

# **Disipación de energía de una partícula durante una colisión**

Fabrizio Éric Fernández

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Febrero - 2021

TEMA: Disipación de energía de una partícula en una colisión

ALUMNO: LU N°: 504/10

LUGAR DE TRABAJO: Grupo de Medios Porosos - Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires - web: laboratorios.fi.uba.ar/gmp

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dra. María Alejandra Aguirre - maaguir@fi.uba.ar

CO-DIRECTOR: Dr. Marcelo Piva - mpiva@fi.uba.ar

FECHA DE INICIACIÓN: 6/05/2019

FECHA DE FINALIZACIÓN: 17/02/2021

FECHA DE EXAMEN: 17/02/2021

INFORME FINAL APROBADO POR: Dra. Silvina Ponce Dawson



Fabricio Éric  
Fernández

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesor de Tesis de Licenciatura

---

Jurado

# Índice

1. Abstract	4
2. Agradecimientos	5
<b>I INTRODUCCIÓN</b>	<b>6</b>
3. Introducción general	6
4. Antecedentes al tema	7
5. Objetivos e hipótesis	11
<b>II SISTEMA EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA</b>	<b>12</b>
6. Dispositivos experimentales	12
6.1. Configuración I: colisión de discos contra una cuña . . . . .	13
6.1.1. Partículas utilizadas: discos . . . . .	17
6.1.2. Celda experimental y sistema de excitación vertical . . . . .	18
6.2. Configuración II: colisión de partículas planas facetadas contra una placa plana . . . . .	20
6.2.1. Partículas utilizadas: facetadas . . . . .	22
6.2.2. Caracterización de la celda experimental . . . . .	23
6.3. Control de la fricción . . . . .	24
7. Metodología de trabajo	25
7.1. Métodos de adquisición de datos . . . . .	26
7.1.1. El funcionamiento de la cámara de video . . . . .	26
7.1.2. El procesamiento digital de las imágenes . . . . .	27
7.2. Obtención de magnitudes relevantes . . . . .	28
<b>III ANÁLISIS DE RESULTADOS CON DISCOS</b>	<b>31</b>

<b>8. Caracterización cinemática sobre superficie plana</b>	<b>31</b>
8.1. Determinación del coeficiente de restitución con superficie plana . . . . .	32
8.1.1. Método I . . . . .	32
8.1.2. Método II . . . . .	35
8.2. Determinación de la fuerza de rozamiento con las paredes de la celda . . . . .	39
8.3. Evolución de la energía del disco en las colisiones . . . . .	46
<b>9. Caracterización cinemática del disco sobre cuñas</b>	<b>48</b>
9.1. Determinación del coeficiente de restitución con cuñas . . . . .	51
9.2. Transferencia de energía del disco colisionando con cuñas . . . . .	53
<b>IV ANÁLISIS DE RESULTADOS CON PARTÍCULAS FACETADAS</b>	<b>57</b>
<b>10. Disipación de la energía en experiencias con partículas facetadas</b>	<b>57</b>
<b>11. Transferencias de energía de una partícula colisionando contra una base plana</b>	<b>71</b>
11.1. Análisis de un caso particular para el prisma triangular . . . . .	71
11.2. Análisis general . . . . .	74
11.2.1. Influencia de la velocidad de impacto . . . . .	79
11.2.2. Influencia de la cantidad de lados $N$ de la partícula facetada . . . . .	81
<b>V CONCLUSIONES</b>	<b>83</b>
<b>12. Principales aportes de este trabajo</b>	<b>83</b>
<b>13. Perspectivas</b>	<b>85</b>
<b>VI APÉNDICES</b>	<b>87</b>
<b>A. Determinación de las velocidades y de la energía</b>	<b>87</b>
<b>B. Diseño de las partículas facetadas</b>	<b>88</b>

C. Obtención del factor de calibración de las coordenadas de posición	92
D. Método de obtención del coeficiente de restitución desde el análisis de la evolución temporal de la altura de la partícula	95
E. Cálculo de momento de inercia de cada partícula facetada	97

# 1. Abstract

En una avalancha, la disipación de energía por fricción y colisión de las partículas entre sí y con el entorno producen la relajación del sistema a otro estado de equilibrio. La disipación por colisión suele caracterizarse con el coeficiente de restitución  $\varepsilon = -\frac{v_n'}{v_n}$ , definido para una partícula colisionando contra una superficie con una velocidad normal de impacto  $v_n$  y rebotando con una velocidad de salida  $v_n'$ .

En esta Tesis se estudia cómo  $\varepsilon$  y la energía evolucionan durante el proceso de relajación al equilibrio mediante sucesivos rebotes de un disco impactando contra cuñas y de partículas facetadas colisionando contra una superficie plana.

Se observa que a bajos valores de  $v_n$ , el coeficiente  $\varepsilon$  presenta una gran dispersión y valores medios  $\langle \varepsilon \rangle$  más altos que los observados a  $v_n$  más grandes. Para partículas de pocas facetas, a  $v_n$  bajos se pueden observar valores de  $\varepsilon > 1$ . El estudio de la evolución de la energía muestra que en algunas colisiones se transfiere energía cinética de traslación a energía cinética de rotación lo que lleva a valores de  $\varepsilon$  muy por debajo de  $\langle \varepsilon \rangle$  y en colisiones posteriores parte de la energía cinética de rotación vuelve a energía cinética de traslación llevando a  $\varepsilon > 1$ .

## 2. Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi directora, la Doctora María Alejandra Aguirre y a mi co-director, el Doctor Marcelo Piva, por la constante atención que tuvieron con respecto a la realización de este trabajo en el laboratorio, y fundamentalmente de la realización de este informe y su posterior defensa, en pleno tiempo de pandemia y aislamiento, donde la dificultad para comunicarnos era muy grande. También quiero agradecer la colaboración del Dr. Román Martino y de Jean-Christophe Géminard, con quienes hemos compartido discusiones en las cuales se fueron generando los lineamientos de este trabajo de Tesis.

Por último, agradecer a mi familia por sostenerme y hacerme el aguante durante todos estos años de carrera.

## Parte I

# INTRODUCCIÓN

### 3. Introducción general

Conocemos por *materiales granulares* a aquellos que están formados por partículas sólidas de carácter macroscópico (*granos*), embebidos en una fase fluida. En caso de que esta última fase sea aire se los denominan sistemas granulares secos.

Dependiendo de las fuerzas externas a las que estos materiales sean sometidos, los mismos podrán verse como sólidos, líquidos o gaseosos. Cuando se ejerce una fuerza sobre estos materiales, los granos se pondrán en movimiento y colisionarán entre ellos. Debido a la fricción que existe entre la superficie de los mismos, la energía cinética inyectada al material tiende a disiparse y el sistema volverá rápidamente al estado de equilibrio inicial.

El análisis de estos materiales abarca múltiples áreas y disciplinas: desde el estudio del proceso de acomodamiento de un conjunto de elementos en un transporte de carga [1, 2] hasta la predicción de fenómenos naturales como avalanchas de nieve [3, 4] o el estudio de la dinámica peatonal [5, 6, 7].

Resulta de gran interés la comprensión de los sistemas granulares ya que estos tienen gran trascendencia a nivel industrial debido a su presencia en diferentes procesos tecnológicos: la manipulación, transporte, almacenamiento, acopio, mezcla y empaquetamiento de polvos, piedras, combustibles sólidos, sales, granos y semillas son prácticas comunes en las industrias farmacéutica, cosmética, de construcción, papelera y agroalimentaria entre otras. En particular, aproximadamente la mitad de los productos y al menos tres cuartos de las materias primas se presentan en forma granular [8, 9]. A su vez, aproximadamente 40% del valor agregado de los productos se asocia a la tecnología aplicada al acondicionamiento de granos y polvos [10, 11] y su tratamiento moviliza el 10% de los recursos energéticos del planeta [12]. Resulta evidente que aún una pequeña mejora en la eficiencia en la manipulación de estos materiales tendrá un impacto económico significativo.

## 4. Antecedentes al tema

Por lo expuesto resulta del máximo interés analizar la disipación de energía mientras un grano interactúa con su entorno al alcanzar el equilibrio. Debido a que los sistemas granulares son altamente disipativos (Sec. 3), la forma en que pierden energía y alcanzan el equilibrio es esencial para comprender los problemas de estabilidad de los sistemas granulares, como por ejemplo el desencadenamiento de avalanchas (pérdida de estabilidad) y su detención (equilibrio estable o metaestable).

El estudio de la pérdida de estabilidad en sistemas granulares es un tema que se ha estudiado en detalle en el Grupo de Medios Porosos (Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires) [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Más recientemente, se analizaron las avalanchas en empaquetamientos de partículas acrílicas con distribuciones de masa no uniforme [20]. El estudio de este sistema se llevó a cabo mediante un tambor rotante, parcialmente lleno de partículas que consisten en vainas cilíndricas que contienen un inserto cilíndrico. La particularidad de este inserto es que puede estar libre o pegado a la vaina externa (FIG. 1) permitiendo el análisis de dos tipos de empaquetamiento granular bien diferenciados. El tambor rota a velocidad angular constante  $\omega$ , produciendo que la superficie libre de la pila granular aumente la pendiente (con respecto a la horizontal) hasta alcanzar el máximo ángulo de estabilidad  $\theta_M$  donde se desencadena una avalancha. Esta última produce una disminución de la pendiente hasta que, al llegar al ángulo de reposo  $\theta_R$ , la avalancha se detiene. El tambor rotante permite, de esta manera, obtener avalanchas sucesivas y evaluar los ángulos característicos  $\theta_M$  y  $\theta_R$ .

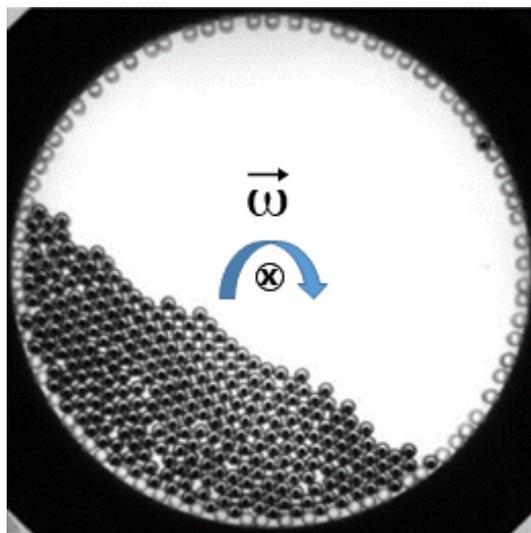


FIG. 1: Foto del tambor rotante que rota a velocidad angular constante  $\omega$ .

En Piva *et al* [20], se estudia la influencia de la inhomogeneidad de los granos en la dinámica de las avalanchas y en los ángulos que caracterizan la estabilidad del sistema. En estos casos, la dinámica se ve afectada por: 1) el *desorden* que se introduce en la red de contactos debido a la inhomogeneidad en la distribución de la masa de los granos; 2) el modo en que el sistema disipa la energía. En efecto, mientras el tambor rota las partículas *suben*, ganando energía potencial, cuando se desencadena la avalancha esa energía potencial se desarrolla en energía cinética, pero los choques entre las partículas hacen que esta energía se vaya disipando y que la pila de granos llegue a un nuevo estado de equilibrio. Por lo tanto, resulta de interés tener una mayor comprensión de los mecanismos de disipación y de la transferencia de energía entre los distintos grados de libertad. Profundizar en los mencionados mecanismos es el objetivo principal de este trabajo para lo cuál se diseñaron dispositivos y experimentos que permita estudiarlos.

Una forma usual de caracterizar los efectos de disipación debidos a las colisiones es mediante el llamado coeficiente de restitución,  $\varepsilon$ , definido como la relación entre la componente normal de la velocidad relativa, en el punto de contacto, antes y después de una colisión. Este coeficiente depende de varios factores entre los que figuran: las propiedades de los materiales, la geometría de los cuerpos y la velocidad de impacto [21, 22, 23, 24]. Si la partícula colisiona con una superficie plana horizontal en reposo, este coeficiente es la relación entre los componentes normales de las velocidades a la superficie de contacto justo antes del impacto ( $v_a$ ) e inmediatamente después de la colisión ( $v_d$ ). Dado que en muchas situaciones, debido a la forma irregular de los granos o las particularidades del método experimental no es posible detectar y medir el punto de impacto y el detalle de la colisión,  $v_a$  y  $v_d$  se suelen estimar con  $v_n$  y  $v_n'$ , las velocidades normales de traslación del centro geométrico de las partículas antes y después del impacto, respectivamente. Por lo tanto, normalmente se define de la siguiente manera:

$$\varepsilon = -\frac{v_n'}{v_n} \quad (1)$$

El signo menos permite que este coeficiente quede definido positivo, dado que las dos velocidades presentan signos opuestos debido al cambio de sentido del movimiento producido en el rebote. Este coeficiente puede tomar valores entre 0 y 1. Si en la colisión no se disipa energía,  $\varepsilon = 1$ . Sin embargo, en una situación real,  $\varepsilon < 1$ . Es usual utilizar este coeficiente con el objetivo primario de cuantificar la cantidad de energía cinética que se pierde en un choque [21, 22, 23, 24]. En ocasiones, resulta

también interesante analizar otro coeficiente, en el cual intervienen las energías totales:

$$\varepsilon_E = \frac{E'}{E} \quad (2)$$

donde  $E'$  es la energía mecánica total de la partícula inmediatamente después de rebotar contra una superficie sólida, y  $E$  es la energía mecánica con la que llegó a dicho rebote. La energía mecánica total se calcula como se indica en la Sec. 7.2 y tiene en cuenta a la energía potencial, a la velocidad horizontal y vertical en el cálculo de energía cinética y considera la velocidad angular de la partícula para la obtención de la energía de rotación. Hay que notar que si bien este coeficiente refleja de manera directa la pérdida de energía que sufre la partícula en la colisión, no es el más utilizado debido a las dificultades para su determinación, ya que implica un conocimiento muy detallado de los movimientos de la partícula tanto de traslación como de rotación.

En experiencias previas con esferas de acero rebotando en una superficie plana del mismo material [21], se observó una gran dispersión en el coeficiente de restitución, obtenido de manera indirecta a partir del tiempo entre colisiones sucesivas (FIG. 2). Montaine *et. al* [21] conjeturan que esto se debe a que la metodología experimental supone que la partícula es puntual y que por ello la energía se compone solamente de potencial más energía de traslación, despreciándose cualquier efecto debido a la presencia de energía rotacional. Ellos arguyen que las microrugosidades presentes en las superficies de la esfera y de la plataforma plana, podrían introducir torques, por la falta de alineación entre la línea que une el punto de contacto entre la partícula y el plano y el centro geométrico de la esfera respecto al eje de la gravedad. Estos torques serían responsables de inducir rotaciones que producirían una redistribución de energía, no tenida en cuenta en el mencionado coeficiente. Por otro lado, Montaine *et. al* [21] (FIG. 2) y King *et al* [22] (FIG. 3), también observan que la dispersión en el coeficiente de restitución es menor cuanto mayor es la velocidad inicial del impacto.

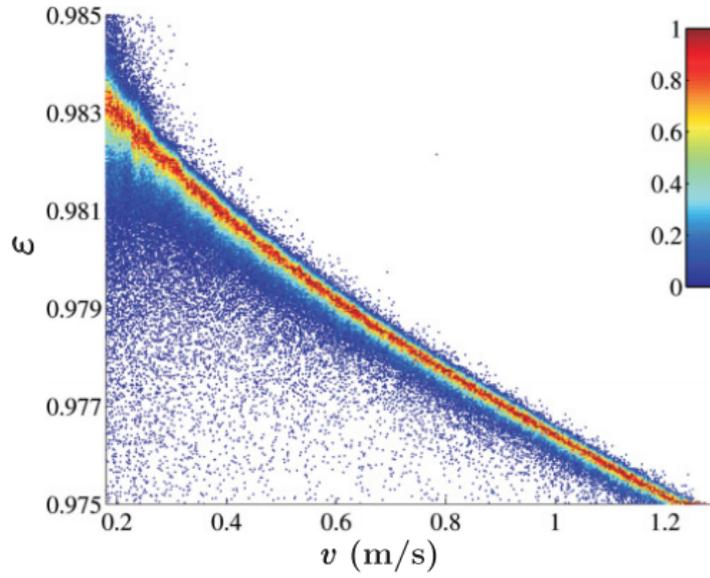


FIG. 2: Coeficiente de restitución en función de la velocidad normal de impacto  $v_n$ . Los datos (200000 puntos) están coloreados de acuerdo a la frecuencia normalizada con que ocurren. Fuente: Montaine *et. al* [21].

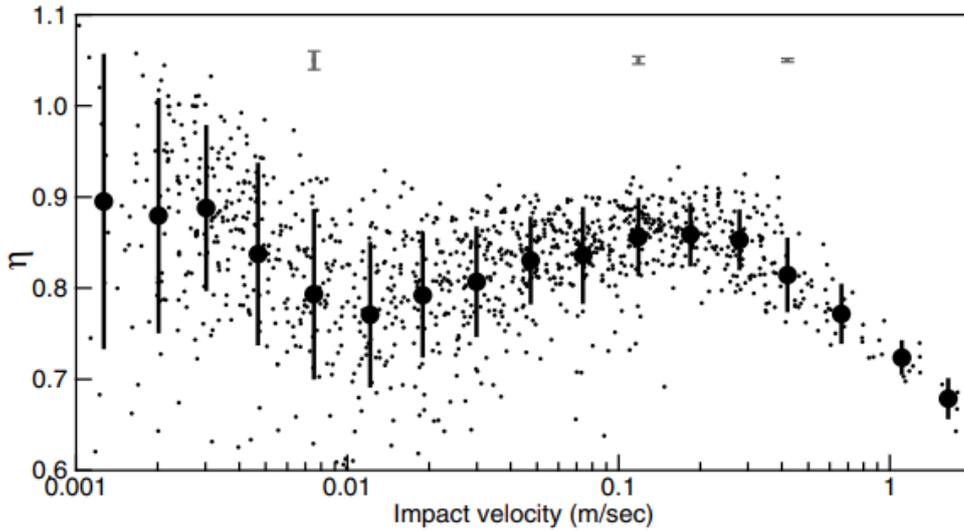


FIG. 3: Coeficiente de restitución  $\eta$  (con la misma forma funcional que  $\varepsilon$  en (1)) en función de la velocidad de impacto,  $v(m/s)$ , gráfico en escala logarítmica, para una esfera de bronce de radio  $R = 0,47\text{ cm}$  rebotando contra una placa de acero. Los puntos pequeños representan 1130 colisiones individuales, tomadas de 100 lanzamientos de una esfera. Los círculos sólidos son promedios de estos datos tomados en bins espaciados logarítmicamente. Las barras verticales indican la desviación estándar de estos valores y representan el ancho de la distribución de las medidas. La barras con tapa en la parte superior de la figura son barras de error que muestran la precisión de las mediciones individuales. Fuente: King *et al* [22].

## 5. Objetivos e hipótesis

El objetivo del presente trabajo es comprender la transferencia de energía en la interacción de un grano con su entorno mientras este llega al equilibrio. Esto resulta de interés debido a que, como se mencionó en la Sec. 3, los sistemas granulares son altamente disipativos y la forma en que transfieren energía y llegan al equilibrio resulta esencial para comprender problemas de estabilidad de sistemas granulares, como el desencadenamiento de avalanchas (pérdida de estabilidad) y su detención (equilibrio estable o metaestable).

En particular, esta Tesis busca estudiar en detalle la transferencia de energía durante la colisión de partículas individuales, caracterizar la transferencia de energía a la rotación y otros grados de libertad y analizar la pertinencia de utilizar un coeficiente de restitución como el descrito en la relación (1) para la comprensión del comportamiento disipativo de los materiales granulares. También se pretende analizar la conjetura del trabajo de Montaine *et. al* [21] (Sec. 4) respecto a si :

- la dispersión en el coeficiente de restitución puede deberse a la aparición de rotaciones en el momento del impacto.
- estas rotaciones disminuyen en cantidad o intensidad (velocidad de rotación) según la velocidad inicial en el impacto sea mayor.

## Parte II

# SISTEMA EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

## 6. Dispositivos experimentales

Como ya se mencionó en la Sec. 4, Montaine *et. al* [21] observaron una gran dispersión en el coeficiente de restitución obtenido para una esfera de acero que impacta contra una superficie plana y conjeturan que esto se debe a las transferencias recíprocas entre energía cinética y de rotación no tenidas en cuenta en la metodología experimental diseñada para obtener el mencionado coeficiente.

Para cumplir con el objetivo planteado de estudiar estas transferencias de energía se elaboraron estrategias experimentales en las que el foco estuvo puesto en el diseño de experimentos para la observación detallada del movimiento de la partícula (incluyendo el registro de la traslación del centro de masa como también la rotación) con el objetivo de determinar su energía mecánica. Luego de examinar las alternativas, la elección recayó en el diseño de un experimento cuasi bidimensional, en el cual las partículas son discos de cierto espesor que se mueven entre dos planos próximos formados por vidrios planos transparentes para facilitar la visualización. En los dispositivos construidos, que se describirán en detalle en la Sec. 6.1, el movimiento se restringe prácticamente a un plano, lo que permite la observación de la dinámica con una sola cámara. Sin duda el movimiento de una partícula entre planos próximos es un problema complejo debido, entre otros factores, a la posibilidad de fricción entre el plano de la partícula y alguno de los vidrios, la presencia de aire entre las paredes que implica la acción de rozamiento viscoso y otros factores tales como la tendencia de la partícula a rotar alrededor del eje contenido en el plano del movimiento. Teniendo en cuenta estos factores, sobre algunos de los cuales nos explayaremos mas adelante, se estudiaron principalmente dos configuraciones:

- Discos de sección circular con su centro de masa coincidente con el centro geométrico interactuando con una superficie plana o en forma de cuña.
- Partículas planas facetadas interactuando con una superficie también plana.

En ambas configuraciones se procuró introducir mecanismos de interacción entre la superficie y la partícula que pudieran inducir torques, y por lo tanto rotaciones, al momento de la colisión. Los detalles constructivos se presentan en las siguientes secciones.

En cada caso, se obtendrá la trayectoria de cada partícula, lo que permitirá obtener:

- la velocidad durante toda la trayectoria y en particular, antes y después de cada impacto,
- las energías cinética, potencial y de rotación y, en consecuencia, la energía total. Estas energías se obtendrán durante toda la trayectoria y en particular, antes y después de cada impacto.

Estos datos permitirán:

- Obtener el coeficiente de restitución (Ec. 1).
- Analizar la transferencia de energía entre los distintos grados de libertad: de rotación y traslacionales (paralelos y transversales a la gravedad).
- Analizar la pertinencia del coeficiente de restitución para caracterizar el impacto.
- Identificar otros posibles coeficientes que permitan caracterizar la transferencia/pérdida de energía en un impacto.

**ACLARACIÓN:** Llamaremos *experimento individual* o simplemente *experimento* al proceso de impulsar a la partícula o dejarla caer y que experimente sucesivos rebotes hasta terminar en reposo sobre su respectiva superficie, y llamaremos *salto* o *vuelo* al proceso de movimiento libre que ocurre entre dos rebotes o desde el impulso inicial y el primer rebote. De aquí en adelante nos manejaremos con estos términos.

## 6.1. Configuración I: colisión de discos contra una cuña

Teniendo en cuenta lo antedicho respecto a que se estudiará el movimiento restringido a un plano vertical consideremos el caso de un disco interactuando con una base. Cuando este disco (con velocidad de rotación nula) impacta normalmente sobre una superficie plana horizontal, el torque ejercido sobre la partícula durante su interacción con la superficie es nulo, debido a que la línea que se forma

entre el centro geométrico de la partícula y el punto de contacto esta alineada con la gravedad (FIG. 4A). Una de las formas más sencillas de inducir un torque sin cambiar la forma de la partícula es inclinando la superficie (ver FIG. 4B).

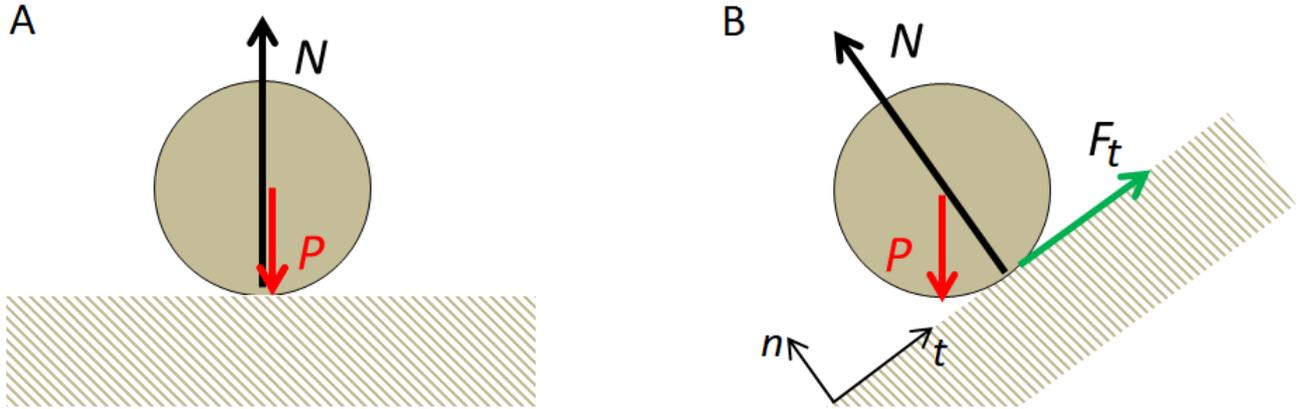


FIG. 4: A - Esquema de fuerzas durante el impacto normal (con velocidad de rotación inicial,  $\omega_i = 0$ ) sobre una superficie plana. B - Esquema de fuerzas durante el impacto vertical sobre una superficie oblicua. La dirección de la fuerza de rozamiento  $F_t$ , tangencial a la superficie plana, depende de la velocidad de rotación previa al impacto. El esquema corresponde al caso en que  $\omega_i = 0$ .

En efecto, durante la mayor parte del tiempo la partícula está en vuelo por lo que la única fuerza que actúa es el peso  $P$ , pero en el breve lapso que dura la colisión actúa una fuerza de contacto impulsiva  $\bar{F} = (F_t, N)$  cuyas componentes son respectivamente la fuerza de rozamiento entre el disco y la superficie de la cuña,  $F_t$  y la fuerza normal a la cuña  $N$ , ambas de valor desconocido. En ese lapso de tiempo las ecuaciones que describen la dinámica de la partícula, en el sistema de coordenadas alineado a la cuña son las siguientes:

$$-P \sin \alpha + F_t = m \frac{dv_t}{dt} \quad (3)$$

$$-P \cos \alpha + N = m \frac{dv_n}{dt} \quad (4)$$

$$R F_t = \frac{dL}{dt} \quad (5)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $v_n$  y  $v_t$  son las componentes de la velocidad en las direcciones normal y tangencial respectivamente,  $L = I\omega$  es su momento angular,  $I$  su momento de inercia y  $\alpha$

el ángulo de la cuña, que en nuestro caso fue fijado en  $\alpha = (45 \pm 1)^\circ$ . Los momentos fueron tomados respecto al centro de masa. De esta última ecuación se desprende que el momento angular del disco cambia en proporción directa a la fuerza tangencial  $F_t$  y dado que la dirección de esta fuerza depende de las condiciones de rotación al momento del impacto resulta que la partícula puede adquirir una velocidad angular distinta que la correspondiente al instante previo a la colisión.

Esta última ecuación se puede escribir en términos del impulso tangencial  $I_t$  definido como:

$$I_t = \int_{t_0}^{t_0+dt} F_t dt \quad (6)$$

Donde  $t_0$  y  $t_0 + dt$  son los instantes previo y posterior al rebote.

Integrando obtenemos:

$$R I_t = L(t_0 + dt) - L(t_0) \quad (7)$$

Y finalmente en términos de la velocidad de rotación:

$$\omega' - \omega = \frac{R}{I} I_t \quad (8)$$

Donde  $\omega = \omega(t_0)$  y  $\omega' = \omega(t_0 + dt)$  son las velocidades angulares de la partícula inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión. Como puede verse, el impulso tangencial recibido durante la colisión produce un cambio en la velocidad de rotación de la partícula y esto, naturalmente, se traduce en un cambio en la energía rotacional de la partícula misma. Estas características de la interacción entre una partícula con una superficie inclinada condujeron al diseño del primer dispositivo utilizado en este trabajo. En el mismo se buscó optimizar las transferencias de energía a la rotación haciendo que la partícula rebote en el espacio comprendido entre las dos piezas triangulares en forma de cuña dispuestas como indica la FIG. 5. A estos efectos se construyó un dispositivo (FIG. 5) que consiste en una celda compuesta de dos placas de vidrio paralelas, con una separación ligeramente mayor al espesor de los discos, dispuesta en forma vertical, con una base formada por dos piezas triangulares en forma de cuña con ángulo de  $45^\circ \pm 1^\circ$ .

Entre las cuñas hay un pequeño espacio por el que se puede deslizar verticalmente un percutor ac-

cionado por un sistema de percusión diseñado a tal fin. Dicho sistema se compone de un parlante que funciona en base a pulsos eléctricos generados por un *trigger* externo. En el instante inicial este percutor impacta al disco imprimiéndole una velocidad inicial en dirección vertical. Los detalles de la celda de vidrio se presentan en la Sec. 6.1.2 (FIG.7). Después del golpe, el disco inicia un vuelo ligeramente parabólico hasta que en su descenso colisiona con alguna de las cuñas, iniciándose un proceso de rebotes sucesivos entre ambas cuñas que finaliza con la partícula nuevamente en reposo ubicada exactamente en la misma posición de partida. A continuación se imprime un nuevo golpe al disco a través del sistema de percusión y el proceso se reinicia. Debido a que, al finalizar el ensayo, la partícula queda en la misma posición inicial, el procedimiento garantiza la repetitividad de las condiciones iniciales, a menos de diferencias debidas a fluctuaciones en la intensidad de la percusión y a imperfecciones en la superficie del disco y de la cuña que generan leves diferencias en las condiciones iniciales de ensayos sucesivos.

Cabe destacar que la elección de una cuña como superficie con la que el disco interactúa se debió a que refleja algunos aspectos del fenómeno que tiene lugar cuando una partícula en movimiento interactúa con sus vecinas que se encuentran formando parte de la superficie de un empaquetamiento granular.

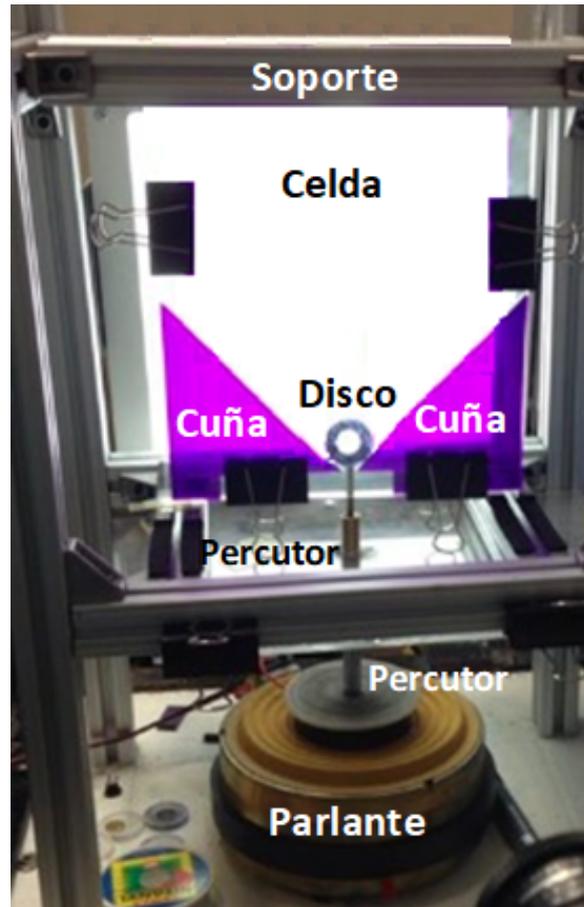


FIG. 5: Configuración I - Foto del dispositivo utilizado.

### 6.1.1. Partículas utilizadas: discos

Se utiliza un disco de acrílico de radio  $R = (1,5 \pm 0,1)$  cm y espesor  $w = (0,40 \pm 0,05)$  cm, con una perforación circular de radio  $r = (0,75 \pm 0,10)$  cm, cuyo centro geométrico coincide con el centro del disco de radio  $R$  (FIG. 6).

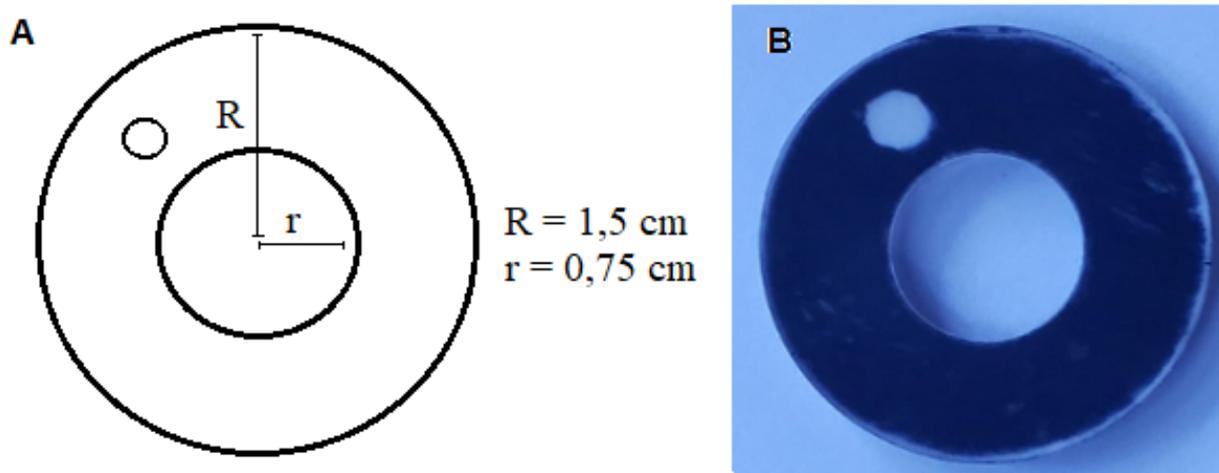


FIG. 6: A- Esquema del disco de acrílico utilizado en la primera etapa. El disco tiene un radio  $R = (1,5 \pm 0,1) \text{ cm}$  y espesor  $w = (0,40 \pm 0,05) \text{ cm}$ , el hueco tiene un radio  $r = (0,75 \pm 0,10) \text{ cm}$ . La pequeña marca circular sobre el disco servirá para detectar sus rotaciones. B - Foto del disco esquematizado en A.

En la tabla I se muestran las características principales de estos discos:

TABLA I. Tabla comparativa de los parámetros característicos de los discos empleados en las experiencias iniciales.

PARÁMETRO	VALOR
Material del disco	Acrílico
Masa del disco (g)	$2,71 \pm 0,01$
Espesor (cm)	$0,40 \pm 0,05$
Diámetro del disco (cm)	$3,0 \pm 0,1$
Diámetro de la perforación (cm)	$1,5 \pm 0,2$
Momento de inercia del disco ( $\text{g cm}^2$ )	$3,59 \pm 0,41$

El detalle del cálculo de los momentos de inercia se puede consultar en el Apéndice A.

### 6.1.2. Celda experimental y sistema de excitación vertical

La celda consta de dos placas de vidrio float, de ancho  $(24,0 \pm 0,1) \text{ cm}$  y alto  $(30,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ , separadas entre sí una distancia ligeramente mayor al espesor de las partículas, a los efectos de confinar su movimiento a un plano (FIG. 7) y asegurar un movimiento aproximadamente bidimensional. Esta celda posee en su base dos piezas triangulares hechas de acrílico con una apertura angular de  $45^\circ$ .

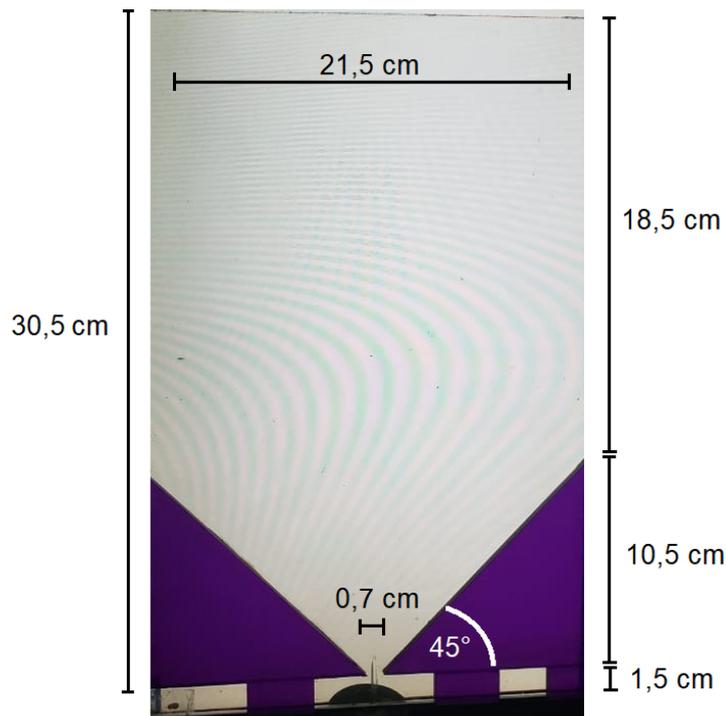


FIG. 7: Celda de vidrio experimental. Presenta cuñas en su base que restituyen al disco hacia su centro.

Como se mencionó mas arriba, además de ejercer torques sobres los discos, las cuñas permiten guiar y restituir los discos hacia la posición central y colocarlos sobre el pistón percutor, que al ser accionado realizará un *tapping* o golpe vertical sacando a los discos de su posición de equilibrio.

La celda se sostiene mediante una estructura de aluminio y posee en su base un orificio que permite la entrada del percutor. Este último es un cilindro metálico de 2 cm de largo y 0,4 cm de diámetro, que se encuentra adosado a un parlante, y que se eleva y desciende respondiendo a pulsos eléctricos de 5 V generados desde un *trigger* externo con período regulable. En este trabajo se utilizará un periodo de  $\tau = 1$  s. En experiencias preliminares se determinó que este tiempo es superior al necesario para que el disco relaje al equilibrio antes de volver a ser excitado. De esta manera cada golpe produce en el disco una respuesta que es independiente de las otras. Sin embargo, para que la señal tenga la potencia suficiente como para excitar al disco, el *trigger* fue conectado a un amplificador Luxell SXP 400, de 800 W de potencia, de manera que la señal inicial fuera amplificada con diferentes niveles de ganancia.

A partir del análisis de las imágenes de video (detalles en la Sec. 7.1), los valores de los niveles de ganancia utilizados se tradujeron a valores de energía inicial inyectada al disco. Para cada nivel de ganancia se determinó el valor de energía medida en el punto más alto de la trayectoria tras el impacto del percutor, y se asumió dicho valor como medida de la energía total inyectada a la misma en la percusión. Los detalles de la calibración se dan en la Sec. 9 (FIG. 25). Los resultados se presentan en la Tabla II.

TABLA II. Energía inyectada a la partícula para algunos valores de ganancia del amplificador.

NIVEL DE GANANCIA ( $dB$ )	ENERGÍA INYECTADA ( $mJ$ )
16	0,078
15	0,097
14	0,121
13	0,154
12	0,200
11	0,266
10	0,362
9	0,510
8	0,749
7	1,156
6	1,909

Los detalles de esta calibración (Tabla II), se presentan en la Sec. 9, mientras que los detalles del cálculo de la energía se presentan en la Sec. 7.2.

## 6.2. Configuración II: colisión de partículas planas facetadas contra una placa plana

El dispositivo de la cuña fue elegido porque permite introducir torques, y por ende rotaciones de la partícula, de una forma sencilla. Los resultados obtenidos de este experimento, en particular aquellos referentes al coeficiente de restitución, serán comparados con los resultados de un experimento testigo: los que se obtienen de la colisión de un disco sobre una superficie plana. Para ello, se construye un segundo dispositivo experimental, en el que la inyección inicial de energía ya no podía ser provista por el sistema de percusión debido a que en una superficie plana horizontal hay dificultades para lograr que la partícula se ubique precisamente sobre el cilindro percutor y debido a que en caso de lograrse tal objetivo, en los sucesivos rebotes la partícula estaría colisionando justo encima del

percutor donde la interacción ya no sería entre el disco y un plano. Por este motivo en el dispositivo diseñado la superficie de impacto es plana horizontal y la partícula adquiere energía cinética porque es lanzada con velocidad inicial nula desde cierta altura por sobre la base (FIG. 8).

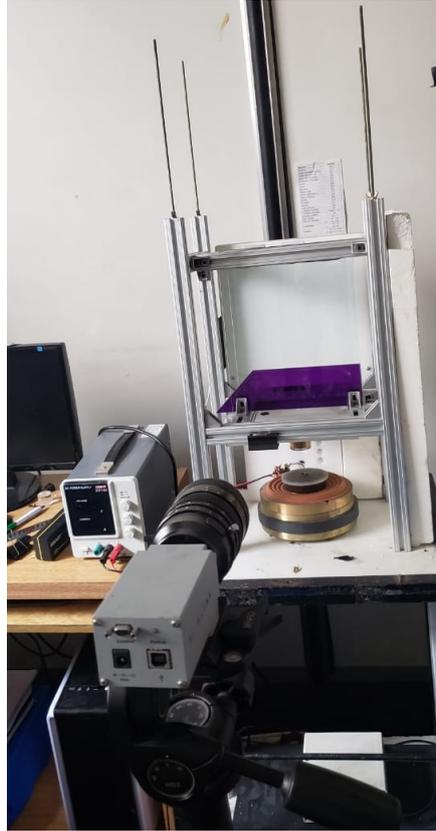


FIG. 8: Configuración II - Imagen del dispositivo utilizado para experiencias de rebotes de partículas sobre superficie plana.

Por otro lado, si la cuña es el mecanismo que permite introducir torques cuando la partícula es un disco, una forma de lograr resultados similares pero en una superficie plana horizontal es modificando la forma de la partícula. Es por este motivo que en esta segunda etapa, se trabajará con partículas de sección poligonal, que presentan facetas y bordes angulosos que favorecen el desarrollo de torques impulsivos de gran intensidad. En la FIG. 9B se muestra un esquema de las fuerzas sobre la partícula facetada. La fuerza de fricción horizontal  $F_x$  aparecería en el caso en que, al momento de la colisión, la partícula posea una velocidad de rotación en el sentido horario.

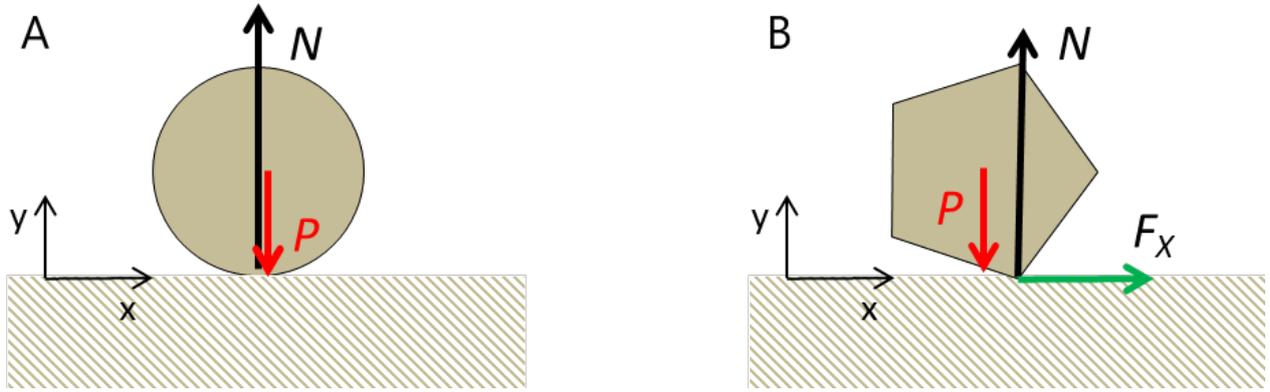


FIG. 9: Esquema de fuerzas durante el impacto vertical con una superficie plana para: (A) disco, (B) partícula facetada pentagonal.

En un experimento típico, se ubica a las partículas en la parte superior de la celda en una boquilla con retén que permite controlar la condición inicial del lanzamiento. En el momento indicado, se libera el retén y la partícula cae para impactar con la superficie plana con velocidad de impacto determinada. Se producen una serie de rebotes con la superficie hasta que se disipa toda la energía y la partícula queda en reposo sobre la base. Este procedimiento se repite entre 30 y 50 veces. Por cada lanzamiento se registran aproximadamente 30 rebotes. Esto significa que para cada partícula utilizada se obtienen un total de entre 900 a 1500 rebotes aptos para la determinación del coeficiente de restitución.

El procedimiento de lanzar la partícula desde una altura dada permitió obtener velocidades de impacto mayores a las conseguidas con el dispositivo de percusión (Configuración I), lo que permitió analizar la disipación de energías en un rango de energías más altas. Los detalles de esta configuración (II) serán descritos en las subsecciones siguientes.

### 6.2.1. Partículas utilizadas: facetadas

Se diseñaron e imprimieron en una impresora 3D (CreateBOT- MID) 9 partículas planas de poliláctico (PLA) de espesor  $E = 0,4$  cm, cuya sección corresponde a un polígono regular de  $N$  lados (Fig. 10). El área de la sección poligonal fue ajustada para que todas las partículas tuviesen la misma masa  $m = (2,71 \pm 0,01)$  g. Se imprimieron partículas con  $N = 3$ ,  $N = 4$ ,  $N = 5$ ,  $N = 6$ ,  $N = 7$ ,  $N = 8$ ,  $N = 9$ ,  $N = 10$  y  $N = 15$  facetas. Para partículas con un número mayor de lados los resultados que se obtuvieron son prácticamente indistinguibles de los obtenidos para el disco. La partícula

que completa este conjunto es la circular, la cual justamente puede ser considerada como la que posee infinitas facetas. Todas estas partículas presentan una perforación, de diámetro  $d_p = 1,4$  cm coincidente con su centro geométrico. La perforación tiene como objetivo reducir la posible fricción de la partícula con las paredes de la celda.

En el Apéndice B se especifica con detalle el procedimiento completo para diseñar estas partículas y construirlas. Para el cálculo de energía de rotación  $E_c^{(rot)}$ , que es una cantidad importante en este estudio, es imprescindible la determinación del momento de inercia  $I$  de las partículas ya que esta energía es de la forma:

$$E_c^{(rot)} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9)$$

En el Apéndice E se presentan los cálculos realizados para determinar los momentos de inercia de partículas de sección poligonal de  $N$  lados. Dado que se observó que el valor de  $I$  no cambia significativamente respecto del obtenido para el disco ( $I = (3,59 \pm 0,41) \text{ g cm}^2$ ), se toma este último para el cálculo de las correspondientes energías cinéticas de rotación para todas las partículas facetadas ensayadas.

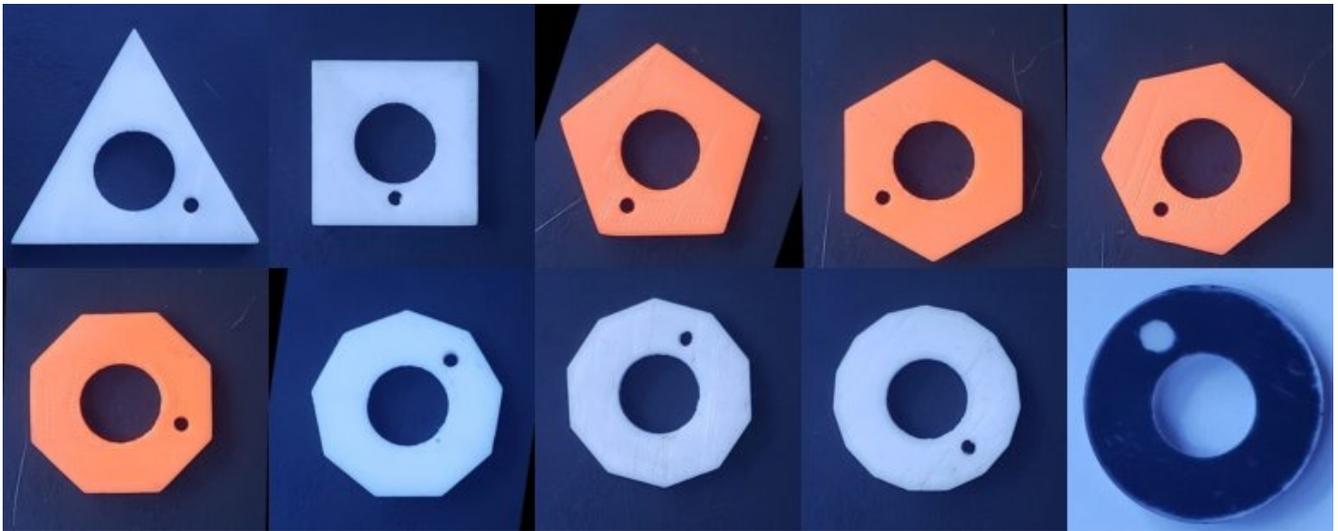


FIG. 10: Imagen de las partículas que fueron empleadas en los experimentos con base plana.

### 6.2.2. Caracterización de la celda experimental

La celda utilizada para estas experiencias es básicamente la misma que la de la Configuración I (Sec. 6.1.2). Los materiales y las dimensiones no se modificaron, pero sí su configuración interna (FIG.

11). Se han quitado las placas triangulares que formaban una cuña que simulaba la rugosidad del medio, y se las reemplazó por una placa plana de acrílico, que permite que la superficie en la cual las partículas reboten tenga una normal perpendicular a la dirección de caída (alineada con la gravedad). La sección inclinada que se observa en la figura fue empleada con el fin de recuperar más fácilmente la partícula una vez finalizado el ensayo. Las partículas fueron lanzadas desde la parte superior de la celda (no visible en la figura) y caen aproximadamente en la mitad de la denominada *sección útil* del sistema, cuya longitud es de  $(20 \pm 0,1)$  cm.

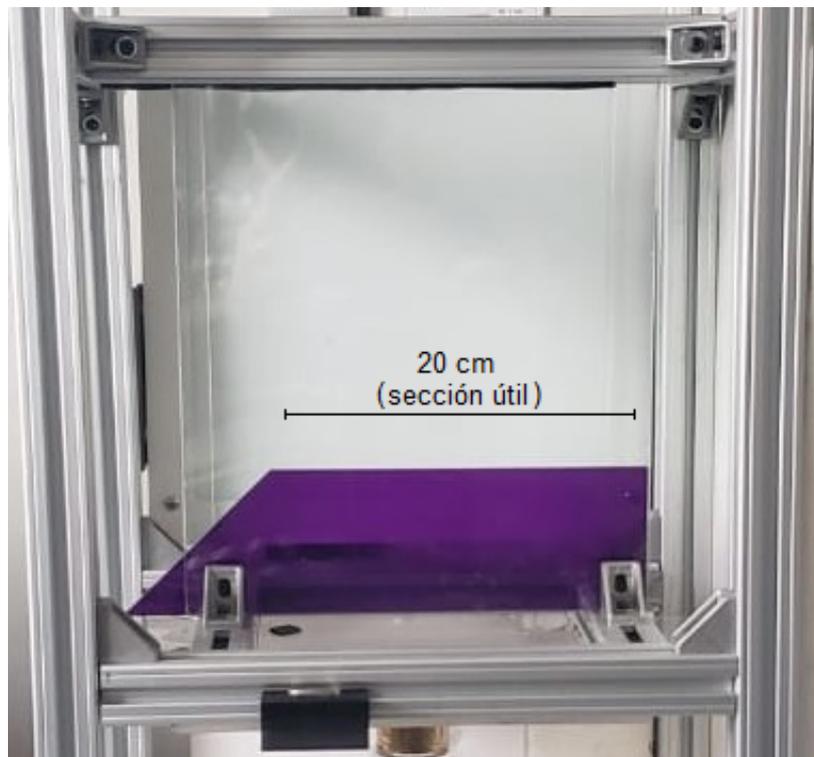


FIG. 11: Configuración de la celda con su base plana.

### 6.3. Control de la fricción

Como fue mencionado, a fin de permitir el movimiento de las partículas dentro del celda se estableció una distancia entre las placas de vidrio (gap) levemente mayor al espesor de las partículas. En una celda perfectamente vertical podría aparecer un pivoteo errático de la partícula fuera del plano vertical tanto en la fase de subida como en la bajada. A fin de disminuir el pivoteo y las variaciones indeseables que ello introduce en el rozamiento coulombiano, se realizaron ensayos inclinando la celda unos pocos grados alrededor del eje que forma la línea horizontal de base. El objetivo de este

procedimiento es que la partícula esté la mayor parte del tiempo apoyada contra una de las placas de vidrio (Fig. 12) lo cual permite regularizar su movimiento en el plano. Luego de algunas pruebas se determinó que una inclinación de  $(7,0 \pm 0,1)^\circ$  permitía lograr este objetivo sin alterar significativamente el valor de la gravedad efectiva experimentada por la partícula. En efecto, en esas condiciones el cambio porcentual en la gravedad efectiva es de sólo  $\frac{g-g'}{g} \% = (1 - \cos(7^\circ)) \times 100 = 0,75 \%$ . Una discusión más detallada del rozamiento que actúa sobre las partículas se da en la Sec. 8.2.

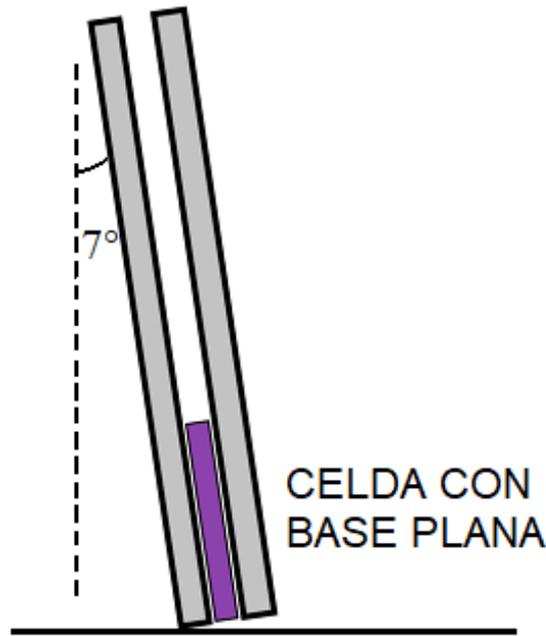


FIG. 12: Esquema de la vista lateral de la celda inclinada.

## 7. Metodología de trabajo

Se explicará en esta sección la manera en la que se llevarán a cabo los ensayos y los protocolos de análisis de datos para cada una de las dos configuraciones experimentales mencionadas en la Sec. 6.

- Experimentos con la configuración I: discos interactuando con cuñas:** Se realizaron 13 experimentos para cada uno de los valores de potencia del percutor empleados (Tabla II). Cada experimento consistió en poner el disco en la posición de equilibrio sobre el percutor, luego para un valor de potencia, se lo acciona automáticamente cada  $T = 1 \text{ s}$ .

El percutor da un golpe de una duración  $\delta t < 1$  ms, que excita verticalmente al disco. Después de sucesivos rebotes contra las cuñas, este último se detiene en la posición de equilibrio sobre el percutor que está en reposo. El tiempo  $T$  es suficientemente largo como para que el disco ya esté en equilibrio cuando el percutor se vuelve a accionar.

Todo el experimento se graba en video y posteriormente se analizan los datos a fin de obtener las trayectorias, velocidades y energías. Los detalles se explican en las Secs. siguientes (7.1 y 7.2).

- **Experimentos con la configuración II: partículas facetadas interactuando con una superficie plana:** Para cada tipo de partícula facetada con  $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$  e  $\infty$  (disco), se realizó una serie de experimentos. Para  $N = 3, 9$  y para el disco la cantidad fue mucho mayor (alrededor de 50) que para el resto (alrededor de 10). Cada experimento consistió en dejar caer una partícula facetada desde una altura  $h$  sobre la placa plana, de modo que después de sucesivos rebotes la partícula se detiene y el procedimiento se vuelve a realizar. Como se mencionó en el párrafo anterior, estos experimentos se graban en video para luego obtener las trayectorias, velocidades y energías, mediante el análisis de los datos resultantes.

## 7.1. Métodos de adquisición de datos

### 7.1.1. El funcionamiento de la cámara de video

La adquisición de las imágenes se realizó, en escala de grises, con una cámara Mako U-051B controlada por el software *Image Acquisition* interno de GNU Octave. La cámara se coloca frente a la celda de trabajo (FIG. 7 o FIG. 11) de forma que el eje de cámara y celda estén paralelas. La cámara y el software permiten configurar diversos parámetros relevantes:

- **La región de interés:** se selecciona de forma de asegurar un área suficiente para registrar todas las partículas. Se recomienda que no sea demasiado grande, ya que puede ocasionar problemas de almacenamiento, para lo cual experimentos preliminares permiten estimar la altura máxima que alcanzarán las partículas y definir un área adecuada.
- **Tiempo de captura entre imágenes o frecuencia de muestreo:** se fija una frecuencia de muestreo de  $f \approx 391$  fps (frames per second), lo cual determina la adquisición de una imagen

cada  $dt = 0,00255$  s, siendo este el intervalo de captura entre imágenes, que se calcula como la inversa  $\frac{1}{f}$  de la frecuencia de muestreo.

- **Resolución:** la resolución es  $800 \times 600$  pixeles, la ventana de observación es de  $26,4 \text{ cm} \times 19,8 \text{ cm}$ , por lo que 1 px es equivalente a  $0,033 \text{ cm}$  en el espacio físico.
- **El número de imágenes que contendrá el video:** según el lapso  $\Delta t$  de tiempo en segundos que se requiere grabar y teniendo en cuenta la velocidad de muestreo (391 fps), se puede estimar la cantidad de imágenes que el programa deberá adquirir:  $\Delta t/dt$ . Se selecciona de forma que sea posible registrar el fenómeno de la manera más completa posible.
- **El tiempo de exposición:** Se elige un tiempo de exposición lo suficientemente corto como para realizar la detección con nitidez, y lo suficientemente largo como para no perder contraste entre la partícula y el fondo. Se observa que  $t = 0,04 \text{ ms}$  resulta óptimo.

Las imágenes capturadas pasan a integrar un video formato AVI, que puede ser abierto para su procesamiento con el software ImageJ. Este software permite obtener la posición del centro de masa de las partículas en cada captura. El procedimiento (algoritmo) para la detección del centro de masa de las partículas se explica en la Sec. 7.1.2. El intervalo de tiempo entre capturas por parte de la cámara es muy pequeño ( $dt = 0,00255$  s), y permite obtener la trayectoria de las partículas con una buena precisión.

### 7.1.2. El procesamiento digital de las imágenes

La detección del centro geométrico de las partículas como de la perforación circular (practicada para poder detectar su rotación), se realizan con ImageJ. La detección de los centros geométricos permite por un lado, la obtención del centro de masa de toda la partícula y por otro lado, permite analizar el movimiento del centro de la perforación a fin de detectar posibles rotaciones y medir la velocidad de rotación de la partícula. ImageJ obtiene el centro de masa (en pixeles) de partículas aisladas conformadas por pixeles blancos, para lo cual es necesario contar con una imagen en escala de grises (diferentes niveles de grises entre un valor 0 para el negro y un valor 255 para el blanco) y transformarla a una imagen con solo pixeles blancos y negros. Para ello se selecciona un nivel umbral de gris debajo del cual el valor del pixel se lleva a 0 (negro) y sobre el cual se lleva a 255 (blanco). A fin

de evitar la detección de partículas espurias, el programa permite restringir la búsqueda a partículas con un determinado tamaño y también permite establecer un valor de circularidad (entre 0 y 1) que filtra analizando que tan circular es la partícula, siendo el valor 1 el que le corresponde a un círculo. A fin de detectar correctamente la posición del centro geométrico de las partículas, primero debe *borrarse* la perforación que suma un conjunto de píxeles negros que generan una desviación del centro de masas de píxeles blancos correspondiente a la partícula. Para ello debe aislarse la perforación y formar una imagen *máscara*: se lo detecta buscándolo como un círculo de área pequeña y se forma una imagen donde la perforación quede en blanco y el fondo en negro. Luego, a la imagen completa binarizada se le suma la imagen máscara que *borra* la perforación. De esta forma quedará una partícula blanca sin perforación sobre la que se aplica el algoritmo de búsqueda de su centro de geométrico / de masa. Las posiciones de los centros geométricos de las partículas detectadas (en coordenadas cartesianas, medidas en píxeles, desde un vértice de la pantalla) pueden ser exportados y analizados con cualquier software de cálculo. Considerando el tamaño de las partículas y los umbrales de grises utilizados para la detección de los centros geométricos de las partículas ( $\approx 200$ , lo cual implica que los píxeles con nivel de gris inferior se los considera blancos), las coordenadas se obtienen con una incerteza de 0,1 px [26] (por lo general  $0,1 \text{ px} = 0,033 \text{ mm}$ , aunque puede variar levemente entre los experimentos en las distintas configuraciones).

## 7.2. Obtención de magnitudes relevantes

Se traducen los valores en píxeles de la posición del centro de cada partícula, a valores en centímetros, mediante un protocolo que se detalla en el apéndice C, a través del cual se obtiene el *factor de calibración*  $\alpha$ , de modo que se obtienen las posiciones en centímetros, aplicando la fórmula:

$$r_{cm} = \alpha r_{px} \quad (10)$$

donde  $r_{px}$  denota a cualquier coordenada de posición en píxeles y  $r_{cm}$  denota a cualquier coordenada en centímetros. El valor de  $\alpha$  puede cambiar en las distintas configuraciones, dado que cualquier leve desplazamiento de la cámara en cualquier dirección ya verá modificados los tamaños y/o las formas de las imágenes detectadas. Por esta razón, se calcula este coeficiente para cada experimento. Generalmente  $\alpha \approx 0,033 \text{ cm}$ . Se puede graficar la trayectoria en el plano de la celda, graficando una coordenada en función de la otra para obtener las trayectorias de la partícula en el plano de la celda,

o bien cualquiera de las dos en función del tiempo para obtener las curvas horarias, las cuales nos serán útiles para obtener luego las velocidades y las aceleraciones en función del tiempo. La variable temporal la obtenemos teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo de imágenes es  $f \approx 391$  fps. De este modo, el intervalo  $\Delta t$  entre imágenes fue tomado como la inversa de esta frecuencia (i.e.  $\Delta t = 0,00255$  s). Para obtener las velocidades se calculó de forma numérica la derivada de la posición para cada coordenada por diferencias simples, utilizando la fórmula progresiva dada por:

$$v(t_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j} = \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \quad (11)$$

De la misma manera que en la Ec. (11) se obtienen las aceleraciones. Para llevar a cabo nuestros objetivos, una de las cantidades relevantes con las cuales se trabaja es el coeficiente de restitución entre dos superficies que colisionan (su expresión es la dada por la Ec. (1)), de manera que para poder calcularla, es necesario obtener los valores de velocidad en el instante inmediato anterior e inmediato posterior al choque. Según las incertezas mencionadas para las coordenadas (se asume despreciable la incerteza en la frecuencia de muestreo), los valores de velocidad tienen un error  $\Delta v = 2,6$  cm/s que lleva a errores relativos  $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \in [0,03; 0,19]$ . Para  $\varepsilon \leq 1$ , el error  $\Delta \varepsilon \in [0,02; 0,19]$  y para  $\varepsilon > 1$ , se obtienen errores  $\Delta \varepsilon \in [0,04; 0,33]$ .

Cabe aclarar que entre imagen e imagen, la velocidad de muestreo (391 fps) permite detectar como mínimo desplazamientos de 1 px, por lo tanto, los valores de  $v_n$  y  $v_n'$  inferiores a  $v_{umbral} = 391$  px/s no pudieron ser medidos con precisión y se filtran del conjunto de datos obtenidos. La velocidad  $v_{umbral}$  puede cambiar en las distintas configuraciones debido a los diferentes valores de calibración px/cm (Ec. (10)) que en general dan valores de  $v_{umbral}$  entre 11 cm/s y 13 cm/s.

Otras cantidades importantes en el estudio al cual hace referencia esta Tesis son los distintos tipos de energías de la partícula en pleno desarrollo del experimento. Se ha considerado a la energía mecánica de una partícula como:

$$E = E_c^{(tr)} + E_c^{(rot)} + E_p \quad (12)$$

donde  $E$  es la energía mecánica total,  $E_c^{(tr)}$  es la energía cinética de traslación,  $E_c^{(rot)}$  es la energía

cinética de rotación, y  $E_p$  es la energía potencial gravitatoria de la partícula (ver Apéndice A para más detalles sobre la expresión de estas energías en función de las coordenadas de posición y de velocidad de la partícula).

## Parte III

# ANÁLISIS DE RESULTADOS CON DISCOS

## 8. Caracterización cinemática sobre superficie plana

A fin de caracterizar el problema, comenzaremos analizando el movimiento de un disco con una perforación centrada rebotando sobre una superficie plana. Cabe destacar, que siendo esta partícula la de mayor simetría, el comportamiento de esta se tomará como referencia y se usará para comparar la mayoría del resto de los resultados.

Se dejó caer el disco en forma vertical (en la dirección de la gravedad), con velocidad inicial nula desde la parte superior de la celda. Dado que el soporte de aluminio que sujeta la celda impide la visualización del punto de lanzamiento, los primeros valores registrados para la coordenada vertical del centro de masa son de  $y \approx 16$  cm. Esta experiencia se repite aproximadamente 50 veces y un ejemplo de lo observado en cada caso, se muestra en la FIG. 13, donde puede observarse la evolución de la altura o posición vertical ( $y$ ) que adquiere el disco. La misma muestra que este realiza varios rebotes sobre la superficie plana, alcanzando en cada salto una altura máxima cada vez menor, debido a que en cada impacto disipa energía en la colisión. Finalmente el disco llega al reposo.

En este problema, donde la partícula tiene una alta simetría se podría suponer que durante el impacto no aparecen torques que generen rotaciones, ni fuerzas que la desvíen en la dirección  $x$ , transversal a la dirección de la gravedad ( $y$ ). Esta hipótesis queda evidenciada en el escaso desplazamiento que tiene la partícula en la dirección horizontal con respecto al desplazamiento vertical, tal como se muestra en el gráfico en línea de puntos de la FIG. 13. En ese caso, solo tendremos conversión de energía en alguno de sus modos en cinética y viceversa, y además la energía cinética solamente estará determinada por  $v_y$ , componente de la velocidad en la dirección  $y$ . Por lo tanto, del análisis de la trayectoria del disco se podrá obtener más fácilmente información sobre la disipación de energía en este experimento. Consideramos que esta disipación tiene dos orígenes:

- **Por colisión del disco con la superficie plana:** que puede caracterizarse con el coeficiente de restitución  $\varepsilon$ .
- **Por fricción del disco con las paredes de la celda:** que puede caracterizarse mediante una fuerza de rozamiento.

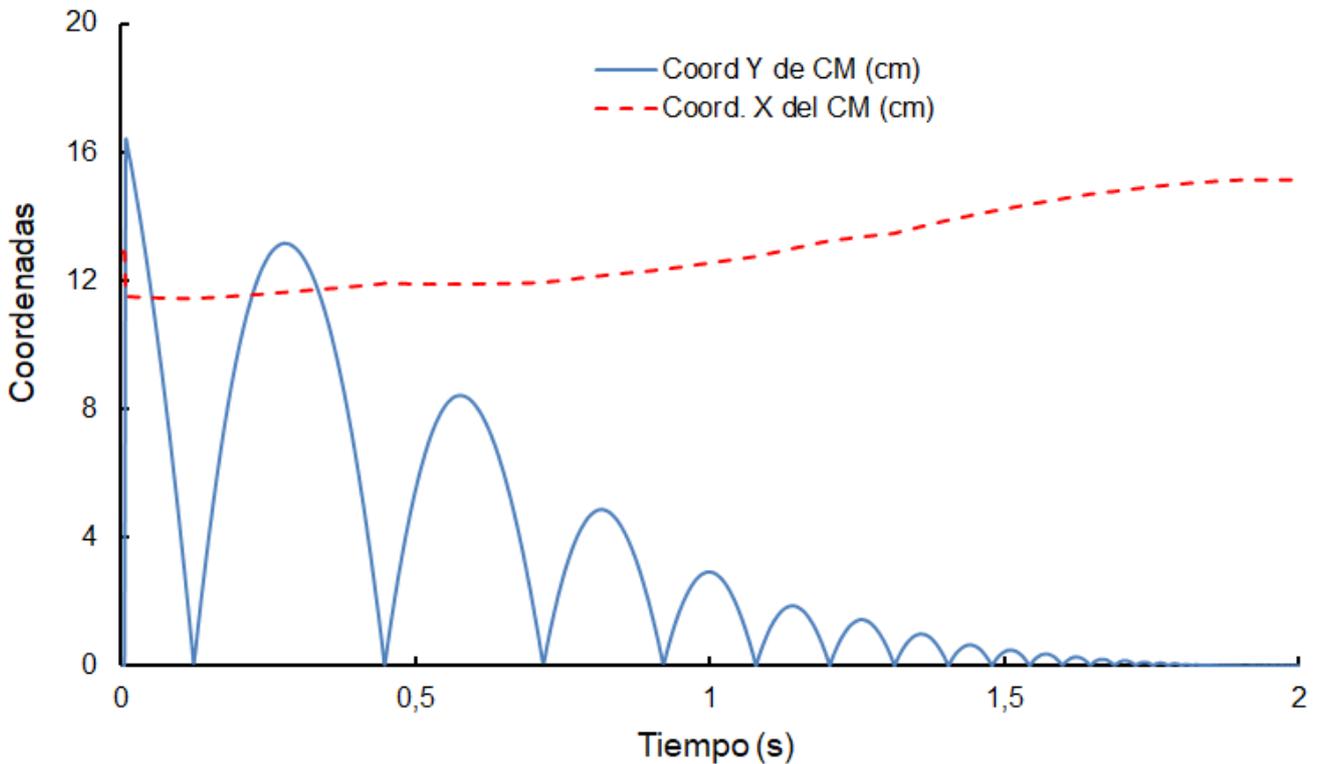


FIG. 13: Posición de las coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de masa del disco en función del tiempo durante su interacción con una superficie plana.

## 8.1. Determinación del coeficiente de restitución con superficie plana

A fin de caracterizar la pérdida de energía en cada colisión, determinaremos el coeficiente de restitución  $\varepsilon$  que da la tasa de disminución de velocidad durante un impacto (Ec. (1)). Para ello usamos dos métodos diferentes y analizamos el alcance de validez de los mismos.

### 8.1.1. Método I

La evolución de la altura o posición vertical ( $y$ ) (FIG. 13), muestra una serie de rebotes en la superficie plana que da lugar a trayectorias parabólicas donde cada una puede ser descrita por la siguiente

ecuación horaria:

$$y(t) = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g' t^2 \quad (13)$$

donde  $v_{y_0}$  es la velocidad inicial de la coordenada  $y$  del centro de masa, que se corresponde con la velocidad que experimenta la partícula inmediatamente luego de salir rebotada desde la superficie, y  $g' = g \cos(7^\circ)$  es la corrección a la aceleración de la gravedad debido a la inclinación de la celda descrita en la Sec. 6.3. También se puede observar en el gráfico en línea de puntos de la FIG. 13 que el movimiento transversal se aproxima a un movimiento rectilíneo uniforme:

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t \quad (14)$$

donde en este caso, de un salto al siguiente no existe un desplazamiento apreciable del disco en la dirección horizontal, de modo que puede suponerse que el movimiento es básicamente vertical.

A fin de caracterizar la pérdida de energía en cada colisión, determinaremos el coeficiente de restitución  $\varepsilon$  que da la tasa de disminución de velocidad durante un impacto (Ec. (1)). Teniendo en cuenta las siguientes hipótesis, proponemos un modelo sencillo a fin de obtener  $\varepsilon$ :

- Conociendo el factor de disipación  $\varepsilon$ , dado un valor de velocidad vertical de impacto  $v_y$ , se puede obtener la velocidad vertical de salida  $v_y'$  después de un impacto través de la definición de  $\varepsilon$  (Ec. 1):

$$\varepsilon = -\frac{v_y'}{v_y} \quad (15)$$

- En ausencia de energía de rotación y suponiendo despreciable la velocidad transversal, toda la energía cinética después del impacto, obtenida con  $v_y'$ , se transfiere a energía potencial cuando el disco alcanza la máxima altura.
- Para simplificar el análisis supondremos que  $\varepsilon$  no depende de la velocidad de impacto  $v_y$ , aunque esto solo sería válido a velocidades de impacto altas [21, 22].

El modelo, desarrollado en detalle en el *Ápndice D*, propone una expresión analítica para las alturas máximas entre vuelos sucesivos que finalmente permite relacionar la altura máxima obtenida en el vuelo  $n$ -ésimo (llamémosla  $h_n$ ) con la altura inicial  $h_0$ :

$$h_n = \varepsilon^{2n} h_0 \quad (0 \leq n \leq N) \quad (16)$$

Se toma el valor de  $h_0$  como el valor de la máxima altura correspondiente al primer vuelo completo realizado por el disco debido a que no puede registrarse la altura de lanzamiento. Tal indeterminación se debe a la dificultad que existe para captar con la cámara a la totalidad de la partícula desde la altura inicial debido a la presencia de la estructura de aluminio externa que sostiene la celda, siendo los primeros valores detectables aquellos correspondientes a alturas de  $y \approx 16$  cm. Pero volviendo al modelo, bajo la hipótesis de que  $\varepsilon$  es constante e independiente de la velocidad de impacto, la pendiente de la recta determinada por la gráfica de  $\frac{h_n}{h_0}$  en función de  $n$  en escala logarítmica es igual a  $2 \ln(\varepsilon)$ , lo cual nos permite mediante un despeje obtener el coeficiente  $\varepsilon$ . En la FIG. 14, se muestra este gráfico en función de  $n$  para 3 experimentos, tomando  $h_0$  como la altura máxima alcanzada luego del primer rebote.

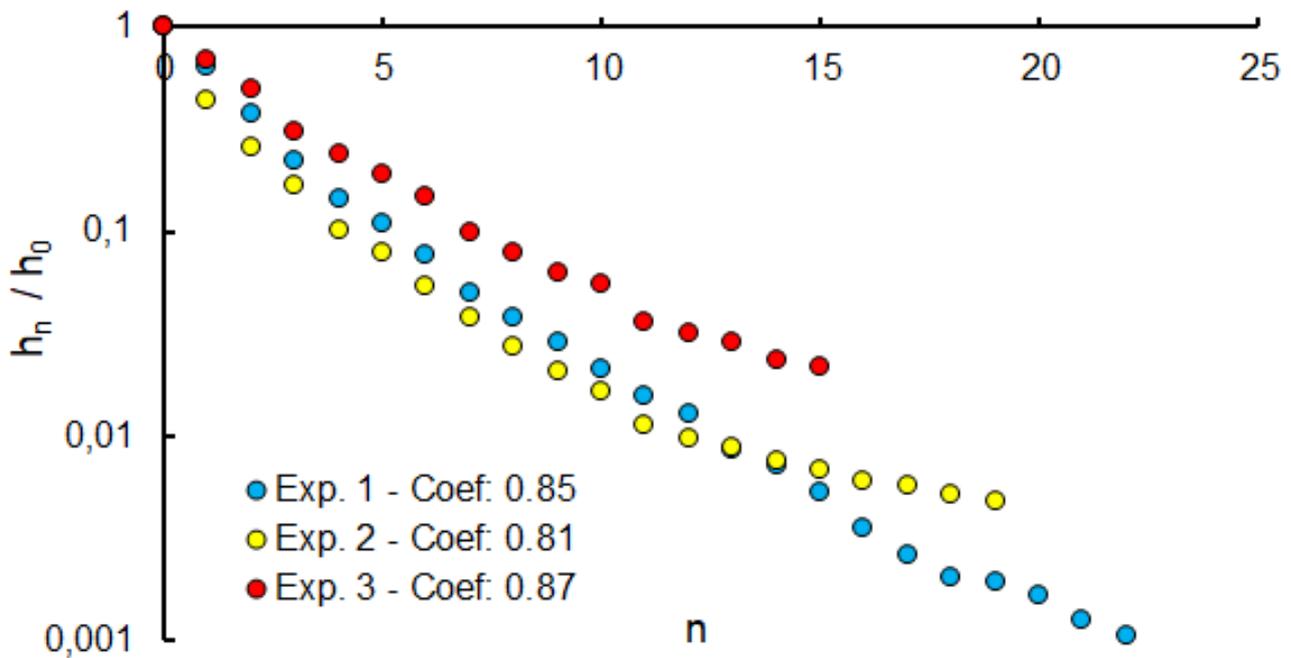


FIG. 14: Altura máxima normalizada por  $h_0$  en escala logarítmica en función del número  $n$  de rebote sobre la base, para tres experimentos diferentes con un disco.

Analizando la variación del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto y su dispersión para diferente número de facetas (Sec. 10) se van a definir dos regímenes de velocidades:

- Según lo observado en los experimentos (curvas obtenidas en el gráfico de la FIG. 14), el modelo resulta lineal para los primeros  $n = 10$  saltos.

- Para  $n$  grande (mayor a 10) se observa que el modelo se desvía levemente de la linealidad propuesta por la ecuación (16)

En la Tabla III se exponen el número de saltos considerados para cada uno de los tres experimentos realizados, y el correspondiente valor de  $\varepsilon$  obtenido.

TABLA III. Número de saltos considerado y valor del coeficiente de restitución obtenido en cada uno de los experimentos realizados para obtener el coeficiente mediante el cociente de alturas máximas consecutivas.

# EXP.	CURVA	# SALTOS	$\varepsilon$
1	Azul	19	0.85
2	Amarilla	9	0.81
3	Roja	13	0.87

De este modo, tomando el promedio de estos tres valores obtenidos para el coeficiente, el modelo permite obtener una primera estimación de  $\varepsilon \approx 0,84 \pm 0,03$ .

### 8.1.2. Método II

A fin de analizar la dependencia del coeficiente de restitución con la velocidad normal de impacto ( $v_n = v_y$ ), para cada impacto con la superficie plana, se medirá la velocidad con que impacta y con la que sale el disco después de la colisión, lo que permite obtener  $\varepsilon$  con la Ec. (1).

En la FIG. 15 se muestra la evolución de la componente vertical de la velocidad, un cambio repentino en el signo de la velocidad vertical se produce cuando el disco colisiona con la superficie plana y, por lo tanto,  $v_y$  y  $v_y'$  pueden obtenerse respectivamente a partir de los mínimos y máximos locales de la evolución de esta velocidad vertical. Para cada rebote se obtuvo un valor del coeficiente de restitución con los valores de  $v_y$  y  $v_y'$  (Ec. 1) estimado con velocidades de traslación del centro geométrico de las partículas antes y después del impacto, respectivamente. En la Sec. 8.2 se da una descripción más detallada del comportamiento de la componente vertical en función del tiempo.

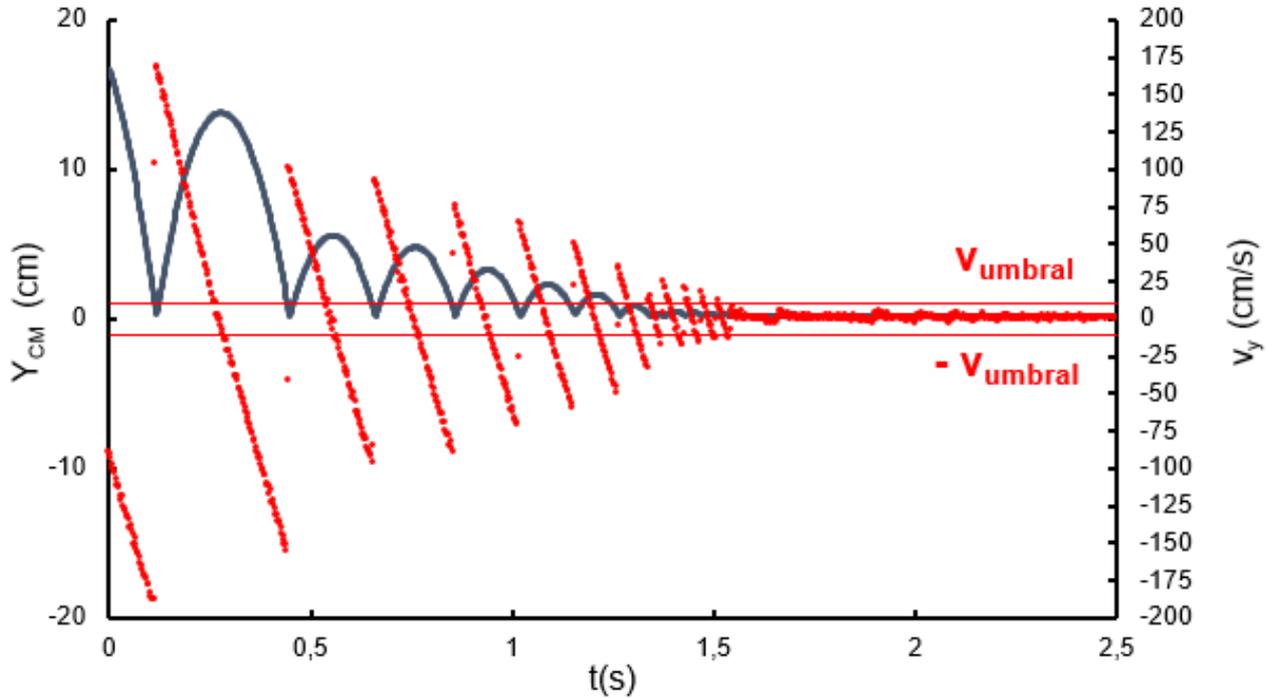


FIG. 15: Evolución de la coordenada vertical (línea azul) y de la velocidad vertical (línea punteada roja) durante la interacción de un disco con una base plana. Las líneas horizontales rojas indican los valores de la velocidad umbral de filtrado (Sec. 7.2).

Se analizan 56 experiencias, dando un total de 516 rebotes, lo cual permite realizar una estimación de  $\varepsilon$  para cada uno de ellos. En la FIG. 16A se muestra la dependencia de  $\varepsilon$  con la velocidad de impacto. Sin embargo, de ese total de rebotes mencionado se filtraron aquellos calculados con velocidades de impacto y de rebote menores a  $v_{umbral} = 13 \text{ cm/s}$ . Como se mencionó en la Sec. 7.2, esta velocidad umbral, es la mínima detectable a una frecuencia de muestreo de 391 cuadros por segundo. En la FIG. 16A se muestra la variación del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto. A medida que la velocidad de impacto disminuye se ve una mayor dispersión del coeficiente de restitución (FIG. 16B), tal como se observase en otros trabajos [21, 22].

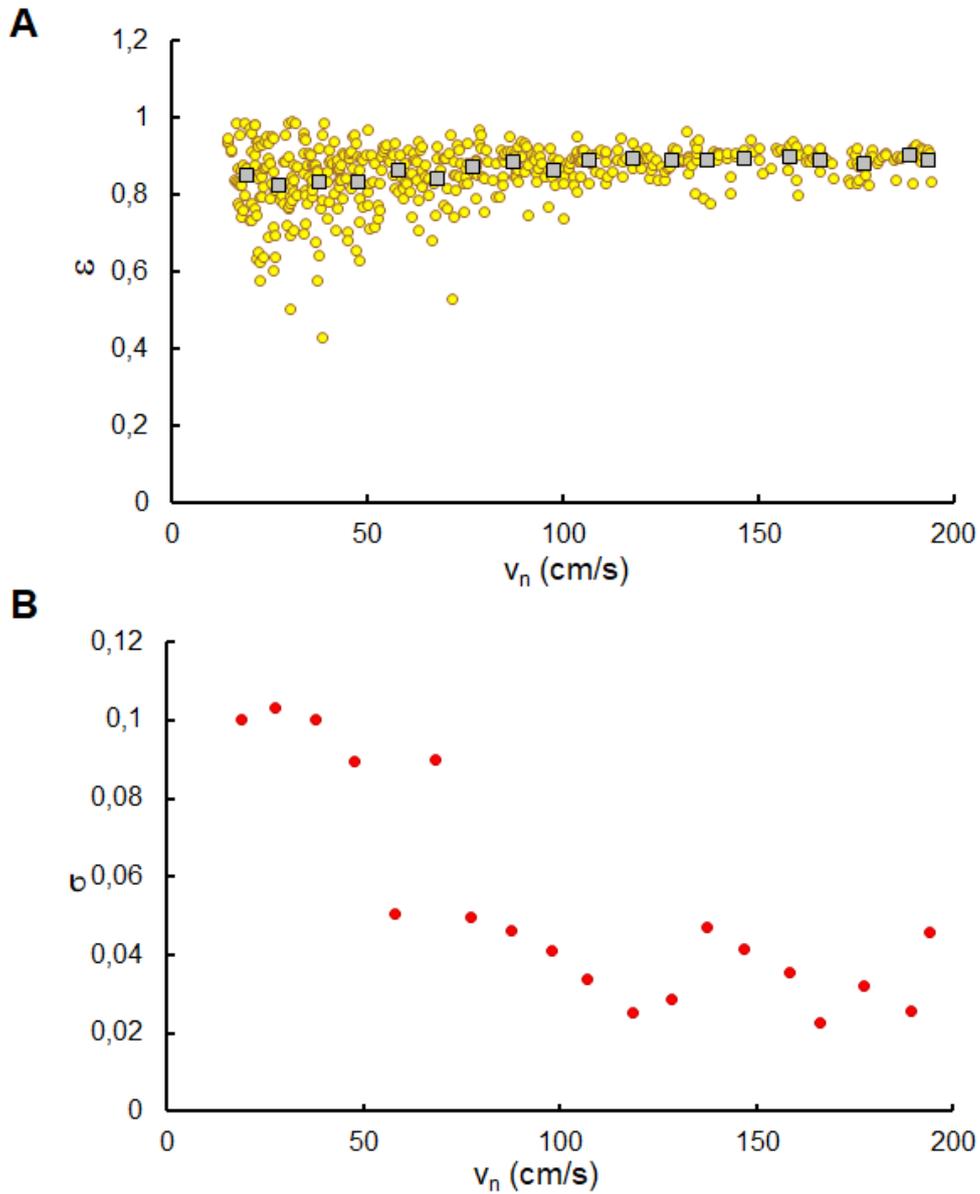


FIG. 16: A - Coeficiente de restitución  $\varepsilon$  en función de la velocidad normal de impacto para un disco. En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron valores medios (cuadrados grises). B - Desviaciones estándar correspondientes a los valores medios exhibidos en el panel A.

Tomando ventanas de velocidad de impacto de 10 cm/s, se obtienen valores medios para el coeficiente de restitución. Efectivamente se observa una dependencia con la velocidad normal de impacto ( $v_y$ ), que mediante el Método I no puede ser observado. A pesar de la dispersión de  $\varepsilon$ , que también varía con la velocidad de impacto, podemos caracterizar a este coeficiente con su valor medio en todo el rango explorado:  $\langle \varepsilon \rangle = 0,87 \pm 0,05$ , donde el error se estima con la desviación estándar.

Otra forma de caracterizar la transferencia de energía en el impacto es definir un nuevo coeficiente

que considere la energía mecánica total en el impacto  $E$  y después del impacto  $E'$  (Ec. 2).

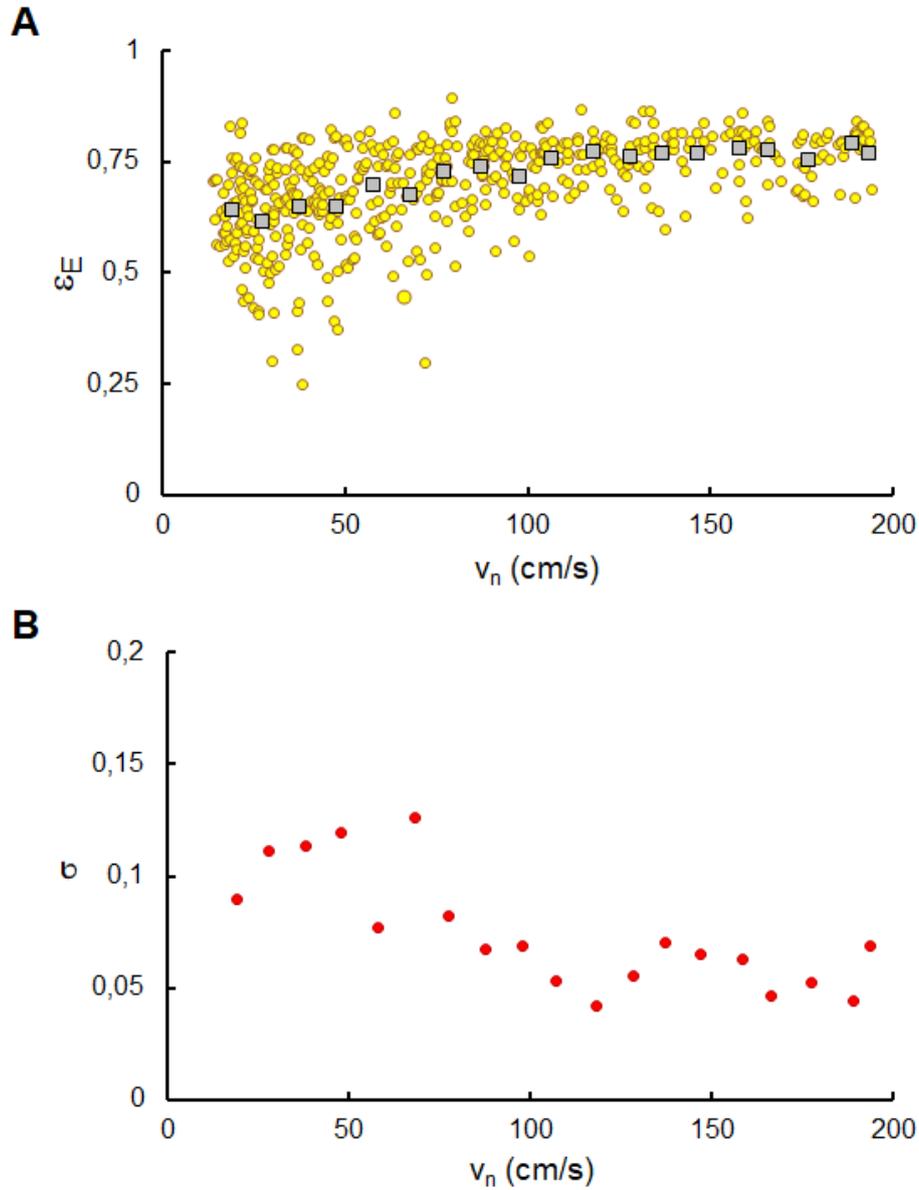


FIG. 17: A - Coeficiente calculado como el cociente de energías mecánicas en función de la velocidad de impacto para un disco impactando en una superficie plana. En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron valores medios (cuadrados grises). B - Desviaciones estándar correspondientes a los valores medios presentados en el panel A.

En la FIG. 17A se grafica  $\varepsilon_E$  para cada colisión en función de la componente normal a la base de la velocidad de impacto. También aquí se consideran coeficientes calculados con velocidades de impacto y de rebote mayores a 13 cm/s. En la FIG. 17A también se superpone a la nube de puntos los promedios del coeficiente en ventanas de 10 cm/s. Se observa, como era de esperar, que  $\varepsilon_E < 1$ . Este coeficiente, sin embargo, también varía con la velocidad normal al momento del impacto  $v_n$  y

muestra una dispersión mayor para valores menores de la velocidad de impacto.

A pesar de la dispersión de  $\varepsilon_E$ , que también varía con la velocidad normal de impacto, podemos caracterizar a este coeficiente con su valor medio  $\langle \varepsilon_E \rangle = 0,72 \pm 0,07$ , donde el error se estima con la desviación estándar. Considerando solamente el rango de velocidades intermedias y altas, donde la dispersión resultó menor, en la Tabla IV se muestran los resultados para los coeficientes de restitución obtenidos con cocientes de velocidades normales o energías antes y después de la colisión.

TABLA IV. Valor medio y desviación estándar de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_E$ , obtenidos en el rango de velocidades normales de impacto intermedias y grandes, para la interacción del disco con una plataforma plana.

PARÁMETRO	$\varepsilon$	$\sigma$
Velocidad normal	0,87	0,05
Energía	0,72	0,07

Se puede observar que este coeficiente es menor que  $\varepsilon$ , ya que considera la disipación de la energía total.

## 8.2. Determinación de la fuerza de rozamiento con las paredes de la celda

En los experimentos realizados las partículas vuelan dentro de una celda armada con dos placas de vidrio separadas una distancia levemente mayor al espesor de las mismas, de modo que es altamente probable que en dicho viaje se experimenten disipaciones de energía por fricción de la cara del disco con alguna de las placas, y también por colisiones contra dichas placas en el vuelo, debido justamente a que existe una mínima tendencia a moverse en la dirección normal al plano de las placas, pues no se encuentra el disco completamente confinado. Por ello a fin de analizar la disipación debido al rozamiento con las paredes de la celda, estudiaremos la velocidad y la aceleración que adquiere el disco a lo largo de un experimento. Se presentan para cada una de ellas sus correspondientes

ecuaciones en función del tiempo:

$$v_x(t) = v_{x0} \quad (17)$$

$$v_y(t) = v_{y0} - g' t \quad (18)$$

$$a_x(t) = 0 \quad (19)$$

$$a_y(t) = -g' \quad (20)$$

En la FIG. 18A se muestra la velocidad del disco en función del tiempo a partir de que ocurre el primer impacto. Mientras la partícula sale del impacto y se aleja de la superficie plana (punto  $a$ ), su velocidad es positiva pero va disminuyendo hasta alcanzar una velocidad nula al llegar a la máxima altura (punto  $b$ ), a partir de ahí comienza una caída libre, donde la velocidad es negativa y su módulo aumenta hasta que vuelve a impactar con la superficie plana (punto  $c$ ). Luego del impacto la velocidad cambia súbitamente de signo: de ser negativa a positiva.

Entre los puntos  $a$  y  $b$ , mientras la partícula sube, la fuerza de rozamiento tiene la misma dirección que la gravedad y, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, el disco tiene una aceleración levemente superior a la de la gravedad:

$$-m a_y = -m g' - F_{roz} \quad \Rightarrow \quad F_{roz} = m (a_y - g') \quad (21)$$

Entre los puntos  $b$  y  $c$ , mientras la partícula baja, la fuerza de rozamiento tiene dirección opuesta a la gravedad, y la segunda ley de Newton nos dice que el disco tiene una aceleración levemente inferior a la de la gravedad:

$$-m a_y = -m g' + F_{roz} \quad \Rightarrow \quad F_{roz} = -m (a_y - g') \quad (22)$$

Debe notarse que  $a_y$  está definido positivo y el signo negativo se pone explícitamente.

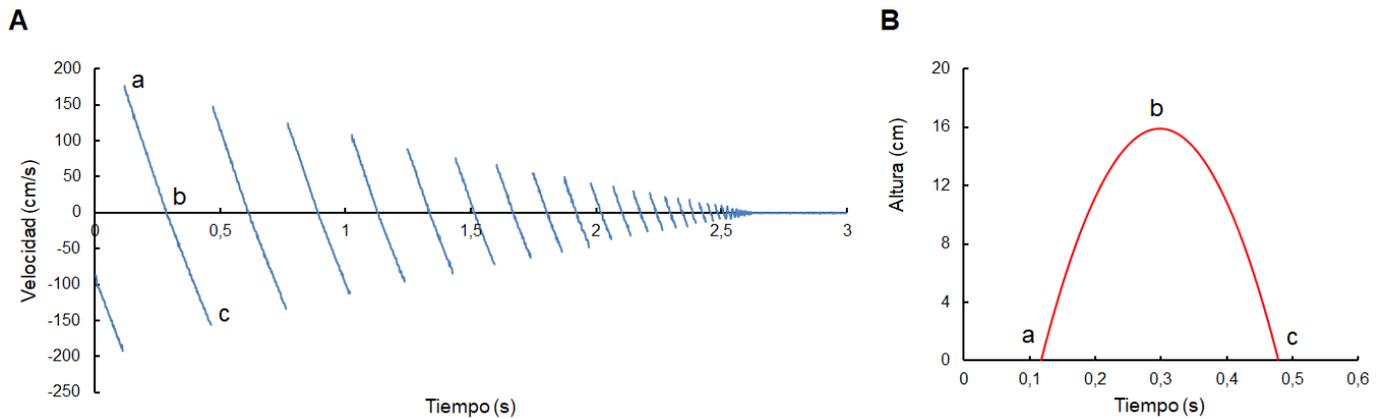


FIG. 18: A - velocidad en función de tiempo del disco rebotando sobre una superficie plana. Mientras la partícula sale del impacto (punto *a*), su velocidad es positiva pero va disminuyendo hasta alcanzar una velocidad nula al llegar a la máxima altura (punto *b*), a partir de ahí empieza una caída libre, donde la velocidad es negativa y su módulo aumenta hasta que vuelve a impactar con la superficie plana (punto *c*). Luego del impacto la velocidad cambia súbitamente de signo: de ser negativa a positiva. B - se esquematiza en la trayectoria parabólica cada uno de los instantes mencionados: puntos *a*, *b* y *c*.

La pendiente de cada recta corresponde a la aceleración que experimenta el disco. Un ejemplo de una de estas rectas y su ajuste se muestra en la FIG. 19. En esta figura se han efectuado dos ajustes: uno para las velocidades positivas (que corresponde al tramo *a-b* cuando la partícula sube), y otro para las velocidades negativas (que corresponde al tramo *b-c*, cuando la partícula baja), dado que se tiene en cuenta que ambos rozamientos pueden ser distintos para un mismo salto. Efectivamente se observa que estas pendientes son negativas y del ajuste lineal de dichas rectas se obtiene un valor medio que permite caracterizar al módulo de la aceleración en dichos saltos. Tomando un experimento completo de 19 saltos donde aquellas velocidades de impacto y de salida cuyo módulo fuera menor que el de la velocidad umbral definida en la Sec. 7.2 han sido filtradas (cambiar el valor numérico de la aceleración quitando de la lista los valores filtrados. Recalcular el resto de los valores numéricos que aparecen debajo, hasta el final de la sección), se tomó el promedio de las pendientes de las rectas y se obtuvo de esta manera, para la aceleración del disco, el valor  $a_s = (1013 \pm 18) \text{ cm/s}^2$  para el tramo en que el disco sube y  $a_b = (889 \pm 34) \text{ cm/s}^2$  para el tramo en que el disco baja. El error corresponde a la desviación estándar del conjunto de pendientes. De estos resultados se puede observar que las pendientes presentan valores cercanos a la aceleración de la gravedad, indicando que, para cada rebote, existe la presencia de un rozamiento que podría suponerse aproximadamente constante durante toda la trayectoria, y que produce el frenado de los discos. Mas adelante se analizará el rozamiento viscoso

con el aire dentro de la celda y se verá la influencia de esta interacción.

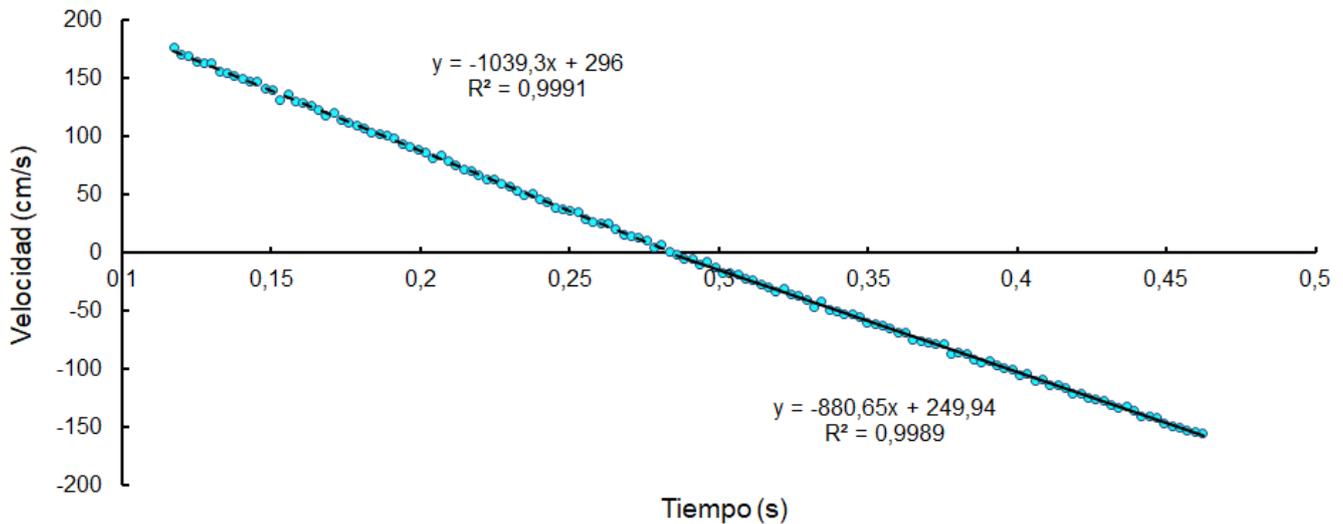


FIG. 19: Velocidad en función del tiempo del disco en el primer salto. La recta en línea punteada corresponde al ajuste lineal de la velocidad mientras el disco sube y la línea llena corresponde al ajuste lineal de la velocidad mientras el disco baja. Los valores del factor de correlación son respectivamente  $R^2 = 0,9991$  y  $R^2 = 0,9989$ , indicando una buena correlación lineal de los datos. La pendiente de la recta cuando el disco sube (fuerza de rozamiento en la misma dirección que la gravedad) indica una aceleración levemente superior a la de la gravedad; la pendiente de la recta cuando el disco baja (fuerza de rozamiento en dirección opuesta a la gravedad) indica una aceleración levemente inferior a la de la gravedad.

Los segmentos con velocidades positivas, (sobre el eje de abscisas - disco subiendo) y con con velocidades negativas (debajo del eje de abscisas - disco cayendo), en la FIG. 18A, permiten obtener valores de aceleración de las cuales mediante las Ecs. (21) y (22) se obtienen la fuerza de rozamiento para cada rebote y su caracterización con un valor medio.

En la tabla V se muestran como ejemplo, los valores de fuerza de rozamiento obtenidos durante el vuelo analizado en las FIGS. 18 y 19, para el trayecto en que el disco sube y para el trayecto en que baja. Con esos datos se obtiene una valor medio para la fuerza de rozamiento que permite caracterizar la disipación que sufre el disco al interactuar con las paredes de la celda en cada uno de estos tramos.

TABLA V. Fuerza de fricción obtenida para cada salto sobre el disco en un experimento.

# Salto	$F_{roz}$ (subiendo) (dyn)	$F_{roz}$ (bajando) (dyn)
1	172	-242
2	167	-238
3	127	-223
4	167	-222
5	99	-216
6	87	-208
7	52	-250
PROMEDIO	<b>125</b>	<b>-228</b>
DISPERSIÓN	<b>47</b>	<b>15</b>

Por lo tanto,  $F_{roz} = (125 \pm 47)$  dyn cuando la partícula sube y  $F_{roz} = (-228 \pm 15)$  dyn cuando la partícula baja. En la comparación entre estos valores con el del peso de la partícula  $P = (2559 \pm 294)$  dyn, surge que hay uno y dos órdenes de magnitud respectivamente entre los resultados para la subida y para la bajada de lo que resulta que la fuerza de rozamiento es poco significativa en términos de disipación, por lo que en primera aproximación esta interacción podría despreciarse.

En la modelización presentada más arriba, la fuerza de rozamiento fue estimada como constante. El mecanismo subyacente sería la fricción sólida entre la superficie de la partícula y el plano del vidrio. Sin embargo, la diferencia en los módulos de  $F_{roz}$  cuando el disco sube y cuando baja lleva a pensar en la presencia de otros mecanismos de fricción. Uno de tales mecanismos sería el de fricción viscosa debido a la interacción de la partícula con el aire en la celda que la rodea. Hay dos formas principales en las que la fricción viscosa tiene lugar. Por un lado la fricción debido al aire presente en la luz de  $e = 0,5$  mm entre la superficie de la partícula y la placa de vidrio.

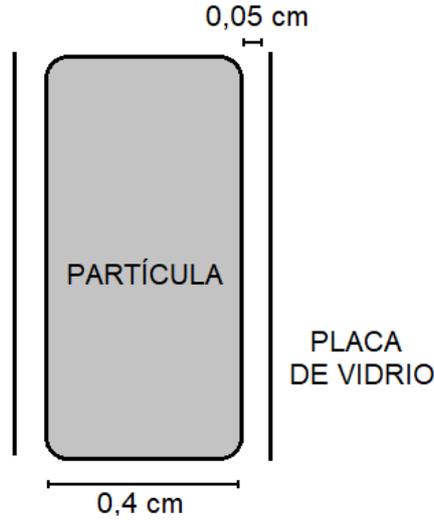


FIG. 20: Esquema de la partícula en movimiento dentro de la celda, vista de perfil.

El número de Reynolds basado en esta longitud característica se define como:

$$Re(e) = \frac{v e}{\nu} \quad (23)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido (en este caso, aire), que a temperatura ambiente se estima en  $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ , y  $v$  es la velocidad de la partícula en dicho medio. Introduciendo los valores correspondientes en la Ec. (23) para cada valor posible del rango de velocidades exploradas, se obtiene que ese número varía en el rango  $Re(e) \in (1; 100)$ .

Por otra parte, hay un rozamiento debido a que la partícula debe desplazar el aire que embiste que, de esta forma se ve obligado a fluir alrededor de la superficie lateral de la partícula. El número de Reynolds para este flujo se estima mediante la fórmula:

$$Re(R) = \frac{v R}{\nu} \quad (24)$$

donde  $R$  es el radio de la partícula. Lo que conduce a números de Reynolds pertenecientes al intervalo  $Re(R) \in (1000; 20000)$ .

De estos números de Reynolds, generalmente altos en el límite superior, puede concluirse que en general el flujo en torno a la partícula es turbulento lo que implica que la fuerza viscosa efectiva

debería modelizarse como la suma de dos términos: uno proporcional a la velocidad de la partícula, dominante cuando el movimiento es lento, y otro proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula, dominante en las etapas de movimiento rápido.

No es el objetivo de este trabajo hacer un análisis exhaustivo de los mecanismos de fricción en la celda ya que, de todos modos, los resultados indican que no son muy importantes en términos disipativos. No obstante, podemos hacernos una idea de lo que sucede a partir de las siguientes consideraciones: Debido a la violencia del impulso que la partícula recibe en el rebote, la partícula no solo inicia el movimiento ascendente sino que oscila en el espacio entre las placas. Podría decirse que, debido a esta excitación, la partícula no está plenamente apoyada contra una u otra de las placas y que, en promedio se eleva moviéndose en el plano medio entre las placas. De esta manera, durante el movimiento de subida la partícula sólo es afectada por la fricción viscosa, la cual es relativamente baja. Al llegar al punto más alto de su trayectoria la velocidad se anula. Debido a que las placas están ligeramente inclinadas, la partícula se apoya en una de las placas, de modo que al iniciar su descenso no solo es afectada por la fricción viscosa sino por el rozamiento sólido debido al contacto entre ambas superficies. En este escenario la diferencia de valores entre el rozamiento promedio a la subida y el de bajada queda explicada. Para demostrar la consistencia del análisis realizaremos la siguiente estimación: supongamos para simplificar que durante la subida el rozamiento viscoso se puede considerar proporcional a la velocidad:

$$F_{Roz} = -\alpha v \quad (25)$$

donde  $\alpha$  es un factor de fricción fenomenológico. Inmediatamente después del rebote las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso  $m g$  y  $F_{Roz}$ , por lo que la ecuación de Newton de la partícula resulta:

$$m \dot{v} = -m g' - \alpha v \quad (26)$$

la solución de esta ecuación es una exponencial de la forma:

$$v(t) = -\frac{m g'}{\alpha} + \left( v_0 + \frac{m g'}{\alpha} \right) e^{\frac{t}{\tau}} \quad (27)$$

donde  $\tau$  es el tiempo característico dado por  $\tau = m/\alpha$ . Ahora bien, de los resultados mostrados en

la FIG. 19 surge que la exponencial es bastante parecida a una recta. Esto sugiere que el valor de  $\tau$  es bastante mayor que el tiempo de ascenso de la partícula, el cual es de alrededor de  $\delta t = 0,15$  s. De los resultados promedio mostrados en la tabla surge que  $-\alpha v = 125$  dyn y considerando un valor estimado de velocidad de  $v = 100$  cm/s obtenemos que  $\alpha = 1,25$  dyn s/cm. Con este valor podemos determinar el tiempo característico que resulta del orden de  $\tau = 2,1$  s lo que da un valor 10 veces superior al tiempo de vuelo en ascenso.

### 8.3. Evolución de la energía del disco en las colisiones

En esta sección mostramos la evolución de la energía durante las sucesivas colisiones. La misma puede descomponerse en distintas contribuciones: energía cinética de traslación, energía cinética de rotación y energía potencial. Integrando las ecuaciones de Newton, podemos obtener la expresión para cada una de estas contribuciones:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 + m g y \quad (28)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética de traslación, el segundo corresponde a la energía cinética de rotación y el tercero corresponde a la energía potencial. Por su parte, la velocidad  $v$  constituye el módulo del vector velocidad del centro de masa, cuyas componentes ya habían sido definidas:

$$v = \|(v_x, v_y)\| \quad (29)$$

Para el caso del disco, con el procedimiento explicado en la Sec. 7.2 y en el Apéndice A, medimos cada contribución de energía y determinamos la energía total. En la FIG. 21 se muestra la evolución de la energía total y de la energía potencial. Se observa que:

- cuando el disco impacta contra la superficie plana (la energía potencial es cero) hay una alta disipación de energía;
- generalmente entre impactos, la energía se conserva, aunque se aprecia una disipación que es más importante en los primeros instantes de la primera interacción, lo que podría indicar, aparte de la fricción sólida, una fricción de tipo viscosa que al depender con la velocidad es más relevante en los primeros instantes y se va haciendo despreciable a tiempos largos.

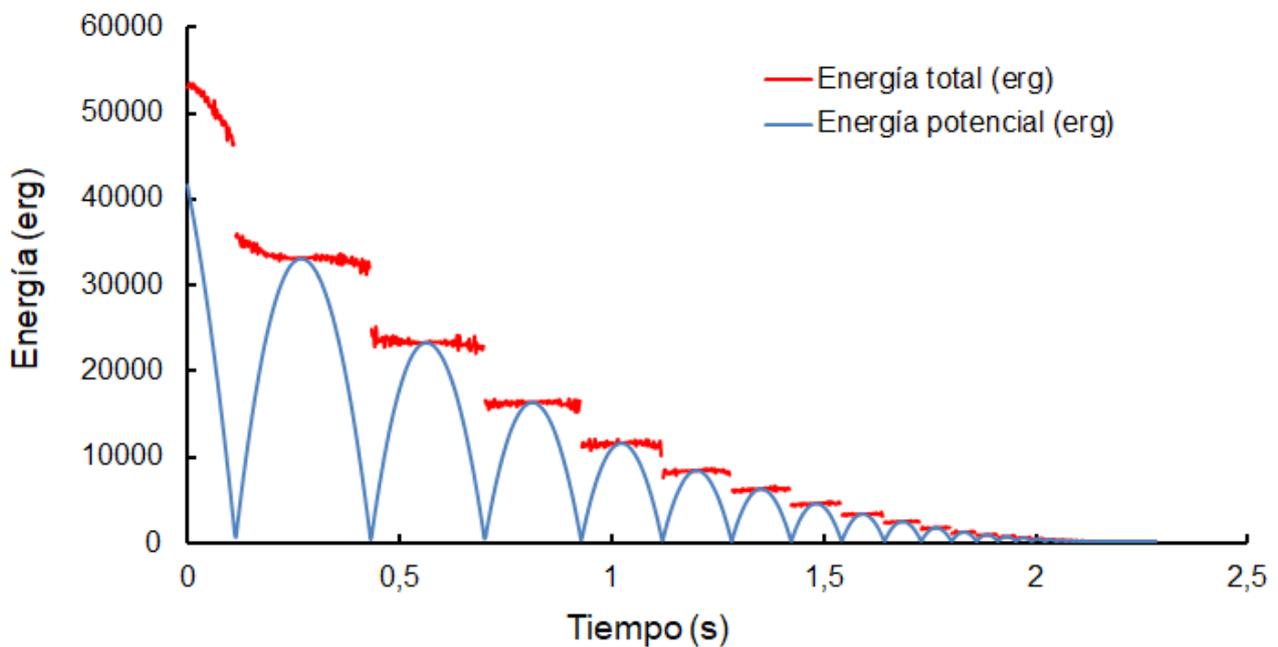


FIG. 21: Evolución de la energía total y potencial para el disco rebotando sobre una superficie plana.

En la FIG. 22 se muestra la evolución de la energía cinética, potencial y de rotación y se observa que:

- la energía de rotación es despreciable ya que el disco tiene una distribución homogénea y simétrica de masa respecto de su centro de masa (también centro geométrico) y por lo tanto el impacto sobre la superficie plana genera, en el rebote, un impulso vertical que no introduce torques.
- dado que la rotación es despreciable en este experimento, los gráficos de la energía cinética de traslación y de la energía potencial presentan una variación que es complementaria, de manera que su suma resulte una constante.

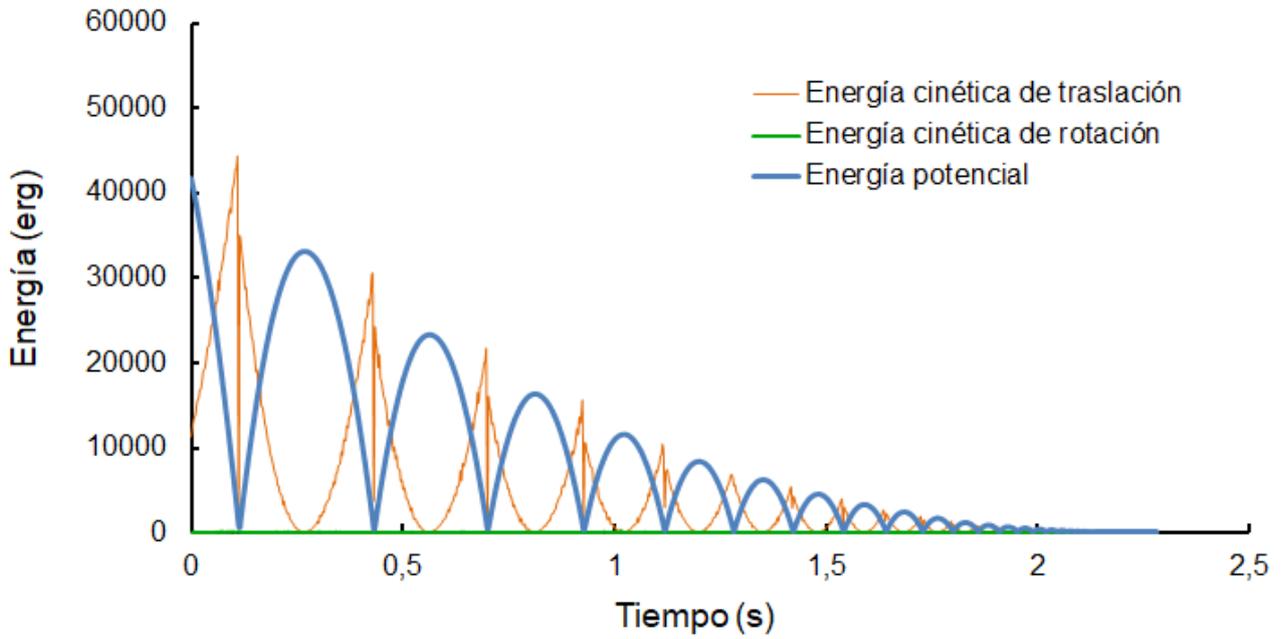


FIG. 22: Evolución de la energía cinética, potencial y de rotación para el disco rebotando sobre una superficie plana.

A fin de analizar el rol de la rotación en la caracterización de la disipación en los impactos (rebotes) mediante un coeficiente de restitución como el usualmente propuesto (ec. (1)), se estudian los siguientes sistemas donde se induce la aparición de torques:

- discos impactando contra una cuña,
- partículas facetadas impactando sobre una superficie plana.

## 9. Caracterización cinemática del disco sobre cuñas

Después de caracterizar la dinámica de la partícula rebotando sobre una base plana, orientada en la dirección perpendicular a la de la gravedad, se pasó a introducir una base en forma de cuña triangular, con una apertura de  $(45 \pm 1)^\circ$ . Para desarrollar las experiencias en este caso se utilizó la configuración I descrita en la Sec. 6.1. En la FIG. 23 se muestra, a modo de ejemplo, la evolución temporal de la energía mecánica total y de la energía potencial del disco, cuando el percutor se alimenta con una señal amplificada con una ganancia de  $G = 6$  dB.

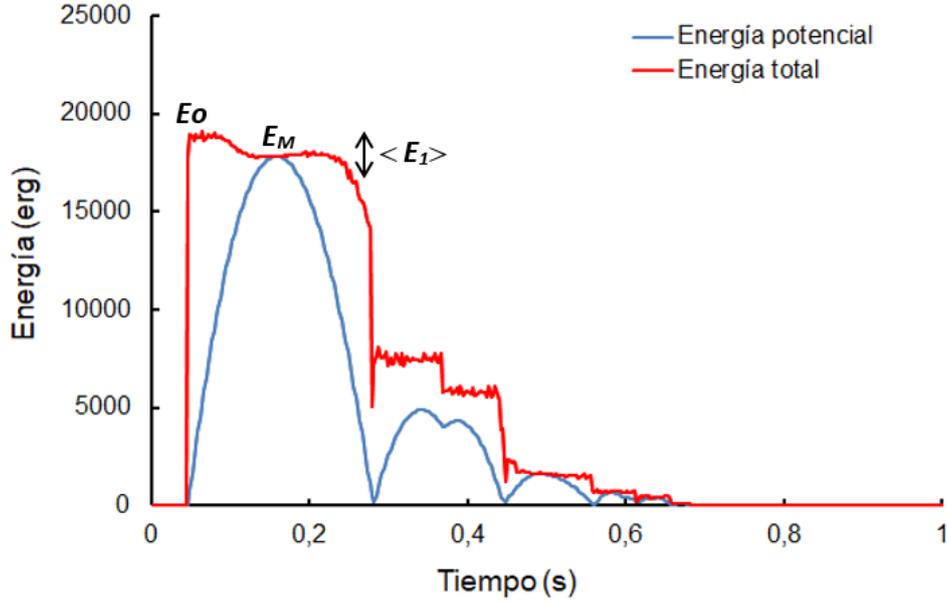


FIG. 23: Evolución temporal de la energía mecánica total y de la energía potencial de un disco rebotando sobre una superficie rugosa en cuña.

Inicialmente la energía que da el impulso es solo cinética (el disco no rota y tiene energía potencial nula) y esta energía se transfiere en su totalidad a energía potencial y energía de rotación cuando el disco alcanza el punto más alto de su trayectoria  $E_M$ . Para distintos valores de  $G$  se obtiene un promedio de estas energías  $E_{max} = \langle E_M \rangle$ . En la FIG. 23 se observa que inicialmente el impulso transfiere una energía mayor a la que luego alcanza el disco en el punto más alto de su trayectoria, de hecho esa energía inicial se disipa en la primera parte del vuelo y luego alcanza un valor constante para volver a decrecer antes de colisionar. Para analizar con mayor detalle la energía disponible durante el vuelo se determinan, para cada valor de ganancia  $G$ , las siguientes energías características:

- $\langle E_0 \rangle$  que es el valor medio de los valores del pico de energía total obtenido al instante del impulso (el cual fue obtenido como el máximo absoluto para cada experiencia de la gráfica temporal de la energía (FIG. 23) obtenida según la Ec. (31)).
- $\langle E_1 \rangle$  que es el valor medio de los promedios de la energía durante el primer vuelo.

En la FIG. 24 se grafican  $E_0$  en función de  $E_{max}$  (panel A) y  $\langle E_1 \rangle$  en función de  $E_{max}$  (panel B) obtenidos de experiencias realizadas a distintos valores de ganancia del amplificador de la señal de excitación (diferentes valores de  $G$ ).

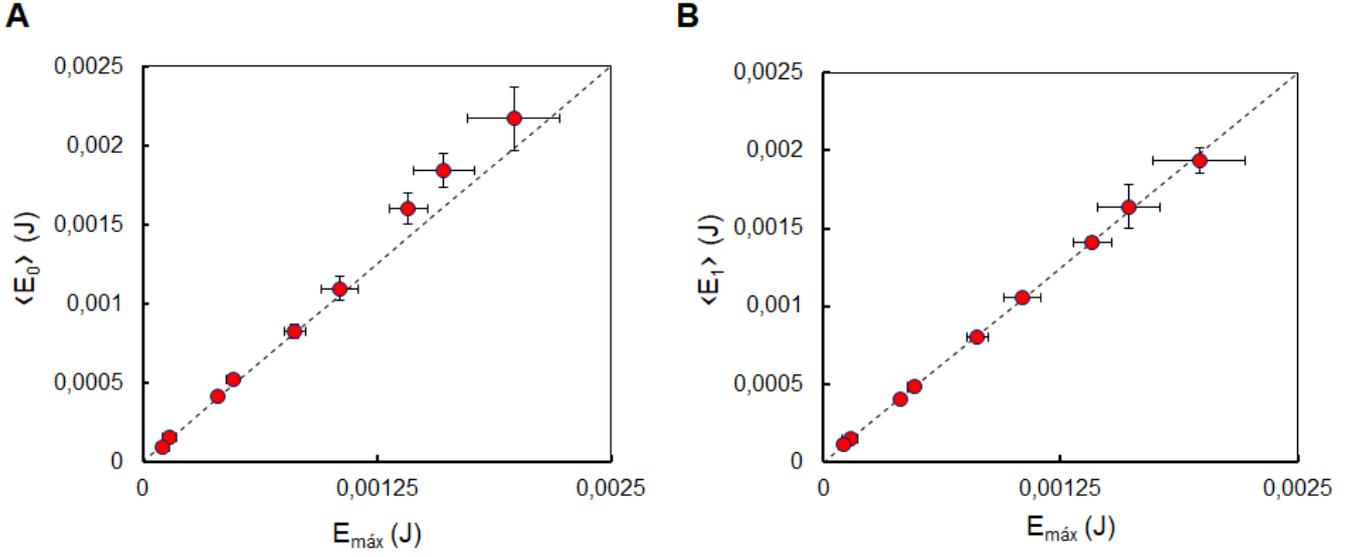


FIG. 24: A - Energía suministrada a la partícula en el impulso inicial. B - Promedio de energía en un salto. Ambos gráficos fueron realizados en función de la energía en el punto más alto de la trayectoria. La línea punteada corresponde a la identidad.

La curva presentada en el panel B muestra que  $E_{max} = \langle E_1 \rangle$ , mientras que en la curva en el panel A se observa que a medida que aumenta la energía inyectada ( $E_0$ ) mayor es la disipación en los momentos iniciales llevando a que el disco alcance un menor valor de energía total en el punto más alto de su trayectoria.

La energía inyectada para distintos valores de ganancia del amplificador de la señal de excitación (diferentes valores de  $G$ ) se caracteriza mediante  $E_{max}$ . En la FIG. 25 se muestra la curva de calibración  $E_{max}$  vs  $G$  que responden a la fórmula:

$$E_{max} = 0,0104 e^{-0,276 G} \quad (30)$$

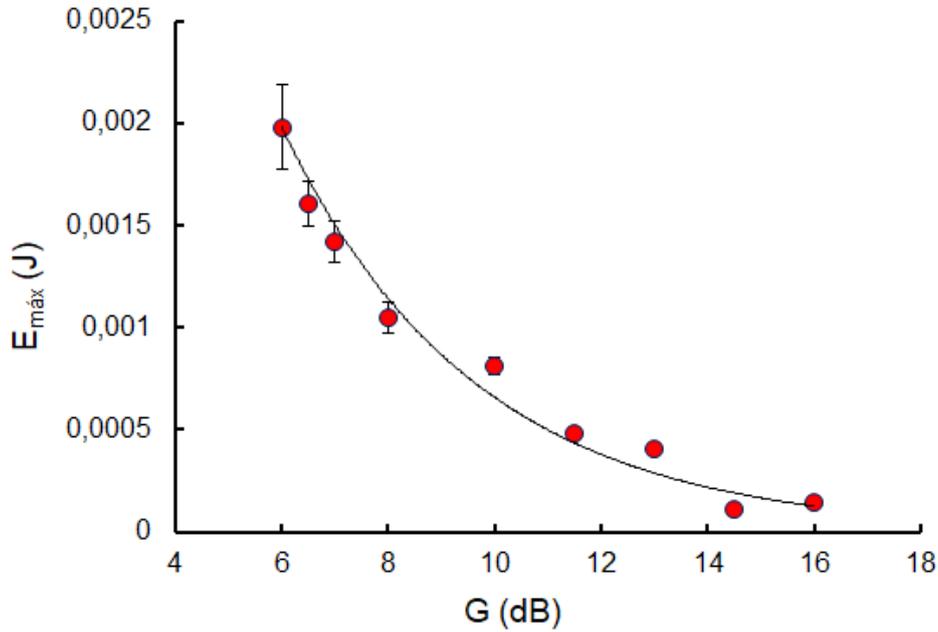


FIG. 25: Curva de calibración de valores de ganancia del amplificador a valores de energía inyectada al disco.

Nótese que la curva es decreciente, lo cual implica que la graduación del amplificador sigue un comportamiento totalmente inverso al de la energía que se le suministra al sistema. De este modo, los impulsos más intensos están asociados a los valores más bajos de ganancia. Los valores de energía inyectada según la ganancia pueden encontrarse en la tabla II.

### 9.1. Determinación del coeficiente de restitución con cuñas

Con esta nueva configuración, se pasó a medir el coeficiente de restitución por rebote, de la misma manera en la que se explicó en la Sec. 8.1.

Debido a la resolución para medir velocidades, aquellas colisiones en las que la velocidad de impacto o rebote fueron menores a  $v_{\text{umbral}} = 11$  cm/s (Sec. 7.2) se filtraron. Por lo tanto, de un total inicial de 627 colisiones identificadas solo se analizan 286, que son aquellas en las que la velocidad de impacto o rebote fueron mayores a  $v_{\text{umbral}}$ . En la FIG. 26 se muestra el coeficiente de restitución en función de la velocidad vertical de impacto. Una mayor energía inyectada permite obtener en los primeros rebotes, velocidades de impacto altas, las cuales sucesivamente van a ir disminuyendo (nótese que los colores correspondientes a los tres valores más bajos de  $G$  son los que predominan en el rango de

velocidades de impacto más bajas).

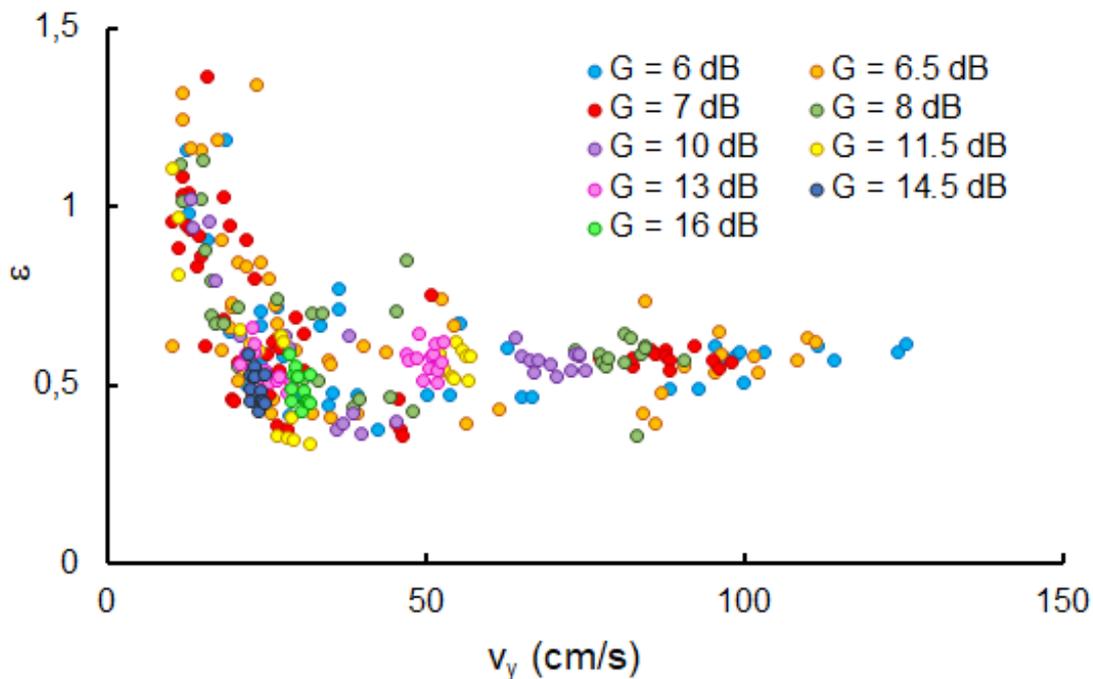


FIG. 26: Gráfico del coeficiente de restitución del disco rebotando sobre la superficie en cuña.

Se comprueba en este gráfico que la dispersión varía con la velocidad de impacto, siendo esta mayor para las velocidades de impacto bajas. Precisamente en esta región se observa la particularidad de que en 21 colisiones ( $\approx 7\%$ ) el coeficiente de restitución es mayor a 1, lo cual resulta llamativo, dado que en un rebote que no es perfectamente elástico, debería perderse energía, y un coeficiente de restitución mayor que 1 estaría implicando ganancia.

Dada la definición de  $\varepsilon$ , que solo tiene en cuenta la cinemática de la dirección vertical ( $y$ ), la anterior observación indicaría que hay transferencia de energía cinética asociada a movimiento transversal ( $x$ ) o a movimiento de rotación, lo que efectivamente es favorecido por la colisión del disco con las cuñas. Al impactar el percutor a la partícula, el impulso está alineado con el peso y no aparecen torques que produzcan rotaciones, es decir que la dinámica en ese primer salto es básicamente la misma que al soltarlo en las experiencias descritas en la Sec. 8.1. Pero luego de rebotar sobre una de las cuñas, reciben un torque que las hace girar, de manera que entonces aquí se tiene energía cinética de traslación que se convierte en energía cinética de rotación. En ocasiones, también se observa un movimiento transversal que la lleva a rebotar en la otra cuña donde la energía de rotación puede

aumentar la energía cinética asociada al movimiento vertical, llevando a un aumento de la velocidad vertical de salida. Estos *rebotes dobles*, son los que constituyen una *colisión efectiva* y lleva a valores de  $\varepsilon > 1$ , donde  $\varepsilon$ , se obtiene con la Ec. (1).

Como, en la Sec. 8.1.2, otra forma de caracterizar la transferencia de energía en el impacto es definir un nuevo coeficiente que considere la energía mecánica total  $E$  en el impacto y la energía total  $E'$  después del impacto (Ec. 2). En la FIG. 27 se grafica  $\varepsilon_E$  para cada colisión en función de la componente normal a la base de la velocidad de impacto. Se observa, como era de esperar, que  $\varepsilon_E < 1$ .

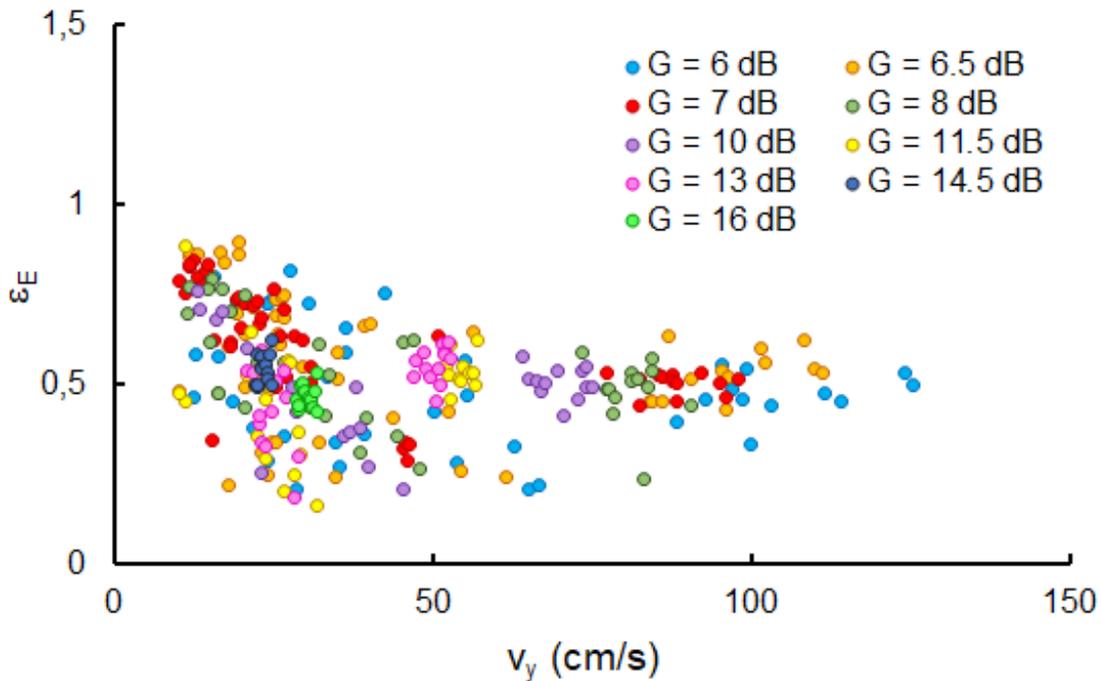


FIG. 27: Gráfico del coeficiente de restitución del disco rebotando sobre la superficie en cuña, calculado con el cociente de energías mecánicas.

## 9.2. Transferencia de energía del disco colisionando con cuñas

En el gráfico de la FIG. 23, se muestra un ejemplo de la evolución de la energía en el caso de la interacción del disco con una cuña. En el gráfico se observan *rebotes múltiples* debidos a que el disco al caer ya no rebota sobre una superficie dispuesta en forma normal a la dirección en la que cae, sino que ahora esta base se encuentra formando un ángulo diferente a  $90^\circ$  con esta dirección. Por

lo tanto, el disco al rebotar se dirige, generalmente hacia la otra cuña y luego de rebotar en esta última se impulsa hacia arriba. Dado que este rebote ocurre en una cantidad de tiempo muy pequeña es que este se considera como un rebote único o como, ya se mencionó en la sección anterior (Sec. 9.1), un *rebote efectivo*. Por ejemplo, en la FIG. 23 se observa un doble rebote en el segundo salto, el cual ocurre en un intervalo de tiempo similar al de un rebote simple. En la FIG. 28 se muestra la evolución de todos los modos energéticos y de la energía total para un experimento realizado con una ganancia  $G = 6,5$  dB.

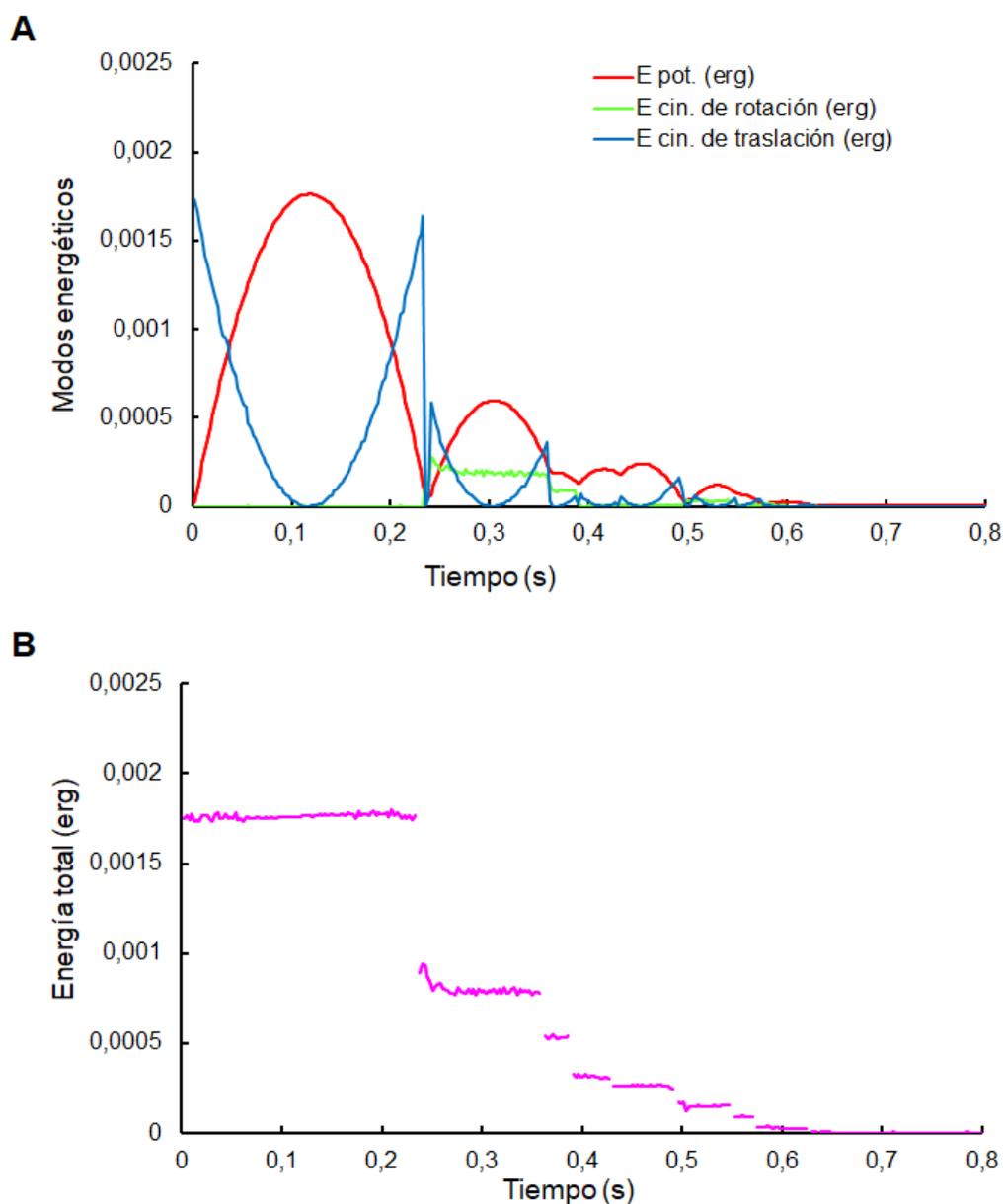


FIG. 28: A - Evolución temporal de las diferentes energías superpuestas para el disco rebotando en la base rugosa. B - Energía total correspondiente al mismo disco en cada vuelo.

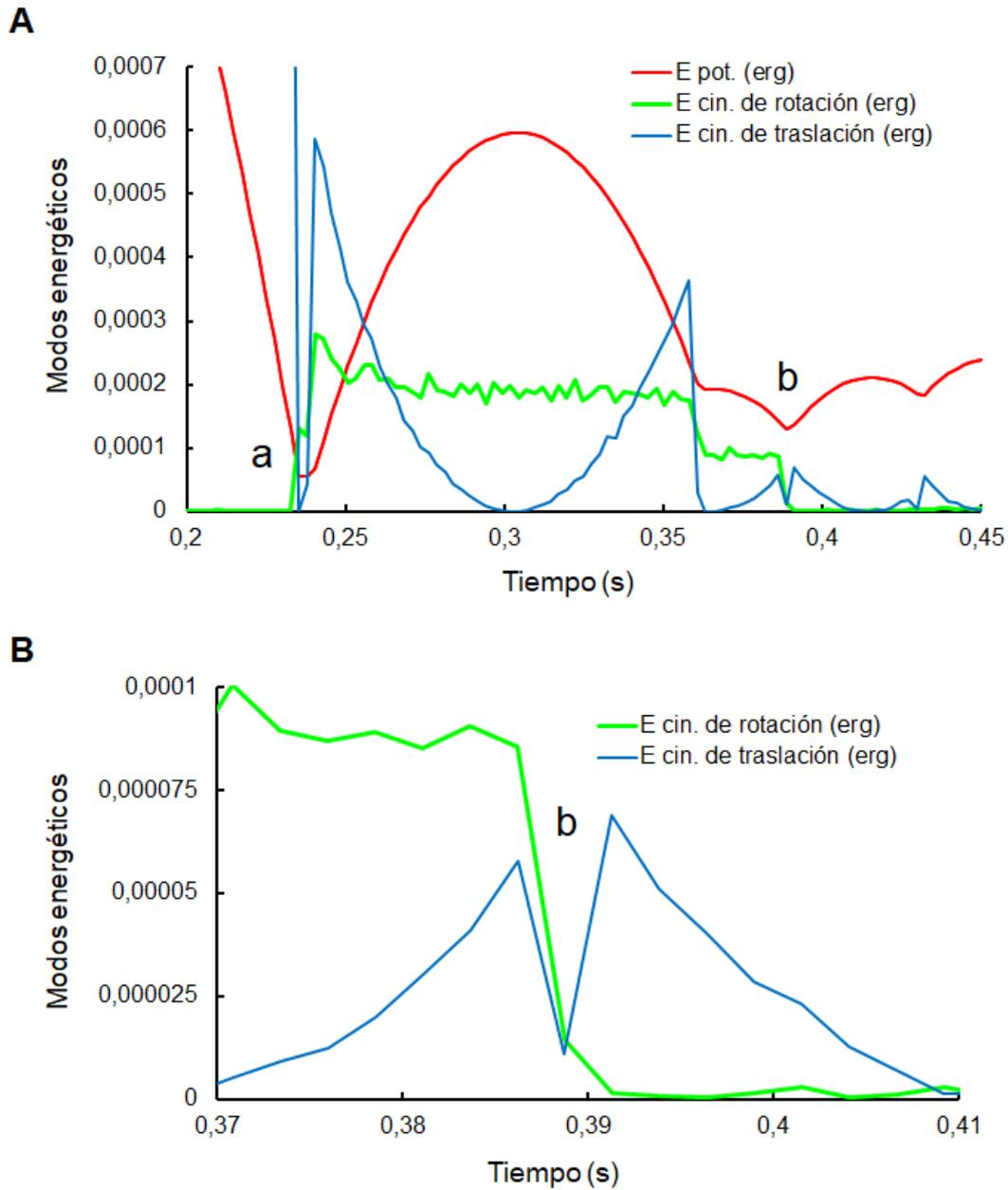


FIG. 29: A - Detalle de la FIG. 28 en la ventana temporal en la que ocurre una doble transferencia de energía. En el entorno de (a) se observa que  $\varepsilon < 1$  ( $\varepsilon = 0,58$ ) ya que después del impacto disminuye la energía cinética asociada al movimiento vertical ( $y$ ) y aumenta (transferencia) la energía de rotación. En el entorno de (b) se observa que  $\varepsilon > 1$  ( $\varepsilon = 1,09$ ) ya que después del impacto aumenta la energía cinética asociada al movimiento vertical ( $y$ ) a expensas de una disminución (transferencia) de energía de rotación. B - Detalle de la evolución temporal de las diferentes energías para el disco en el entorno de  $t = 0,39s$  (b). La leyenda es la misma que para el panel principal de la Fig. 28.

Se observa que en el rebote que ocurre a los  $0,23s$  hay una transferencia de energía cinética a energía de rotación, lo cual conlleva según la definición del coeficiente de restitución (ec. 1) a un valor de  $\varepsilon < 1$  ( $\varepsilon = 0,58$ ), y luego de dos rebotes, se observa hacia los  $0,39s$  un nuevo aumento de la energía

cinética a expensas de una pérdida de energía de rotación, lo cual genera en este caso un valor de  $\varepsilon > 1$  ( $\varepsilon = 1,09$ ). Los detalles pueden verse en la FIG. 29.

Un análisis más exhaustivo se realizará a continuación cuando se presenten los resultados para partículas facetadas.

## Parte IV

# ANÁLISIS DE RESULTADOS CON PARTÍCULAS FACETADAS

## 10. Disipación de la energía en experiencias con partículas facetadas

Con el objetivo de favorecer la aparición de rotaciones que nos permita analizar el rol que juegan en la transferencia de energía, en esta sección se presentarán los resultados obtenidos en la interacción de partículas facetadas con una superficie plana. Las partículas son prismas rectos de poca altura cuyas bases tienen  $N$  lados, con  $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  y  $15$ . A fin de poder comparar los resultados con aquellos obtenidos con discos, estos prismas tienen espesor y área de sus caras similar al de los discos utilizados en las secciones anteriores: espesor  $w = (0,40 \pm 0,05)$  cm y área  $A = (7,1 \pm 0,1)$  cm<sup>2</sup>. La geometría de estas partículas permite inducir, cuando estás colisionan con una superficie plana, un torque que le generará a la partícula facetada un movimiento de rotación. En particular, la aparición de torques se ve favorecida por la interacción de alguno de sus vértices con la superficie plana.

Para la partícula con 3 facetas, se analizaron 344 experimentos, permitiendo analizar un total de 1463 rebotes contra la base. Al igual que en las experiencias realizadas en la Sec. 8.1.2, se realizó un filtrado en las velocidades de impacto y de rebote, tomando todas aquellas que sean mayores o iguales a  $V_{umbral} = 13$  cm/s (Sec. 7.2), quedando un total de 1380 ( $\approx 94\%$ ) de colisiones a analizar. En la FIG. 30 se muestra la evolución temporal para uno de los experimentos, de la coordenada vertical (línea sólida azul) y de la coordenada horizontal (línea punteada roja) de la partícula con  $N = 3$  facetas (prisma triangular) y se aprecian diferencias notorias respecto de lo que se observa en el caso del disco (FIG. 13):

- En la evolución de la coordenada vertical (línea sólida azul) se observa que el relajamiento al equilibrio se produce de manera mucho más rápida que en el experimento del disco colisionando

sobre la base plana.

- En la evolución de la coordenada horizontal (línea punteada roja) se ve una dispersión mayor con respecto a lo observado para el caso del disco.

Un comportamiento similar se observó para las otras partículas facetadas.

Las líneas verticales (punteadas en negro) en la FIG. 30 indican el momento de la colisión y permiten apreciar que cada rebote origina un cambio en la velocidad en la dirección horizontal, y en ocasiones (por ejemplo después de la segunda colisión ( $t \approx 0,4$  s) en el tercer salto), un cambio en el sentido de movimiento en el eje  $x$ .

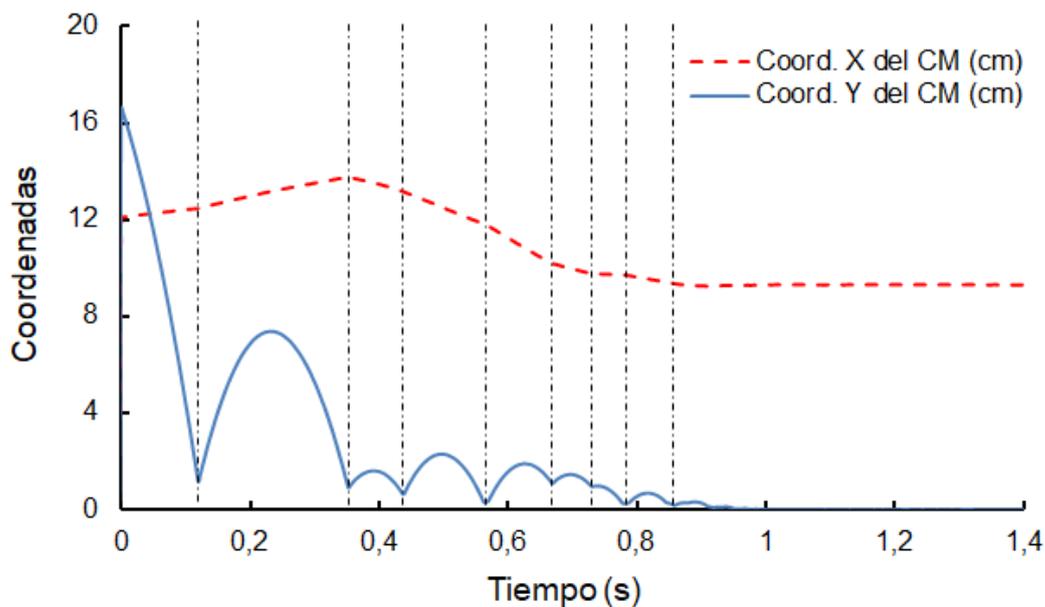


FIG. 30: Evolución temporal de las coordenadas horizontal y vertical de posición de la partícula con 3 facetas rebotando sobre una superficie plana, en una experiencia típica.

En la Sec. 8.1 se estudió el comportamiento de un disco, y dada su simetría, se observó que:

- el desplazamiento en la dirección horizontal era despreciable en comparación con el mismo en la dirección vertical;
- Siempre el coeficiente de restitución  $\varepsilon < 1$  (FIG. 16A)

En la FIG. 31A, se muestra el comportamiento del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto para un prisma triangular y, en comparación con el caso de un disco colisionando con la superficie plana (Sec. 8.1.2), se aprecia:

- una dispersión mucho mayor para velocidades bajas (FIG. 31B),
- la aparición de 271 ( $\approx 20\%$ ) colisiones con  $\varepsilon > 1$ , de un total de 1380 rebotes obtenidos en 344 experiencias realizadas.

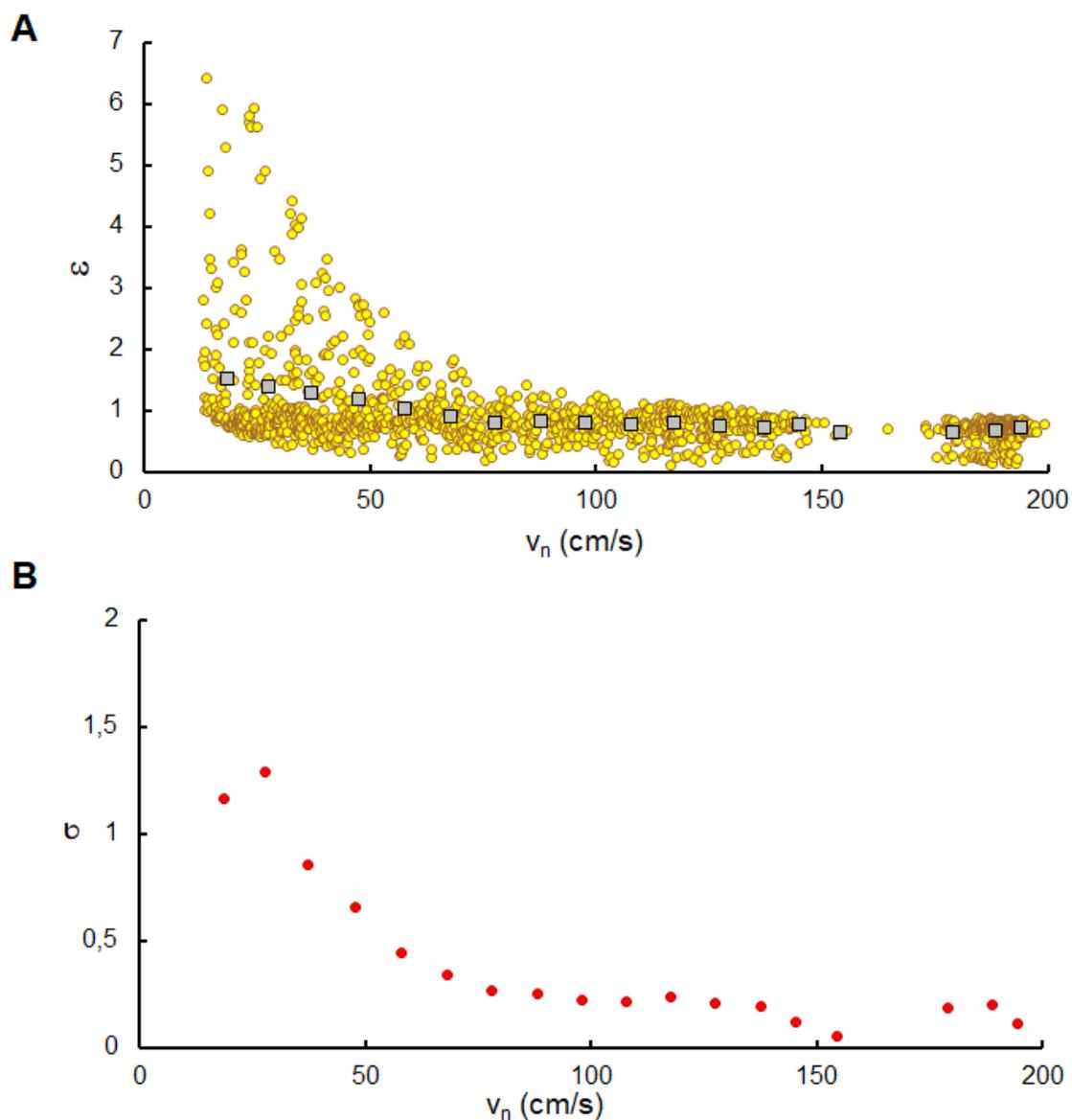


FIG. 31: A - Coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto para una partícula con  $N = 3$  rebotando sobre una superficie plana (círculos). En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron los valores medios (cuadrados). B - Desviaciones estándar de cada uno de los valores medios que se muestran en A.

La aparición de valores de  $\varepsilon > 1$ , como en el caso del disco interactuando con la cuña (Sec. 6.1) se puede explicar por la aparición de torques en el momento del impacto que transfieren energía cinética a energía de rotación. Esta energía puede volver a convertirse en una colisión posterior, en energía cinética, produciendo un aumento de la componente de velocidad vertical de salida ( $v_n'$ ) superior al de la velocidad vertical de colisión ( $v_n$ ), y se mostrará en detalle en la Sec. 11. Un comportamiento similar se observó para las otras partículas facetadas. En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron los valores medios y las correspondientes desviaciones estándar.

Un estudio similar se realizó para la partícula facetada de 9 lados (eneágono), lo que permite analizar el comportamiento de una partícula facetada entre los dos casos extremos  $N = 3$  y  $N = \infty$  (disco).

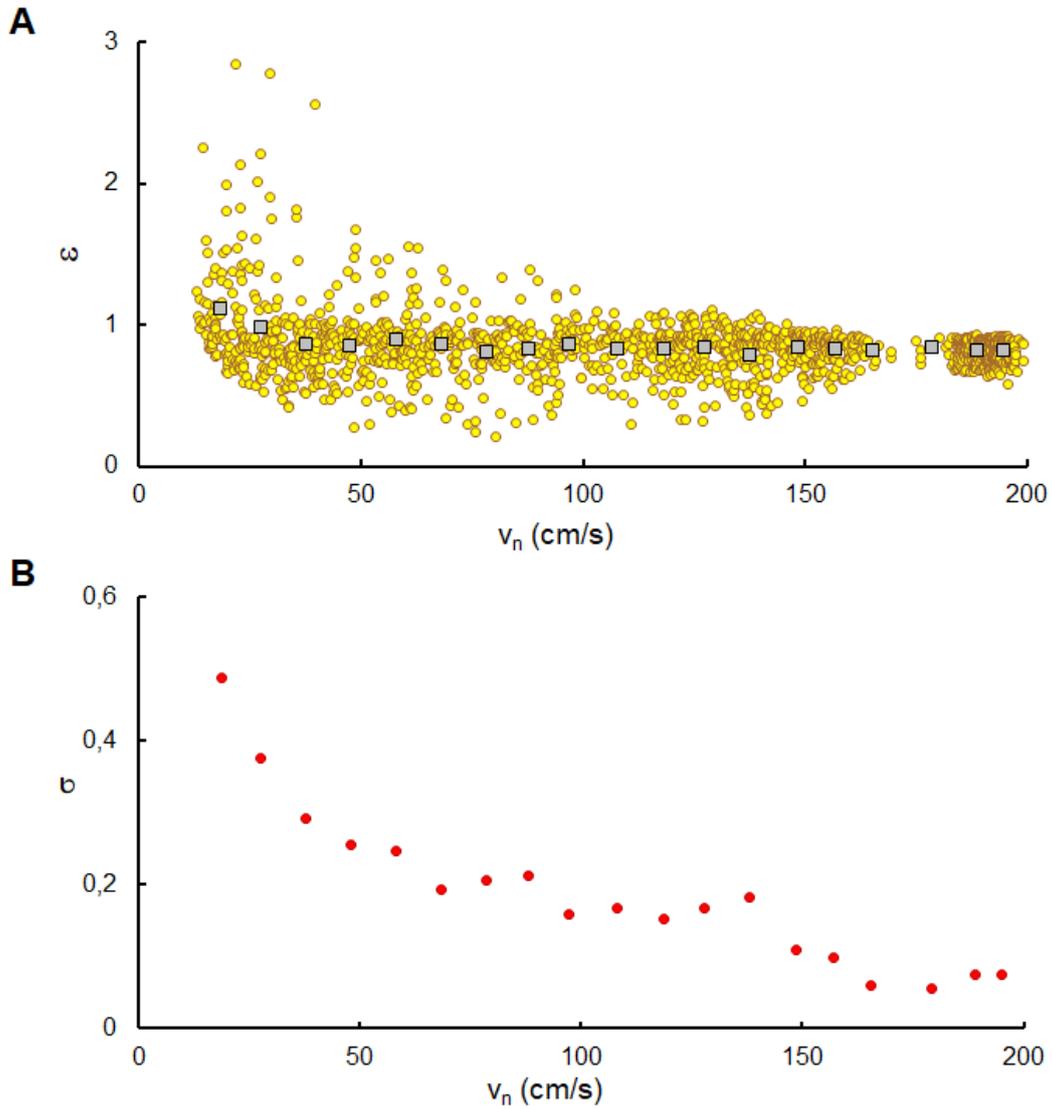


FIG. 32: A - Coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto para una partícula con  $N = 9$  facetas rebotando sobre una superficie plana (círculos). En ventanas de  $10 \text{ cm/s}$  para velocidades de impacto se obtuvieron los valores medios (cuadrados). B - Desviaciones estándar correspondientes a los valores medios exhibidos en A.

Para el caso  $N = 9$  se analizaron 350 experimentos, totalizando unos 1558 rebotes contra la base plana. Del mismo modo que en los casos anteriormente analizados, se realizó el mismo filtrado para las velocidades de impacto y de rebote, tomando aquellas mayores a  $v_{umbral} = 13 \text{ cm/s}$  (Sec. 7.2) quedando un total de 1497 ( $\approx 96\%$ ) de colisiones a analizar. En la FIG. 32A se presenta el comportamiento del coeficiente con la velocidad de impacto. En relación con las dos partículas analizadas (disco y partícula triangular), se observa que:

- la dispersión para las velocidades bajas va en disminución a medida que el número de facetas

aumenta (esto se verá con más claridad en la FIG. 33).

- la aparición, al igual que en el estudio de la partícula triangular y del disco rebotando en la cuña, de colisiones con  $\varepsilon > 1$  (175 en este caso, i.e. aproximadamente un 11,7% del total).

En la FIG. 33 se muestra la comparación de los valores medios de  $\varepsilon$  obtenidos para el caso del disco, de la partícula eneagonal y de la partícula triangular, donde pueden divisarse dos rangos de velocidades bien definidos:

- un rango de velocidades bajas (menores a 75 cm/s), en el cual la dispersión de  $\varepsilon$  es grande, y los valores de  $\varepsilon$  llegan a ser mayores que 1. Se observa que tanto los valores medios como su correspondiente dispersión decrecen a medida que el número de facetas aumenta.
- un rango de velocidades medias-altas (mayores a 75 cm/s) en el cual la dispersión es baja y aproximadamente constante en todo el rango. En este rango  $\varepsilon < 1$ .

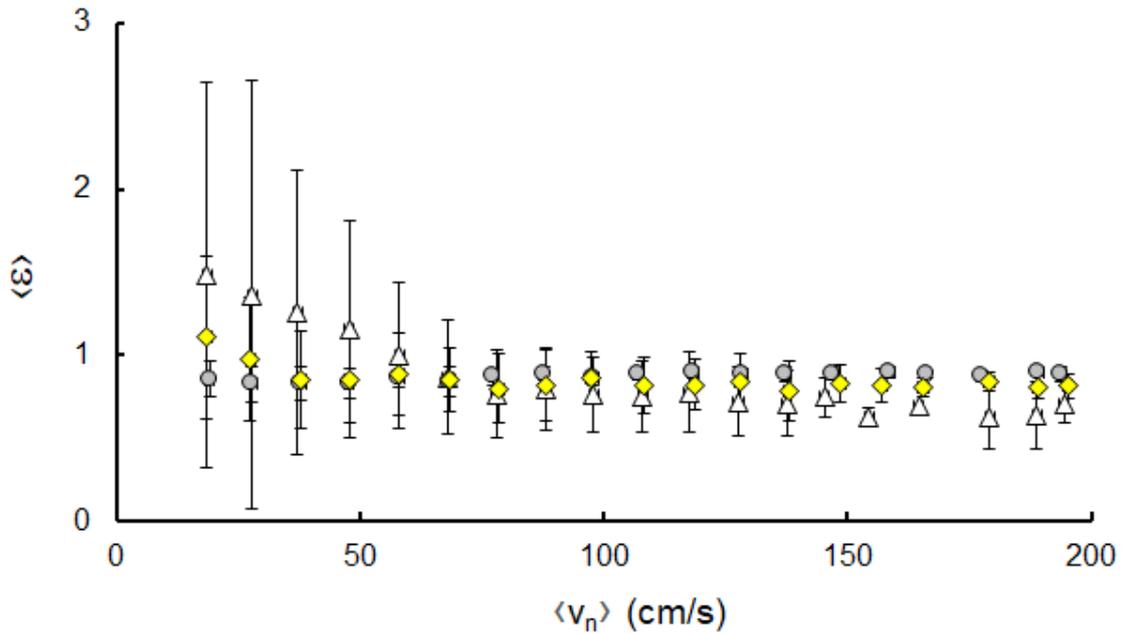


FIG. 33: Valores medios  $\langle \varepsilon \rangle$ , obtenidos en ventanas de 10 cm/s para la velocidad de impacto  $v_y$  para el disco (círculos), para la partícula facetada eneagonal (rombos) y para la partícula facetada triangular (triángulos). Los valores se grafican en función de los valores medios de  $\langle v_y \rangle$  obtenidos en las ventanas mencionadas.

A fin de estudiar la influencia del movimiento horizontal y rotacional, analizaremos la evolución de la energía mecánica total a lo largo de toda una experiencia y la influencia de la energía en el momento de impacto mediante el coeficiente  $\varepsilon_E$  (Ec. (2)).

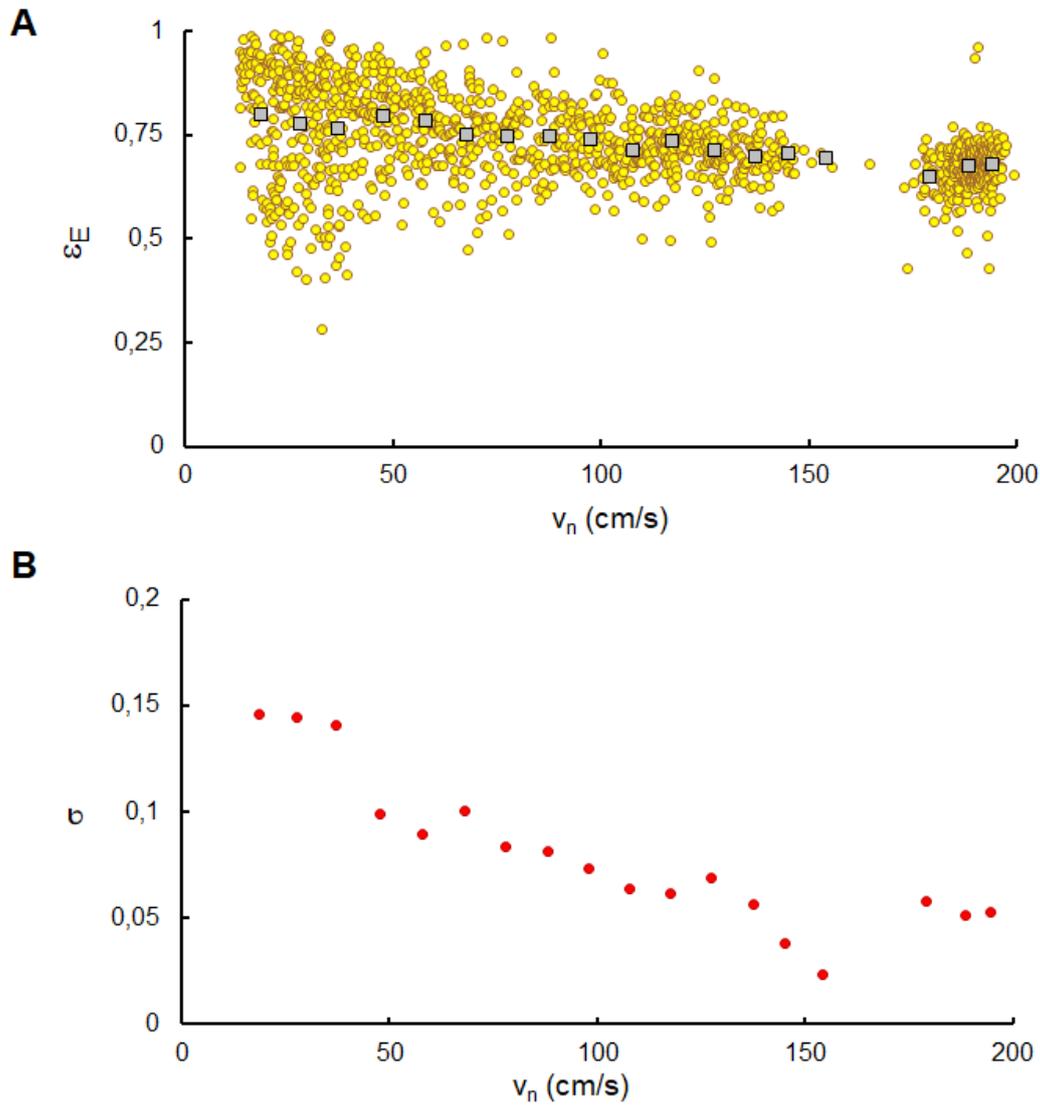


FIG. 34: A - Coeficiente  $\varepsilon_E$  (cociente de energía mecánica después del impacto sobre energía mecánica antes del impacto) en función de la velocidad normal de impacto para una partícula triangular ( $N = 3$ ) impactando sobre una superficie plana (círculos). En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron valores medios (cuadrados). B - Desviaciones estándar correspondientes a cada uno de los promedios tomados en A.

En la FIG. 34A, se muestra el coeficiente  $\varepsilon_E$  en función de la velocidad normal a la base al momento del impacto ( $v_n$ ) para la partícula facetada triangular ( $N = 3$ ). En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron los valores medios y las correspondientes desviaciones estándar. Se puede observar que ha disminuido considerablemente la dispersión que existía en la FIG. 31A para el rango de velocidades de impacto bajas, y como era de esperar,  $\varepsilon_E < 1$ .

Correspondientemente, se ha realizado un análisis similar para la partícula eneagonal ( $N = 9$ ).

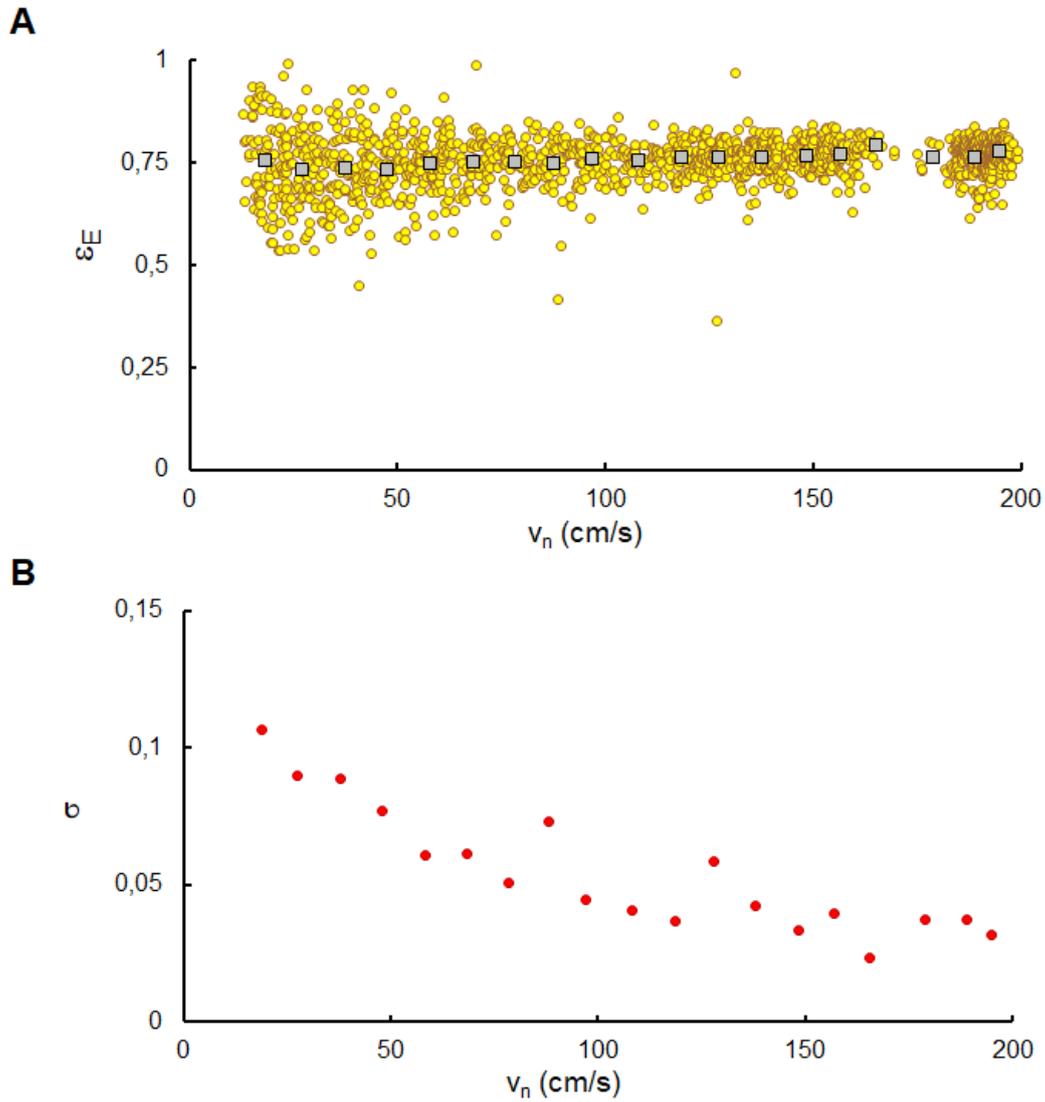


FIG. 35: A - Coeficiente  $\varepsilon_E$  (cociente de energía mecánica después del impacto sobre energía mecánica antes del impacto) en función de la velocidad normal de impacto para una partícula eneagonal ( $N = 9$ ) impactando sobre una superficie plana (círculos). En ventanas de 10 cm/s para velocidades de impacto se obtuvieron valores medios (cuadrados). B - Desviaciones estándar correspondientes a cada uno de los mencionados valores medios tomados en A.

En la FIG. 35A se grafica el coeficiente  $\varepsilon_E$  en función de la velocidad normal de impacto. En ventanas de 10 cm/s se grafican los valores medios de este coeficiente, y en la FIG. 35B se muestra la dispersión de dichos valores medios. En la FIG. 36 se muestra la comparación de los valores medios de  $\varepsilon$  obtenidos para el caso del disco, de la partícula eneagonal y de la partícula triangular.

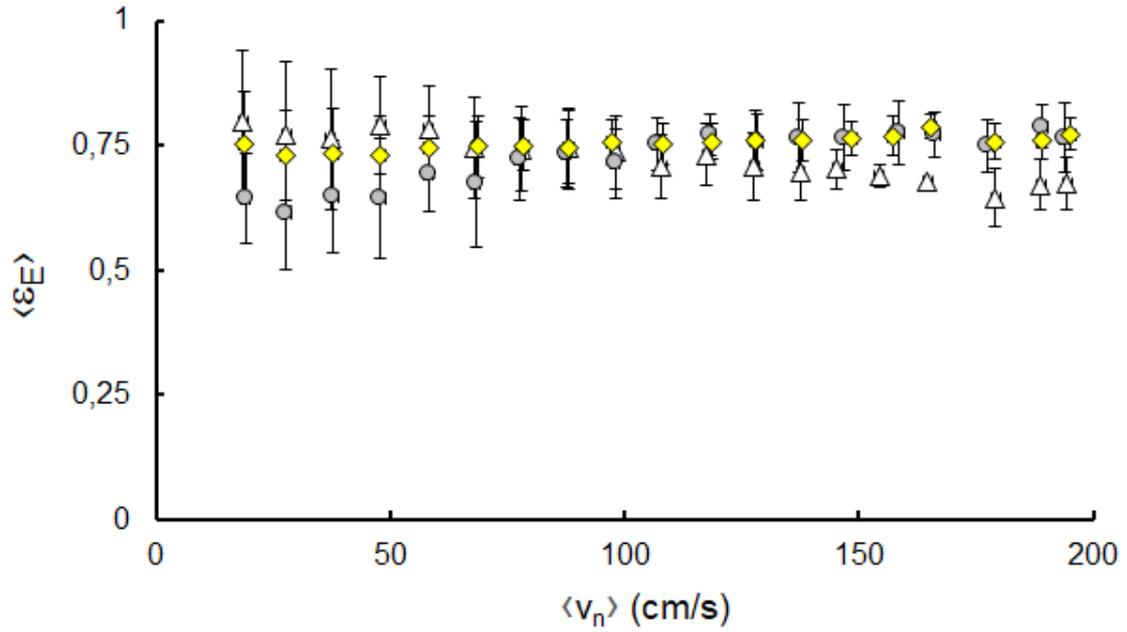


FIG. 36: Valores medios  $\langle \varepsilon_E \rangle$ , obtenidos en ventanas de 10 cm/s para la velocidad de impacto  $v_y$  para discos (círculos), partícula facetada eneagonal (rombos) y partículas facetada triangular (triángulos). Los valores se grafican en función de los valores medios de  $\langle v_y \rangle$  obtenidos en las ventanas mencionadas.

En este caso se observa que para ambos rangos de velocidades de impacto definidos, los valores medios de  $\langle \varepsilon_E \rangle$  son menores a 1 y que, al igual que para el comportamiento de  $\langle \varepsilon \rangle$ , a medida que la velocidad de impacto aumenta, la dispersión disminuye hasta alcanzar un valor aproximadamente constante. También se observa que en el rango de velocidades de impacto bajas, hay una notable disminución de la dispersión con respecto a lo observado para  $\langle \varepsilon \rangle$ . De este modo, dada la marcada diferencia que existe en la dispersión para cada coeficiente analizado en cada uno de los rangos definidos para la velocidad de impacto, se han obtenido los valores medios de cada coeficiente y su desviación estandar para cada uno de estos rangos, y para cada partícula facetada disponible.

En la tabla VI se indican para cada tipo de partícula facetada la cantidad de experimentos realizados, la cantidad total de colisiones detectadas en esos experimentos, la cantidad de colisiones analizadas después de realizar el filtrado de los casos donde las velocidades antes y después del impacto son menores a  $V_{umbral}$  y la cantidad de colisiones que presentaron valores de  $\varepsilon > 1$ .

TABLA VI. Para cada tipo de partícula facetada se presentan la cantidad de experimentos realizados, la cantidad total de colisiones detectadas en esos experimentos, la cantidad de colisiones analizadas después de realizar el filtrado de los casos donde las velocidades antes y después del impacto son menores a  $V_{umbral}$  y la cantidad de colisiones que presentaron valores de  $\varepsilon > 1$ .

N	# experiencias	# colisiones	# colisiones analizadas	# y % de col. con $\varepsilon > 1$
3	344	1463	1380	271 (19,6 %)
4	84	325	304	52 (17,1 %)
5	72	465	442	101 (22,8 %)
6	74	402	383	88 (22,8 %)
7	77	364	342	56 (16,4 %)
8	76	366	344	52 (15,1 %)
9	350	1558	1497	175 (11,7 %)
10	85	377	359	27 (7,5 %)
15	72	355	349	1 (0,3 %)
$\infty$	54	551	516	0 (0 %)

Se espera que la cantidad de lados afecte de diferente manera la rotación y movimiento horizontal de la partícula. Se obtienen los valores medios y dispersión estándar para los coeficientes  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_E$  para:

- todos los datos: tabla VII y FIG. 37;
- valores de velocidad de impactos bajos (seleccionados como se mencionó anteriormente): tabla VIII y FIG. 38;
- valores de velocidad de impactos medios y altos (seleccionados como se mencionó anteriormente): tabla IX y FIG. 39.

Los datos correspondientes de número de experiencias, de colisiones totales y de saltos se listan en la tabla VII:

TABLA VII. Tabla comparativa de los valores medios del coeficiente de restitución y del cociente de energías en una serie de experimentos en función del número de facetas de la partícula. Los errores fueron tomados con la desviación estándar.

<b>N</b>	$\langle \varepsilon \rangle$	$\langle \varepsilon_E \rangle$
3	$0,86 \pm 0,39$	$0,73 \pm 0,08$
4	$0,79 \pm 0,29$	$0,67 \pm 0,08$
5	$0,82 \pm 0,32$	$0,73 \pm 0,07$
6	$0,84 \pm 0,30$	$0,72 \pm 0,07$
7	$0,84 \pm 0,27$	$0,74 \pm 0,07$
8	$0,81 \pm 0,20$	$0,72 \pm 0,07$
9	$0,85 \pm 0,19$	$0,76 \pm 0,05$
10	$0,85 \pm 0,14$	$0,75 \pm 0,06$
15	$0,86 \pm 0,06$	$0,75 \pm 0,05$
$\infty$	$0,87 \pm 0,05$	$0,72 \pm 0,07$

TABLA VIII. Tabla comparativa de los valores medios del coeficiente de restitución y del cociente de energías en en función del número de facetas de la partícula para un rango de velocidades bajas ( $v_n \leq 75$  cm/s). Los errores fueron tomados con la desviación estándar.

<b>N</b>	$\langle \varepsilon \rangle$	$\langle \varepsilon_E \rangle$
3	$1,19 \pm 0,79$	$0,78 \pm 0,12$
4	$0,99 \pm 0,50$	$0,71 \pm 0,11$
5	$1,02 \pm 0,48$	$0,73 \pm 0,10$
6	$1,05 \pm 0,52$	$0,72 \pm 0,10$
7	$0,96 \pm 0,44$	$0,73 \pm 0,10$
8	$0,88 \pm 0,30$	$0,72 \pm 0,09$
9	$0,92 \pm 0,31$	$0,74 \pm 0,08$
10	$0,88 \pm 0,24$	$0,72 \pm 0,10$
15	$0,84 \pm 0,09$	$0,70 \pm 0,08$
$\infty$	$0,84 \pm 0,09$	$0,65 \pm 0,11$

TABLA IX. Tabla comparativa de los valores medios del coeficiente de restitución y del cociente de energías en una serie de experimentos en función del número de facetas de la partícula para un rango de velocidades medias-altas ( $v_n > 75$  cm/s). Los errores fueron tomados con la desviación estándar.

N	$\langle \varepsilon \rangle$	$\langle \varepsilon_E \rangle$
3	$0,72 \pm 0,19$	$0,70 \pm 0,06$
4	$0,68 \pm 0,17$	$0,65 \pm 0,06$
5	$0,72 \pm 0,23$	$0,73 \pm 0,05$
6	$0,75 \pm 0,20$	$0,72 \pm 0,06$
7	$0,78 \pm 0,18$	$0,74 \pm 0,05$
8	$0,77 \pm 0,14$	$0,72 \pm 0,06$
9	$0,82 \pm 0,13$	$0,76 \pm 0,04$
10	$0,84 \pm 0,09$	$0,76 \pm 0,05$
15	$0,88 \pm 0,04$	$0,77 \pm 0,04$
$\infty$	$0,88 \pm 0,04$	$0,76 \pm 0,06$

En el gráfico de la FIG. 37 se muestra la variación del valor medio  $\langle \varepsilon \rangle$  (obtenido sobre todos los datos) de estos coeficientes con el índice  $\frac{1}{N}$ , dado que de esa forma para el caso del disco  $\frac{1}{N} = 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ).

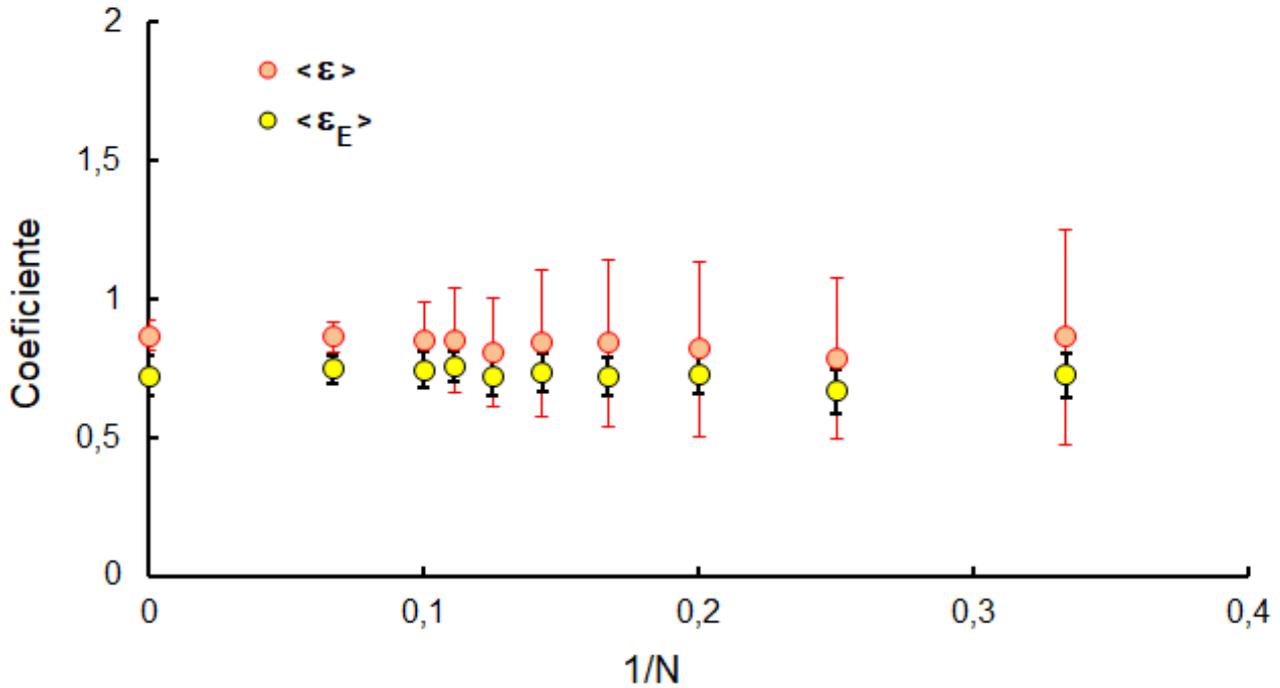


FIG. 37: Valor medio  $\langle \varepsilon \rangle$  y valor medio  $\langle \varepsilon_E \rangle$  en función de la inversa de la cantidad de lados de la partícula ( $1/N$ ) para una serie de experimentos con velocidades de impacto  $v_n$  en el rango (0 – 200) cm/s.

Se observa claramente que la dispersión es, para el coeficiente de restitución definido por la Ec. (1),

mucho más alta al coeficiente obtenido con el cociente de energías, esto se debe a que la Ec. (1) no tiene en cuenta la influencia de las rotaciones y de los movimientos transversales en la transferencia de energía en los rebotes de las partículas facetadas con la base. En la FIG. 38 se presentan los mismos gráficos pero considerando rangos de velocidades bajas, mientras que en la FIG. 39 se muestran los gráficos tomados con el rango de velocidades medias-altas.

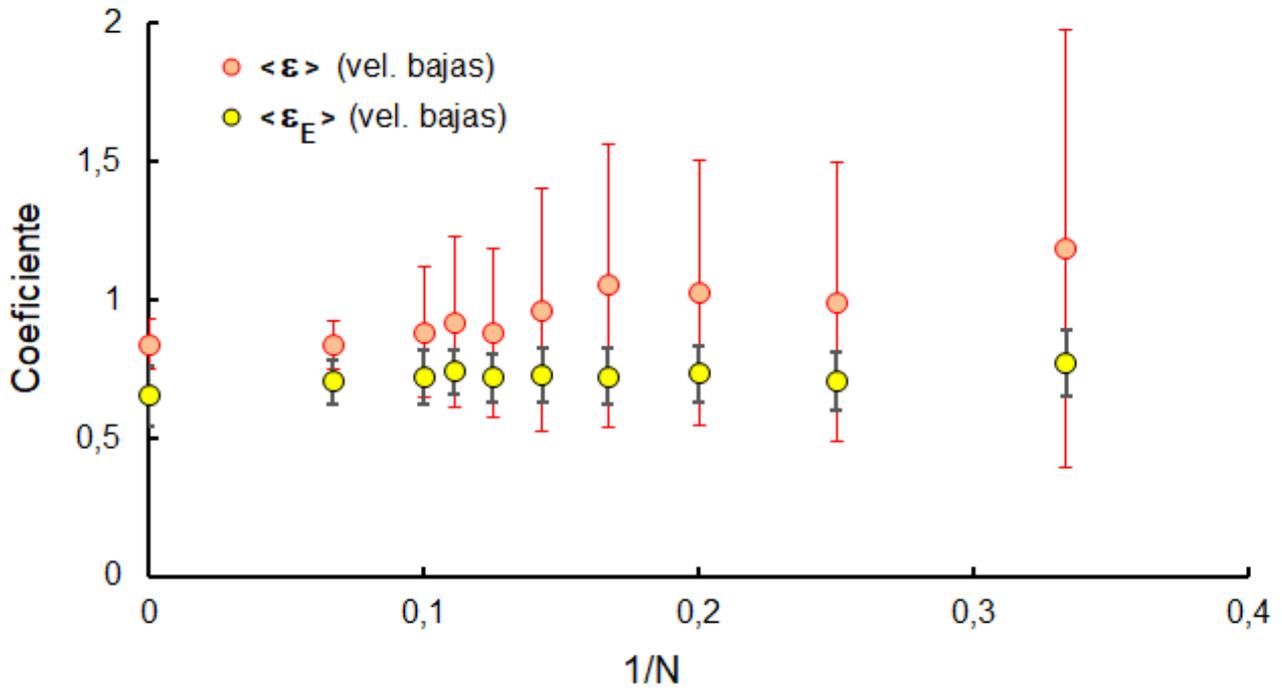


FIG. 38: Valor medio del coeficiente de restitución y del cociente de energías en función de la inversa de la cantidad de lados de la partícula ( $1/N$ ) para una serie de experimentos con velocidades de impacto  $v_n$  en el rango (0 – 75) cm/s.

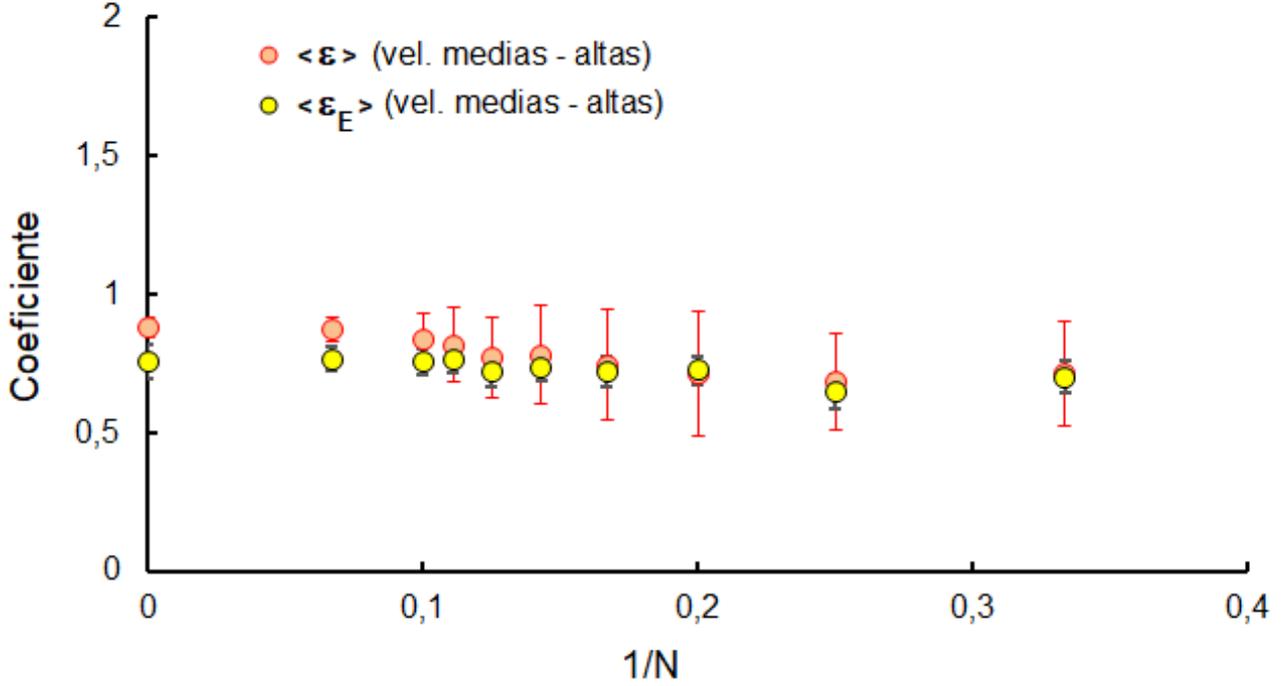


FIG. 39: Valor medio del coeficiente de restitución y del cociente de energías en función de la inversa de la cantidad de lados de la partícula ( $1/N$ ) para una serie de experimentos con velocidades de impacto  $v_n$  en el rango (75 – 200) cm/s.

En concordancia con la idea de que los resultados más dispersos para el coeficiente de restitución se dan en el rango de velocidades de impacto bajas, se pueden observar dispersiones altas tanto en la FIG. 38 como en la FIG. 37 para el rango de bajas velocidades de impacto.

En contraposición, para el rango de velocidades de impacto medias y altas (FIG. 39), se observan bajas dispersiones tanto del coeficiente de restitución como del cociente de energías. En este rango de velocidades,  $\langle \varepsilon \rangle = 0,78 \pm 0,14$  y valor  $\langle \varepsilon_E \rangle = 0,73 \pm 0,05$ . donde estos valores medios se obtienen de sendos promedios de los valores medios de  $\langle \varepsilon \rangle$  y de  $\langle \varepsilon_E \rangle$  calculados para todos los valores de  $N$  estudiados. Dado que  $\langle \varepsilon \rangle$  y  $\langle \varepsilon_E \rangle$  son similares resultan prácticamente equivalente utilizar cualquiera de las dos para analizar transferencias de energía.

# 11. Transferencias de energía de una partícula colisionando contra una base plana

## 11.1. Análisis de un caso particular para el prisma triangular

A diferencia de lo que ocurre en el caso del disco colisionando con una cuña, las partículas facetadas muestran una mayor proporción de colisiones en las que  $\varepsilon > 1$ , lo que permite realizar un estudio más exhaustivo a fin de poder determinar el origen del aumento de la componente de velocidad vertical (normal) después del impacto ( $\varepsilon > 1$ ). Para ello se analizó el comportamiento de la energía mecánica en el mismo experimento al que se hacía referencia en la FIG. 30, con la partícula con  $N = 3$  (prisma triangular). En particular se evaluó el comportamiento de los diferentes tipos de energías en cada salto.

En la FIG. 40A se muestra un ejemplo de la evolución de la energía cinética de rotación para este caso ( $N = 3$ ), y se observa que esta energía cinética de rotación permanece aproximadamente constante mientras está en vuelo y se producen variaciones bruscas en el momento de impacto.

En la FIG. 40B se muestra un ejemplo de la evolución de un salto al siguiente del porcentaje de la energía total que representa la energía de rotación. Para calcularlo se realizó el cociente de los promedios de la energía mecánica total y de la energía cinética de rotación en cada salto. Este porcentaje presenta un comportamiento intermitente que depende indudablemente de la naturaleza del rebote de la partícula contra la base y de la cantidad de energía con la que cae, y nos lleva a pensar que en cada rebote de la partícula contra la base existe una transferencia de energía desde y hacia modos rotacionales. Por ejemplo, se puede observar que al empezar el tercer salto (después de la segunda colisión) la energía cinética de rotación aumenta considerablemente, y este aumento debe darse debido a la transferencia de energía cinética de traslación ya que la energía potencial, en el momento del muestreo de la colisión, es casi nula (debe notarse que en el caso de la partícula triangular, en el momento del impacto la posición del centro de masa respecto del punto de impacto puede variar según la partícula colisione con uno de sus vértices o con algunos de sus lados). En la siguiente colisión (FIG. 41A) se observa una disminución de energía cinética de rotación y un aumento de energía cinética de traslación asociada al movimiento vertical que lleva a  $\varepsilon > 1$ .

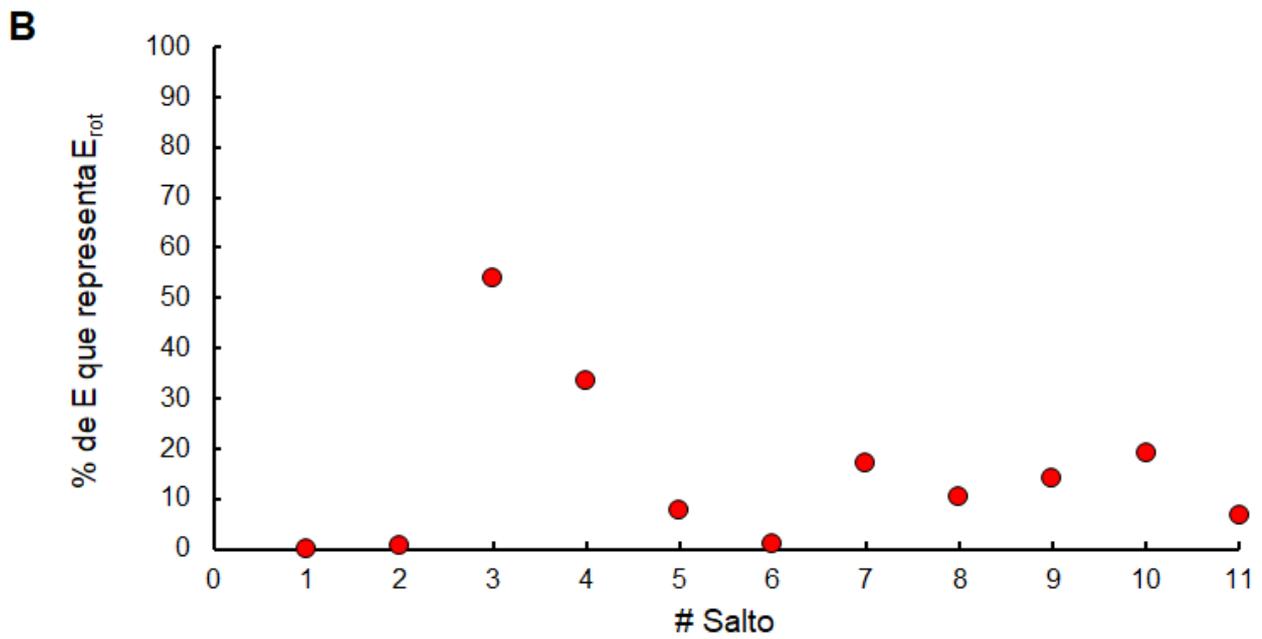
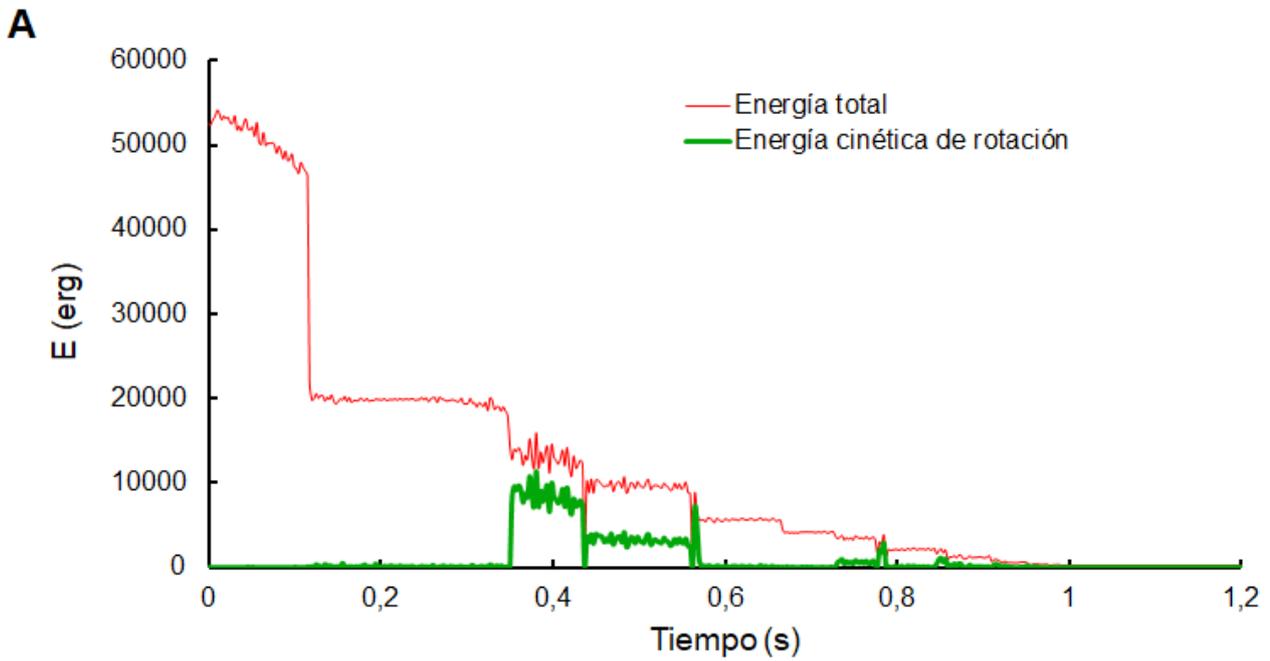


FIG. 40: A - Evolución temporal de la energía mecánica (línea fina roja) y de rotación (línea gruesa verde) de la partícula triangular rebotando sobre una superficie plana. B - Porcentaje que representa la energía de rotación respecto de la energía mecánica total tomado en función del número de salto, para una partícula triangular.

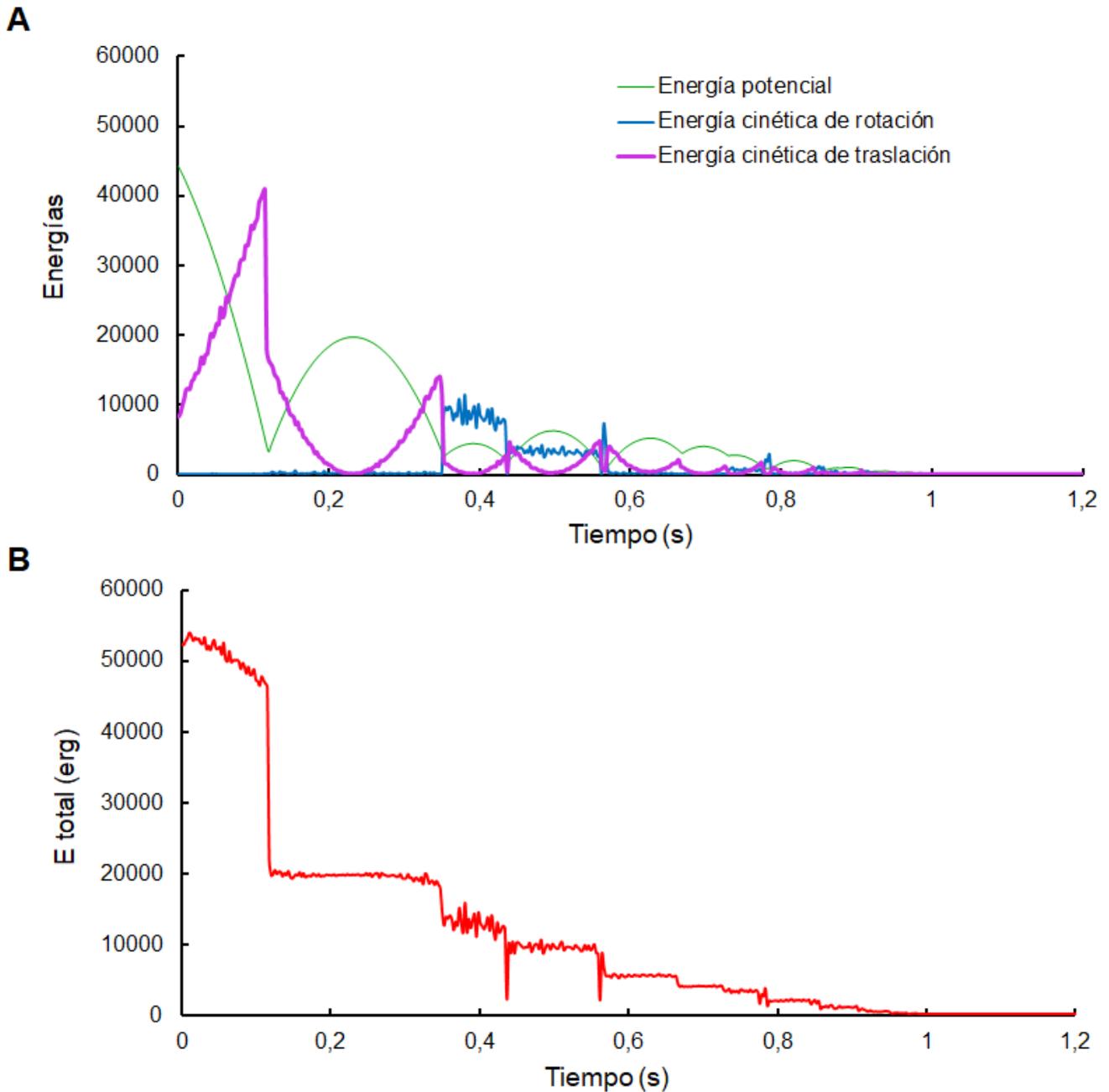


FIG. 41: A - Energía potencial, energía de rotación y la energía cinética en función del tiempo, para la partícula triangular rebotando en la base plana. B - Evolución temporal de la energía total.

En la FIG. 41A se muestra un ejemplo de la evolución de la energía potencial, energía de rotación y energía cinética para la partícula triangular rebotando en la base plana. En cada colisión hay una disminución de la energía total que luego se mantiene aproximadamente constante durante todo el vuelo (FIG. 41B), aunque a velocidades altas es más relevante la disipación viscosa, que se discutió en la Sec. 8.2. En particular se observa que:

- en el primer salto o vuelo (antes de la primera colisión contra la base) no existe prácticamente rotación en la partícula y la energía cinética con la que llega a la colisión casi coincide con la energía potencial con la que se dejó caer, aunque hay una leve disipación por fricción.
- en un salto posterior (el tercer salto, después de la segunda colisión) se observa que la partícula adquiere energía cinética de rotación, pero la altura máxima de dicho salto pasó a ser mucho menor que en el salto anterior, de lo cual se infiere que la energía cinética de rotación se hace a costa de una gran disminución de la energía cinética de traslación. Se calculó el coeficiente de restitución para esta colisión y se obtuvo el valor:  $\varepsilon = 0,38 < 1$ .
- en el cuarto salto (después de la tercera colisión) se observa que la energía cinética de rotación disminuye mientras que la energía potencial máxima que alcanza la partícula aumenta respecto del salto anterior, lo que indica que la energía cinética de traslación con que sale la partícula, después de la tercera colisión, aumenta con respecto a la que tenía después de la segunda colisión. Por lo tanto la energía cinética de traslación después de la tercera colisión es mayor aquella con la que impacta, lo que explica que  $v_y < v_y'$  y  $\varepsilon = 1,32 > 1$ .

Notamos además que, como el coeficiente de restitución depende de la coordenada vertical de la velocidad, es el modo cinético asociado a la velocidad  $v_y$  la que, al igual que en el experimento del disco colisionando contra la cuña (Sec. 9.2) intercambia energía con el modo rotacional.

En particular, en la FIG. 41B se observa que:

- excepto en el primer vuelo, durante el tiempo que hay entre colisiones la disipación de energía por fricción es pequeña. Este hecho se refleja en que la energía total se mantiene aproximadamente constante. Esta constancia de la energía es mas notable para bajos valores que para altos.
- en cada colisión hay una notable pérdida de energía que se traduce en decrecimientos importantes de energía total.

## 11.2. Análisis general

Para comprender las transferencias de energía que conducen a colisiones con  $\varepsilon > 1$  para las partículas facetadas, se analizan con más detalle las variaciones, antes y después de una colisión, de la energía

cinética de traslación en la dirección vertical,  $\Delta E_K(v_y)$ , debido a:

- $\Delta E_R$ , la variación de energía cinética de rotación,
- $\Delta E_K(v_x)$ , la variación de energía cinética de traslación asociada a la dirección horizontal,
- $\Delta E_P$ , la variación de energía potencial.

Cabe señalar que se analizará el caso de  $\Delta E_P$  para ver su incidencia en los casos con  $\varepsilon > 1$ , ya que la tasa de muestreo da lugar a valores  $\Delta E_P \neq 0$  debido a diferencias en la altura para las posiciones de la partícula en las que se calculan las magnitudes justo antes y después de cada colisión.

Para los casos en que  $\varepsilon > 1$ , se obtuvieron las siguientes tasas:  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_R}$ ,  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_K(v_x)}$  y  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_P}$ . Cuando  $\varepsilon > 1$ , hay un incremento de  $E_K(v_y)$  después de la colisión por lo que  $\Delta E_K(v_y) > 0$ . Este incremento debe explicarse con la pérdida o transferencia de  $E_R$ ,  $E_K(v_x)$  y  $E_P$  a  $E_K(v_y)$ , es decir,  $\Delta E_R < 0$ ,  $\Delta E_K(v_x) < 0$  ó  $\Delta E_P < 0$ , lo que lleva a tasas negativas.

Por lo tanto, analizaremos las colisiones con  $\varepsilon > 1$  y con tasas menores a cero. A modo de ejemplo, mostramos en detalle los datos obtenidos para la partícula triangular ( $N = 3$ ) donde el 19,44 % de las colisiones (271 colisiones) presentan  $\varepsilon > 1$ .

En las figuras 42, 43 y 44 se muestran respectivamente las distribuciones del módulo de estas tasas mediante la función densidad de probabilidad (PDF) para todo el rango de velocidades de impacto exploradas, para velocidades de impacto menores a 75 cm/s y para velocidades de impacto mayores a 75 cm/s para  $N = 3$ .

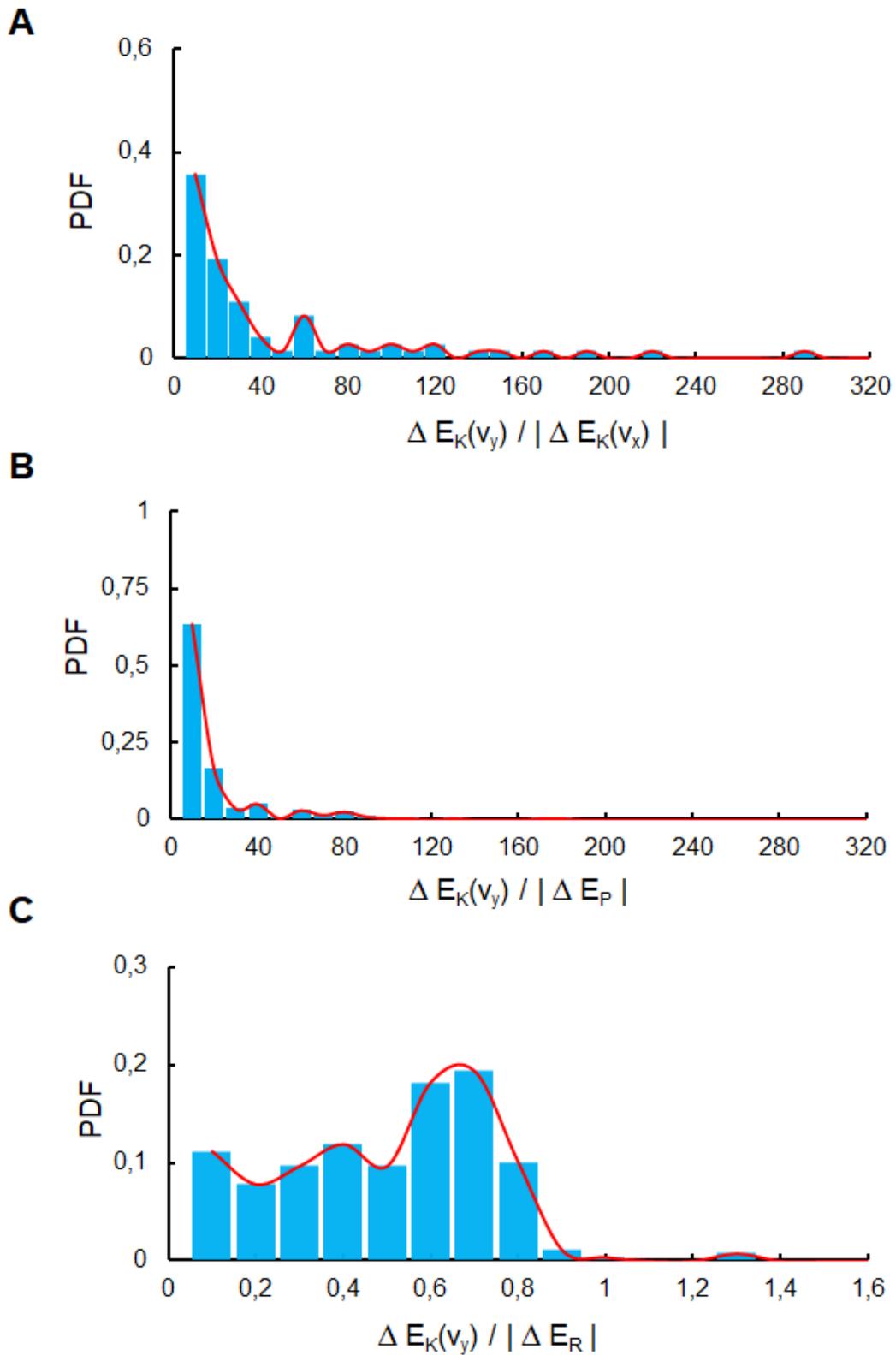


FIG. 42: Para  $N = 3$  y los casos con  $\varepsilon > 1$ : distribuciones del módulo de las tasas de transferencia a energía cinética de traslación asociada a la componente vertical de la velocidad a energía cinética de rotación asociada a la componente horizontal de la velocidad (A), a la energía potencial (B), a la energía cinética de rotación (C).

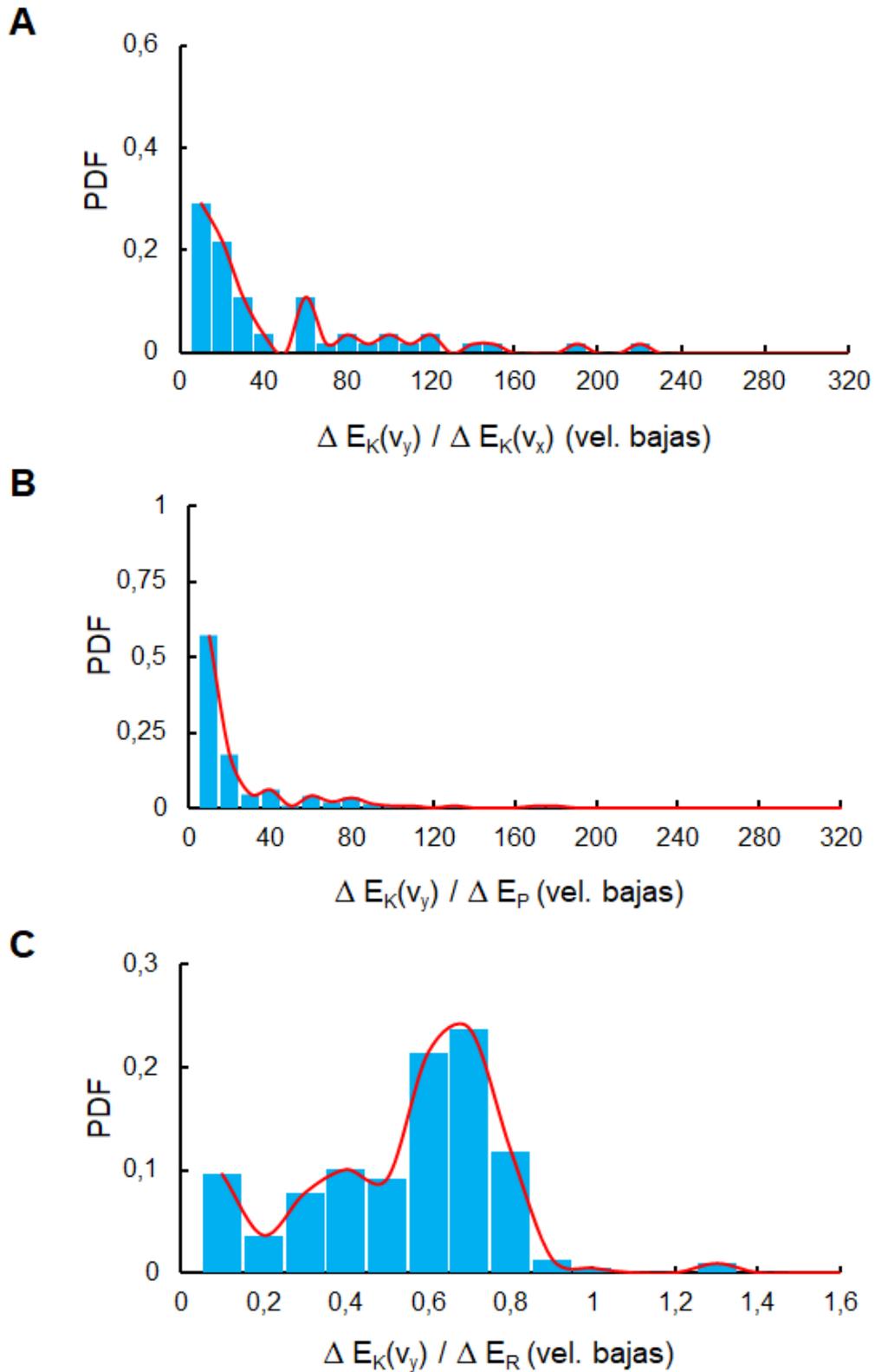


FIG. 43: Para  $N = 3$  y los casos con  $\varepsilon > 1$  y velocidad de impacto es menor que 75 cm/s: distribuciones del módulo de las tasas de transferencia a energía cinética de traslación asociada a la componente vertical de la velocidad a energía cinética de rotación asociada a la componente horizontal de la velocidad (A), a la energía potencial (B), a la energía cinética de rotación (C).

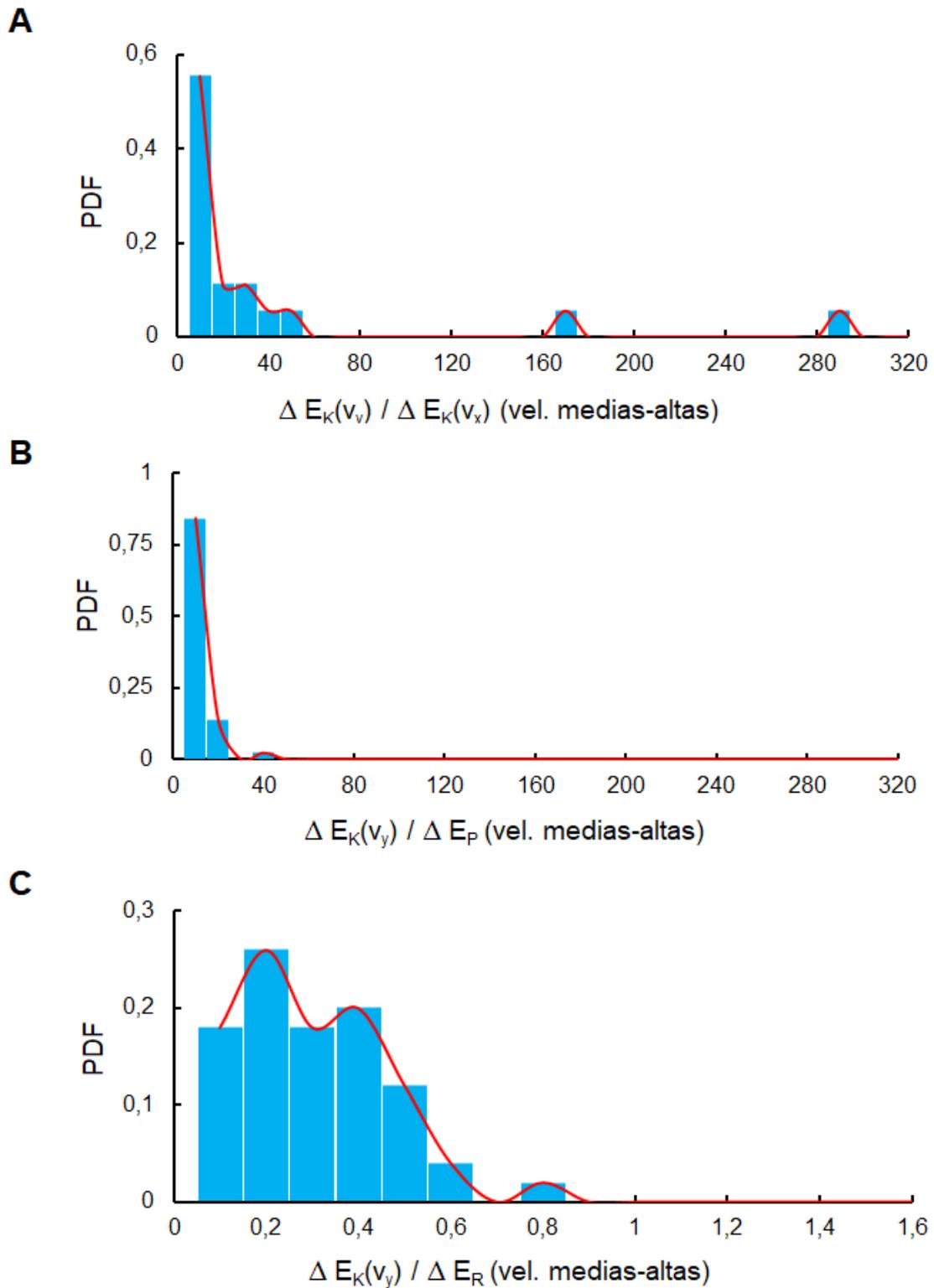


FIG. 44: Para  $N = 3$  y los casos con  $\varepsilon > 1$  y velocidad de impacto es mayor que 75 cm/s: distribuciones del módulo de las tasas de transferencia a energía cinética de traslación asociada a la componente vertical de la velocidad a energía cinética de rotación asociada a la componente horizontal de la velocidad (A), a la energía potencial (B), a la energía cinética de rotación (C).

Se observa que las distribuciones no son gaussianas y que:

- Los módulos de las tasas  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_K(v_x)}$  y  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_P}$  presentan una alta proporción de valores mayores a 1, lo que indica pérdidas de  $E_K(v_x)$  y  $E_P$  muy bajas que no llegan a explicar individualmente los aumentos de  $E_K(v_y)$  que llevan a  $\varepsilon > 1$ .
- El módulo de la tasa  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_R}$  es generalmente menor a 1, a velocidades de impacto altas (mayores a 75 cm/s), y la tasa siempre es menor a 1 en todos los casos con velocidades de impacto bajas (menores a 75 cm/s). Esto indica que la pérdida de  $E_R$  podría explicar aumentos en  $E_K(v_y)$  que lleven a  $\varepsilon > 1$ .

Dado que las distribuciones no son gaussianas y a fin de poder realizar una comparación entre tasas, se caracterizan estas distribuciones de dos maneras diferentes:

- I) Con el valor más probable (el valor más frecuente) para analizar la influencia de la velocidad de impacto.
- II) Analizando la proporción de tasas de energía menores o iguales a 1 que son aquellas en las cuales variaciones de  $E_R$ ,  $E_K(v_x)$  o  $E_P$  pueden explicar los aumentos de  $E_K(v_y)$  que llevan a  $\varepsilon > 1$  para analizar la influencia de la cantidad de lados de la partícula facetada.

### 11.2.1. Influencia de la velocidad de impacto

Para las distribuciones del módulo de las tasas  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_R}$ ,  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_K(v_x)}$  y  $\frac{\Delta E_K(v_y)}{\Delta E_P}$  que se muestran en las figuras 42, 43 y 44 y que fueron obtenidas en el experimento con el prisma triangular ( $N = 3$ ), respectivamente, para todo el rango de velocidades de impacto exploradas, para velocidades de impacto menores a 75 cm/s y para velocidades de impacto mayores a 75 cm/s, se obtienen:

- Total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y tasas de transferencias energéticas negativas.
- Porcentaje de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y tasas de transferencias energéticas negativas con respecto del total de experiencias con  $\varepsilon > 1$ .
- Valor más probable del módulo de las tasas de transferencias energéticas.

Estos datos se muestran en las tablas X, XI y XII y permiten analizar la influencia de la velocidad de impacto.

TABLA X. Total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y tasas de transferencias energéticas negativas, porcentaje respecto del total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y valor más probable del módulo de las tasas de transferencias energéticas.

	Rango completo de $v_n'$		
	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_K(v_x) }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_P }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_R }$
# EXPERIENCIAS	79/271 (29,15 %)	198/271 (73,06 %)	269/271 (99,26 %)
VALOR MÁS PROBABLE	10	10	0,7

TABLA XI. Total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y tasas de transferencias energéticas negativas en las cuales la velocidad de impacto es menor que 75 cm/s, porcentaje respecto del total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  en un rango de velocidades de impacto menor que 75 cm/s, y valor más probable del módulo de las tasas de transferencias energéticas para estos casos.

	$v_n'$ menor que 75 cm/s		
	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_K(v_x) }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_P }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_R }$
# EXPERIENCIAS	60/221 (27,15 %)	153/221 (69,23 %)	219/221 (99,09 %)
VALOR MÁS PROBABLE	10	10	0,7

TABLA XII. Total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  y tasas de transferencias energéticas negativas en las cuales la velocidad de impacto es mayor que 75 cm/s, porcentaje respecto del total de experiencias con  $\varepsilon > 1$  en un rango de velocidades de impacto mayor que 75 cm/s, y valor más probable del módulo de las tasas de transferencias energéticas para estos casos.

	$v_n'$ mayor que 75 cm/s		
	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_K(v_x) }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_P }$	$\frac{\Delta E_K(v_y)}{ \Delta E_R }$
# EXPERIENCIAS	19/50 (32,2 %)	45/50 (90 %)	50/50 (100 %)
VALOR MÁS PROBABLE	10	10	0,2

Según lo que nos indican las tablas X y XI, para  $N = 3$ , hay un porcentaje similar de colisiones donde la ganancia de  $E_K(v_y)$  ( $\varepsilon > 1$ ) es varias veces mayor que lo que se pierde o transfiere desde  $E_K(v_x)$  o desde  $E_P$ . En cambio, esta ganancia es una proporción importante de lo que se pierde de energía cinética de rotación ( $E_R$ ). En cuanto a los datos que se muestran la tabla XII para velocidades de impacto altas, se observa un incremento en las colisiones con tasas negativas. Al igual que en las colisiones que ocurren a bajas velocidades de impacto, la ganancia de  $E_K(v_y)$  ( $\varepsilon > 1$ ) es varias veces mayor que lo que se pierde o transfiere desde  $E_K(v_x)$  o desde  $E_P$ . Sin embargo, en este caso, para

velocidades de impacto altas, la posible transferencia de  $E_R$  a  $E_K(v_y)$  es mucho menor (20 %) que en el caso de velocidades de impacto bajas.

De esta manera la tendencia es que las colisiones donde se observe un aumento de  $E_K(v_y)$  ( $\varepsilon > 1$ ) ocurran a velocidades de impacto bajas cómo ya se había mostrado anteriormente (por ejemplo en la FIG. 33). A estas velocidades de impacto (menores a 75 cm/s) se observan mayores pérdidas de  $E_R$  que pueden estar siendo transferidas a  $E_K(v_y)$ .

### 11.2.2. Influencia de la cantidad de lados $N$ de la partícula facetada

Por otro lado, cabe recordar que nos interesa analizar los casos en que  $\varepsilon > 1$  a fin de identificar qué modos de energía pueden ser responsables del aumento en  $E_K(v_y)$  ( $\Delta E_K(v_y) > 0$ ). En los casos en que haya transferencia de energía a  $E_K(v_y)$ , las tasas de energía deben ser negativas, por lo tanto se analiza la proporción de tasas de energía negativas con módulo menor o igual a 1 que son aquellas en las cuales variaciones de  $E_R$ ,  $E_K(v_x)$  o  $E_P$  pueden explicar los aumentos de  $E_K(v_y)$  que llevan a  $\varepsilon > 1$ . En la FIG. 45 se muestran estos porcentajes en función de la cantidad de lados de las partículas facetadas. Cabe notar que además del caso del disco ( $N = \infty$ ), la partícula facetada de  $N = 15$  casi no presentó valores de  $\varepsilon > 1$  (Tabla VI) por lo que se deja fuera de este análisis. Debería analizarse si  $N = 15$  es un límite para la cantidad de caras y/o vértices que debe tener una partícula para que las  $E_K(v_x)$ ,  $E_P$  y  $E_R$  no transfieran proporciones importantes de energía a la traslación vertical  $E_K(v_y)$  o si hay una alta disipación de energía en la colisión. En todo caso excede el objetivo de esta Tesis ya que habría que analizar las colisiones de partículas facetadas con  $N > 15$ .

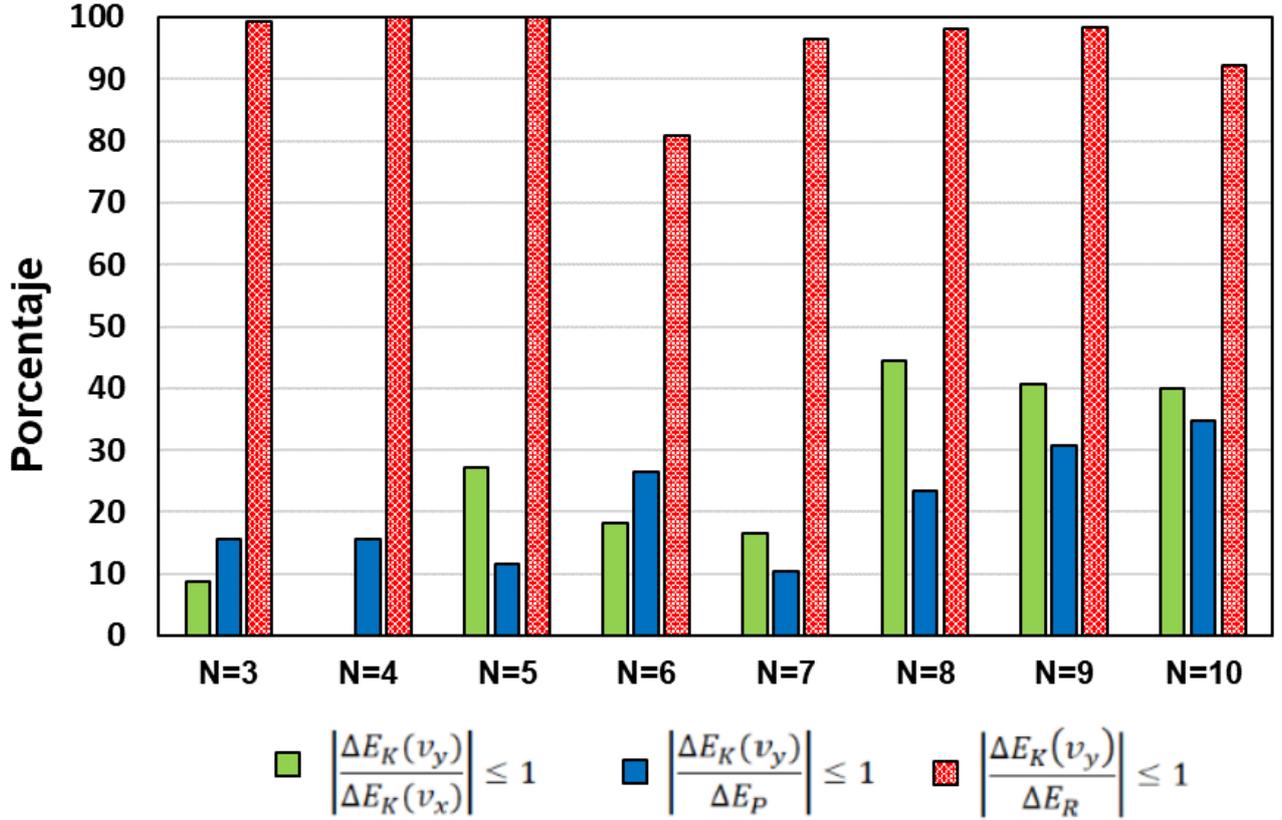


FIG. 45: Porcentaje de tasas de energía con módulo menor o igual a 1 para las partículas facetadas con N lados para las colisiones en las que  $\varepsilon > 1$  y las tasa son negativas.

La FIG. 45 muestra que independientemente de la velocidad de impacto:

- Entre el 80% y 100% de las colisiones para cualquier partícula facetada podrían aumentar su energía  $E_K(v_y)$  solamente a expensas de una transferencia de  $E_R$ . Cabe aclarar que en este análisis no se estudia la posibilidad de contribuciones múltiples que también podrían ocurrir.
- Aunque el 100% de las colisiones puedan transferir la energía que explique que  $\varepsilon > 1$ , podría suceder que  $E_R$  se disipe en gran parte en la colisión o se transfiera a otro modo (por ej. a  $E_K(v_x)$ ). En esos casos, el aumento de  $E_K(v_y)$  podría deberse, aunque en un porcentaje menor, a la transferencia de  $E_K(v_x)$  y  $E_P$  a  $E_K(v_y)$ .

Finalmente, un estudio análogo podría realizarse para analizar que tipo de energía es más probable que sea transferida a  $E_R$ , en esas colisiones  $\Delta E_R > 0$ . Se observa una gran proporción de colisiones donde el aumento de  $\Delta E_R$  podría deberse a una disminución de  $E_K(v_y)$  ( $\Delta E_K(v_y) < 0$ ) que lleva a colisiones con  $\varepsilon < 1$ .

## Parte V

# CONCLUSIONES

## 12. Principales aportes de este trabajo

Entre los diferentes fenómenos que se presentan en los materiales granulares, uno que resulta de particular interés es el desencadenamiento de avalanchas y relajamiento a un nuevo estado de equilibrio.

En particular, la dinámica de este proceso se ve afectada por:

- 1) el desorden que se introduce en la red de contactos debido a la inhomogeneidad en la distribución de la masa de cada grano,
- 2) el modo en que el sistema disipa la energía y transfiere energía potencial y energía cinética de traslación y rotación.

Mientras que el primer punto se analizó en un trabajo previo [20], en este trabajo se profundiza el estudio del segundo punto mencionado:

- se analiza la disipación que se caracteriza mediante el coeficiente de restitución  $\varepsilon$  y
- se estudia la transferencia de energía entre los distintos grados de libertad.

A fin de alcanzar el objetivo de este trabajo se llevaron a cabo dos experimentos que permitieron analizar y caracterizar cómo una partícula (un grano) transfiere y disipa energía hasta alcanzar un estado de equilibrio. En particular se estudió cómo:

- un disco, excitado mediante un percutor, relaja al equilibrio mediante colisiones sucesivas contra cuñas,
- una partícula facetada, lanzada desde una determinada altura, relaja al equilibrio mediante colisiones sucesivas contra una superficie plana.

En el diseño de estos experimentos se buscó:

- Inducir rotaciones, para lo cual se tuvo en cuenta que pudiesen favorecer la aparición de torques (Sec. 6.1 y Sec. 6.2).

- Poder analizar el rol de la rotación de la partícula por lo que se trabaja con partículas planas confinadas en celdas que permitan un movimiento de traslación *cuasi-bidimensional* y solo rotación alrededor de un eje (paralelo a la normal a las placas de vidrio que conforman la celda). De este modo, la partícula se mueve siempre confinada a un único plano, y esto facilita considerablemente el análisis, dado que se evita tener que considerar ecuaciones de movimiento en tres dimensiones, sin por ello resignar resultados fundamentales.

Como se mencionó, el coeficiente de restitución  $\varepsilon$  se utiliza generalmente como parámetro para caracterizar la disipación que ocurre en las colisiones que determinan el comportamiento de los sistemas granulares y se mide con las limitaciones especificadas para la Ec. (1) en la Sec. 4.

En este trabajo, observamos que:

- Tanto para el caso del disco colisionando contra cuñas, como para las partículas facetadas interactuando con una superficie plana  $\varepsilon$  depende ligeramente de la velocidad de impacto  $v_n$  y presenta una mayor variación para valores bajos de  $v_n$ . Este fenómeno ya había sido reportado por otros investigadores [21, 22, 23].
- A bajas velocidades de impacto ( $v_n < 75$  cm/s) las variaciones en  $\varepsilon$  son más importantes a medida que disminuye la cantidad de lados  $N$  de las partículas facetadas (FIG. 38 y tabla VIII).
- A bajas velocidades de impacto,  $\varepsilon$  puede tomar valores mayores a 1, para el caso de la partícula facetada. A medida que la cantidad de lados  $N$  aumenta la cantidad de colisiones con  $\varepsilon > 1$  disminuye siendo casi despreciable la probabilidad de encontrar estos eventos para  $N > 10$
- En estos experimentos, la aparición de torques por interacción del disco con cuñas o de partículas facetadas con una superficie plana puede inducir rotaciones y movimientos laterales que conducen al almacenamiento de energía cinética rotacional y traslacional en direcciones distintas a la vertical.
- Observamos que este último hecho se debe a las colisiones con  $\varepsilon < 1$  que transfieren energía cinética asociada al movimiento vertical  $E_K(v_y)$  principalmente a energía cinética de rotación  $E_R$ , entonces el modo rotacional almacena energía hasta que, durante un impacto, se transfiere en mayor parte de vuelta a  $E_K(v_y)$ , lo que conduce a colisiones con  $\varepsilon > 1$ .

Por lo tanto, concluimos que los siguientes factores deben ser considerados para evaluar si es pertinente utilizar sólo  $\varepsilon$ , cómo se define en la Ec. (1), como parámetro para caracterizar la disipación de impactos con las limitaciones especificadas en la Sec. 4:

- la presencia de bordes y rugosidades tanto en la partícula como en la superficie, que podrían inducir torques y por lo tanto rotaciones;
- el rango de posibles velocidades de impacto que también condicionan el valor de este coeficiente.

### 13. Perspectivas

Resulta de interés, en trabajos futuros, aprovechar los dispositivos diseñados y montados para analizar el proceso de relajación al equilibrio para partículas con una distribución de masa inhomogénea. Para ello, en la perforación centrada realizada sobre las partículas, puede insertarse un pequeño bloque. Este bloque puede:

- fijarse dentro de la perforación.
- dejarse suelto para que pueda moverse libremente dentro de la perforación. En este último caso, no solo se obtendría una distribución de masa no homogénea sino que el movimiento interno puede agregar una disipación adicional.

Estas experiencias podrían resultar de interés para comprender el proceso de relajación al equilibrio de avalanchas de granos en un sistema como el estudiado por Piva *et al* [20] (descrito en la Sec. 4, FIG. 1) que permite entender la estabilidad y dinámica de sistema granulares más realistas, como el de semillas o el de cápsulas farmacéuticas parcialmente llenas con polvos.

Resulta también de interés, ahondar en la comprensión de la influencia de la velocidad de impacto, en particular de su componente en la dirección vertical ( $y$ ) en los resultados obtenidos para el coeficiente  $\varepsilon_E$ . Nótese que en lo que se denominó nuestro *experimento de referencia*, en el que se empleó un disco colisionando sobre la base plana, uno de los resultados que se observó fue una mayor dispersión para valores bajos de la velocidad de impacto (Sec. 8.1.2). Una de nuestras conjeturas es que si la energía de rotación se mantiene aproximadamente constante en función de la velocidad de impacto, entonces

la influencia que tenga en relación con la energía cinética de traslación asociada a la componente vertical ( $y$ ) de la velocidad será más alta a velocidades bajas de impacto que a velocidades medias y altas.

Por último, se observó en particular que nuestros resultados del coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto no seguían una distribución gaussiana. Otra de las ideas a futuro es entonces caracterizar estas distribuciones del coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto, para lo cual resulta necesario aumentar el número de experimentos para que una mayor estadística nos defina con mayor claridad qué tipo de distribución siguen estos datos.

## Parte VI

# APÉNDICES

## A. Determinación de las velocidades y de la energía

La velocidad instantánea del disco durante su trayectoria se obtuvo de la manera descrita en la Sec. 7.2: se realiza la derivada discreta que es el cociente de la diferencia en la posición del disco en imágenes consecutivas sobre  $\delta t$  el intervalo temporal entre imágenes. El intervalo  $\delta t = 0,0025$  s y está definido por la velocidad de muestreo de 391 fps.

Análogamente se determina la velocidad angular. Esta se obtiene con el cociente de la diferencia, entre imágenes sucesivas, de los ángulos que forma el segmento que une una marca en el disco y el centro de masa, sobre el intervalo  $\delta t = 0,0025$  s. En este cálculo debe tenerse en cuenta que la variación temporal del ángulo debe ser una función continua, por lo tanto cada vez que el disco de una vuelta completa deben sumarse  $360^\circ$  para que la variación sea continua.

En cuanto a la energía de un disco de masa  $M$ , la expresión más general es de la forma:

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_{DC}^{(CM)} \Omega^2 + M g y \quad (31)$$

Donde  $I_{DC}^{(CM)}$  es el momento de inercia del disco respecto de su centro de masa (CM) y está dado por:

$$I_{DC}^{(CM)} = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) \quad (32)$$

donde  $R$  es el radio del disco y  $r$  es el radio de la perforación.

De este modo, la energía para el disco es:

$$E_{DC} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{4} M (R^2 + r^2) \Omega^2 + M g y \quad (33)$$

Para cada imagen se obtiene la energía a fin de relevar su evolución durante cada experiencia.

## B. Diseño de las partículas facetadas

Todas las partículas facetadas fueron diseñadas de forma que sus caras paralelas principales tengan igual área que el área del disco de radio  $R_2$ . Tanto las partículas facetadas como el disco tienen un hueco centrado de igual radio  $R_1$ . Dado que todas se construyen con una impresora 3D con hilos del mismo material (PLA ácido poliláctico) y tienen el mismo espesor, las partículas también comparten el mismo volumen y el mismo peso. Conocidos los valores del radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$ , el área del disco es:

$$A_{RCen} = \pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (34)$$

A fin de obtener una figura facetada (con  $N$  lados) que tenga una perforación centrada y la misma superficie que el disco con perforación centrada, se tiene en cuenta el esquema de la FIG. 46:

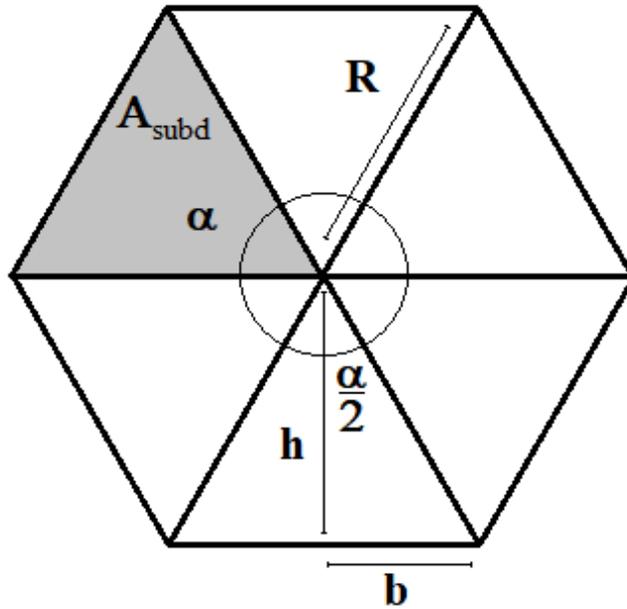


FIG. 46: Esquema general de una figura con  $N$  facetas.

donde  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ ,  $h = R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$  y  $b = R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$ . De este modo, si calculamos el área de cada triángulo rectángulo (que surge de partir al medio cada subdivisión triangular de la figura) como la mitad del producto entre la base  $b$  y la altura  $h$ , nos queda el siguiente área:

$$A_{subd} = 2 \left( \frac{bh}{2} \right) = R^2 \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \frac{2}{2} = \frac{R^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \quad (35)$$

Entonces, el área de la superficie facetada perforada será igual a  $N$  veces el área calculada en la Ec. (35) menos el área de la perforación. Veamos:

$$A_{NFacCen} = \frac{N R^2}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} \right) - \pi R_1^2 \quad (36)$$

Igualando estas áreas con la del disco puede encontrarse el valor de  $R$ , que es el radio de la circunferencia en la cual se inscribe la partícula facetada (también conocida como *circunradio*). Este dato se utiliza para diseñar cada partícula facetada con  $N$  lados en el software AutoCAD [28, 29]:

$$A_{RCen} = A_{NFacCen} \Rightarrow \frac{N R^2}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} \right) - \pi R_1^2 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2\pi}{N \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} \right)}} R_2 \quad (37)$$

En la Tabla XIII se listan los valores de  $R$  obtenidos para cada valor de  $N$ :

TABLA XIII. Tabla en la que se listan los circunradios tomados para cada polígono correspondiente a la cara principal de cada partícula facetada diseñada.

$N$	$R$ (cm)
3	2,3327
4	1,88
5	1,7242
6	1,6495
7	1,6072
8	1,5809
9	1,5632
10	1,5509
15	1,5222

Se espera que esta sucesión de radios tienda a  $R_2 = 1,5$  cm, que es el radio de la circunferencia que circunscribe a la partícula con infinitas facetas: el disco. De esta manera es posible conseguir una partícula facetada de  $N$  lados cuya área coincida con la del disco centrado. Con esta información pasamos a desarrollar el protocolo para diseñar estas partículas en AutoCAD.

Primero debe considerarse que el AutoCAD registra distancias en una unidad arbitraria  $u$  tal que:  $x$  cm = 100  $u$ . Dicho esto, a continuación se explica el procedimiento para diseñar la partícula más sencilla, el disco con un agujero centrado:

- Establecemos el modo *Modelado 3D* y vamos a la solapa *Dibujo*. Dibujamos un círculo de radio  $R_2 = 1,5 \text{ cm}$  ( $R_2 = 150 \text{ u}$ ). Hecho esto dibujamos un círculo concéntrico con el anterior, y le asignamos un diámetro de  $1,35 \text{ cm}$  (es decir, un radio de  $R_1 = 67,5 \text{ u}$ ). Se puso cuidado de que esta pequeña circunferencia se encuentre centrada respecto de la grande. Para ello, se ubica el centro de cada circunferencia en el cruce de líneas de cuadrícula del plano del AutoCAD. Hacer zoom y cada vez que dicho centro se desplace reubicarla hasta que el zoom haya sido suficiente. Una vez hecho esto, seleccionamos cada uno de estos círculos con el menú *Extrusión*.
- Al círculo externo le realizamos un realzado de  $0,38 \text{ cm}$  (es decir,  $38 \text{ u}$ ) y al interno le damos cualquier valor, pero que sea superior a  $0,38 \text{ cm}$ , para poder luego restar superficies. Para ello, se elige la opción *Diferencia* (en la solapa *Sólido*, sección *Booleano*). Se selecciona el círculo externo y posteriormente se selecciona el círculo interno para obtener la cara de la figura que se quería diseñar.

Ahora, veamos cómo preparar una figura de  $N$  facetas:

- Para ello, vamos a la solapa *Dibujo* y dibujamos un *Polígono*. Allí escribimos la cantidad de lados que queremos que tenga el polígono (3, 4, 5, etc.).
- Se dibuja el círculo cuyo radio  $R$  depende del valor de  $N$  (tabla XIII) y se lo ubica con su centro coincidente con un cruce de líneas de cuadrícula.
- Se inscribe la partícula facetada en el círculo realizado en el paso anterior
- Incluir la perforación con las mismas características que para el caso del disco. La perforación debe estar bien centrada, para ello, ubicamos también su centro coincidente con el centro de la circunferencia externa. Una vez hecho esto se elimina la circunscrición y se realiza la extrusión y la diferencia) según se explicó para el caso del disco).
- Una vez hechas las partículas, se selecciona *Visualización sombreada* en el menu *Propiedades*. Después de esto se guarda el archivo y se lo exporta en formato \*.stl.

Para imprimir en 3D, una vez que se exportó el archivo, se abre el programa *CreateBOT 3D* [30] y se arrastra el \*.stl a la ventana principal. Allí aparecerá la partícula (trabajar con una escala de 1 a 0,1) y se guarda el código (*Guardar gcode*). Antes de encender la impresora, se retira el vidrio donde

ocurre la impresión, se lo limpia con alcohol y luego se le coloca fijador en spray. Luego se enciende la impresora, y se eligen las temperaturas de trabajo (opción *Calentar* en el menu *Herramientas*):

- Temperatura de la cama: 110° C
- Temperatura de impresión: 210° C.

Finalmente, vamos a la opción *Imprimir* y seleccionamos el archivo, luego de darle *Refresh*. Seleccionamos la opción *Print* y esperamos a que se cree nuestra partícula.

Pesamos las partículas luego de fabricarlas y vimos que su masa varía en el segundo decimal, luego podemos decir que la masa  $m$  tiene un valor:  $m = (2,75 \pm 0,01)$  g.

## C. Obtención del factor de calibración de las coordenadas de posición

Las experiencias se registran con una cámara Mako U-051B y las imágenes obtenidas se analizan con ImageJ [27] a fin de obtener las coordenadas de la posición del centro de masa y de la pequeña marca o perforación, según corresponda, que sirve para detectar rotaciones. En el caso de las partículas facetadas, que fueron aquellas a las cuales se les practicó la pequeña perforación, se observó que la misma no influyó en un posible desplazamiento de su centro de masa desde su posición original (coincidente con su centro geométrico).

Estas coordenadas se obtienen en pixeles y deben convertirse a unidades en el sistema métrico decimal. En particular se convertirán pixeles a centímetros para lo cual se busca determinar un factor de calibración ( $f$ ). Este factor de calibración depende principalmente de la distancia entre la cámara y el objeto cuya posición se desea encontrar por lo que se calculó antes de iniciar los experimentos previsto para cada jornada de trabajo.

El factor de calibración ( $f$ ) se establece con el siguiente protocolo:

- Se fija la posición de la cámara.
- Se toma una imagen de la celda con una regla en su interior colocada en sentido vertical
- Mediante ImageJ se obtiene el valor en pixeles de sus líneas divisoras de centímetros, para varios tramos de la misma.
- Estos datos permiten obtener una curva de calibración que vincula la distancia entre puntos sucesivos separados una distancia de  $1\text{ cm}$  con su correspondiente distancia en pixeles. Del ajuste de la curva se puede determina el factor de calibración.

En la FIG. 47 se presenta, para un experimento, la curva de calibración. Se observa una relación lineal entre unidades (pixeles-cm), lo cual refleja en este caso que la cámara no presenta deformaciones apreciables de la imagen capturada. Del ajuste lineal se puede obtener la pendiente de la recta que, en este caso, permite obtener el factor de calibración utilizado para dicho experimento, y que

fue valuado en:  $(0,026 \pm 0,001)$  cm/px.

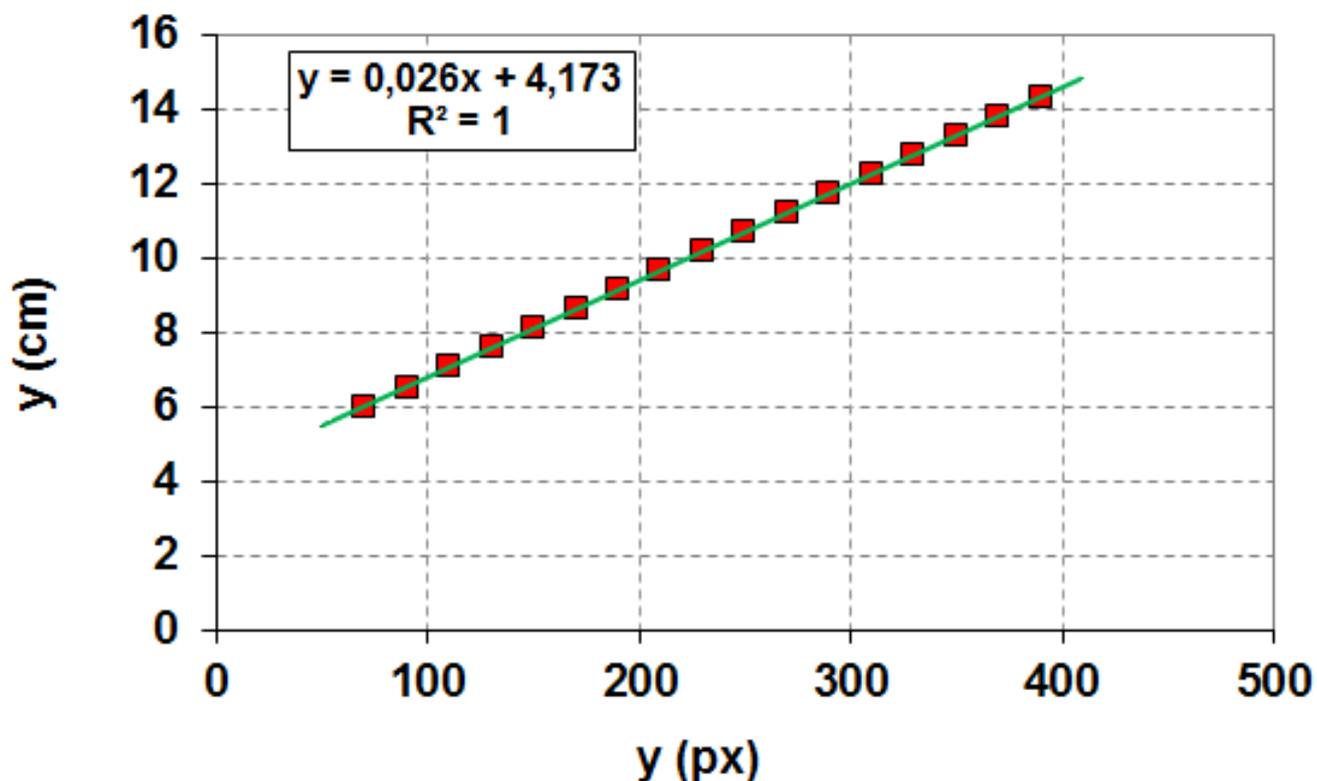


FIG. 47: Curva de calibración de distancias de píxeles a centímetros.

A fin de obtener una buena estimación del factor de calibración deben tenerse en cuenta los siguientes factores:

- Una iluminación homogénea que evite la proyección de sombras sobre la celda que complique poder distinguir las figuras del fondo, en particular para la calibración deben distinguirse las líneas de la regla. A este fin, se conecta un conjunto de tiras de luces LED blancas en paralelo con un difusor, y se las coloca sobre un marco de metal de  $(20 \times 20)$  cm, de manera de que encaje justo sobre el armazón e ilumine directamente el sector donde ocurre la dinámica que se quiere estudiar.
- Un correcto enfoque de la cámara, pues si el enfoque no es el óptimo, la partícula podría llegar a detectarse con distorsiones en su forma, y consecuentemente la posición de centro de masa será detectada en un lugar erróneo. De este mismo modo, las líneas divisorias de la regla se

verán distorsionadas en su forma y esto agregará incerteza a la determinación de la distancia entre ellas.

- La distancia entre la cámara y la celda, pues si esta variara, entonces el tamaño con el que la partícula se detecta, sería considerablemente distinta, y por ende la distancia entre las líneas divisorias de la regla se verá también modificada.

## D. Método de obtención del coeficiente de restitución desde el análisis de la evolución temporal de la altura de la partícula

En este anexo se darán detalles del método propuesto en la Sec. 8.1.1, para obtener el coeficiente de restitución de un disco rebotando sobre una superficie plana. Se toma como referencia un gráfico de la evolución temporal de la altura, como el de la FIG. 13, donde llamamos:

- $h_n$  al punto correspondiente a la altura máxima alcanzada por el disco en el vuelo  $n$ -ésimo del experimento, siendo  $h_0$  la altura inicial desde donde se lo suelta.
- $t_n$  al instante en el cual se alcanza dicha altura máxima en el vuelo  $n$ -ésimo, donde se considera  $t_0 = 0$ , dado que coincide con el instante inicial en el que se suelta el disco a la altura  $h_0$ .
- $\tau_n$  a la mitad del tiempo que le lleva al disco experimentar el vuelo  $n$ -ésimo.

En primer lugar se plantea la expresión del coeficiente de restitución en el choque  $n$ -ésimo según la definición del mismo (Ec. (1)). Si se eleva al cuadrado dicha ecuación y se multiplica a ambos miembros por la mitad de la masa del disco se llega a una expresión donde se divide la energía cinética con la que sale el disco luego del choque entre la energía cinética que traía al momento de chocar:

$$\varepsilon^2 = \frac{E_c'^{(n)}}{E_c^{(n)}} \quad (38)$$

En el instante de la colisión del disco contra la superficie de la base, la energía potencial es nula y el disco no experimenta torques que lo hagan rotar, es decir que la energía cinética de rotación también es nula. Por lo tanto, en la colisión, la energía cinética coincide con la energía total. Por conservación de la energía total, la energía en el punto de impacto debe coincidir con la energía total que tiene el disco en el punto más alto de su trayectoria, donde solamente hay energía potencial, con lo cual, en este caso es válido también expresar:

$$\varepsilon^2 = \frac{E_p'^{(n)}}{E_p^{(n)}} = \frac{h_n}{h_{n-1}} \quad (39)$$

Se puede expresar este coeficiente en función de la altura inicial  $h_0$ , aprovechando el hecho de que  $h_n$

y  $h_{n-1}$  refieren a cualquier par de saltos consecutivos. Entonces, multiplicando  $n$  veces  $\varepsilon^2$  obtenemos:

$$(\varepsilon^2)^n = \frac{h_n}{h_{n-1}} \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} \dots \frac{h_2}{h_1} \frac{h_1}{h_0} \Rightarrow \varepsilon^{2n} = \frac{h_n}{h_0} \Rightarrow h_n = \varepsilon^{2n} h_0 \quad (40)$$

A partir de esta expresión, cómo se explica en la Sec. 8.1.1, del gráfico de  $\ln(\frac{h_n}{h_0})$  en función de  $2n$  se puede obtener el valor de la pendiente ( $\ln(\varepsilon)$ ) con el que se puede calcular  $\varepsilon$ .

## E. Cálculo de momento de inercia de cada partícula facetada

En el presente anexo se muestran los valores obtenidos para el momento de inercia de cada una de las partículas facetadas *con perforación circular centrada* utilizadas en los experimentos descritos en la Sec. 10. Para la obtención de estos momentos de inercia, previamente deben expresarse las siguientes magnitudes en función de la cantidad de lados de la partícula facetada *maciza* ( $N$ ):

- $M$ : masa del disco macizo
- $a$ : lado de la faceta en términos del radio de la partícula circular
- $l$ : circunradio en términos del lado del polígono

La nomenclatura utilizada en las expresiones se presenta en la siguiente lista:

- $a$ : lado del polígono
- $l$ : circunradio del polígono
- $r$ : radio de la perforación de la partícula facetada
- $R$ : radio del disco
- $h$ : espesor
- $\rho$ : densidad lineal de masa de la partícula
- $M$ : masa de la partícula maciza
- $M'$ : masa de la partícula perforada

En la tabla XIV se muestran las expresiones para la masa de la partícula, la longitud del lado de polígono, su circunradio y su momento de inercia en función de la cantidad de lados de la partícula facetada ( $N$ ).

TABLA XIV. Fórmulas generales para la masa, la longitud del lado de polígono, el circunradio y el momento de inercia de una partícula facetada maciza (sin perforación).

CANTIDAD	FÓRMULA
Masa del disco macizo	$M(N) = \frac{N \rho h a^2}{4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right)}$
Lado de la faceta en términos del radio de la partícula circular	$a(N) = \sqrt{\frac{\pi}{N} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right)} R$
Circunradio en términos del lado del polígono	$l(N) = \frac{a(N)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)}$
Momento de inercia de la partícula maciza respecto a su CM	$I_{CM}(N) = \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right)} - \frac{1}{12} \right] M a^2$

Nótese que la expresión para el circunradio depende de la longitud de la faceta, ambos en función del número  $N$  de facetas de la partícula. Esta última magnitud ( $a(N)$ ) se obtiene igualando la masa del disco a la masa de la partícula de  $N$  facetas, respetando el lineamiento planteado en el apéndice A para la construcción de estas partículas, respetando la igualdad de las áreas totales. Por su parte, el momento de inercia de cada una de las partículas facetadas perforadas, se obtiene a partir del momento de inercia para la misma partícula facetada pero maciza en superposición con un disco de radio  $r$  y una masa negativa equivalente al del disco de radio  $r$ . Los datos se presentan en la tabla XV.

TABLA XV. Fórmulas generales para el momento de inercia de la partícula facetada con una perforación centrada en función de la masa de dicha partícula.

N	EXPRESIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA
3	$I_{CM} = \frac{\sqrt{3} a^4 - 24 \pi r^4}{12 (\sqrt{3} a^2 - 4 \pi r^2)} M'$
4	$I_{CM} = \frac{a^4 - 3 \pi r^4}{6 (a^2 - \pi r^2)} M'$
5	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{2 \pi r^4}{5 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right\} \frac{5 a^2}{5 a^2 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) \pi r^2} M'$
6	$I_{CM} = \frac{5 \sqrt{3} a^4 - 4 \pi r^4}{4 (3 \sqrt{3} a^2 - 2 \pi r^2)} M'$
7	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{2 \pi r^4}{7 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right\} \frac{7 a^2}{7 a^2 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right) \pi r^2} M'$
8	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{\pi r^4}{4 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \right\} \frac{2 a^2}{2 a^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \pi r^2} M'$
9	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{2 \pi r^4}{9 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right) \right\} \frac{9 a^2}{9 a^2 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right) \pi r^2} M'$
10	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{\pi r^4}{5 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) \right\} \frac{5 a^2}{5 a^2 - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) \pi r^2} M'$
15	$I_{CM} = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{15}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{2 \pi r^4}{15 a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15}\right) \right\} \frac{15 a^2}{15 a^2 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15}\right) \pi r^2} M'$
$\infty$	$I_{CM} = \frac{R^2 + r^2}{2} M'$

Haciendo inducción (tabla XV) se deduce una fórmula general para todo valor de  $N$  para el momento de inercia de la partícula perforada:

$$I_{CM}(N) = \left\{ \left[ \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right)} - \frac{1}{12} \right] a^2 - \frac{2 \pi r^4}{N a^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right) \right\} \frac{N a^2}{N a^2 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right) \pi r^2} M' \quad (41)$$

La Ec. (41) permite obtener el momento de inercia para cada una de las partículas facetadas utilizadas en las experiencias de este trabajo. En la FIG. 48 se muestra  $I_{CM}(N)$  en función de  $1/N$ .

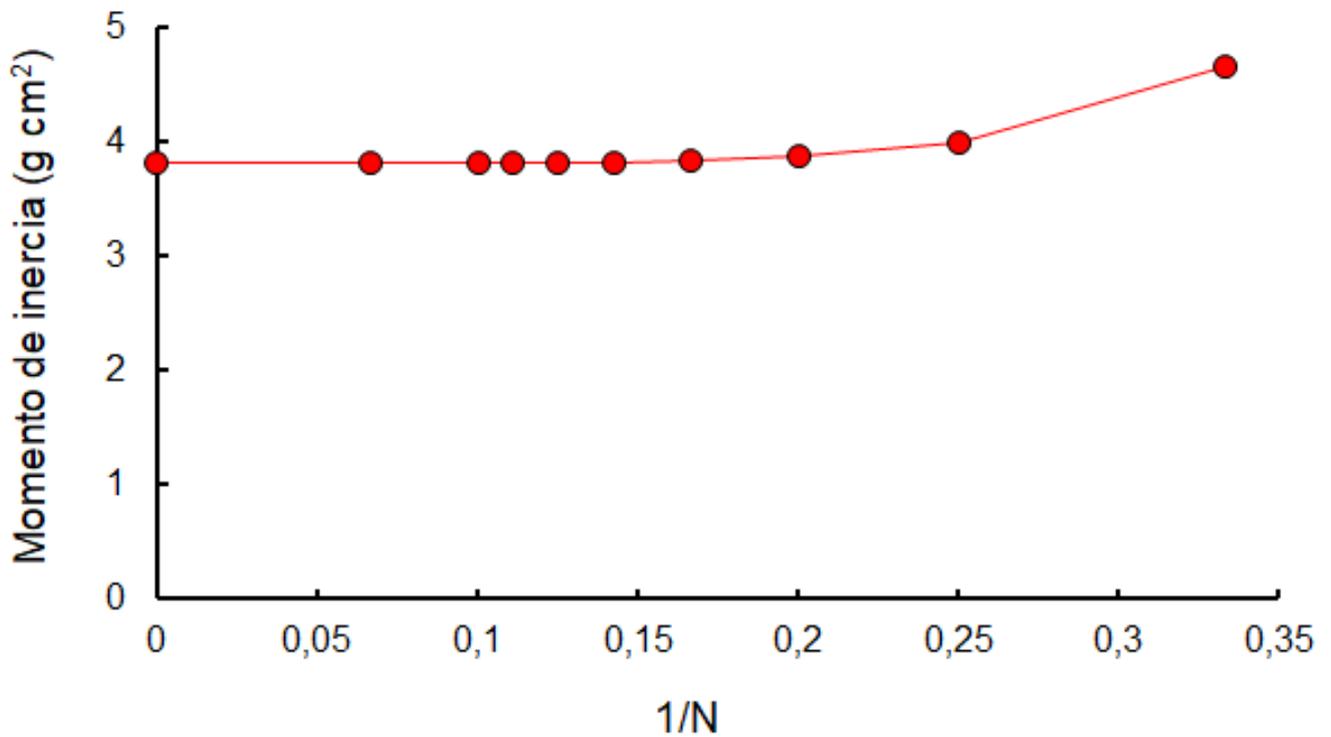


FIG. 48: Momento de inercia de la partícula facetada en función de la inversa del número de facetas.

La FIG. 48 muestra que los momentos de inercia de las partículas facetadas tienden al del disco ( $I_{\infty} = (3,59 \pm 0,41) \text{ g cm}^2$ ) a medida que aumenta  $N$ . Se observa que los momentos de inercia son aproximadamente similares para todo valor de  $N$ .

## Referencias

- [1] FLEISSNER, F., D’ALESSANDRO, V., SCHIEHLEN, W., EBERHARD P. *Sloshing cargo in silo vehicles*. J Mech Sci Technol **23**, 968–973 (2009).
- [2] *On deck stowage of containers*. American Institute of Marine Underwriters Technical Services Committee, ONLINE: <http://www.aimuedu.org/aimupapers/OnDeck.pdf>
- [3] TEUFELSBAUE H., WANG Y., CHIOU M.-C., WU W., *Flow–obstacle interaction in rapid granular avalanches: DEM simulation and comparison with experiment*. Granular Matter, **11** (4), 209–220 (2009).
- [4] MORO F., FAUG T., BELLOT H., OUSSET F., *Large mobility of dry snow avalanches: insights from small scale laboratory tests on granular avalanches of bidisperse materials*. Cold Regions Science and Technology, **62** (1) 55 - 66 (2010).
- [5] GARCIMARTÍN A., MAZA D., PASTOR J.M., PARISI D.R., MARTÍN-GÓMEZ C., ZURIGUEL I., *Redefining the role of obstacles in pedestrian evacuation*. New Journal of Physics **20** (12), 123025, (2018).
- [6] PARISI D.R., HIDALGO R.C., ZURIGUEL I., *Active particles with desired orientation flowing through a bottleneck*. Scientific reports **8** (1), 1-9 (2018).
- [7] NICOLAS A., IBÁÑEZ S., KUPERMAN M.N., BOUZAT S., *A counterintuitive way to speed up pedestrian and granular bottleneck flows prone to clogging: can ‘more’ escape faster?*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (8) 083403 (2018).
- [8] NEDDERMAN, R.M., *Statics and Kinematics of Granular Materials*, Cambridge University Press, 1992.
- [9] BATES L., *The need for industrial education in bulk technology*, Bulk Solids Handl., **26**, 464-473, (2006).
- [10] ENNIS B.J., GREEN J., DAVIES R., *The legacy of neglect in the U.S.*, Chem. Eng. Prog., **Vol. 90**, No. 4, 32-43, 1994.
- [11] KNOWLTON T.M., CARSON J.W., KLINZING G.E., YANG W-C., *The importance of storage, transfer, and collection*, Chem. Eng. Prog., **Vol. 90**, No. 4, pp. 44-54, 1994.

- [12] DURAN J., *Sables, Poudres et Grains*. Ed. Eyrolles, ISBN 2-212-05831-4, 1997.
- [13] NERONE N., AGUIRRE M.A., CALVO A., IPPOLITO I., BIDEAU D., *Surface fluctuations in a slowly driven granular system*, Physica A, **283**, 218-222 (2000).
- [14] AGUIRRE M.A., NERONE N., CALVO A., IPPOLITO I., BIDEAU D., *Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing*, Phys. Rev. E **62**, 738-743 (2000).
- [15] AGUIRRE M.A., NERONE N., CALVO A., IPPOLITO I., BIDEAU D., *Granular packing: Influence of different parameters on its stability*, Granul. Matter **3**, 1-2, 75-77 (2001).
- [16] NERONE N., AGUIRRE M.A., CALVO A., BIDEAU D., IPPOLITO I., *Instabilities in slowly driven granular packing*, Phys. Rev. E **67**, 011302, 1-9 (2003).
- [17] AGUIRRE M.A., MEDUS A., MANCUSO M., CALVO A., IPPOLITO I., *Effect of spontaneous rearrangements in the disorder of packing of discs*, Physica A **371**, 29-32 (2006).
- [18] AGUIRRE M.A., CALVO A., IPPOLITO I., MEDUS A., MANCUSO M., *Rearrangements in a bidimensional packing of discs*, Phys. Rev. E **73**, 041307, 1-8 (2006).
- [19] AGUIRRE M.A., CALVO A., *Compacity influence in reorganization of two dimensional granular packings: Numerical Model*, Pow. Tech. **201**, 109-113 (2010).
- [20] PIVA M., MARTINO R.G., GÉMINARD J.-C., AGUIRRE M.A., *Avalanches of grains with inhomogeneous distribution of inner mass*. Phys. Rev. E **98**, 062902 (2018)
- [21] MONTAINE M., HECKEL M., KRUELLE C., SCHWAGER T., PÖSCHEL T., *Coefficient of restitution as a fluctuating quantity*, Phys. Rev. E **84**, 041306 (2011).
- [22] KING H., WHITE R., MAXWELL I., MENON N., *Inelastic impact of a sphere on a massive plane: Nonmonotonic velocity-dependence of the restitution coefficient*, Europhys. Lett. **93**, 14002 (2011).
- [23] SONDERGAARD R., CHANEY K., BRENNEN C.E., *Measurements of solid spheres bouncing off flat plates*, J. Appl. Mech. **57**, 694 (1990).
- [24] GONDRET P., LANCE M., PETIT L., *Bouncing motion of spherical particles in fluids*, Phys. Fluids, **14**, 643, (2002).

- [25] PAVIONI O.D., ORTEGA F.M., *Obteniendo los coeficientes de restitución y arrastre en un solo experimento*, Rev. Mex. Fis. **61**, 11–16 (2015).
- [26] FENG Y., GOREE J., BIN LIU, Rev. Sci. Instrum. **78**, 053704 (2007)
- [27] C.A. SCHNEIDER, W. S. RASBAND, K.W. ELICEIRI, NAT. METHODS **9**, 671 (2012)
- [28] <https://www.autodesk.es/products/autocad/overview>
- [29] <https://www.autodesk.com/autodesk-university/class/Modeling-Basics-3D-Printing-Using-AutoCAD-2014#handout>
- [30] [https://manual.eg.poly.edu/index.php/Introduction\\_to\\_3D\\_Printing\\_AutoCAD](https://manual.eg.poly.edu/index.php/Introduction_to_3D_Printing_AutoCAD)

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons **Atribución - No Comercial - Compartir Igual** (*by-nc-sa*) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2021