por supuesto, si no hay interés en este caso, se puede simplemente tomar  $H^{(r)} = \text{cte}$  para todo  $r$ .

## 5.1. Soluciones dS en el marco de Einstein y ejemplos

Como se discutió en la sección 3.3, se pueden obtener soluciones dS en el marco de Einstein a partir de soluciones dS en el marco de cuerdas si el dilatón  $\phi = \frac{1}{2}[\Phi + \ln(\sqrt{\det g_{ij}})]$  es

constante. Para una métrica diagonal  $g_{ij} = a_i^2(t) \delta_{ij}$ , (5.0.2) requiere que

$$\mathcal{D}(\ln(\sqrt{\det g_{ij}})) = \sum_{i=1}^d H_i = c = \text{constante} \in \mathbb{R}. \quad (5.1.1)$$

En una solución con parámetros de Hubble constantes y no nulos solo en  $n < d$  dimensiones espaciales, es decir  $H_i = H_{0,i} = \text{constante} \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , la anterior ecuación resulta  $\sum_{i=n+1}^d H_i = c - \sum_{i=1}^n H_{0,i} = \text{cte}$ . Observar que los restantes parámetros de Hubble que no son una constante no nula pueden tener una dependencia temporal si al sumarlos se obtiene una constante, o en otras palabras la dependencia temporal se debe cancelar en la suma. Esto no puede ocurrir si la métrica es isotrópica en las  $d - n$  dimensiones espaciales extra, en cuyo caso la geometría de aquellas dimensiones extra se corresponde a una cosmología estática, y la condición (5.0.2) para un dilatón constante toma la forma  $c = \sum_{i=1}^n H_{0,i}$ .

Si las constantes  $h_i = h_\alpha^{(r)} = h_{0,i}$  que resuelven la ecuación (5.0.3) para un cierto valor de  $c$  son conocidas, se pueden construir algunas soluciones dS particulares que son interesantes, como discutiremos a continuación.

### Geometría dS isotrópica y $b \neq 0$

Consideremos una geometría dS isotrópica en  $n$  dimensiones espaciales y una solución estática en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales, es decir la métrica es  $g = \text{diag}_n(a^2(t), a_0^2)$ , con  $a(t)$  tal que  $H = \mathcal{D}(\ln a(t)) = H_0 = \text{cte}$  y  $a_0 = \text{cte}$ . Entonces, hay dos bloques:

1. El bloque  $r = 1$  de tamaño  $n \times n$  con  $g^{(1)} = a^2(t) \mathbf{1}_n$ ,  $H^{(1)} = H_0 = \text{cte} \neq 0$  y  $\mathcal{D}b^{(1)} = a^2(t)Y^{(1)}$  con  $Y^{(1)} = \text{cte}$ .
2. El bloque  $r = 2$  de tamaño  $(d - n) \times (d - n)$  con  $g^{(2)} = a_0^2 \mathbf{1}_{d-n} = \text{cte}$ ,  $H^{(2)} = H_2 = 0$  y  $\mathcal{D}b^{(2)} = a_0^2 Y^{(2)} = \text{cte}$ .

Asumiendo  $U(t) = U_0$  por simplicidad, la dependencia temporal de  $\mathcal{D}b^{(r)}(t) = (a^{(r)}(t))^2 Y^{(r)}$  es necesaria para tener  $h_\alpha^{(r)} = \text{cte}$ . Estas constantes deben verificar (5.0.3) para ser una solución en el sector  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ .

Si la condición para un dilatón constante  $c = nH_0$  se verifica, la solución es  $dS_n \times T^{d-n}$  en ambos marcos. La diferencia con la solución previa de (3.2.4) es que ahora permite un

campo  $b$  no trivial. En particular, si  $n = d$  esta es una solución dS, isotrópica en todas las  $d$  dimensiones espaciales con  $H = H_0 = \text{cte}$ , y un campo  $b$  no trivial tal que  $\mathcal{D}b = a^2(t)Y^{(1)}$  para el cual la condición de que  $\mathcal{D}b$  sea diagonal por bloques siempre se verifica puesto que hay solo un bloque.

### Geometría dS anisotrópica y $b = \mathbf{0}$

Si  $b = \mathbf{0}$ , entonces  $h_i = H_i$ . Una solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  se obtiene simplemente cuando  $h_i = h_{0,i}$  son las constantes que resuelven la ecuación (5.0.3). Esto corresponde a una solución dS anisotrópica en todas las  $n$  dimensiones espaciales, y una geometría estática en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales. Más aún, si  $c = \sum_{i=1}^n H_{i,0}$ , esta geometría dS anisotrópica tiene dilatón constante, y luego es dS en ambos marcos.

## 5.2. Estabilidad de las soluciones dS

Generalizando el análisis de estabilidad realizado en 3.4, se define  $y \equiv \mathcal{D}\Phi$  y se recuerda que las ecuaciones de movimiento (4.2.11c) and (4.1.3b) son ecuaciones diferenciales de primer orden para  $y$  y para todos los parámetros  $h_i$  respectivamente, mientras que (4.1.3a) es un vínculo entre dichas variables. Por lo tanto, una variación de las variables dinámicas  $\delta y = \delta(\mathcal{D}\Phi)$  y  $\delta h_i$  debe preservar el vínculo:

$$\begin{aligned} 0 &= 2y \delta y - \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \delta h_i + \sum_{i=1}^d \left( \delta h_i \frac{\partial F_h}{\partial h_i} + h_i \sum_{i'=1}^d \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \delta h_{i'} \right) \\ &= -2c \delta y + \sum_{i=1}^d \sum_{i'=1}^d h_i \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \delta h_{i'} , \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

donde todo está evaluado en la solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ , excepto las variaciones; por ejemplo:  $y = -c$  y  $h_i = h_{i,0}$ .

Realizando una variación en  $E_\Phi + E_n = 0$ , obtenemos

$$\mathcal{D}(\delta y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{i'=1}^d h_i \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \delta h_{i'} = -c \delta y , \quad (5.2.2)$$

evaluando en la solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  y tomando  $\frac{\partial F_h}{\partial h_{\alpha}^{(\tau)}} = 0$ . Luego, la dinámica de  $y = \mathcal{D}\Phi$  es estable en la solución  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  si  $c > 0$ , o es inestable si  $c < 0$ .

Pasando ahora a las ecuaciones (4.2.11c) que determinan la dinámica de  $h_i$ :

$$0 = \mathcal{D} \left( e^{-\Phi} \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) \iff 0 = -(\mathcal{D}\Phi) \frac{\partial F_h}{\partial h_i} + \mathcal{D} \left( \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) = -(\mathcal{D}\Phi) \frac{\partial F_h}{\partial h_i} + \sum_{i'=1}^d \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \mathcal{D} h_{i'} \quad (5.2.3)$$

y realizando las variaciones  $\delta y$  y  $\delta h_i$ , se obtiene:

$$0 = -\delta y \frac{\partial F_h}{\partial h_i} - y \delta \left( \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) + \mathcal{D} \left( \delta \left( \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) \right) \iff \mathcal{D} \left( \delta \left( \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) \right) = -c \delta \left( \frac{\partial F_h}{\partial h_i} \right) \quad (5.2.4)$$

donde  $\frac{\partial F_h}{\partial h_i} = 0$  fue evaluado en la solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ .

En consecuencia, la dinámica de cada derivada parcial  $\frac{\partial F_h}{\partial h_i}$  es estable en la solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  si  $c > 0$ , o es inestable si  $c < 0$ .

Más aún, (5.2.4) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{i'=1}^d \left( \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \mathcal{D}(\delta h_{i'}) + \mathcal{D} \left( \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \right) \delta h_{i'} \right) &= -c \sum_{i'=1}^d \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \delta h_{i'} \\ \iff \sum_{i'=1}^d \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \left( \mathcal{D}(\delta h_{i'}) + c \delta h_{i'} \right) &= 0 \iff \mathcal{D}(\delta h_{i'}) = -c \delta h_{i'}, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

donde en el segundo renglón usamos que  $\mathcal{D} \left( \frac{\partial^2 F_h}{\partial h_{i'} \partial h_i} \right) = 0$ , ya que  $h_i = \text{cte}$ , y asumimos que la matriz Hessiana de  $F_h$  es invertible. Entonces, la dinámica de cada parámetro  $h_i$  es estable en la solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  si  $c > 0$ , o es inestable si  $c < 0$ .

Por lo tanto, una solución (posiblemente dS) con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  descrita por  $(h_{0,1}, \dots, h_{0,d}, c)$  es estable si  $c > 0$  o es inestable si  $c < 0$ , para la dinámica de  $\Phi$  y de  $h_i$ . En el caso  $c = 0$ , se requiere un análisis más profundo. En particular, una solución con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  con dilatón constante es estable si  $c = \sum_{i=1}^d H_i = \text{constante} > 0$ .

Nótese que la simetría ante inversión temporal siempre permite obtener una solución dS estable a partir de una solución con  $c \neq 0$ , ya que transforma  $(h_{0,1}, \dots, h_{0,d}, c)$  a  $(-h_{0,1}, \dots, -h_{0,d}, -c)$ . Más aún, si  $\vec{h}_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,d})$  resuelve (5.0.3), entonces cualquier otro de los posibles  $2^d - 1$  vectores  $(\pm h_{0,1}, \dots, \pm h_{0,d})$  que se obtienen de cambiar algunos signos de las componentes también la resuelve. Luego, siempre se puede elegir una solución dS  $(h_{0,1}, \dots, h_{0,d}, c)$  que sea estable y expansiva en algunas direcciones, y contractiva en las otras, siempre y cuando estas direcciones no sean estáticas.

# Capítulo 6

## Sutilezas en el carácter no perturbativo de las soluciones dS

En este capítulo resumimos el procedimiento para obtener soluciones dS no perturbativas, y en particular aquellas con dilatón constante. También discutimos los obstáculos para determinar si hay o no soluciones dS, si solo se conoce como dato la expansión asintótica de la función  $F_n(H)$ . Para una mayor claridad, presentamos los argumentos en el caso simple de una geometría dS isotrópica con  $b = 0$  analizado en el capítulo 3, y la extensión al caso generalizado se presenta en el apéndice D.

Si la función  $F_n(H)$  se define para valores finitos (no infinitesimales) de  $\sqrt{\alpha'}H$  y todos los coeficientes  $c_k^{(n)}$  son conocidos, entonces contiene información no perturbativa de la teoría. Como se discutió en los capítulos previos, en este caso la teoría admite soluciones dS no perturbativas si  $F'_n(H) = 0$ ,  $F_n(H) = c^2 \geq 0$  y  $\mathcal{D}\Phi = -c$ . Para hallar explícitamente estas soluciones, y especialmente para determinar si admiten un dilatón constante, se deben implementar los siguientes pasos:

1. Calcular las raíces  $H_0 \neq 0$  de  $F'_n$ . Puesto que  $F_n(H_0) = F_n(-H_0) \implies F'_n(H_0) = -F'_n(-H_0)$ , dada una raíz  $H_0$  va a haber otra  $-H_0$ , y luego uno puede elegir solo las raíces positivas  $H_0 > 0$ , correspondientes a cosmologías expansivas en el marco de cuerdas.
2. Quedarse solo con las raíces  $H_0$  tales que  $F_n(H_0) = c^2 \geq 0$  es un número no negativo.
3. Para cada uno de estos valores de  $H_0$  hay una solución dS no perturbativa en el marco



de cuerdas como (3.2.4) si  $\mathcal{D}\Phi = \mp\sqrt{F_n(H_0)} = \mp|c| = -c$ , para cada elección de signo( $c$ ). Luego, asumiendo  $c \neq 0$ , hay dos soluciones dS: una estable para  $c > 0$ , y una inestable para  $c < 0$ . La solución estable es una métrica dS expansiva en el marco de cuerdas, correspondiente al cuadrante verde ( $H_0 > 0, c > 0$ ) de la figura 1a. Entonces es también una solución expansiva en el marco de Einstein con  $H_E(t) > 0$  si  $n < d$  o si  $c > H_0$  (regiones celeste y verde claro en la figura 1b).

4. En particular, si  $c = nH_0 \iff \mathcal{D}\phi = 0$ , hay una solución dS no perturbativa con dilatón constante  $\phi$ , que puede ser tomada como estable y expansiva en ambos marcos.

Para ilustrar el procedimiento, consideremos por ejemplo (no relacionado con teoría de cuerdas) que:  $F_n(H) = F_0 \cos(\sqrt{\alpha'}H)$  con  $F_0 = \tilde{F}_0/\alpha' > 0$  una constante dimensional. Los pasos previos resultan:

1.  $F'_n(H_0) = -F_0\sqrt{\alpha'} \sin(\sqrt{\alpha'} H_0) = 0 \implies \sqrt{\alpha'} H_0 = m_1\pi \iff H_0 = H_{0,m_1} = \frac{m_1\pi}{\sqrt{\alpha'}}$   
con  $m_1 > 0$  entero positivo ya que solo nos quedamos con las soluciones con  $H_0 > 0$ .
2. Nos quedamos con las raíces  $H_0 = H_{0,m_1}$  tales que

$$F_n(H_0) = F_0 \cos(m_1\pi) = F_0 (-1)^{m_1} = c^2 \geq 0 \iff (-1)^{m_1} = +1,$$

es decir, nos quedamos solo con las raíces con  $m_1 = 2m$  par y positivo.

3. Para cada uno de estos valores  $H_0 = H_{0,2m}$ , hay dos soluciones dS con  $\mathcal{D}\Phi = -c$ : una estable con  $c = +\sqrt{F_0}$  y una inestable con  $c = -\sqrt{F_0}$ . Eligiendo la primera, para cada  $m \in \mathbb{N}$  hay una solución estable y expansiva en el marco de cuerdas descrita por  $\left(H_{0,2m} = \frac{2m\pi}{\sqrt{\alpha'}}, c = +\sqrt{F_0}\right)$ . Si  $n < d$  o si  $c > H_0$ , también es expansiva en el marco de Einstein.
4. En particular, si  $F_0 = n^2 H_{0,2m_\phi}^2$  para un cierto  $m_\phi \in \mathbb{N}$ , hay una solución dS no perturbativa  $\left(H_{0,2m_\phi} = \frac{2m_\phi\pi}{\sqrt{\alpha'}}, c = +\sqrt{F_0} = nH_{0,2m_\phi}\right)$  con dilatón constante  $\phi$ , que puede ser tomada como estable y expansiva en ambos marcos.

En cambio, si la única información disponible de la teoría es la expansión asintótica de  $F_n(H)$ , no es posible determinar si hay o no soluciones dS no perturbativas. Para mostrar esto, supongamos que solo los valores de los coeficientes  $c_k^{(n)}$  de la expansión perturbativa son

conocidos, y que  $\tilde{F}_n(\tilde{x}) \equiv \alpha' F_n(H)$  es una función adimensional de la variable adimensional  $\tilde{x} \equiv \sqrt{\alpha'} H$ . En este caso, no se puede distinguir entre  $\tilde{F}_n(\tilde{x})$  y otras funciones con la misma expansión asintótica alrededor de  $\tilde{x} \sim 0$ , como  $\tilde{F}_n(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})$  con  $\tilde{h}(\tilde{x} \sim 0) \sim 0$ . En otras palabras, se necesita información no perturbativa de la teoría para distinguir entre funciones perturbativamente equivalentes que pertenecen a la misma clase de equivalencia

$$[\tilde{F}_n] = \{\tilde{F}_n(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x}) : \tilde{h}(\tilde{x} \sim 0) \sim 0\}. \quad (6.0.1)$$

Una función  $\tilde{h}(\tilde{x})$  con expansión asintótica trivial  $\tilde{h}(\tilde{x}) \sim 0$  se dice que es subdominante [20]: decae más rápido que cualquier polinomio  $\tilde{x}^n$  cuando  $\tilde{x} \sim 0$ . Dado que  $\tilde{F}_n(\tilde{x})$  es par (es decir, solo depende de  $\tilde{x}^2 \propto \alpha' \text{tr}(\mathcal{DS}^2)$ ), y luego preserva las simetrías de dualidad y de inversión temporal), las funciones subdominantes también deben ser pares:  $\tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}(-\tilde{x})$ .

Por ejemplo, una función con expansión asintótica de la forma (3.1.6) (o sea, que pertenece a  $[\tilde{F}_n]$ ) que admite una solución dS  $(H_0, c) = (H_0, nH_0) = \left(\frac{\tilde{x}_0}{\sqrt{\alpha'}}, \frac{n\tilde{x}_0}{\sqrt{\alpha'}}\right)$  con dilatón constante para algún  $\tilde{x}_0$  a elección, siempre puede ser construida añadiéndole a  $\tilde{F}_n(\tilde{x})$  una función subdominante  $\tilde{h}(\tilde{x})$  como

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = \chi_0 \left( e^{-\frac{\chi_1}{2\tilde{x}^2}} - e^{-\frac{\chi_1}{\tilde{x}^2}} \right) - \chi_2 e^{-\frac{1}{2\tilde{x}^2}}, \quad (6.0.2)$$

con  $\chi_0, \chi_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_1 > 0$ . De hecho, dada una cierta  $\tilde{F}_n \in [\tilde{F}_n]$  y un cierto valor  $\tilde{x}_0 > 0$ , los  $\chi_i$  pueden ser elegidos de forma que  $\tilde{F}'_n(\tilde{x}_0) + \tilde{h}'(\tilde{x}_0) = 0$  y  $\tilde{F}_n(\tilde{x}_0) + \tilde{h}(\tilde{x}_0) = n^2 \tilde{x}_0^2$ . Por ejemplo, tomemos  $\chi_1$  como

$$e^{-\frac{\chi_1}{2\tilde{x}_0^2}} = \frac{1}{2} \iff \chi_1 = \chi_1(\tilde{x}_0) = 2\tilde{x}_0^2 \ln(2) > 0, \quad (6.0.3)$$

$\chi_2$  como

$$\tilde{h}'(\tilde{x}_0) = -\tilde{F}'_n(\tilde{x}_0) \iff \chi_2 = \chi_2(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0^3 e^{\frac{1}{2\tilde{x}_0^2}} \tilde{F}'_n(\tilde{x}_0), \quad (6.0.4)$$

y finalmente  $\chi_0$  como

$$\tilde{h}(\tilde{x}_0) = n^2 \tilde{x}_0^2 - \tilde{F}_n(\tilde{x}_0) \iff \chi_0 = \chi_0(\tilde{x}_0) = 4 \left( n^2 \tilde{x}_0^2 - \tilde{F}_n(\tilde{x}_0) + \tilde{x}_0^3 \tilde{F}'_n(\tilde{x}_0) \right), \quad (6.0.5)$$

donde usamos las expresiones particulares de  $\chi_{1,2}(\tilde{x}_0)$  y despejamos  $\chi_0$ , expresándolo en términos de  $\tilde{x}_0$ . Por lo tanto, la teoría descrita no perturbativamente por  $\tilde{F}_n(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})$  admite una solución dS  $(H_0, c) = \left(\frac{\tilde{x}_0}{\sqrt{\alpha'}}, \frac{n\tilde{x}_0}{\sqrt{\alpha'}}\right)$  con dilatón constante, que es estable y expansiva en ambos marcos.

Consecuentemente, el conocimiento de la expansión asintótica de la teoría (o sea, de los coeficientes) no es suficiente para determinar si admite soluciones dS de la forma (3.2.4). Se necesita información no perturbativa, lo cual parece tener sentido ya que las soluciones dS accesibles son no perturbativas.

En particular, si el Lagrangiano es una función analítica, la expansión asintótica debe tener un radio de convergencia mayor a cero. Cuando se elige una función de la clase de equivalencia  $[\tilde{F}_h]$  igual a la serie convergente en un entorno de cero, se está imponiendo implícitamente información no perturbativa, ya que ahora se pueden distinguir funciones perturbativamente equivalentes. Entonces no se puede añadir libremente una función subdominante como antes porque rompería el carácter analítico del Lagrangiano. En principio, no parece haber razón para asumir que el Lagrangiano es analítico, especialmente en la teoría clásica de cuerdas, donde éste es construido perturbativamente.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En el presente trabajo hemos examinado las ecuaciones de movimiento de la cosmología invariante ante dualidad introducida en [5]. Asumiendo un ansatz algo general para los campos, determinamos las condiciones para obtener soluciones dS no perturbativas en el marco de cuerdas, y también en el marco de Einstein si es que el dilatón es constante. Estas soluciones surgen en el sector de carga de Noether nula ( $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ ). Hallamos vacíos dS isotrópicos y anisotrópicos en  $n \leq d$  dimensiones espaciales, con campo  $b$  nulo y no nulo, respectivamente, y determinamos su estabilidad. En particular, las soluciones dS estables e inestables con dilatón constante son nuevas en el contexto de cosmología invariante ante dualidad, y pueden dar lugar a interesantes implicaciones e interpretaciones. También se pueden obtener métricas con factores de escala acotados cuando el campo  $b$  posee una dinámica no trivial en el sector  $\mathcal{Q} \neq \mathbf{0}$ .

El procedimiento para obtener soluciones dS no perturbativas, y en particular aquellas con dilatón constante que son también geometrías dS en el marco de Einstein, fue resumido en el capítulo 6, donde además discutimos su carácter no perturbativo. Argumentamos que, aunque se conozca toda la expansión asintótica de la teoría, se necesita información no perturbativa para determinar si la teoría admite soluciones dS no perturbativas. De lo contrario, siempre se puede construir una función subdominante adecuada que de lugar a dichas soluciones.

Concluimos con algunos problemas abiertos y algunas direcciones interesantes para continuar esta investigación.

Habiendo mostrado que el espacio de teorías cosmológicas invariantes ante dualidad con-

tiene teorías con vacíos dS no perturbativos así como otras soluciones interesantes, determinar si el paisaje de la teoría de cuerdas posee este tipo de vacíos resulta muy relevante. En este sentido, son alentadores los increíbles logros de las construcciones de doble copia de todas las amplitudes de cuerdas bosónicas y heteróticas sin masa a nivel árbol, ya que no solo parecen capaces de determinar toda la expansión perturbativa clásica, sino que también sugieren una conexión con aspectos no perturbativos de la teoría de cuerdas [21] (ver también [22]). Similarmente, construcciones alternativas basadas en la simetría de dualidad, como la teoría doble de campos [23] (ver [24]), han avanzado sustancialmente en la comprensión de la estructura de los términos con muchas derivadas [25]. Establecer la conexión precisa entre la expansión en  $\alpha'$  de cuerdas y las funciones  $F_n(H)$  en (3.1.6) o  $F_h(h_1, \dots, h_d)$  en (4.1.12) es un problema relevante para resolver, con el objetivo de llenar este hueco.

En esta dirección, bajo ciertas suposiciones, el teorema no-go de [3] descarta construcciones de hoja de mundo de espacio-tiempos macroscópicos dS $_n$  con  $n \geq 4$  en cuerdas heteróticas y de tipo II (sin flujos RR), y captura todas las correcciones perturbativas y no perturbativas en  $\alpha'$ . Si dicho teorema aplica correctamente en el contexto de cosmología invariante ante dualidad, se sigue que la teoría clásica de cuerdas no es uno de los puntos del espacio de teorías invariantes ante dualidad que admiten soluciones dS macroscópicas no perturbativas<sup>1</sup>, es decir la función  $F_n(H)$  (o  $F_h(h_1, \dots, h_d)$ ) que describe el Lagrangiano efectivo a bajas energías de cuerdas no admitiría una solución macroscópica de la forma (3.2.4) (o (5.0.3)). Que sea macroscópica significa que el radio  $l$  de dS es mucho mayor a la escala de longitud de la cuerda  $l = 1/H_0 \gg l_s = \sqrt{\alpha'} \iff H_0 \ll 1/\sqrt{\alpha'}$ ; y como nuestras soluciones dS son no perturbativas en  $\alpha'$ , en principio es factible que  $H_0 = \mathcal{O}(1/\sqrt{\alpha'})$  no sea mucho más pequeño que  $1/\sqrt{\alpha'}$ , es decir que sean soluciones dS microscópicas con radios del orden de la longitud de la cuerda, que no son descartadas por el teorema no-go. No obstante, las soluciones dS euclídeas y microscópicas halladas en [3] no están exentas de problemas: Sólo existen para unos pocos valores aislados de  $l/l_s$  (no muy grandes, entre 2 y 6), y no tienen una continuación analítica natural a signatura Lorentziana (aunque pueden haber sutilezas en esto último, que es el problema más importante). A pesar de que estas soluciones dS microscópicas no sirven para describir el estado actual del universo (cuya escala de longitud es muy grande), podrían ser útiles para describir la etapa de inflación (cuya escala de longitud

---

<sup>1</sup>Le agradecemos a S. Sethi y a O. Hohm por una discusión en este asunto.

es muy chica).

La construcción explícita de modelos fenomenológicos es otro asunto que merece mayor investigación. Las correcciones de muchas derivadas han sido identificadas como elementos importantes en la generación de una expansión acelerada. Mezcladas con efectos adicionales, como un campo escalar en el escenario de inflación geométrica [26] o monopolos KK que llenan el espacio-tiempo [27], los términos con muchas derivadas juegan un rol central. Desde esta perspectiva, vale la pena estudiar las posibles consecuencias que pueden resultar de las soluciones dS de la cosmología invariante ante dualidad para la construcción de modelos.

Por ejemplo, sería interesante hallar cosmologías de rebote [28], o nuevas cosmologías anisotrópicas que resuelvan la singularidad del Big-Bang, que puede incluir al campo  $b$ , extendiendo de esta forma [29] a escenarios más realistas. Otra continuación natural de nuestro trabajo sería calcular las ecuaciones de movimiento del ansatz generalizado incluyendo materia, siguiendo los pasos propuestos en [6]. Esto permitiría examinar interacciones entre materia y el campo  $b$ , incluyendo también métricas diagonales más genéricas.

Un mecanismo posible para la decompactificación de  $n = 3$  dimensiones espaciales fue considerado en [8], en el espíritu de la cosmología de gas de cuerdas [12]. Esto fue estudiado asumiendo un factor de escala dinámico y uno estático junto con la aniquilación de modos de winding en  $n$  dimensiones espaciales (representados por materia que verifica una cierta ecuación de estado) y su presencia en las restantes  $d - n$  dimensiones espaciales. Se mostró que este modelo resuelve los problemas de tamaño y horizonte de la cosmología estándar de Big Bang si el valor inicial del dilatón es suficientemente chico, y también que es compatible con la conjetura de censura Trans-planckiana [30], lo cual exhibe su relevancia fenomenológica. Se podría lograr un entendimiento más detallado de las transiciones entre las diferentes etapas del universo modelado en [8] (en particular del propio proceso de decompactificación) si se utilizan las geometrías con dos factores de escala dinámicos obtenidas en los capítulos previos. La interacción con el campo  $b$  puede llegar a tener un rol interesante. Por ejemplo, puede ser una forma de confinar la expansión de las dimensiones internas, ya que el factor de escala puede estar acotado cuando el campo  $b$  tiene una dinámica no trivial.

Proponer ansatzs más generales es otra línea de futura investigación que puede dar lugar a fenómenos cualitativamente nuevos con potenciales aplicaciones cosmológicas. Por ejemplo, añadir campos de gauge podría generar más sorpresas.

Finalmente, el análisis del capítulo 3 puede ser fácilmente extendido a las soluciones Anti-dS (AdS) isotrópicas obtenidas en [31], en donde los campos solo dependen de una coordenada espacial  $x$  en vez de la coordenada temporal. Más precisamente, se pueden obtener nuevas soluciones AdS no perturbativas estables e inestables con  $\partial_x \Phi = -\bar{c} \neq 0$ ,  $\bar{F}(\bar{H}_0) = \bar{c}^2$ ,  $\bar{F}'(\bar{H}_0) = 0$  (ver [31] para las definiciones), y aquellas que verifiquen  $\bar{c} = d\bar{H}_0$  tienen dilatón constante, siendo así AdS tanto en el marco de cuerdas como en el marco de Einstein. Estas soluciones podrían tener aplicaciones útiles. Más aún, el ansatz del capítulo 3 con direcciones estáticas, o el ansatz general del capítulo 4, podrían ser trabajados en este caso, incluyendo métricas anisotrópicas o campo  $b$  no nulo, y dar lugar a nuevas soluciones AdS no perturbativas.

# Apéndice A

## Aspectos de la clasificación de teorías cosmológicas invariantes ante dualidad

Consideremos la acción efectiva a bajas energías de teoría de cuerdas (ver sección 7.3 de [32], o sección 3.7 de [33]), para la métrica  $g_{\mu\nu}$ , el campo antisimétrico  $b_{\mu\nu}$ , y el campo escalar dilatón  $\phi$ , en un espacio-tiempo de dimensión  $D = d + 1$  (con  $d$  dimensiones espaciales):

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} H^2 + \mathcal{O}(\alpha') \right) \equiv I_0 + \mathcal{O}(\alpha') \quad (\text{A.0.1})$$

donde  $H^2 = H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}$ ,  $H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]}$  (o sea  $H = dB$ ), y  $R$  es el escalar de Ricci de la métrica  $g$ . En la expresión anterior, solo se escribieron explícitamente los términos de  $I_0$  con dos derivadas a orden cero en  $\alpha'$ . Por supuesto, esta es la métrica  $g_{\mu\nu}$  del marco de cuerdas.

Para que nuestros resultados sean particularmente útiles en contextos cosmológicos, proponemos que los campos  $g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi$  solo dependan de la coordenada temporal. Y si dicha



coordenada no es periódica, se puede tomar sin pérdida de generalidad que <sup>1</sup>:

$$g_{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} -n^2(t) & 0 \\ 0 & g_{ij}(t) \end{pmatrix} \text{ con } n(t) > 0 \text{ y } b_{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.0.2})$$

Realizando las definiciones de los multipletes  $\mathcal{S}, \Phi, n$  de  $O(d, d)$  y de la derivada temporal covariante  $\mathcal{D}$  explicadas con detalle en la sección 2.1, podemos reescribir la acción (A.0.1) de forma explícitamente invariante ante dualidad como (ver sección 2.1 de [5]):

$$I = I_0 + \mathcal{O}(\alpha') = \int dt n e^{-\Phi} \left( -(\mathcal{D}\Phi)^2 - \frac{1}{8} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^2) + \mathcal{O}(\alpha') \right) \quad (\text{A.0.3})$$

Si variamos a  $I_0$  (a orden  $\alpha'^0$ ) respecto a  $\Phi, \mathcal{S}, n$  obtenemos:

$$\delta_{\Phi, \mathcal{S}, n} I_0 = \int dt n e^{-\Phi} \left( \delta\Phi E_\Phi|_0 + \underbrace{\text{tr}(\delta\mathcal{S}F_\mathcal{S}|_0)}_{\text{tr}(\delta X E_\mathcal{S}|_0)} + \frac{\delta n}{n} E_n|_0 \right) \quad (\text{A.0.4})$$

Siendo  $\delta\mathcal{S} = P_T(\delta X)$  con  $\delta X$  irrestricto, y  $E_\mathcal{S}|_0 = P_T(F_\mathcal{S}|_0)$ , tal como se explicó en la sección 2.2. Notar que  $E_\Phi = E_\Phi|_0 + \mathcal{O}(\alpha')$ ,  $E_\mathcal{S} = E_\mathcal{S}|_0 + \mathcal{O}(\alpha')$ ,  $E_n = E_n|_0 + \mathcal{O}(\alpha')$  son los términos de orden  $\alpha'^0$  de las ecuaciones de movimiento. Más específicamente, se puede deducir (ver sección 2.1 de [5]) que son:

$$\begin{aligned} E_n|_0 &= (\mathcal{D}\Phi)^2 + \frac{1}{8} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^2) \\ E_\Phi|_0 &= 2\mathcal{D}^2\Phi - (\mathcal{D}\Phi)^2 + \frac{1}{8} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^2) \\ E_\mathcal{S}|_0 &= \frac{1}{4} (\mathcal{D}^2\mathcal{S} + \mathcal{S}(\mathcal{D}\mathcal{S})^2 - \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\mathcal{S}) \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

---

<sup>1</sup>Esto es porque, si reducimos dimensionalmente la teoría solo a una dimensión que es la temporal (o equivalentemente compactificamos las  $d$  dimensiones espaciales en  $T^d$  ignorando los modos masivos de Kaluza-Klein), es posible tomar  $g_{0i} = 0$ ,  $b_{0i} = 0$ . Más específicamente, los campos de gauge  $A_0^{(1)i}(t)$ ,  $A_0^{(2)i}(t)$  que describen  $g_{0i}$  y  $b_{0i}$  respectivamente (como en [10]), son 1-formas en una variedad diferencial de dimensión 1, por lo que siempre son cerradas. Más aún, asumiendo que dicha variedad de dimensión 1 es conexa y no es homeomórfica a  $S^1$  (es decir, si la coordenada temporal no es periódica), debe ser homeomórfica a  $\mathbb{R}$ , o a  $[0, \infty)$  o a  $[0, 1]$  [34]. Entonces debe ser simplemente conexa, y luego su primer grupo de cohomología es trivial (Teorema 6.5 en [35]): Toda 1-forma en nuestra variedad simplemente conexa de dimensión 1 es cerrada, y también exacta. En otras palabras, siempre podemos escribir  $A = A_0(t)dt = dh$  para  $h(t) = \int_{t_0}^t A_0(t')dt'$ , por lo que todo campo de gauge (1-forma)  $A$  en una variedad conexa de dimensión 1 (no homeomórfica a  $S^1$ ) es puro gauge: Existe un gauge  $A \rightarrow A' = A - dh = 0$  en el cual el campo de gauge es igual a  $A' = 0$ . De esta forma, podemos tomar  $A_0^{(1)i}(t) = A_0^{(2)i}(t) = 0 \implies g_{0i} = b_{0i} = 0$ .

que coinciden con las ecuaciones de movimiento (2.2.20) a orden  $\alpha'^0$  si consideramos que  $c_1 = -1/8$ .

Ahora consideremos la teoría con todas las correcciones  $\alpha'^k$ : La acción completa es  $I = I_0 + I_1 + I_2 + (\dots) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$ , con  $I_k = \mathcal{O}(\alpha'^k)$ . Para que la acción  $I$  sea invariante ante  $O(d, d; \mathbb{R})$  (dualidad), la parte  $I_k$  de orden  $\alpha'^k$  va a ser igual a una suma de términos  $I_k = \sum_{p=1}^{N(k)} I_{k,p}$  donde cada término  $I_{k,p}$  debe ser igual a  $\alpha'^k$  por un coeficiente adimensional  $c_{k,p}$  por la integral (con medida  $dt n e^{-\Phi}$ ) de un producto de derivadas covariantes del dilatón  $\Phi$  y trazas de productos de  $\mathcal{S}$  y sus derivadas covariantes. Es decir:

$$I_{k,p} = \alpha'^k c_{k,p} \int dt n e^{-\Phi} \prod_i (\mathcal{D}^{j_i} \Phi)^{n_i} \prod_l \text{tr} ((\mathcal{D}^{k_{l,1}} \mathcal{S})^{m_{l,1}} (\dots) (\mathcal{D}^{k_{l,q_l}} \mathcal{S})^{m_{l,q_l}}) \quad (\text{A.0.6})$$

Como  $I_k$  debe tener la misma dimensión que  $I_0$ , y  $c_{k,p}$  son adimensionales (pues son de orden  $\alpha'^0$ , y no hay otra escala en la teoría además de  $\alpha'$ ), entonces deben haber exactamente  $2k + 2$  derivadas. Como hay una cantidad finita de términos de la forma de  $I_{k,p}$  con  $2k + 2$  derivadas, entonces  $N(k)$  es finito.

Además, las derivadas deben ser covariantes, ya que el integrando en la medida  $dt n e^{-\Phi}$  debe ser un escalar ante reparametrizaciones temporales.

Asumir que toda la dependencia de la acción en el dilatón (no derivado) está contenida en el factor exponencial de la medida de integración, significa que  $j_i \geq 1$ , de forma que los términos  $(\mathcal{D}^{j_i} \Phi)^{n_i}$  solo dependen de derivadas del dilatón generalizado. Por otro lado, el resto de las potencias  $n_i, k_{l,s}, m_{l,s}$  pueden tomar cualquier valor entero no negativo (incluyendo el cero). También se asumió que las transformaciones de los multipletes ante dualidad poseen la misma forma a todo orden en  $\alpha'$ .

En [5], para simplificar la forma de las correcciones  $I_{k,p}$  y remover términos no deseados, se aplican sucesivas redefiniciones infinitesimales (pues se hacen variaciones de orden  $\alpha'^k$ ) de los campos de la forma:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \alpha'^k \delta\Phi \quad \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \alpha'^k \underbrace{\delta\mathcal{S}}_{= P_T(\delta X)} \quad n \rightarrow n + \alpha'^k n \frac{\delta n}{n} . \quad (\text{A.0.7})$$

Entonces, para ver cómo cambian los términos  $I_k$  de orden  $\alpha'^k$  de la acción, solo es necesario variar  $I_0$  pues  $\delta I_0$  va a ser de orden  $\alpha'^k$  y  $\delta I_l$  va a ser de orden mayor para  $l \geq 1$ . Es decir,

la variación de  $I$  resulta ser:

$$\begin{aligned} \delta I &= \underbrace{\delta I_0}_{=\mathcal{O}(\alpha'^k)} + \mathcal{O}(\alpha'^{k+1}) = \alpha'^k \underbrace{\int dt n e^{-\Phi} \left( \delta\Phi E_\Phi|_0 + \text{tr}(\delta X E_S|_0) + \frac{\delta n}{n} E_n|_0 \right)}_{\text{Afecta solo a } I_k} + \mathcal{O}(\alpha'^{k+1}) \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Luego de aplicar una secuencia de redefiniciones infinitesimales orden a orden en  $\alpha'$  para ir moldeando de a uno (y en orden creciente) a los términos  $I_k$  de manera que posean la forma deseada, Hohm y Zwiebach mostraron (ver sección 2.2 de [5] para entender en detalle este procedimiento) que se pueden escribir las correcciones de orden  $\alpha'^k$  en la acción de la forma:

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{P \in \text{Part}(k+1,2)} \overbrace{\alpha'^k c_{k+1,P} \int dt n e^{-\Phi} \prod_{m \in P} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m})}^{I_{k,P}} \\ &= \underbrace{\alpha'^k c_{k+1,\{k+1\}} \int dt n e^{-\Phi} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^{2k+2})}_{\text{Una sola traza}} + \underbrace{\sum_{\substack{P \in \text{Part}(k+1,2) \\ |P| \geq 2}} \alpha'^k c_{k+1,P} \int dt n e^{-\Phi} \prod_{m \in P} \text{tr}((\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m})}_{\text{Múltiples trazas}} \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

Donde se está sumando sobre todas las particiones  $P \in \text{Part}(k+1, 2)$  del número  $k+1$  que no utilicen el número 1 (es decir, sobre todas las formas de expresar al número  $k+1$  como suma de números mayores o iguales a 2:  $k+1 = \sum_{m \in P} m$ ). En total, hay  $p(k+1, 2) = p(k+1) - p(k)$  términos en dicha sumatoria (siendo  $p(n)$  el número irrestricto de particiones de un natural  $n$ ).

Se separó en el término que contiene una sola traza (que se corresponde con la única partición  $P = \{k+1\}$  que posee un único elemento,  $|P| = 1$ ), y el resto de los términos que contienen múltiples trazas (que se corresponden con el resto de las particiones, que poseen dos o más elementos:  $|P| \geq 2$ ; notar que  $|P| \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ ).

Resulta muy simple ver, juntando todas las correcciones para formar  $I = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k$  y redefiniendo el índice mudo  $k \rightarrow k-1$ , que la acción termina teniendo la forma de la ecuación (2.1.4).

# Apéndice B

## Ecuaciones de movimiento en el ansatz generalizado

En este apéndice mostraremos los detalles del procedimiento para obtener las ecuaciones de movimiento en el ansatz generalizado de matrices  $g, \mathcal{D}g, \mathcal{D}b$  que conmutan entre ellas. En este caso,  $g^{-1}, \mathcal{D}(g^{-1})$  también conmutan con ellas, y la matriz  $(\mathcal{D}\mathcal{S})^2$  toma la forma

$$(\mathcal{D}\mathcal{S})^2 = \begin{pmatrix} A & [b, A] \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.1})$$

con  $A \equiv -g^{-2}(\mathcal{D}g)^2 + g^{-2}(\mathcal{D}b)^2$ . No es difícil mostrar por inducción en  $m \in \mathbb{N}$  que:

$$(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m} = \begin{pmatrix} A^m & [b, A^m] \\ 0 & A^m \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.2})$$

En particular,  $\text{tr}[(\mathcal{D}\mathcal{S})^{2m}] = 2 \text{tr}(A^m)$ , y luego

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}\mathcal{S}) = -2c_1 \text{tr}(A) - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha' k^{-1} \sum_{P \in \text{Part}(k,2)} 2^{|P|} c_{k+1,P} \prod_{m \in P} \text{tr}(A^m) \equiv \mathcal{F}_a(A). \quad (\text{B.0.3})$$

Además, de la ecuación (2.2.15) podemos escribir

$$\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) = \mathcal{D}\mathcal{S} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{F}'_a(A) & [b, \mathcal{F}'_a(A)] \\ 0 & \mathcal{F}'_a(A) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.4})$$

y luego, es fácil ver que  $\text{tr}(\mathcal{D}\mathcal{S} \mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})) = 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_a(A))$ . Así, las ecuaciones de movimiento más simples (2.2.20a) y (2.2.20b) resultan ser:

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}_a(A) + 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_a(A)) = 0, \quad (\text{B.0.5a})$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_b(A)) = 0. \quad (\text{B.0.5b})$$

Para calcular la ecuación de movimiento para variaciones de  $\mathcal{S}$ , o equivalentemente la conservación de  $\mathcal{Q}$ , calculamos el producto

$$\mathcal{S} \mathcal{D}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} g\mathcal{D}(g^{-1}) + bg^{-1}(\mathcal{D}b)g^{-1} & -\mathcal{D}b - b\mathcal{D}(g^{-1})g - g\mathcal{D}(g^{-1})b - bg^{-1}(\mathcal{D}b)g^{-1}b \\ g^{-1}(\mathcal{D}b)g^{-1} & g^{-1}\mathcal{D}(g) - g^{-1}(\mathcal{D}b)g^{-1}b \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.6})$$

Esta expresión es absolutamente general. Ahora, imponiendo el ansatz generalizado, y tomando a  $g$  diagonal y  $b(t_0) = \mathbf{0}$  sin pérdida de generalidad, de forma que  $b$  conmute con  $g, g^{-1}, \mathcal{D}(g^{-1}), \mathcal{D}g$  (puede no conmutar con  $\mathcal{D}b$ ), esta expresión se reduce a

$$\mathcal{S} \mathcal{D}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -g^{-1}\mathcal{D}g + g^{-2}b(\mathcal{D}b) & -\mathcal{D}b + 2(g^{-1}\mathcal{D}g)b - g^{-2}b(\mathcal{D}b)b \\ g^{-2}(\mathcal{D}b) & g^{-1}\mathcal{D}(g) - g^{-2}(\mathcal{D}b)b \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.7})$$

Por lo tanto, en este ansatz generalizado la conservación de la carga de Noether toma la forma:

$$-\frac{\mathcal{Q}}{2} = e^{-\Phi} \mathcal{S}\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S}) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2 & \mathcal{Q}_4 \\ \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.8})$$

o equivalentemente, computando cada bloque de  $\mathcal{S}\mathcal{F}'(\mathcal{D}\mathcal{S})$  usando (B.0.4) y (B.0.7):

$$\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} (-g^{-1}\mathcal{D}g + b g^{-2}(\mathcal{D}b))\mathcal{F}'_a(A), \quad (\text{B.0.9a})$$

$$\mathcal{Q}_4 = e^{-\Phi} ((-\mathcal{D}b + bg^{-1}\mathcal{D}g)\mathcal{F}'_a(A) - (-g^{-1}\mathcal{D}g + bg^{-2}(\mathcal{D}b))\mathcal{F}'_a(A)b), \quad (\text{B.0.9b})$$

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} g^{-2}(\mathcal{D}b)\mathcal{F}'_a(A), \quad (\text{B.0.9c})$$

$$\mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} (g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(A) - g^{-2}(\mathcal{D}b)\mathcal{F}'_a(A)b). \quad (\text{B.0.9d})$$

La condición  $\mathcal{Q} \in \mathfrak{so}(d, d)$  significa que  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$  deben ser antisimétricas, y que  $\mathcal{Q}_2$  debe ser simétrica.

Las primeras dos ecuaciones pueden ser utilizadas para reescribir el sistema previo de ecuaciones como

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} g^{-2}(\mathcal{D}b)\mathcal{F}'_a(A), \quad \mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(A) - \frac{1}{2}\{b, \mathcal{Q}_1\}, \quad (\text{B.0.10a})$$

$$2\mathcal{Q}_3 = [b, \mathcal{Q}_1], \quad \mathcal{Q}_4 = -g^2 \mathcal{Q}_1 + b \left( \mathcal{Q}_2 + \frac{1}{2}\{b, \mathcal{Q}_1\} \right) - (\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2)b \quad (\text{B.0.10b})$$

La primera ecuación implica que  $\mathcal{Q}_1$  conmuta con  $g, g^{-1}, \mathcal{D}g, \mathcal{D}b$  para todo tiempo. Luego, la tercera ecuación se verifica trivialmente para  $\mathcal{Q}_3 = \mathbf{0}$ , ya que  $b(t_0) = \mathbf{0}$ , y entonces

$$\mathcal{D}([b(t), \mathcal{Q}_1]) = [\mathcal{D}b(t), \mathcal{Q}_1] = 0 \implies 2\mathcal{Q}_3 = [b(t), \mathcal{Q}_1] = [b(t_0), \mathcal{Q}_1] = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, las ecuaciones también son equivalentes a:

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A), \quad \mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(A) - b \mathcal{Q}_1, \quad \mathcal{Q}_4 = -g^2 \mathcal{Q}_1 + \{b, \mathcal{Q}_2\} + b^2 \mathcal{Q}_1$$

En particular, evaluando a la tercera ecuación en  $t_0$  considerando  $b(t_0) = \mathbf{0}$  se obtiene

$$\mathcal{Q}_4 = -g^2(t_0) \mathcal{Q}_1. \quad (\text{B.0.11})$$

Nótese que la tercera ecuación es equivalente a

$$\mathbf{0} = \mathcal{D}\mathcal{Q}_4 = -2g\mathcal{D}g \mathcal{Q}_1 + \{\mathcal{D}b, \mathcal{Q}_2\} + \{\mathcal{D}b, b\mathcal{Q}_1\} = -2g\mathcal{D}g \mathcal{Q}_1 + 2g\mathcal{D}g \mathcal{Q}_1$$

donde utilizamos el hecho de que  $\mathcal{D}b$  conmuta con  $g^{-1}$ ,  $\mathcal{D}g$ ,  $A$ . Por lo tanto, esta ecuación se verifica automáticamente a partir de las primeras dos, con una constante de integración  $\mathcal{Q}_4$ .

Luego, la ecuación de movimiento para variaciones de  $\mathcal{S}$  se reduce a

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A) \quad (\text{B.0.12a})$$

$$\mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(A) - b \mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} (g^{-1} \mathcal{D}(g) - g^{-2} b \mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A) \quad (\text{B.0.12b})$$

$\mathcal{Q}_1$  y  $\mathcal{Q}_2$  son diagonales por bloques con los mismos bloques que  $\mathcal{D}b$ , ya que  $A$ ,  $\mathcal{D}b$ ,  $b$ ,  $g^{-2}$ ,  $\mathcal{D}g$  son matrices diagonales por bloques, y entonces conmutan con  $g$ ,  $g^{-1}$ ,  $\mathcal{D}g$ . Pueden también ser expresadas sin las constantes de integración  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$ , como:

$$\mathbf{0} = \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A)) \quad (\text{B.0.13a})$$

$$\mathbf{0} = \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(A)) - \underbrace{e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b)^2 \mathcal{F}'_a(A)}_{= \mathcal{D}b \mathcal{Q}_1} \quad (\text{B.0.13b})$$

En resumen, las ecuaciones de movimiento son:

$$\mathcal{Q}_1 = e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A) = \text{constante} \iff \mathbf{0} = \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-2} (\mathcal{D}b) \mathcal{F}'_a(A)) \quad (\text{B.0.14a})$$

$$\mathcal{Q}_2 = e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(A) - b \mathcal{Q}_1 = \text{constante} \iff \mathbf{0} = \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(A)) - \mathcal{D}b \mathcal{Q}_1 \quad (\text{B.0.14b})$$

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}_a(A) + 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_a(A)) = 0 \quad (\text{B.0.14c})$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + 2 \text{tr}(A \mathcal{F}'_a(A)) = 0 \quad (\text{B.0.14d})$$

## B.1. Ecuaciones de movimiento diagonalizadas

Puesto que  $\mathcal{D}b$  y  $\mathcal{Q}_1$  son matrices reales y antisimétricas (luego anti-hermíticas) que conmutan, pueden ser simultáneamente diagonalizadas con una matriz compleja y unitaria  $U(t)$ :

$$\mathcal{D}b(t) = U(t)(iD_b(t))U^{-1}(t), \quad \mathcal{Q}_1 = U(t)(iD_1)U^{-1}(t), \quad (\text{B.1.1})$$

con  $D_b$  y  $D_1$  matrices reales y diagonales. Y como  $\mathcal{D}b$  y  $\mathcal{Q}_1$  son diagonales por bloques, las matrices unitarias  $U(t), U^{-1}(t)$  son diagonales por bloques con bloques con igual factor de escala, por lo que conmutan con  $g, g^{-1}, \mathcal{D}g$ . En principio, dependen del tiempo.

Más aún, esto implica que  $A$  se expresa en esta base como:

$$A = U(t)(-g^{-2}(\mathcal{D}g)^2 - g^{-2}D_b^2)U^{-1}(t) \equiv U(t)(-4D^2)U^{-1}(t) \quad (\text{B.1.2})$$

donde definimos la matriz diagonal  $D^2$  con elementos reales no negativos, recordando que  $g, g^{-1}, \mathcal{D}g$  son matrices diagonales. Observar que  $\mathcal{F}'_a(A) = U(t) \mathcal{F}'_a(-4D^2) U^{-1}(t)$ .

Las ecuaciones (B.0.14a) y (B.0.14b) toman entonces la forma:

$$-i\mathcal{Q}_1 = U(t)D_1U^{-1}(t) = U(t) e^{-\Phi} g^{-2}(D_b)\mathcal{F}'_a(-4D^2) U^{-1}(t) = \text{constante} \quad (\text{B.1.3a})$$

$$\mathbf{0} = \mathcal{D} (U(t) e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(-4D^2) U^{-1}(t)) + U(t) D_b D_1 U^{-1}(t) \quad (\text{B.1.3b})$$

A partir de (B.1.3a) vemos que:

$$D_1 = e^{-\Phi} g^{-2}(D_b)\mathcal{F}'_a(-4D^2) = \text{constante} \quad (\text{B.1.4})$$

puesto que los elementos de  $D_1$  son los autovalores de  $-i\mathcal{Q}_1$ , que son constantes si  $\mathcal{Q}_1$  es constante. Todavía necesitamos imponer que  $-i\mathcal{Q}_1 = U(t)D_1U^{-1}(t)$  es constante:

$$\mathbf{0} = -i\mathcal{D}\mathcal{Q}_1 = U(t)(\overbrace{\mathcal{D}D_1}^{\mathbf{0}} + [U^{-1}\mathcal{D}U, D_1])U^{-1}(t) \iff [U^{-1}\mathcal{D}U, D_1] = \mathbf{0} \quad (\text{B.1.5})$$

Esta es una condición para  $U(t)$ , y luego (B.1.3a) es equivalente a las dos ecuaciones (B.1.4) y (B.1.5).

La ecuación (B.1.3b) puede ser escrita equivalentemente como

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= D_b D_1 + U^{-1}(t) \mathcal{D} (U(t) e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(-4D^2) U^{-1}(t)) U(t) \\ &= D_b D_1 + \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(-4D^2)) + [U^{-1}\mathcal{D}U, e^{-\Phi} g^{-1}\mathcal{D}(g)\mathcal{F}'_a(-4D^2)] \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

Nótese que los primeros dos términos del último renglón son matrices diagonales, mientras que el último término no es diagonal. Además, el último es de la forma  $[U^{-1}\mathcal{D}U, D^G]$  donde  $D^G$  es una matriz diagonal genérica, luego tiene elementos matriciales de la forma  $[U^{-1}\mathcal{D}U, D^G]_{ij} = (U^{-1}\mathcal{D}U)_{ij}(D_j^G - D_i^G)$ , con elementos de la diagonal nulos. Por lo tanto, podemos proyectar por un lado los elementos diagonales, y por el otro los no diagonales de (B.1.3b):

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= D_b D_1 + \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) \\ \mathbf{0} &= \mathcal{D}(g) [U^{-1}\mathcal{D}U, \mathcal{F}'_a(-4D^2)] \end{aligned} \tag{B.1.7}$$

donde usamos que  $U(t), U^{-1}(t)$  son matrices diagonales por bloques y que  $e^{-\Phi} g^{-1}$  es invertible.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$D_1 = e^{-\Phi} g^{-2} (D_b) \mathcal{F}'_a(-4D^2) = \text{constante} \tag{B.1.8a}$$

$$\mathbf{0} = D_b D_1 + \mathcal{D} (e^{-\Phi} g^{-1} \mathcal{D}(g) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) \tag{B.1.8b}$$

$$E_n = (\mathcal{D}\Phi)^2 - \mathcal{F}_a(-4D^2) + 2 \text{tr}((-4D^2) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) = 0 \tag{B.1.8c}$$

$$E_\Phi + E_n = 2\mathcal{D}^2\Phi + 2 \text{tr}((-4D^2) \mathcal{F}'_a(-4D^2)) = 0 \tag{B.1.8d}$$

$$\mathbf{0} = [U^{-1}\mathcal{D}U, D_1] = \mathcal{D}(g) [U^{-1}\mathcal{D}U, \mathcal{F}'_a(-4D^2)] \tag{B.1.8e}$$



# Apéndice C

## $h_i$ constante y $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$

En este apéndice mostramos que  $h_i = \text{cte}$  implica  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ . Esta es la razón por la cual el sector con carga de Noether nula es el indicado para buscar soluciones dS no perturbativas.

Las ecuaciones que determinan la dinámica de  $h_i(t) = h_\alpha^{(r)}(t)$  son:

$$e^{-\Phi} \frac{\partial F_h}{\partial h_i} = q_i = \text{constante} \iff \nabla F_h = e^\Phi \vec{q} \quad (\text{C.0.1})$$

para cada  $1 \leq i \leq d$ . Definiendo  $q \equiv \|\vec{q}\|$ , y el vector adimensional  $\vec{w} \equiv \frac{\vec{q}}{q}$  de norma  $\|\vec{w}\| = 1$  solo en el caso

$$q \neq 0 \iff \vec{q} \neq \vec{0} \iff \exists r, \alpha \text{ tales que } Q_\alpha^{(r)} \neq 0 \text{ o } Q'_\alpha^{(r)} \neq 0 \iff \mathcal{Q} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{C.0.2})$$

se puede realizar un cambio de variables de la forma

$$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_d) \rightarrow \vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d) = W\vec{h} \quad (\text{C.0.3})$$

donde  $W$  es una matriz real ortogonal constante (luego  $\vec{h} = W^{-1}\vec{X} = W^t\vec{X}$ ) tal que su primera fila es igual al vector adimensional y unitario  $\vec{w}$  (es decir,  $w_i = W_{1i} = (W^t)_{i1}$ ), y obviamente el resto de las filas son ortogonales a  $\vec{w}$ . Entonces las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_h}{\partial X_1} &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial h_i}{\partial X_1} \frac{\partial F_h}{\partial h_i} = q e^\Phi \sum_{i=1}^d (W^t)_{i1} w_i = q e^\Phi \sum_{i=1}^d w_i w_i = q e^\Phi \|\vec{w}\|^2 = q e^\Phi \neq 0 \\ \frac{\partial F_h}{\partial X_\chi} &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial h_i}{\partial X_\chi} \frac{\partial F_h}{\partial h_i} = q e^\Phi \sum_{i=1}^d (W^t)_{i\chi} w_i = q e^\Phi \sum_{i=1}^d (W)_{\chi i} w_i = 0 \quad \text{para } 2 \leq \chi \leq d. \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

Puesto que algunos de los  $h_i$  pueden tener igual módulo (por ejemplo, si  $\beta_\alpha^{(r)} \neq 0$  hay otro  $\beta_{\alpha'}^{(r)} = -\beta_\alpha^{(r)}$ , luego  $|h_{\alpha'}^{(r)}| = |h_\alpha^{(r)}|$ ; o si  $\beta_\alpha^{(r)} = 0$  para varios valores de  $\alpha$  y el mismo  $r$ ), y algunos  $h_i$  pueden ser iguales a 0, varias combinaciones lineales de los  $h_i$  pueden ser triviales (por ejemplo  $h_{\alpha'}^{(r)} \pm h_\alpha^{(r)} = 0$  y luego  $X_\chi = 0$  para un cierto  $\chi$ , entonces trivialmente vale que  $\frac{\partial F_h}{\partial X_\chi} = 0$  para combinaciones lineales triviales  $X_\chi = 0$ ). De todos modos, si hay a lo sumo  $m$  valores de  $h_i$  con módulos no nulos y distintos entre sí, en principio van a haber  $m$  combinaciones lineales no triviales  $X_i$ , y  $d - m$  combinaciones lineales triviales  $X_\chi = 0$  para las cuales  $\frac{\partial F_h}{\partial X_\chi} = 0$ .

Si cada  $h_i = h_{\alpha'}^{(r)}$  es constante, o equivalentemente si todo  $X_i = \text{constante}$ , entonces de (4.1.15c) se deduce que  $\mathcal{D}\Phi = -c = \text{cte} \in \mathbb{R}$ , lo cual a su vez implica de la ecuación (4.1.15d) que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d h_i \frac{\partial F_h}{\partial h_i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (W^t)_{ij} X_j \frac{\partial X_k}{\partial h_i} \frac{\partial F_h}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (W^t)_{ij} X_j W_{ki} \frac{\partial F_h}{\partial X_k} \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d X_j \frac{\partial F_h}{\partial X_k} (WW^t)_{kj} = \sum_{j=1}^d X_j \frac{\partial F_h}{\partial X_j} = X_1 \frac{\partial F_h}{\partial X_1}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

donde usamos  $(WW^t)_{kj} = \delta_{kj}$  porque  $W$  es ortogonal, y  $\frac{\partial F_h}{\partial X_\chi} = 0$  para  $\chi \geq 2$ .

Dado que la solución  $X_1 = 0$  está contenida en  $\frac{\partial F_h}{\partial X_1} = 0$ , esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{\partial F_h}{\partial X_1} = 0 \iff q = 0 \iff \mathcal{Q} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.0.6})$$

En consecuencia, vemos que imponer  $h_i = \text{cte}$  para todo  $1 \leq i \leq d$ , necesariamente implica que  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$ .

A la inversa, la forma más simple de construir soluciones con  $\mathcal{Q} = \mathbf{0}$  que verifiquen  $\nabla F_h = \vec{0}$ , es imponer que todo  $h_i$  sea constante. De otra forma, si hubieran algunos parámetros  $h_i(t)$  no constantes, la ecuación  $\nabla F_h = \vec{0}$  se verificaría en un cierto entorno abierto de  $h_i(t_0)$ , y luego la función  $F_h$  no dependería de  $h_i$  (lo cual puede ser una condición no trivial para la expansión asintótica (4.1.12) de  $F_h$ ).

# Apéndice D

## Sutilezas en el carácter no perturbativo de las soluciones dS generalizadas

En este apéndice extendemos la discusión sobre las soluciones dS no perturbativas presentada en la section 6 al caso del ansatz generalizado de matrices conmutantes.

El procedimiento para hallar soluciones dS no perturbativas se extiende inmediatamente al ansatz generalizado, considerando que en este caso uno debe calcular las raíces  $\vec{h}_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,d}) \neq \vec{0}$  de  $\nabla F_h$  en el paso 1. Dada una raíz  $\vec{h}_0$ , uno siempre puede construir  $2^d - 1$  nuevas raíces distintas  $\vec{h}'_0 = (\pm h_{0,1}, \dots, \pm h_{0,d})$  ya que también verifican  $\frac{\partial F_h}{\partial h_i} = 0$  para todo  $i$ . Luego, para tener una cosmología expansiva (en el marco de cuerdas) en ciertas direcciones espaciales, uno debe elegir solo las raíces con parámetro de Hubble positivo en esas direcciones espaciales. Además, se puede elegir una cosmología expansiva o contractiva en las restantes direcciones espaciales si no son estáticas. Los pasos subsecuentes del procedimiento se generalizan trivialmente.

La construcción de una función subdominante también puede ser realizada con el ansatz generalizado. Primero definimos la función adimensional  $\tilde{F}_h(\vec{x}) \equiv \alpha' F_h(\vec{h})$  que depende de las variables adimensionales  $\tilde{x}_i \equiv \sqrt{\alpha'} h_i$ . Para asegurar que la función subdominante multi-variable  $\tilde{h}(\vec{x})$  sea invariante ante dualidad y ante inversión temporal (considerando que las simetrías se mantienen no perturbativamente), consideramos que solo depende de las

combinaciones  $S_k \equiv \sum_{i=1}^d \tilde{x}_i^{2k} \propto \alpha'^k \text{tr}(\mathcal{D}\mathcal{S}^{2k})$ . Más precisamente:

$$\tilde{h}(\vec{x}) = \tilde{h}_S(S_1, S_2, \dots) = \chi_0 \left( e^{-\frac{\chi_1}{2S_1}} - e^{-\frac{\chi_1}{S_1}} \right) + \tilde{h}_{S,1}(S_1, S_2, \dots). \quad (\text{D.0.1})$$

Consideremos que  $\chi_1 = 2 \ln(2) S_1 > 0$ , luego las primeras derivadas del término proporcional a  $\chi_0$  se anulan. Así, siempre podemos elegir  $\chi_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{h}(\vec{x}_0) = \tilde{c}^2 - \tilde{F}_h(\vec{x}_0)$  para algún  $\tilde{c}$ , el cual lo podemos tomar de forma que el dilatón sea constante. Este término con  $\chi_0$  no incide en la condición de las primeras derivadas, consecuentemente solo necesitamos trabajar con  $\tilde{h}_{S,1}(S_1, S_2, \dots)$ .

Consideremos que hay a lo sumo  $1 \leq m \leq d$  elementos  $\tilde{x}_{0,I}$  en el vector elegido  $\vec{x}_0$  con módulo no nulo y distintos entre sí (es decir,  $|\tilde{x}_{0,I}| \neq 0$  y  $I \neq I' \implies |\tilde{x}_{0,I}| \neq |\tilde{x}_{0,I'}|$  para  $I, I'$  tomando  $m$  valores posibles). Adicionalmente, los restantes  $d - m$  elementos  $\tilde{x}_{0,i}$  deben verificar  $|\tilde{x}_{0,i}| = |\tilde{x}_{0,I}|$  para algún  $I$ , o verificar  $\tilde{x}_{0,i} = 0$ . Entonces, para cualquier función invariante ante dualidad e inversión temporal  $\tilde{F}_h + \tilde{h}$ , solo necesitamos las  $m$  derivadas parciales  $\frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_I}(\vec{x}_0)$  para computar su gradiente, porque las restantes  $d - m$  derivadas parciales con respecto a  $\tilde{x}_i$  verifican  $\frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_i}(\vec{x}_0) = \pm \frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_I}(\vec{x}_0)$  para un índice  $I$  (con  $\pm = \text{signo}(\tilde{x}_{0,i}) \text{signo}(\tilde{x}_{0,I})$ ), o trivialmente verifican  $\frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_i}(\vec{x}_0) = 0$  si  $\tilde{x}_{0,i} = 0$ . En particular, imponer  $\frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_i}(\vec{x}_0) = 0$  para todo índice  $1 \leq i \leq d$  (o sea  $\nabla(\tilde{F}_h + \tilde{h}) = \vec{0}$ ) es equivalente a imponer  $\frac{\partial(\tilde{F}_h + \tilde{h})}{\partial \tilde{x}_I}(\vec{x}_0) = 0$  solo para los  $m$  índices  $I$ . Por simplicidad, ordenamos los índices de forma tal que  $1 \leq I \leq m$  y los restantes son  $m + 1 \leq i \leq d$ .

Podemos elegir  $\tilde{h}_{S,1}(S_1, S_2, \dots) = \sum_{J=1}^m \chi_J e^{-1/S_J}$ . Por lo tanto nos gustaría elegir  $\chi_J \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}_I}(\vec{x}_0) = \sum_{J=1}^m \chi_J \frac{2J \tilde{x}_I^{2J-1}}{S_J^2} e^{-1/S_J} \Big|_{\vec{x}_0} = -\frac{\partial \tilde{F}_h}{\partial \tilde{x}_I}(\vec{x}_0)$  para cada  $1 \leq I \leq m$ . Podemos escribir esto como una ecuación matricial de la forma  $\bar{M} \cdot \vec{\chi} = \nabla_m \tilde{F}_h(\vec{x}_0)$ , donde  $\nabla_m$  solo incluye las primeras  $m$  derivadas parciales, y  $\bar{M}$  es una matriz de  $m \times m$  con elementos  $M_{IJ} = -\frac{2J \tilde{x}_{0,I}^{2J-1}}{S_J^2} e^{-1/S_J} \Big|_{\vec{x}_0}$ . Usando que  $\tilde{x}_{0,I} \neq 0$  y luego  $S_J|_{\vec{x}_0} \neq 0$ , es fácil chequear que el determinante de  $\bar{M}$  es no nulo si y solo si el determinante de la matriz de Vandermonde  $V(\tilde{x}_{0,1}^2, \tilde{x}_{0,2}^2, \dots, \tilde{x}_{0,m}^2)$  (con elementos  $V_{IJ} = \tilde{x}_{0,I}^{2(J-1)}$ ) es no nulo. Puesto que el último es igual a  $\prod_{1 \leq J < K \leq m} (\tilde{x}_{0,K}^2 - \tilde{x}_{0,J}^2)$ , y  $J \neq K \implies \tilde{x}_{0,K}^2 \neq \tilde{x}_{0,J}^2$ , el determinante de  $V$  es no

nulo, y entonces el determinante de  $\bar{M}$  también es no nulo (o sea es invertible). Esto implica que el sistema lineal siempre se puede resolver, y que se pueden obtener los coeficientes  $\vec{\chi} = \bar{M}^{-1} \cdot \nabla_m \tilde{F}_h(\vec{x}_0)$ .

Por lo tanto, siempre se puede construir una función subdominante  $\tilde{h}(\vec{x})$  invariante ante dualidad e inversión temporal tal que las  $m$  primeras derivadas parciales de  $\tilde{F}_h + \tilde{h}$  son nulas, y luego todas las  $d$  derivadas parciales de  $\tilde{F}_h + \tilde{h}$  también son cero, siempre evaluadas en  $\vec{x}_0$ . Adicionalmente, como se explicó previamente, uno siempre puede imponer  $\tilde{F}_h(\vec{x}_0) + \tilde{h}(\vec{x}_0) = \tilde{c}^2$  para algún  $\tilde{c}$  (que puede ser tomado de forma que el dilatón es constante), eligiendo  $\chi_0 \in \mathbb{R}$  adecuadamente, extendiendo entonces los resultados del capítulo 6.

# Bibliografía

- [1] C. A. Núñez and F. E. Rost, “New non-perturbative de Sitter vacua in  $\alpha'$ -complete cosmology,” JHEP **03** (2021), 007 doi:10.1007/JHEP03(2021)007 [arXiv:2011.10091 [hep-th]].
- [2] U. H. Danielsson and T. Van Riet, “What if string theory has no de Sitter vacua?,” Int. J. Mod. Phys. D **27** (2018) no.12, 1830007 [arXiv:1804.01120 [hep-th]].
- [3] D. Kutasov, T. Maxfield, I. Melnikov and S. Sethi, “Constraining de Sitter Space in String Theory,” Phys. Rev. Lett. **115** (2015) no.7, 071305 [arXiv:1504.00056 [hep-th]].
- [4] G. Obied, H. Ooguri, L. Spodyneiko and C. Vafa, “De Sitter Space and the Swampland,” [arXiv:1806.08362 [hep-th]].  
P. Agrawal, G. Obied, P. J. Steinhardt and C. Vafa, “On the Cosmological Implications of the String Swampland,” Phys. Lett. B **784** (2018), 271-276 [arXiv:1806.09718 [hep-th]].  
S. K. Garg and C. Krishnan, “Bounds on Slow Roll and the de Sitter Swampland,” JHEP **11** (2019), 075 [arXiv:1807.05193 [hep-th]].
- [5] O. Hohm and B. Zwiebach, “Non-perturbative de Sitter vacua via  $\alpha'$  corrections,” Int. J. Mod. Phys. D **28** (2019) no.14, 1943002 [arXiv:1905.06583 [hep-th]].  
O. Hohm and B. Zwiebach, “Duality invariant cosmology to all orders in  $\alpha'$ ,” Phys. Rev. D **100** (2019) no.12, 126011 [arXiv:1905.06963 [hep-th]].
- [6] H. Bernardo, R. Brandenberger and G. Franzmann,  $O(d, d)$  covariant string cosmology to all orders in  $\alpha'$ , JHEP **02** (2020) 178, [arXiv:1911.00088 [hep-th]]

- [7] C. Krishnan, “de Sitter,  $\alpha'$ -Corrections & Duality Invariant Cosmology,” JCAP **10** (2019), 009 [arXiv:1906.09257 [hep-th]].
- [8] H. Bernardo, R. Brandenberger and G. Franzmann, “String Cosmology backgrounds from Classical String Geometry,” [arXiv:2005.08324 [hep-th]].
- [9] A. Sen, “ $O(d) \times O(d)$  symmetry of the space of cosmological solutions in string theory, scale factor duality and two-dimensional black holes,” Phys. Lett. B **271**, 295 (1991).
- [10] O. Hohm, A. Sen and B. Zwiebach, “Heterotic Effective Action and Duality Symmetries Revisited,” JHEP **02** (2015), 079 [arXiv:1411.5696 [hep-th]].
- [11] O. Hohm and B. Zwiebach, “T-duality Constraints on Higher Derivatives Revisited,” JHEP **04** (2016), 101 [arXiv:1510.00005 [hep-th]].
- [12] R. H. Brandenberger and C. Vafa, “Superstrings in the Early Universe,” Nucl. Phys. B **316** (1989), 391-410
- A. Nayeri, R. H. Brandenberger and C. Vafa, “Producing a scale-invariant spectrum of perturbations in a Hagedorn phase of string cosmology,” Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 021302 [arXiv:hep-th/0511140 [hep-th]].
- R. H. Brandenberger, A. Nayeri, S. P. Patil and C. Vafa, “Tensor Modes from a Primordial Hagedorn Phase of String Cosmology,” Phys. Rev. Lett. **98** (2007), 231302 [arXiv:hep-th/0604126 [hep-th]].
- [13] G. Veneziano, “Scale factor duality for classical and quantum strings,” Phys. Lett. B **265**, 287 (1991).
- [14] K. A. Meissner and G. Veneziano, “Symmetries of cosmological superstring vacua,” Phys. Lett. B **267**, 33 (1991).
- [15] K. A. Meissner, “Symmetries of higher order string gravity actions”, Phys. Lett. B **392** (1997) 298 [arXiv:9610131 [hep-th]].
- [16] T. Kugo and B. Zwiebach, “Target space duality as a symmetry of string field theory”, Prog. Theor. Phys. **87**, 801 (1992) [arXiv:9201040 [hep-th]].

- [17] X. D. Zhang, Matrix Differential. In: A Matrix Algebra Approach to Artificial Intelligence. Springer, Singapore (2020). doi.org/10.1007/978-981-15-2770-8\_2
- Jan R. Magnus, Heinz Neudecker, Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, 3rd Edition (2019), ISBN: 978-1-119-54120-2
- [18] H. Yang and B. Zwiebach, “Rolling closed string tachyons and the big crunch,” JHEP **08** (2005), 046 [arXiv:hep-th/0506076 [hep-th]].
- [19] H. Bernardo and G. Franzmann, “ $\alpha'$ -Cosmology: solutions and stability analysis,” [arXiv:2002.09856 [hep-th]].
- [20] J. D. Murray, “Asymptotic Analysis”. New York: Springer-Verlag, 1984, ISBN 978-1-4612-1122-8
- Simon J.A. Malham, “An introduction to asymptotic analysis,” lecture notes
- [21] T. Azevedo, M. Chiodaroli, H. Johansson and O. Schlotterer, “Heterotic and bosonic string amplitudes via field theory,” JHEP **10** (2018), 012 [arXiv:1803.05452 [hep-th]].
- C. R. Mafra, O. Schlotterer and S. Stieberger, “Complete N-Point Superstring Disk Amplitude I. Pure Spinor Computation,” Nucl. Phys. B **873** (2013), 419-460 [arXiv:1106.2645 [hep-th]].
- C. R. Mafra, O. Schlotterer and S. Stieberger, “Complete N-Point Superstring Disk Amplitude II. Amplitude and Hypergeometric Function Structure,” Nucl. Phys. B **873** (2013), 461-513 [arXiv:1106.2646 [hep-th]].
- [22] J. T. Liu and R. Minasian, “Higher-derivative couplings in string theory: five-point contact terms,” [arXiv:1912.10974 [hep-th]].
- R. H. Boels, On the field theory expansion of superstring five point amplitudes, Nucl. Phys. B **876** (2013) 215 [arXiv:1304.7918 [hep-th]].
- G. Puhlfürst and S. Stieberger, “Differential Equations, Associators, and Recurrences for Amplitudes,” Nucl. Phys. B **902** (2016), 186-245 [arXiv:1507.01582 [hep-th]].
- S. Stieberger and T. R. Taylor, “Strings on Celestial Sphere,” Nucl. Phys. B **935** (2018), 388-411 [arXiv:1806.05688 [hep-th]].



- [23] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory,” JHEP **0909** (2009) 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].
- C. Hull and B. Zwiebach, “The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets,” JHEP **0909** (2009) 090 [arXiv:0908.1792 [hep-th]].
- O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, “Generalized metric formulation of double field theory,” JHEP **1008** (2010) 008 [arXiv:1006.4823 [hep-th]].
- [24] G. Aldazabal, D. Marques and C. Nunez, “Double Field Theory: A Pedagogical Review,” Class. Quant. Grav. **30**, 163001 (2013) [arXiv:1305.1907 [hep-th]].
- O. Hohm, D. Lust and B. Zwiebach, “The Spacetime of Double Field Theory: Review, Remarks, and Outlook,” Fortsch. Phys. **61**, 926 (2013) [arXiv:1309.2977 [hep-th]].
- D. S. Berman and D. C. Thompson, “Duality Symmetric String and M-Theory,” Phys. Rept. **566**, 1 (2014) [arXiv:1306.2643 [hep-th]].
- [25] O. Hohm and B. Zwiebach, “Green-Schwarz mechanism and  $\alpha'$ -deformed Courant brackets,” JHEP **1501** (2015) 012 [arXiv:1407.0708 [hep-th]].
- O. A. Bedoya, D. Marques and C. Nunez, “Heterotic  $\alpha'$ -corrections in Double Field Theory,” JHEP **1412** (2014) 074 [arXiv:1407.0365 [hep-th]].
- D. Marques and C. A. Nunez, “T-duality and  $\alpha'$ -corrections,” JHEP **10** (2015), 084 [arXiv:1507.00652 [hep-th]].
- W. H. Baron, J. J. Fernandez-Melgarejo, D. Marques and C. Nunez, “The Odd story of  $\alpha'$ -corrections,” JHEP **04** (2017), 078 [arXiv:1702.05489 [hep-th]].
- W. H. Baron, E. Lescano and D. Marqués, “The generalized Bergshoeff-de Roo identification,” JHEP **11** (2018), 160 [arXiv:1810.01427 [hep-th]].
- W. Baron and D. Marques, “The generalized Bergshoeff-de Roo identification II,” [arXiv:2009.07291 [hep-th]].
- [26] G. Arciniega, P. Bueno, P. A. Cano, J. D. Edelstein, R. A. Hennigar and L. G. Jaime, “Geometric Inflation,” Phys. Lett. B **802** (2020), 135242 [arXiv:1812.11187 [hep-th]].
- J. D. Edelstein, R. B. Mann, D. V. Rodríguez and A. Vilar López, “Small free field inflation in higher curvature gravity,” [arXiv:2007.07651 [hep-th]].

- [27] J. Blåbäck, U. Danielsson, G. Dibitetto and S. Giri, “Constructing stable de Sitter in M-theory from higher curvature corrections,” JHEP **09** (2019), 042 [arXiv:1902.04053 [hep-th]].
- [28] Robert Brandenberger and Patrick Peter. “Bouncing Cosmologies: Progress and Problems,” Found. Phys., 47(6):797–850, 2017. [arXiv:1603.05834 [hep-th]].
- [29] P. Wang, H. Wu, H. Yang and S. Ying, “Non-singular string cosmology via  $\alpha'$ -corrections,” JHEP **10** (2019), 263 [arXiv:1909.00830 [hep-th]].
- P. Wang, H. Wu, H. Yang and S. Ying, “Construct  $\alpha'$  corrected or loop corrected solutions without curvature singularities,” JHEP **01** (2020), 164 [arXiv:1910.05808 [hep-th]].
- [30] H. Bernardo, R. Brandenberger and G. Franzmann, “Solution of the Size and Horizon Problems from Classical String Geometry,” JHEP **10** (2020), 155 doi:10.1007/JHEP10(2020)155 [arXiv:2007.14096 [hep-th]].
- [31] P. Wang, H. Wu and H. Yang, “Are nonperturbative AdS vacua possible in bosonic string theory?,” Phys. Rev. D **100**, no. 4, 046016 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.100.046016 [arXiv:1906.09650 [hep-th]].
- [32] David Tong - Lectures on String Theory - <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>
- [33] Polchinski, J. (1998). String Theory - Volume I (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511816079
- [34] <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/e-ch11.pdf>
- [35] *Geometry, Topology and Physics* - Second Edition - Mikio Nakahara

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina Buenos Aires, 2021