



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TESIS DE LICENCIATURA EN CS. FÍSICAS

Cerca de los horizontes de agujeros negros magnetizados

Sasha Brenner

Director:

Dr. Gastón Giribet

Junio 2021

Tema: Termodinámica en la región cercana al horizonte de agujeros negros en ambientes altamente magnetizados.

Estudiante: Sasha Brenner

LU N°: 67/14

Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

Director del trabajo: Dr. Gastón Giribet

Fecha de iniciación: Abril 2020

Fecha de finalización: Abril 2021

Fecha de examen:

Informe final aprobado por:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor/a de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En esta tesis se estudiaron agujeros negros estacionarios, cargados eléctricamente e inmersos en campos magnéticos intensos, desde la perspectiva de las cercanías del horizonte. Este estudio se hace en el régimen de campo fuerte, en el que la contribución gravitacional de la energía magnética no puede ser desestimada. Se hallaron infinitas simetrías asintóticas y se calcularon e interpretaron físicamente las cargas de Noether más relevantes: su entropía, carga eléctrica y momento angular. Se realizó un análisis de las propiedades termodinámicas de los agujeros negros haciendo foco en cómo éstas se ven afectadas por la presencia del campo magnético. Estos campos magnéticos externos, asumidos estáticos y axisimétricos, producen una curvatura apreciable del espaciotiempo. Su descripción está dada por la geometría de Melvin. Las soluciones de agujeros negros estacionarios cargados en el universo de Melvin son conocidas como soluciones de Ernst-Wild. Sus métricas poseen asintóticas no convencionales en el infinito y los métodos de cálculo de carga comunes resultan ineficaces. Por este motivo, la implementación de un análisis exclusivamente del horizonte resulta atractiva y, de hecho, demostró ser fructífera, obteniéndose resultados en completo acuerdo con la literatura. En particular, se encontró que el agujero negro de Reissner-Nordström adquiere un momento angular cuando es magnetizado y, en consecuencia, acumula carga eléctrica. Además, resulta ser que el campo magnético contribuye a la entropía cuando el agujero negro está cargado, pero no así cuando es neutro. Por último, se hizo una revisión de la bibliografía acerca de la termodinámica de estas soluciones y cálculos de masa a partir de la primera ley termodinámica aplicada a agujeros negros. El tratamiento llevado a cabo en esta tesis resulta ser totalmente compatible con estos análisis.

Índice

1. Introducción	2
2. Preliminares	6
2.1. Espaciotiempos asintóticamente planos	6
2.2. Horizontes de eventos	7
2.3. Horizontes de Killing	8
2.4. Superficies atrapadas	9
2.5. Ergoregiones	9
2.6. Cargas conservadas en relatividad general	11
2.6.1. Corrientes conservadas e integrales de carga	11
2.6.2. Cargas ADM	12
2.6.3. Integrales de Komar	13
2.6.4. Fórmula de Smarr	14
2.7. Termodinámica de agujeros negros	15
2.8. Entropía de Wald	18
3. Campos magnéticos intensos en relatividad general	18
3.1. La métrica de Melvin	19
3.2. Campos electromagnéticos en espacios curvos	22
4. Agujeros negros magnetizados	22
4.1. El método de Ernst y las transformaciones de Harrison	22
4.2. Agujero negro de Schwarzschild magnetizado	24
4.3. Agujero negro cargado: la métrica de Reissner-Nordström	26
4.4. El agujero negro cargado y magnetizado	27
4.4.1. Carga eléctrica	27
4.4.2. Carga magnética	32
5. Simetrías asintóticas	33
5.1. BMS	34
5.1.1. Las coordenadas y el gauge de Bondi	34
5.1.2. Condiciones de contorno asintóticas BMS	35
5.1.3. Supertraslaciones	36
5.1.4. Superrotaciones	38
5.2. Asintótica de horizonte cercano	39
5.2.1. Coordenadas y condiciones de gauge	39

5.2.2.	Condiciones de contorno en el horizonte	40
5.2.3.	Asintótica de campos electromagnéticos	40
5.2.4.	Simetrías asintóticas	41
5.2.5.	Cargas asintóticas	43
6.	Simetrías y cargas en horizontes magnetizados	44
6.1.	Schwarzschild-Melvin	44
6.2.	Reissner-Nordström-Melvin magnético	46
6.3.	Reissner-Nordström-Melvin eléctrico	47
6.3.1.	Gauge y condiciones de contorno asintóticas	47
6.3.2.	Cargas asintóticas y su interpretación	49
7.	Termodinámica de Reissner-Nordström-Melvin	53
8.	Conclusiones	57

1. Introducción

Cada vez es más evidente que el rol de los campos magnéticos en las vecindades de agujeros negros no sólo no puede ignorarse para comprender de manera cabal fenómenos astrofísicos de primera relevancia, sino que es un rol crucial.

La mayoría de las galaxias poseen en su núcleo un agujero negro supermasivo [2], con masas que pueden ser hasta miles de millones de veces más grandes que la del Sol. Los núcleos galácticos poseen, además, un disco de acrecimiento que rota alrededor del agujero negro, materia que cae espiraladamente hacia el último y lo alimenta. Aquellos con mayor actividad energética se denominan núcleos galácticos activos (AGNs, por su sigla en inglés). Muchos AGNs disparan *jets* colimados de plasma en dirección de su eje de rotación. En su proceso de formación, el campo magnético producido por el disco de acrecimiento tiene un papel central [3, 4]. Por ejemplo, en el mecanismo de Blandford-Znajek [3] el campo magnético absorbe energía rotacional del agujero negro y esta energía sería encauzada por los *jets*. En [4], por otro lado, Blandford y Payne proponen que los *jets* están propulsados por la energía y el momento angular que los campos magnéticos extraen del propio disco de acrecimiento.

Se han hecho observaciones de *jets* que, disparados desde algún AGN, pueden verse perturbados y torcerse en su trayecto cuando, por ejemplo, atraviesan cúmulos galácticos. Recientemente, Chibueze *et al* propusieron un modelo que explica esta deflexión, bajo ciertas condiciones, a través de una colisión del *jet* con el campo magnético intergaláctico [5]. Agujeros negros estelares (o primordiales, de existir) podrían verse sumergidos en este tipo de campos intergalácticos.

Entre los núcleos galácticos, no sólo los AGNs poseen campos magnéticos. Observaciones recientes mostraron que estos también están presentes en el centro de la Vía Láctea, allí donde se halla el agujero negro supermasivo Sagitario A*, con bastante mayor intensidad de la que se creía [6]. Por otro lado, este mismo año la colaboración *Event Horizon Telescope* publicó imágenes que revelan la polarización de la luz proveniente del disco de acrecimiento del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87, de la cual se extrajo información acerca del campo magnético en los alrededores del horizonte de eventos (*e.g.* su intensidad es de $1 - 30$ G) [7, 8].

Por otra parte, entre los objetos astrofísicos conocidos, aquellos con magnetosfera más intensa en el universo son las estrellas de neutrones. En particular, las *magnetars* son una clase de estrellas de neutrones que poseen campos magnéticos mil veces más intensos que los que caracterizan a las estrellas de neutrones comunes, pudiendo alcanzar intensidades hasta del orden de $10^{14} - 10^{15}$ G [9]. Es sensato imaginar sistemas binarios de una *magnetar* y un agujero negro estelar [10]. En este caso, el agujero negro estaría expuesto a campos magnéticos extremadamente altos; tanto es así que la densidad de energía del campo sería órdenes de magnitud más grande que la densidad de masa de elementos pesados. Esto motiva la consideración del campo magnético como fuente de campo gravitatorio, es decir, el tener en cuenta las deformaciones que dicho campo produce en el espaciotiempo según la teoría de la relatividad general y, en particular, las deformaciones que produce en el horizonte de eventos del agujero negro del sistema binario hipotético.

Esta tesis, basada en el paper [1], que acaba de ser aceptado para su publicación en Physical Review D, se dedica a estudiar soluciones de agujeros negros inmersos en campos magnéticos intensos¹, es decir, con *back-reaction* gravitatorio, motivado por lo que se expuso en los párrafos anteriores de esta introducción. Específicamente, el modelo de campo magnético utilizado es el del universo de Melvin. Esta es una solución axisimétrica y estática de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, correspondiente a un manejo de líneas de campo que se mantienen unidas por su gravitación mutua [11, 12]. Es estable ante perturbaciones radiales (cilíndricas) arbitrarias [13]. No es asintóticamente plana; en particular, las circunferencias centradas en el eje de simetría tienden a cero cuando su radio tiende a infinito. Si bien sería deseable que la asintótica de una solución fuera plana en modelos astrofísicos realistas, esto no es un problema fundamental porque los campos magnéticos reales están localizados en una región y el espaciotiempo allí puede modelarse por el universo de Melvin (empalmando con alguna otra solución asintóticamente plana a grandes distancias del campo magnético, análogamente a lo que se hace, por

¹Si bien se habla de *campos magnéticos intensos*, estos podrían ser también arbitrariamente débiles, aunque en ese caso sí son válidas aproximaciones como la de Wald [45] (ver sección 3).

ejemplo, para describir el exterior de una estrella esféricamente simétrica con la métrica de Schwarzschild). La gran ventaja del universo de Melvin es que desde hace casi cincuenta años se conocen soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, correspondientes a la inserción cualquier agujero negro rotatorio cargado (Kerr-Newman) en él, conocidas como las soluciones de Ernst-Wild [14, 15], y existe abundante bibliografía que se dedica a estudiar distintos aspectos de ellas [16–22]. Estas soluciones se encontraron originalmente mediante la aplicación de un grupo de transformaciones de simetría de las ecuaciones de Einstein-Maxwell a la solución de Kerr-Newman semilla [14]. Si bien las métricas de Ernst-Wild poseen asintóticas atípicas en el infinito, estas ni siquiera son asintóticamente Melvin debido a la existencia de una ergoregión que se extiende hasta el infinito [16].

Ahora bien, la falta de una asintótica plana (o cualquier otra asintótica mejor conocida, en su defecto) dificulta el cálculo de cargas conservadas del espaciotiempo. Principalmente, esto es porque existe una ambigüedad en la definición de los vectores de Killing que suele decidirse apelando a la referencia de algún límite conocido en el infinito, como puede ser el límite newtoniano en un espacio asintóticamente plano. Por otra parte, ya que la asintótica de esta solución no representa tampoco un escenario astrofísico realista, es razonable *a priori* prescindir de la asintótica si desean estudiarse las propiedades de estos agujeros negros. Consecuentemente, en esta tesis se aborda dicha dificultad poniendo a prueba el método de cálculo de cargas conservadas en las cercanías del horizonte de Killing, desarrollado en [23, 24], que ha sido implementado ya exitosamente en diversas soluciones con horizonte de agujero negro (como el de Kerr), horizonte cosmológico (como el de dS) e incluso el de una solución con asintótica sólo localmente plana (Schwarzschild-Taub-NUT) [23–27]. Dicho método utiliza la noción de simetrías asintóticas, cuyos orígenes pueden remontarse a los trabajos de Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs [28, 29] acerca de dichas simetrías en el infinito nulo de espaciotiempos asintóticamente planos. La idea aquí es implementar esto en las cercanías del horizonte. Estas simetrías no son exactas, sino asintóticas, admiten un grado de modificación de la solución, siempre y cuando esta respete unas dadas condiciones de contorno en la superficie asintótica (en este caso el horizonte), además de un determinado gauge. Sin embargo, la libertad es suficiente como para dar lugar a un álgebra infinito-dimensional que contiene, en particular, dos clases de simetrías llamadas superrotaciones y supertraslaciones; como su nombre lo indica, estas generalizan, en el régimen asintótico, a las traslaciones y rotaciones respectivamente. Pueden pensarse como transformaciones que pueden depender arbitrariamente de los ángulos que parametrizan a la superficie (en este sentido no son necesariamente rígidas). Las condiciones de contorno en este método, para la métrica y el potencial electromagnético, están prescritas en [24]. Aunque no todo sistema de coordenadas admita estas condiciones de contorno, cualquier solución puede ponerse en coordenadas que sí lo hagan cerca de una hipersuperficie nula suave [23]. Por este

motivo, parte del trabajo en esta tesis ha sido hallar el cambio de coordenadas específico que ajusta la solución a las condiciones de contorno en cuestión, en el horizonte de Killing del agujero negro. A través de una generalización del teorema de Noether aplicable a simetrías asintóticas pueden calcularse cargas conservadas, una vez conocidos los vectores de Killing asintóticos que preservan las condiciones de contorno [30]. Así se calcularon en este trabajo cargas relevantes de los agujeros negros cargados y magnetizados de tipo Reissner-Nordström-Melvin (RNM): la entropía de Wald, la carga eléctrica y el momento angular, asociadas a supertraslaciones rígidas las primeras dos y a superrotaciones rígidas la última (gracias a este método son infinitas las cargas conservadas que podrían teóricamente calcularse, pero estas últimas se consideran las más relevantes). Decidió estudiarse la inserción del agujero negro cargado pero sin rotación en el universo de Melvin porque, no obstante su estaticidad, al sumergirse en el campo magnético éste adquiere rotación propia. Esto ocurre gracias a que el campo electromagnético de la solución posee densidad de momento angular y arrastra de este modo al propio horizonte en un efecto general-relativista. Este es un ejemplo claro de *back-reaction* del campo electromagnético sobre la métrica y, como tal, puede esperarse que sea débil en el límite astrofísico.

Por otra parte, de este método no surge una manera natural de calcular la masa del agujero negro, por lo que es necesario hacer un análisis termodinámico de la solución. Sin embargo, la falta de una asintótica en el infinito que sea manejable introduce gran dificultad en el problema del cálculo de masa, puesto que no es claro qué isometría del espaciotiempo está asociada a la conservación de una masa que respete la primera ley de la termodinámica de agujeros negros. En los últimos ocho años se realizaron algunos trabajos que intentan dar una solución al problema de la masa [16–19], con resultados aparentemente contradictorios entre sí. En este contexto surge la discusión acerca de si es o no correcto incorporar variaciones de campo magnético externo en la expresión de la primera ley termodinámica. En todo caso, ninguna de estas consideraciones son incompatibles con las cargas conservadas calculadas a través del análisis asintótico del horizonte realizado en esta tesis.

La tesis está dividida en siete secciones además de la introducción. En la sección 2 se presenta un resumen de algunos conceptos preliminares que se consideran de necesaria comprensión para el desarrollo del resto del trabajo. Entre ellos, una discusión acerca de horizontes en relatividad general, distintos métodos de cálculo de cargas, la fórmula de Smarr y un resumen histórico de la termodinámica de agujeros negros, en particular del concepto de entropía y su identificación con el área del horizonte. En la sección 3 se introduce al lector al tratamiento de campos magnéticos intensos en la teoría general de la relatividad, en el marco de la solución de Melvin [11], y se estudian los aspectos salientes de ella. En la sección 4 se muestra cómo introducir agujeros negros al universo magnético de Melvin a través de la técnica de Ernst [14] y se enumeran e interpretan las principales características de tres tipos de agujeros negros: Schwarzschild magnetizado,

Reissner-Nordström eléctrico magnetizado y el homólogo de este último con carga magnética. Estos son los agujeros negros que se someten más adelante al análisis de horizonte cercano, del cual se extraen cargas conservadas. En la sección 5 se explican las simetrías asintóticas, empezando por el ejemplo canónico, aunque indirectamente relacionado con este trabajo, de las simetrías BMS. Allí se introducen las supertraslaciones y superrotaciones. En esa misma sección se describe el procedimiento de análisis de simetrías asintóticas en las cercanías del horizonte, se escriben las condiciones de contorno y de gauge y se presenta una expresión genérica de cargas conservadas. En la sección 6 se pone a las soluciones bajo estudio en coordenadas que admiten un desarrollo asintótico adecuado y se calculan e interpretan físicamente dichas cargas de las tres soluciones de agujero negro magnetizado antes mencionadas, utilizando la maquinaria matemática presentada en la anterior sección. Se encuentra un acuerdo con la literatura, donde se obtienen las mismas cargas a partir de otros métodos independientes. En la sección 7 se hace una revisión de la termodinámica de las soluciones de Ernst-Wild en base a los trabajos [16–19] y se concluye que las cargas calculadas en la sección anterior son compatibles con las masas obtenidas allí. Por último, en la sección 8 se realizará una discusión final a modo de conclusión y resumen general de los resultados discutidos en las secciones anteriores.

A lo largo de esta tesis se trabajará en unidades naturales, $G = c = k_B = 1$. La convención de signatura métrica utilizada será $(-, +, +, +)$.

2. Preliminares

2.1. Espaciotiempos asintóticamente planos

Es razonable asumir que, a distancias muy grandes de un agujero negro físico, el espaciotiempo se debe asemejar mucho al espacio plano, y su métrica a la de Minkowski. Dado algún sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , donde t es una coordenada temporal, r radial y θ, ϕ angulares, esto podría expresarse, de manera algo imprecisa, como

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \eta_{\mu\nu},$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica que se dice asintóticamente plana y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, correspondiente al espaciotiempo plano. Esto es impreciso en el sentido de que se está apelando a un sistema de coordenadas particular, mientras que en relatividad general suelen ser de mayor interés efectos independientes de dicha elección. Una definición precisa y matemáticamente rigurosa de espacio asintóticamente plano puede hallarse en [31]. En resumen y de manera simplificada, si existe alguna transformación conforme de la métrica g tal que el infinito conforme (el infinito nulo \mathcal{I}^\pm y espacial i^0) tiene la misma estructura que aquel correspondiente a la métrica

de Minkowski, se dice que g es asintóticamente plana. Esto puede decirse, por ejemplo, de las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr. No así, en cambio, de las métricas que se trataron en esta tesis. Como se verá en la Sec. 3.1, la métrica de Melvin de un universo lleno de campo magnético no es asintóticamente plana, como tampoco lo son las métricas de agujero negro magnetizado.

2.2. Horizontes de eventos

Cuando el espaciotiempo en cuestión es asintóticamente plano, los horizontes de eventos pueden definirse en rigor como hipersuperficies que separan dos clases de puntos en un espacio-tiempo: aquellos que están conectados con el infinito conforme mediante una trayectoria *timelike* y aquellos que no. En la figura 1 se ilustra el ejemplo de la métrica de Schwarzschild.

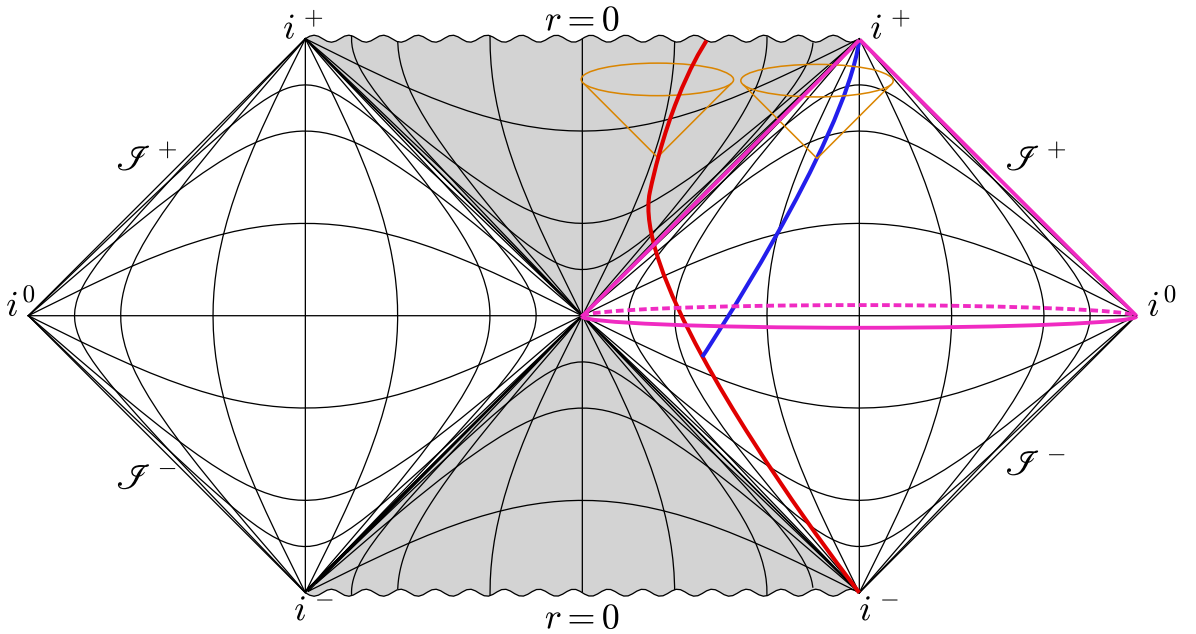


Figura 1: Diagrama de Penrose de la extensión maximal del espaciotiempo de Schwarzschild. Se busca ilustrar con este ejemplo la definición de un horizonte de eventos. Los puntos dentro del cono de luz pasado fucsia pueden influir sobre el infinito temporal futuro i^+ . La superficie que separa esta región de la región gris superior, de puntos que no pueden influir sobre i^+ , es el horizonte de eventos, y dicha región gris es el agujero negro. Se representa también una trayectoria temporal no geodésica bifurcada. La partícula roja se divide, la parte azul permanece en la región exterior y se ve que en todo punto de la trayectoria su cono de luz futuro incluye i^+ . La trayectoria roja, sin embargo, luego de cruzar el horizonte, tiene un cono de luz futuro que excluye i^+ , y sólo puede acabar en la singularidad en $r = 0$.

El cono de luz pasado fucsia con vértice en el infinito temporal futuro i^+ encierra todos los eventos que pueden haber influido sobre i^+ . Todos los puntos en la región sombreada superior

y en el rombo blanco izquierdo, sin embargo, están fuera del cono. La recta de 45° que separa la región gris superior de la región blanca derecha, separa los puntos que están dentro de los puntos que están fuera del cono: este es el horizonte de eventos.

Una hipersuperficie que satisface esto debe ser nula, en el sentido de que su normal es un vector nulo. Ahora bien, en este trabajo de tesis las soluciones a analizar no son asintóticamente planas. No tienen, pues, horizontes de eventos bien definidos en el sentido más estricto que se acaba de enunciar. Lo que permite hacer los análisis que se realizaron en la tesis es el hecho de que sí existen, en dichas soluciones, *horizontes de Killing*, que están estrechamente vinculados con los horizontes de eventos, como se explicará a continuación.

2.3. Horizontes de Killing

Un horizonte de Killing se define como una hipersuperficie nula Σ tal que un campo de vectores de Killing K^μ se hace nulo sobre ella. Un campo de vectores de Killing K puede definirse como uno que satisface $K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0$. Cuando un espacio-tiempo es estacionario y asintóticamente plano, el horizonte de eventos siempre es también un horizonte de Killing. En particular, si el agujero negro es estático, este vector de Killing es ∂_t , el generador de las translaciones temporales. Cuando es estacionario, dicho vector tiene, además, componente ϕ .

Nótese que K^μ es un campo de vectores nulos sobre Σ , por lo que $K_\mu K^\mu = 0$ allí y $\nabla^\mu(K_\nu K^\nu)$ es normal a Σ . Pero K^μ ya era el vector normal, así que la única opción es que sean proporcionales

$$\nabla^\mu(K_\nu K^\nu) = \kappa' K^\mu.$$

Ahora bien, por regla de Leibniz $\nabla^\mu(K_\nu K^\nu) = 2K_\nu \nabla^\mu K^\nu$ y, además, un vector de Killing satisface $\nabla^{(\mu} K^{\nu)} = 0$, así que $\nabla^\mu(K_\nu K^\nu) = -2K_\nu \nabla^\nu K^\mu$. Definiendo $\kappa = -\kappa'/2$, entonces, se llega a

$$K^\nu \nabla_\nu K_\mu = \kappa K_\mu. \quad (2.1)$$

Esta es una ecuación de autoparalelas (parametrizadas de manera no afín). A κ se la conoce como *gravedad superficial* y puede mostrarse que es constante en un horizonte de Killing [31] (podría generalizarse la definición de κ a horizontes más generales en donde podría no ser constante). Es relevante destacar, sobre todo en el contexto de este trabajo, que κ depende de la normalización del vector de Killing. Cuando el espaciotiempo es asintóticamente plano, es sensato definir κ unívocamente con la normalización $K_\mu K^\mu(r \rightarrow \infty) = -1$, debido a que es la normalización estándar del vector temporal en Minkowski. De hecho, se puede mostrar que, bajo esta convención, la gravedad superficial κ tiene una interpretación física muy comprensible (si el agujero negro es estático), que se da en la Sec. 2.5. Cuando el espaciotiempo no tiene esta asintótica, sin embargo, debe recurrirse a otros criterios de normalización.

De (2.1) se puede deducir otra expresión útil que permite obtener κ directamente y se utilizará a lo largo del trabajo. Esta es

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu)(\nabla^\mu K^\nu). \quad (2.2)$$

2.4. Superficies atrapadas

Otra manera de caracterizar un agujero negro que no depende directamente de la asintótica en el infinito es a través del concepto de superficies atrapadas. Estas son subvariedades bidimensionales, compactas y espaciales (es decir, cuyos vectores tangentes son de tipo espacio) con la propiedad de que todos los rayos de luz salientes convergen. La superficie atrapada que contiene a todas las superficies atrapadas, pero tal que fuera de ella ya los puntos no corresponden a una superficie atrapada, se denominan *superficies marginalmente atrapadas*. El conjunto de todas las superficies marginalmente atrapadas conforman el horizonte atrapado. Estos suelen ser horizontes de eventos.

2.5. Ergoregiones

¿Qué sucede si un observador físico se posiciona muy cerca del horizonte de eventos de un agujero negro estático? Por ejemplo, el de la métrica de Schwarzschild. Si dicho observador sigue trayectorias geodésicas, es decir, si no se ve afectado por ninguna otra interacción además de la gravitatoria con el agujero negro, se sentirá atraído hacia él y eventualmente atravesará el horizonte, alcanzando así una instancia de no retorno y acabando de manera inevitable en la singularidad. Ahora bien, si este observador físico dispusiera de un propulsor arbitrariamente potente, le sería posible contrarrestar la atracción gravitatoria, incluso acercándose tanto como quisiera al horizonte de eventos. Por supuesto, de atravesarlo ya no habría vuelta atrás y su destino sería también la singularidad.

Si este observador, llámémoslo A, se posicionara justo en el horizonte de eventos, necesitaría que su propulsor ejerciera una cuadrifuerza infinita, pero ¿qué vería otro observador B que está en el infinito? Este último recibiría las señales del observador A con un gran corrimiento al rojo gravitatorio (infinito, de hecho). Al medir la magnitud de la cuadri-aceleración de A, resulta ser, no obtiene un valor infinito, sino un valor finito que es precisamente κ , la gravedad superficial del agujero negro [32].

Esto da, pues, una interpretación física asequible de κ : desde la perspectiva de un observador B en el infinito, κ es la cuadri-aceleración que debe otorgar el propulsor para que el observador A se mantenga estático en el horizonte de eventos.

Si la métrica es estacionaria en vez de estática, el horizonte de eventos seguirá siendo un horizonte de Killing, pero el vector de Killing asociado al horizonte no será ∂_t . Si la solución

es axisimétrica, como lo son todas aquellas que se estudiaron en esta tesis, el vector de Killing que se hace nulo en el horizonte es alguna combinación lineal de ∂_t , generador de traslaciones temporales, y ∂_ϕ , generador de rotaciones alrededor del eje de simetría.

Para entender mejor qué consecuencia física tiene esto, supóngase un observador estático como A, cuya cuadrivelocidad es

$$U_A^\mu = U_A^t \partial_t,$$

tal que $(U_A)^\mu (U_A)_\mu = -1$. Es decir,

$$g_{\mu\nu} U_A^\mu U_A^\nu = g_{tt} (U_A^t)^2 = -1. \quad (2.3)$$

Esto es realizable sólo si $g_{tt} < 0$. Ahora bien, si se toma $K^\mu \partial_\mu = \partial_t$, entonces $g_{tt} = K_\mu K^\mu$. Por este motivo, cuando el horizonte de eventos es un horizonte de Killing para ∂_t , como ocurre para agujeros negros estáticos asintóticamente planos como Schwarzschild, puede decirse entonces que g_{tt} es cero en dicho horizonte de eventos, negativo fuera y positivo dentro del horizonte. Sin embargo, esto implica que en el caso estacionario $g_{tt} \neq 0$ en el horizonte y, como la coordenada t es espacial dentro del agujero negro, esto significa que $g_{tt} > 0$ justo fuera del horizonte. Por (2.3), ya no puede haber observadores estáticos suspendidos justo sobre el horizonte de eventos del agujero negro.

Sí, sin embargo, le sería posible a un observador acercarse tanto como quisiera al horizonte de eventos de un agujero negro estacionario sin atravesarlo, siempre y cuando estuviera girando con la suficiente rapidez alrededor del agujero negro. Esto es porque ahora su cuadrivelocidad sería

$$U_A^\mu = U_A^t \partial_t + U_A^\phi \partial_\phi,$$

con magnitud

$$g_{\mu\nu} U_A^\mu U_A^\nu = g_{tt} (U_A^t)^2 + g_{\phi\phi} (U_A^\phi)^2 + 2g_{t\phi} U_A^t U_A^\phi = -1. \quad (2.4)$$

Se ve que con el valor y signo adecuado en U_A^ϕ (relacionado con la velocidad angular) es posible satisfacer esta relación. Puede existir, no obstante, algún valor finito de la coordenada radial de la métrica (que puede ser distinto para diferentes ángulos θ) para el cual $g_{tt} = 0$. La región entre el horizonte de eventos y esta hipersuperficie con $g_{tt} = 0$ es conocida como *ergosfera* (o más en general, *ergoregión*). Un ejemplo famoso es la ergosfera de la métrica de Kerr, correspondiente al agujero negro rotante [33].

Partículas en la ergoregión, entonces, pueden escapar al infinito, pero para permanecer allí deben tener suficiente rotación. De lo contrario, caerán al agujero negro.

2.6. Cargas conservadas en relatividad general

No hay una única manera de definir cargas conservadas en relatividad general². Para empezar, es posible hablar de cargas conservadas en la trayectoria de una partícula o en la dinámica de un campo, pero también existen nociones de cargas conservadas del espaciotiempo en sí mismo. Estas últimas son las de interés en el presente trabajo. Así y todo, hay más de una manera de definir cargas conservadas del espaciotiempo, aunque algunas veces estas pueden coincidir.

Las cargas definidas en esta subsección dependen fuertemente de la hipótesis de que el espacio sea asintóticamente plano. Las métricas que se estudiaron en esta tesis no lo son, razón por la cual estos métodos no serán directamente útiles a la hora de calcular cargas. El método que sí se utilizó para hacer esto último, sin embargo, es significativamente más abstruso. Se considera, pues, pertinente un resumen introductorio, pero algo más tangible, respecto al tema.

2.6.1. Corrientes conservadas e integrales de carga

En relatividad general, dada una 1-forma de corriente conservada j , la ecuación de continuidad que expresa su conservación local se escribe

$$d * j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad j^\mu_{;\mu} = 0, \quad (2.5)$$

donde $*$ es el operador estrella de Hodge y el punto y coma $;$ corresponde a tomar derivada covariante. Esto se reduce a la ecuación de continuidad de siempre en el espacio plano y, a la vez, no depende de la carta elegida, porque $d * j$ es un objeto geométrico. En mecánica newtoniana basta con integrar la ecuación de continuidad y aplicar el teorema de Gauss para deducir una carga conservada. El procedimiento en relatividad general es análogo. Si se asume que el espaciotiempo está foliado por hipersuperficies espaciales Σ_t a tiempo fijo t (superficies de Cauchy), puede entonces considerarse alguna región M entre dos de estas hipersuperficies Σ_{t_1} y Σ_{t_2} , cuyo borde es $\partial M = \Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2}$. El teorema de Stokes para formas diferenciales aplicado en esta región a $d * j$ se expresa

$$0 = \int_M d * j = \int_{\partial M} * j = \int_{\Sigma_{t_2}} * j - \int_{\Sigma_{t_1}} * j. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, $\int_{\Sigma_{t_2}} * j = \int_{\Sigma_{t_1}} * j$. Esto vale para cualquier par de superficies de Cauchy de la métrica, siempre y cuando valga (2.5). En virtud de esto se define la carga conservada Q asociada a la corriente j como

$$Q(t) = \int_{\Sigma_t} * j. \quad (2.7)$$

²Buena parte de esta sección está basada en las notas [34].

A partir de (2.7) puede calcularse, por ejemplo, la carga eléctrica de un espaciotiempo. Las ecuaciones de Maxwell con fuentes son

$$d * F = 4\pi * j,$$

donde F es la 2-forma cerrada de Maxwell y j es la 1-forma de corriente eléctrica. Por lo tanto, la carga eléctrica total conservada asociada a j es

$$Q(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} d * F.$$

Si Σ_t es una bola de radio infinito, puede aplicarse el teorema de Stokes y se obtiene

$$Q(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} *F, \quad (2.8)$$

donde S_∞^2 es la 2-esfera de radio infinito.

2.6.2. Cargas ADM

La energía, a diferencia de la carga eléctrica, está asociada a un tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ y no a un vector. Una noción de su conservación global estrechamente emparentada con la conservación en un espacio plano es la de las cargas ADM (Arnold-Deser-Misner) [35]. El cálculo de estas cargas asume exclusivamente la asintótica de espacio plano (aunque también puede definirse carga ADM para espaciotiempos asintóticamente AdS). En particular, se asume

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(1/r)$. En esta aproximación de campo débil puede obtenerse, a partir de las ecuaciones de Einstein a $\mathcal{O}(h)$, una expresión de T_{00} (densidad de energía)

$$T_{00} = \frac{1}{16\pi} \partial_i (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}), \quad (2.9)$$

donde i, j, k son coordenadas cartesianas espaciales. En el fondo, se están tratando las perturbaciones gravitatorias como un campo, despreciándose las intrincadas interacciones entre la materia y curvatura del espaciotiempo de orden más alto. La energía total es, integrando en todo el espacio y aplicando el teorema de Gauss,

$$E = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty^2} dS_i (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}). \quad (2.10)$$

Esta integral es de superficie en el infinito, donde el espaciotiempo es plano, por lo que es indistinto si el contenido de energía en él produce deformaciones arbitrariamente grandes (siempre y cuando no se extiendan al infinito).

2.6.3. Integrales de Komar

Las cargas conservadas están asociadas, a través del teorema de Noether, con simetrías de la acción. A su vez, en relatividad general, estas están asociadas a isometrías de la métrica generadas por vectores de Killing. A cada isometría le corresponde un vector de Killing K , es decir, un vector K tal que $K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0$. Usando la definición del tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\mu\nu\sigma}$ y la primera identidad de Bianchi, puede mostrarse que esto implica

$$K_{\mu;\rho}{}^\rho = R_{\mu\nu}K^\nu. \quad (2.11)$$

En notación de formas diferenciales y usando las ecuaciones de Einstein escritas $R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$ se llega a

$$*d * dK = 8\pi j, \quad (2.12)$$

donde se definió la corriente

$$j_\mu = -2\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)K^\nu = -\frac{1}{4\pi}R_{\mu\nu}K^\nu. \quad (2.13)$$

De (2.12) se sigue que $*j$ es una 3-forma exacta, por lo cual es cerrada. Es decir, j es una corriente conservada en el sentido de que satisface $d * j = 0$. Como se vio, puede definirse, entonces, una carga conservada asociada al vector de Killing K usando (2.7),

$$Q_K = \frac{c}{8\pi} \int_\Sigma d * dK = \frac{c}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} *dK, \quad (2.14)$$

donde se usó el teorema de Stokes, y c es alguna constante a determinar. Esta es la *integral de Komar*. En particular, si el espaciotiempo es asintóticamente plano, estacionario y axisimétrico, es posible definir de esta manera una masa y un momento angular en referencia al espacio plano. Que una métrica sea estacionaria significa que $K = \partial_t$ es un vector de Killing (en algún sistema de coordenadas). La carga conservada asociada a este vector de Killing es

$$M_K = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} *dK, \quad (2.15)$$

donde $c = -1$ y S_r^2 es la 2-esfera de radio r . Por otro lado, que la métrica sea axisimétrica significa que existe algún Killing \tilde{K} que genera el grupo $U(1)$ de rotaciones alrededor del eje, por lo que habrá alguna coordenada angular periódica ϕ tal que $\tilde{K} = \partial_\phi$. Introduciendo este en la expresión de Komar, se obtiene una carga conservada

$$J_K = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} *d\tilde{K}, \quad (2.16)$$

donde $c = 1/2$. Los coeficientes c en ambos casos son aquellos que se ajustan adecuadamente en el límite de espacio plano, coincidiendo con las definiciones conocidas de masa y momento

angular newtonianas, que deben ser válidas en el infinito. Es decir, esta elección de coeficientes es razonable cuando el espaciotiempo es asintóticamente plano. Sin embargo, es posible calcular el momento angular como una integral de Komar en espaciotiempos más generales; en [18], por ejemplo, se hace para las soluciones de Ernst-Wild, y las que se analizaron en esta tesis son casos particulares de ella.

Es relevante también el hecho de que, en soluciones de espaciotiempo vacío (*Ricci-flat*), expresiones como (2.15) y (2.16) pueden calcularse en esferas de cualquier radio (incluso superficies más generales). En cambio, en soluciones llenas de campo electromagnético, como las métricas que se estudian en esta tesis, lo correcto es calcular las cargas en el infinito (siempre y cuando haya una noción de asintótica bien definida, como ya se discutió en el párrafo anterior).

2.6.4. Fórmula de Smarr

El vector de Killing nulo asociado a un horizonte de Killing tiene también una carga de Komar asociada. Cuando la métrica es estacionaria y axisimétrica (todas las métricas bajo estudio en esta tesis lo son), este vector de Killing puede escribirse $\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$, donde t es una coordenada temporal, ϕ angular y Ω_H es la velocidad angular del horizonte (la velocidad angular de las geodésicas nulas sobre el horizonte según un observador que se encuentra en el infinito [33]). Como la expresión de Komar (2.14) es lineal en K , esta carga de Komar Q_ξ asociada a ξ con $c = -1$ es

$$Q_\xi = M_K - 2\Omega_H J_K. \quad (2.17)$$

Por otro lado, puede tomarse la hipersuperficie espacial (volumen) $\tilde{\Sigma}$ delimitado internamente por S_H^2 , la 2-esfera que intersecta al horizonte en un tiempo fijo, y S_∞^2 , la 2-esfera de radio infinito. Es decir, por el teorema de Stokes, la integral en todo el espacio Σ es la integral en este volumen $\tilde{\Sigma}$ más la integral en el horizonte a tiempo fijo S_H^2 ,

$$Q_\xi = -\frac{1}{8\pi} \int_{S_H^2} *d\xi - \frac{1}{8\pi} \int_{\tilde{\Sigma}} d * d\xi. \quad (2.18)$$

Finalmente, realizando las integrales y comparando las expresiones (2.17) y (2.18) se obtiene la siguiente relación [34]

$$M_K = \frac{\kappa}{4\pi} \mathcal{A} + 2\Omega_H J_K + 2 \int_{\tilde{\Sigma}} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \xi^\nu (*dx^\mu), \quad (2.19)$$

donde \mathcal{A} es el área del agujero negro. Esta es una variante de la ley de Smarr. Cuando el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ corresponde al del electromagnetismo,

$$M_K = \frac{\kappa}{4\pi} \mathcal{A} + 2\Omega_H J_K + \Phi_H Q, \quad (2.20)$$

donde Φ_H es el potencial electromagnético co-rotante, definido como $\Phi_H = -\xi^\mu A_\mu$ evaluado en el horizonte (esta relación vale cuando la elección de gauge es tal que A_μ tiende a cero en el infinito). En general, Φ_H es la integral de línea del campo eléctrico desde el infinito hasta el horizonte (igual que como se lo define clásicamente).

La ley de Smarr, sin embargo, es algo más general que esto. En la Sec. 2.7 se entenderá que puede pensarse como una aplicación del teorema de Euler para funciones homogéneas a la primera ley de la mecánica de agujeros negros, un análogo de la ecuación de Euler de la termodinámica [37].

2.7. Termodinámica de agujeros negros

La métrica más general posible de agujero negro cargado, estacionaria y axisimétrica, que no posee ningún otro contenido de materia o energía, es la métrica de Kerr-Newman, correspondiente al agujero negro rotatorio cargado eléctricamente (o magnéticamente). Esta solución está caracterizada completamente por tres parámetros, correspondientes a su masa, su momento angular y su carga eléctrica/magnética. Si un agujero negro de este tipo es producto de un colapso gravitatorio, todos los parámetros físicos que describían esa materia se pierden, al menos si se acepta la descripción general relativista más básica del agujero negro. Esto es conocido como el teorema *no-hair* (los agujeros negros *no tienen pelo*, famoso apotegma de Wheeler).

En 1972/1973 Bekenstein se preguntó qué ocurriría con la entropía de esta materia que precedía el colapso gravitatorio, dado que la pérdida de grados de libertad en la solución parecía amenazar la prevalencia de la segunda ley termodinámica [38, 39]. Con esta motivación, propuso la idea de establecer una analogía entre la propiedad de que el área de los agujeros negros siempre debe aumentar (resultado de Hawking [40]) y la segunda ley, dando argumentos heurísticos que definitivamente predecían una relación de proporcionalidad lineal entre la entropía y el área del agujero negro. El principal argumento consiste, esencialmente, en asumir una relación entre área y entropía $S = S(\mathcal{A})$ y, mediante consideraciones cuánticas, estimar algún valor mínimo de $(\delta\mathcal{A})_{\min}$ que un agujero negro puede incrementar tras la absorción de un cuanto de energía. Esto da, a su vez, un incremento mínimo de la entropía

$$(\delta S)_{\min} = \frac{dS}{d\mathcal{A}}(\delta\mathcal{A})_{\min}. \quad (2.21)$$

Tendría sentido que esto fuera del orden de la entropía de Shannon correspondiente a 1 bit de información, es decir, la entropía de un sistema con dos estados posibles e igualmente probables,

$$\delta S_{\text{bit}} = -\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 1/2 = \log 2,$$

donde por log debe entenderse el logaritmo natural. $(\delta S)_{\min} \sim \delta S_{bit}$ tiene sentido porque se asume que la mínima entropía que un agujero negro puede adquirir proviene de la única información que una partícula sin estructura es capaz de contener: su existencia o inexistencia. Entonces, integrando $\frac{dS}{d\mathcal{A}}(\delta\mathcal{A})_{\min} = \log 2$ se obtiene una relación entre entropía y área,

$$S_{BH} \sim \int_0^{\mathcal{A}} \frac{\log 2}{(\delta\mathcal{A})_{\min}} d\mathcal{A}. \quad (2.22)$$

En el paper de Bekenstein [39] se encuentra un $(\delta\mathcal{A})_{\min}$ a partir del valor mínimo de masa irreducible que puede adquirir un agujero negro de Kerr tras la absorción de una partícula no puntual. Esa cota está asociada con la longitud de onda de Compton de la partícula. En este caso, resulta ser $(\delta\mathcal{A})_{\min} = 8\pi\hbar$. Por lo tanto, la entropía del agujero negro es del orden

$$S_{BH} \sim \frac{\log 2}{8\pi\hbar} \mathcal{A}. \quad (2.23)$$

Otro ejemplo de estimación de $(\delta\mathcal{A})_{\min}$ se da en [41], donde se utiliza el hecho de que un agujero negro puede absorber fotones de longitud de onda hasta del orden del radio del horizonte $\lambda \sim r_H \sim M$, pero refleja fotones con $\lambda \gg r_H$. En este caso, $(\delta M)_{\min} \sim \frac{2\pi\hbar}{r_H} \sim \frac{2\pi\hbar}{M}$, por lo cual $(\delta\mathcal{A})_{\min} \sim 2M(\delta M)_{\min} \sim 4\pi\hbar$, que es del mismo orden que el estimado por Bekenstein, usando fotones en vez de partículas con masa.

A partir de esta observación de Bekenstein, en 1973 Bardeen, Carter y Hawking llevaron un poco más allá la analogía y enunciaron las cuatro leyes que describen la mecánica de agujeros negros en relatividad general, con un parecido a los principios termodinámicos muy sugerente [42].

Ley cero. *La gravedad superficial κ es constante sobre un horizonte de Killing*³. Esto sugiere una analogía entre κ y la temperatura, ya que esta última es uniforme en un sistema que se encuentra en equilibrio termodinámico.

Primera ley. *Si un agujero negro estacionario de masa M , momento angular J y carga eléctrica Q es perturbado de manera tal que, cuando se estabiliza, resulta en otro agujero negro de masa $M + dM$, momento angular $J + dJ$ y carga $Q + dQ$, entonces*

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (2.24)$$

Aquí Ω_H y Φ_H son la velocidad angular y potencial eléctrico en el horizonte, respectivamente, como fueron definidos en la Sec. 2.6.4.

³Esto vale siempre y cuando $T_{\mu\nu}$ obedezca la condición de energía dominante, que corresponde a pedir que la energía no fluya a velocidad mayor que la de la luz, lo cual es razonable.

El primer principio de la termodinámica para un sistema clásico rotatorio con velocidad angular Ω y cargado eléctricamente con carga Q , por otra parte, puede escribirse

$$dE = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (2.25)$$

Comparando (2.24) y (2.25) se puede deducir, teniendo en cuenta el resultado de Bekenstein, $T = \alpha^{-1} \frac{\kappa}{8\pi}$ y $S = \alpha \mathcal{A}$, para alguna constante numérica α que debe determinarse. Nótese, como se había anticipado, que la ley de Smarr (2.19) puede verse como una aplicación del teorema de Euler para funciones homogéneas a la primera ley (2.24). La homogeneidad de M con respecto a \mathcal{A} y J puede mostrarse haciendo un análisis dimensional sencillo [43].

Segunda ley. *En ningún proceso físico el área de un agujero negro puede disminuir, es decir, $\Delta \mathcal{A} \geq 0$.*⁴ Este es el teorema de Hawking que inspiró la observación de Bekenstein de la que se habló anteriormente.

Tercera ley. *Es imposible reducir κ a 0 mediante cualquier secuencia finita de operaciones.* A diferencia de las otras, no existe demostración matemática para esta ley. $\kappa = 0$ corresponde al agujero negro extremal y es un resultado conocido de los agujeros negros de Kerr-Newman, por ejemplo, que no pueden hacerse extremales en tiempo finito.

Recuperando las constantes fundamentales c, G, \hbar, k_B mediante análisis dimensional, las fórmulas de la entropía y temperatura resultan

$$S = k_B \frac{A}{\alpha \ell_P^2}, \quad T = \frac{\hbar}{ck_B} \frac{\alpha \kappa}{8\pi},$$

donde $\ell_P^2 = G\hbar/c^3$ es la longitud de Planck. Nótese que TdS no depende de \hbar , lo cual es sensato dado que todos los resultados que se han presentado hasta el momento fueron obtenidos en el contexto de la teoría de la relatividad general. La necesidad de introducir \hbar (para no introducir escalas arbitrarias al problema en el análisis dimensional) es lo que sugiere una conexión entre la termodinámica de agujeros negros y la mecánica cuántica.

El hecho de que estos resultados sean puramente general relativistas impiden la trascendencia de un estatus de analogía ya que, por ejemplo, un agujero negro inmerso en un baño térmico a temperatura más baja que $\frac{\kappa}{8\pi\alpha}$ reduciría la entropía total del universo al absorber materia. Sería necesario que el agujero negro pudiera radiar energía hacia el exterior, lo cual está estrictamente prohibido por la segunda ley de la mecánica de agujeros negros enunciada anteriormente.

En 1974 Hawking implementó un modelo semiclásico de teoría cuántica de campos en espacios curvos y llegó al resultado teórico que predice la radiación térmica de los agujeros negros por

⁴En este caso se asume censura cósmica (que no puedan existir singularidades fuera de una superficie atrapada) y la condición de energía débil.

un mecanismo de creación de pares de partícula-antipartícula en el horizonte. Esta radiación corresponde, además, a la de un cuerpo negro de temperatura

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.26)$$

coincidiendo con la expresión obtenida por Bekenstein con una constante $\alpha = 4$. En consecuencia, pues, también queda determinada la entropía

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4}, \quad (2.27)$$

que es, efectivamente, del orden del resultado obtenido heurísticamente (2.23).

2.8. Entropía de Wald

Existe una manera de calcular la entropía de un agujero negro estacionario como la carga de Noether conservada asociada a un difeomorfismo, este último generado por un vector de Killing; en particular, el campo de vectores de Killing que genera el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario. La entropía resulta ser una integral sobre una hipersuperficie espacial que intersecta al horizonte de Killing (a diferencia de las cargas ADM, por ejemplo, que se calculan en el infinito). Wald halló dicha expresión para teorías de gravedad más generales que la teoría de Einstein en 3+1 dimensiones, y precisamente con esa finalidad [44]. Las cargas que se calcularán en este trabajo pueden considerarse una generalización de la carga de Wald, en tanto comparten con ella ser cargas calculadas en el horizonte.

3. Campos magnéticos intensos en relatividad general

Antes de entrar en la física de agujeros negros, es necesario entender alguna manera de tratar campos electromagnéticos en el contexto de la teoría de la relatividad general. El tratamiento de primera aproximación consiste en resolver las ecuaciones de Maxwell en el espacio curvo, suponiendo que la geometría no se ve afectada por la presencia del campo — es decir, asumir que no hay *back-reaction* gravitatorio. Esto se hace, por ejemplo, en [45]. En general, se tiene una métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ y se resuelven, asumiendo ausencia de fuentes (dadas condiciones de contorno),

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ *d * F &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como se mencionó, sin embargo, esto es una solución aproximada, ya que las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

que la métrica debe satisfacer dependen del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ que, en particular, es distinto de cero en un punto del espacio-tiempo donde haya campo electromagnético presente. Si el campo es lo suficientemente débil, la contribución de este a $T_{\mu\nu}$ puede despreciarse en el contexto de las ecuaciones de Einstein.

En esta tesis, sin embargo, se va a considerar el caso más general de un *back-reaction* apreciable (no se desprecia $T_{\mu\nu}$ electromagnético en las ecuaciones de Einstein). Como se mencionó en la introducción, hay potenciales escenarios astrofísicos en los que podrían existir campos magnéticos extremadamente intensos (en las vecindades de una magnetar o en AGNs) y agujeros negros podrían estar sumergidos en dichos campos [10]. Es necesario resolver, entonces, las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell.

Cabe preguntarse, ¿existe alguna solución interesante de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío con $F \neq 0$? De ser así, ¿cuál es la más sencilla posible? Esto es lo que estudió Melvin en su *paper* de 1964 [11].

3.1. La métrica de Melvin

Uno de los campos más sencillos que uno puede imaginar es el campo electrostático o magnetostático uniforme que se extiende en todo el espacio. Melvin se concentró en el caso magnético $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Es un modelo razonable, por ejemplo, para configuraciones en las que el tamaño característico de algún objeto físico de interés es mucho menor que el gradiente del campo.

Sin embargo, esta configuración no es compatible con las ecuaciones de Einstein. Lo que Melvin hizo en 1963 fue relajar la condición de uniformidad en ρ , permitiendo una dependencia del campo y la métrica con esta variable. Sí, en cambio, impuso la restricción de que la configuración de campo fuera estática, axisimétrica y libre de fuentes. A estas restricciones puede añadirse, por simplicidad, que el campo apunte en dirección z . Además, hizo la observación de que un campo eléctrico o magnético, si es estático, cumple que

$$\mathcal{T}_z^z + \mathcal{T}_\rho^\rho = 0, \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{T}_\mu^\nu = T_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} \sqrt{|g|}$ es la densidad tensorial de energía-momento. Las condiciones enumeradas en este párrafo son suficientes para permitir una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell.

En efecto, haciendo uso de herramientas matemáticas para resolver esta clase particular de problemas, Melvin encontró la siguiente solución, el *universo de Melvin*,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{4} B_0^2 \rho^2\right)^2 (-dt^2 + d\rho^2 + dz^2) + \frac{\rho^2}{\left(1 + \frac{1}{4} B_0^2 \rho^2\right)^2} d\phi^2, \quad (3.4)$$

$$H_z = \frac{B_0}{(1 + \frac{1}{4}B_0^2\rho^2)^2}. \quad (3.5)$$

La Ec. (3.4) es el elemento de línea de la *métrica de Melvin*. H_z es la única componente no nula del campo magnético, en dirección z (más detalle en la Sec. 3.2) y B_0 es una constante de integración, que se interpreta como el campo magnético en el eje $\rho = 0$. Cuando $B_0 \rightarrow 0$ el universo de Melvin tiende al espacio plano; esto corresponde a la observación de que el campo magnético es lo único que está deformando el espacio-tiempo (ciertamente, así se construyó la métrica).

El campo magnético H_z es máximo en el eje $\rho = 0$ y $H_z \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$. A una distancia $\bar{\rho} = 2/B_0$ la intensidad del campo decae a $1/4$ con respecto al máximo. Por ejemplo, al campo magnético de una magnetar, que puede alcanzar intensidades del orden de $10^{14} - 10^{15}$ gauss [9], le correspondería un radio característico $\bar{\rho} \sim 10^5 - 10^4 \text{km}$. A distancias $\rho \ll \bar{\rho}$, sin embargo, el espacio es aproximadamente plano y el campo magnético aproximadamente constante ($H_z \simeq B_0$). Esto nos dice que para notar los efectos globales producidos por el *back-reaction* gravitatorio es necesario mirar a distancias bastante grandes del eje de simetría. Esto es, en relación a los tamaños característicos de las distribuciones de campo magnético que suelen observarse en la naturaleza, incluso los más extensos de entre ellos.

Puede interpretarse, entonces, esta configuración como un manojito de líneas de campo magnético que se mantienen unidas por su gravitación mutua [12], con radio característico del orden de $\bar{\rho}$. La configuración es estable ante perturbaciones arbitrarias en ρ [12, 13].

El universo de Melvin no es asintóticamente plano. Para ver esto basta con notar que $g_{\phi\phi} \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$, así que el tensor métrico g no puede ser asintóticamente similar al de Minkowski. Por ende, no puede existir ninguna métrica conforme que tenga un infinito conforme como el de Minkowski. Esto podría llevar a suponer que el estudio de este universo pierde sentido, pero debe tenerse en cuenta que sí pueden existir configuraciones de campos magnéticos muy intensos en configuraciones que se realizan, de hecho, astrofísicamente, como se mencionó en la introducción de esta tesis. En estos casos el universo de Melvin cerca de $\rho = 0$ podría ser útil como modelo.

A $t = \text{cte}$, $z = \text{cte}$, $\rho = \text{cte}$ la longitud de la circunferencia está dada por $2\pi\sqrt{g_{\phi\phi}} = \frac{2\pi\rho}{1 + \frac{1}{4}B_0^2\rho^2}$. Esta circunferencia es cero cuando $\rho = 0$, pero también tiende a cero cuando $\rho \rightarrow \infty$. Una manera de visualizar la métrica de Melvin es tomando una superficie $z = \text{cte}$ a $t = \text{cte}$ y hacer un *embedding* en el espacio euclídeo tridimensional. El resultado de varios ejemplos con

⁵Esto es, si se considera que el campo de la *magnetar* es uniforme. Esta aproximación, aunque sirve de ejemplo para dar una idea de la intensidad de estos campos y las características de la métrica, no es adecuada en este caso particular, dado que las variaciones del campo tienen un tamaño característico bastante más pequeño que 10^4 km.

distintos valores de B_0 se muestra en la figura 2. Dado que la métrica es axisimétrica, la superficie resultante es una superficie de revolución; es decir, la intersección de la superficie con cualquier plano $\phi = \text{cte}$ es la misma curva. Dicha curva está parametrizada por alguna variable b . En [46] se muestra cómo hacer *embeddings* de superficies de revolución. Se trabaja genéricamente con una métrica del tipo $ds^2 = E(b)db^2 + J(b)d\phi^2$ y se propone, en coordenadas cilíndricas $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}, \tilde{z})$, la parametrización de la superficie

$$\tilde{\rho} = F(b), \quad \tilde{z} = G(b). \quad (3.6)$$

Por lo tanto, dado que la métrica euclídea es $d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 + d\tilde{z}^2$, se deduce que las funciones $F(b)$ y $G(b)$ deben satisfacer

$$F'^2(b) + G'^2(b) = E(b), \quad F^2(b) = J(b), \quad (3.7)$$

con $F'(b) = dF/db$ y $G'(b) = dG/db$. La métrica (3.4) a $z = \text{cte}$ y $t = \text{cte}$ es

$$d\Sigma^2 = \left(1 + \frac{1}{4}B_0^2\rho^2\right)^2 d\rho^2 + \frac{\rho^2}{\left(1 + \frac{1}{4}B_0^2\rho^2\right)^2} d\phi^2, \quad (3.8)$$

por lo que tomando como parámetro $b = \rho$ la correspondencia es $E(\rho) = \left(1 + \frac{1}{4}B_0^2\rho^2\right)^2$ y $J(\rho) = \frac{\rho^2}{E(\rho)}$. Dado que la circunferencia es $2\pi\sqrt{J(\rho)} = 2\pi F(\rho)$, los gráficos de la figura 2 pueden interpretarse como el ensanchamiento y posterior estrechamiento de las circunferencias. Si una partícula de prueba recorre el espaciotiempo dado por (3.4) a $z = \text{cte}$, localmente percibirá una geometría como la de la figura. No es que en realidad la métrica retorne sobre sí misma cuando se supera un cierto valor de ρ , es la manera de visualizar una geometría riemanniana en \mathbb{R}^3 que tiene la curiosa propiedad de que círculos concéntricos se achican cuando el radio se agranda.

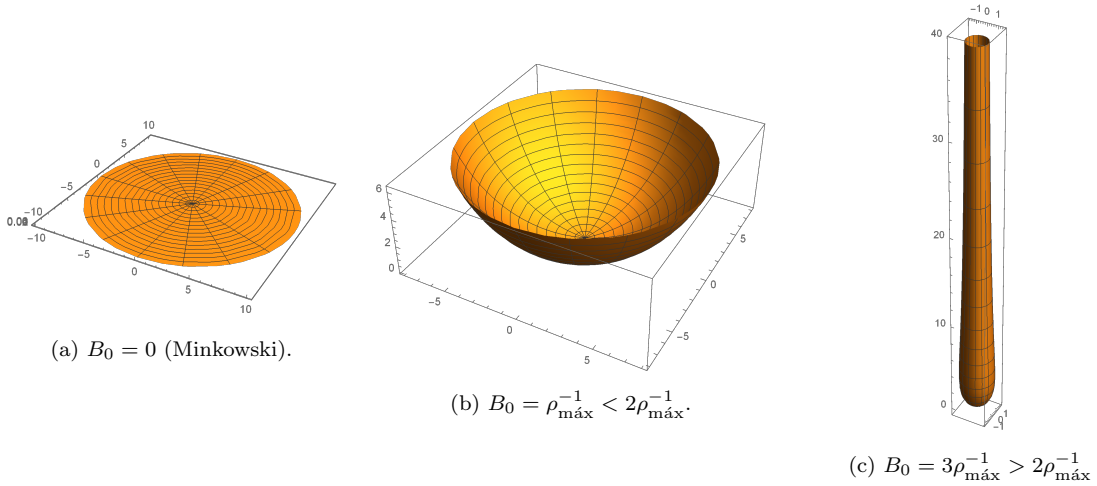


Figura 2: *Embeddings* en \mathbb{R}^3 de la métrica de Melvin a $z = \text{cte}$, $t = \text{cte}$ para tres valores distintos del parámetro de intensidad de campo magnético B_0 , con ρ moviéndose entre 0 y $\rho_{\text{máx}}$. Los rayos radiales son curvas parametrizadas por la distancia ρ al eje de simetría, mientras que las curvas cerradas están parametrizadas por ϕ . Los ejes están en unidades de $\rho_{\text{máx}}/10$.

3.2. Campos electromagnéticos en espacios curvos

En esta tesis, como en [11, 12, 14–16], los campos eléctricos y magnéticos corresponden a componentes tetrádicas de la 2-forma de Maxwell, $F = dA$. Todas las métricas con las que se trabajó en esta tesis son axisimétricas y estacionarias, y pueden escribirse en general [22]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi}(d\phi - \omega dt)^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2. \quad (3.9)$$

La tétrada que se utiliza es

$$e^0 = N dt, \quad e^2 = \sqrt{g_{\phi\phi}}(d\phi - \omega dt), \quad (3.10)$$

$$e^1 = \sqrt{g_{rr}} dr, \quad e^3 = \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta, \quad (3.11)$$

de manera tal que la métrica $g \equiv ds^2$ se escribe

$$g = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3. \quad (3.12)$$

El tensor de Maxwell tiene una expresión en base coordenada $F = F_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu)$, pero su expresión tetrádica es

$$F = F_{ij} (e^i \otimes e^j) = \frac{1}{2} F_{ij} e^i \wedge e^j, \quad (3.13)$$

donde los índices latinos i, j son tetrádicos. Las componentes del campo electromagnético se definen como

$$E_r = F_{01} = \frac{1}{N\sqrt{g_{rr}}}(F_{rt} + \omega F_{r\phi}), \quad H_r = F_{23} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}}F_{\theta\phi}, \quad (3.14)$$

$$E_\theta = F_{02} = \frac{1}{N\sqrt{g_{\theta\theta}}}(F_{\theta t} + \omega F_{\theta\phi}), \quad H_\theta = F_{13} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\phi\phi}}}F_{r\phi}. \quad (3.15)$$

4. Agujeros negros magnetizados

4.1. El método de Ernst y las transformaciones de Harrison

En 1976 Ernst obtuvo, a partir de soluciones de agujero negro ya conocidas de las ecuaciones de Einstein, nuevas soluciones a las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell, con la característica de que pueden interpretarse como la introducción de un campo electromagnético a las geometrías originales [14]. Al igual que ocurre con la métrica de Melvin, el campo electromagnético introducido deforma la geometría original.

Para lograr esto, Ernst se valió de un grupo de transformaciones desarrollado por Harrison, que son simetrías de las ecuaciones (generalizadas, luego, por Kinnersley, ver referencias en [14]). Resulta ser que al aplicarse estas transformaciones a una geometría de agujero negro se obtiene una nueva solución con campo magnético de fondo que preserva la estructura de horizonte de

Killing (que se mantiene no-singular). En general, al hacer tender el parámetro de masa $M \rightarrow 0$ se recupera Melvin, mientras que $B_0 \rightarrow 0$ reduce la métrica a la original.

Todo esto, por otro lado, está basado en un trabajo previo en el cual Ernst había conseguido simplificar significativamente el problema de Einstein-Maxwell para configuraciones estacionarias y axisimétricas [47]. La simplificación consiste en llevar la ecuación tensorial de Einstein-Maxwell a un problema de dos potenciales escalares complejos, \mathcal{E} y Φ (gravitatorio y electromagnético, respectivamente) relacionados a través de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas.

El elemento de línea de las métricas estacionarias y axisimétricas puede expresarse genéricamente

$$ds^2 = f^{-1}[-2P^{-2}d\zeta d\zeta^* + \rho^2 dt^2] - f(d\phi - \omega dt)^2. \quad (4.1)$$

En este formalismo, las transformaciones de Harrison son

$$\mathcal{E}' = \Lambda^{-1}\mathcal{E}, \quad (4.2)$$

$$\Phi' = \Lambda^{-1}\left(\Phi - \frac{1}{2}B_0\mathcal{E}\right) = \frac{\partial}{\partial B_0}(\log \Lambda), \quad (4.3)$$

con

$$\Lambda = 1 + B_0\Phi - \frac{1}{4}B_0^2\mathcal{E}. \quad (4.4)$$

Además, los parámetros f, ω que aparecen en la métrica transforman según

$$f' = |\Lambda|^{-2}f, \quad (4.5)$$

$$\nabla\omega' = |\Lambda|^2\nabla\omega + \rho f^{-1}(\Lambda^*\nabla\Lambda - \Lambda\nabla\Lambda^*), \quad (4.6)$$

quedando inalterados ρ y P . Nótese que las transformaciones determinan la derivada de ω' y no ω' en sí, lo cual refleja la existencia de una libertad de gauge en el parámetro ω : está definido a menos de una constante aditiva.

El potencial electromagnético complejo Φ se relaciona con el potencial vector electromagnético mediante la relación

$$\Phi = A_\phi + iA'_t, \quad (4.7)$$

donde A'_t se define a través de la siguiente ecuación diferencial

$$\rho^{-1}f(\nabla A_t - \omega\nabla A_\phi) = \hat{\phi} \times \nabla A'_t, \quad (4.8)$$

siendo $\hat{\phi}$ el vector unitario que apunta en la dirección de ϕ creciente. Por otro lado, el potencial complejo gravitatorio \mathcal{E} se define

$$\mathcal{E} = (f - |\Phi|^2) + i\varphi, \quad (4.9)$$

donde φ es una función que se determina a partir de la ecuación diferencial,

$$\rho^{-1} f^2 \nabla \omega - 2\hat{\phi} \times \text{Im}(\Phi^* \nabla \Phi) = \hat{\phi} \times \nabla \varphi \quad (4.10)$$

En particular, Ernst implementó este método utilizando como semillas las métricas de Minkowski, Schwarzschild, Reissner-Nordström y también Kerr-Newmann. Al aplicar la transformación sobre la métrica de Minkowski se obtiene, de hecho, el universo de Melvin. A continuación, se procederá a describir las otras soluciones resultantes.

4.2. Agujero negro de Schwarzschild magnetizado

Si se realiza la transformación de Harrison descrita más arriba sobre la métrica de Schwarzschild del agujero negro estático y esféricamente simétrico, se obtiene

$$ds^2 = \Lambda^2(r, \theta) \left(-f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 \right) + \Lambda^{-2}(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.11)$$

con

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad y \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (4.12)$$

El potencial vector es

$$A = \Lambda^{-1}(r, \theta) \frac{1}{2} B_0 r^2 \sin^2 \theta d\phi, \quad (4.13)$$

y las componentes no-nulas del campo magnético son

$$H_r = \Lambda^{-2}(r, \theta) B_0 \cos \theta, \quad (4.14)$$

$$H_\theta = -\Lambda^{-2}(r, \theta) B_0 f^{1/2}(r) \sin \theta. \quad (4.15)$$

Se conoce esta solución en la literatura como *Schwarzschild-Melvin*. Como se anticipó, esta solución se reduce al universo de Melvin (Ecs. 3.4-3.5) cuando $M = 0$ y se recupera la métrica de Schwarzschild cuando $B_0 = 0$. Teniendo en cuenta que la solución presenta un horizonte de Killing no singular en $r_s = 2M$, es razonable la interpretación de que este escenario corresponde a un agujero negro embebido en un universo que es asintóticamente Melvin (esto último sale de que $f(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$).

La métrica es, por construcción, estacionaria y axisimétrica; es decir, ∂_t y ∂_ϕ son vectores de Killing y generan el grupo de isometrías $\mathbb{R} \times \text{SO}(2)$. No es asintóticamente plana, por la misma razón que Melvin no lo es. Por lo tanto, no puede definirse un horizonte de eventos en el sentido de la Sec. 2.2. Sin embargo, una propiedad relevante de estas transformaciones es que, si la solución semilla dada por \mathcal{E} y Φ es una métrica de Kerr-Newmann (como lo son todos los casos que se analizarán, en este caso con $q = 0$ y $a = 0$) y tiene un horizonte de Killing en $r = r_H$ para la coordenada radial r , la solución resultante también tiene un horizonte de Killing en $r = r_H$

[18]. En el caso de Schwarzschild-Melvin, el campo de vectores de Killing ∂_t es el que se hace nulo en el horizonte.

Puede calcularse el área del horizonte de Killing \mathcal{A} para esta métrica. El volumen métrico inducido en la esfera $r = r_s$, $t = cte$ es

$$\tilde{\epsilon} = r_s^2 \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi, \quad (4.16)$$

de manera tal que

$$\mathcal{A} = \int \tilde{\epsilon} = 4\pi r_s^2, \quad (4.17)$$

exactamente igual que en el agujero negro de Schwarzschild. Por otra parte, la gravedad superficial κ de este espaciotiempo puede obtenerse a partir de (2.2), resultando en

$$\kappa = \frac{1}{4M}, \quad (4.18)$$

también idéntica a la gravedad superficial de Schwarzschild (al menos con esta normalización del Killing nulo en el horizonte ∂_t ; en la sección 7 se verá que, en efecto, es la correcta).

Es factible visualizar el horizonte de eventos de estos agujeros negros a $t = cte$ haciendo algún *embedding* en el espacio euclídeo de tres dimensiones. Se evalúa la métrica (4.11) en $r = 2M$ con $t = cte$, resultando en la 2-métrica

$$d\Sigma^2 = \Lambda^2(r, \theta)(2M)^2 d\theta^2 + \Lambda^{-2}(r, \theta)(2M)^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.19)$$

Como la métrica (4.19) es axisimétrica, su *embedding* debe serlo también; es decir, la superficie asociada en \mathbb{R}^3 es una superficie de revolución, así que se puede hacer el *embedding* de la misma manera que se hizo con la métrica de Melvin en la sección 3.1. La diferencia es que, en este caso, el parámetro es $b = \theta$. Para el caso de la métrica de Schwarzschild-Melvin puede encontrarse que

$$E(\theta) = (2M)^2 |\Lambda_H(\theta)|^2, \quad J(\theta) = (2M)^2 |\Lambda_H(\theta)|^{-2} \sin^2 \theta, \quad (4.20)$$

con $\Lambda_H(\theta) = \Lambda(r = 2M, \theta)$. Por la segunda ecuación de (3.7), $F(\theta) = 2M |\Lambda_H(\theta)| \sin \theta$. La primera de las ecuaciones (3.7) no es resoluble analíticamente en este caso, por lo que se la resolvió numéricamente para distintos valores de $r_s/\bar{\rho} \equiv MB_0$, y las superficies graficadas se muestran en la figura 3 (el mismo $\bar{\rho}$ definido en la sección 3.1). A medida que la intensidad del campo magnético o la masa aumentan, el horizonte se hace más y más oblongo; equivalentemente, cuanto mayor sea el radio del horizonte en comparación al tamaño característico del manajo de líneas de campo de Melvin, mayor es el *backreaction* que dicho campo magnético ejerce sobre la superficie del agujero negro. No obstante, recuérdese que el área de la superficie no depende del campo magnético. En la figura también se ve que el horizonte con un campo $B_0 > 2r_s^{-1}$ posee curvatura negativa alrededor de $z = 0$. Esto tiene sentido al recordar que las circunferencias

de los círculos concéntricos se hacen más pequeñas a medida que el radio aumenta a partir de $\rho \sim \frac{2}{B_0}$: la parte de la esfera más cercana a $z = 0$ es la que más se aparta del eje de simetría.

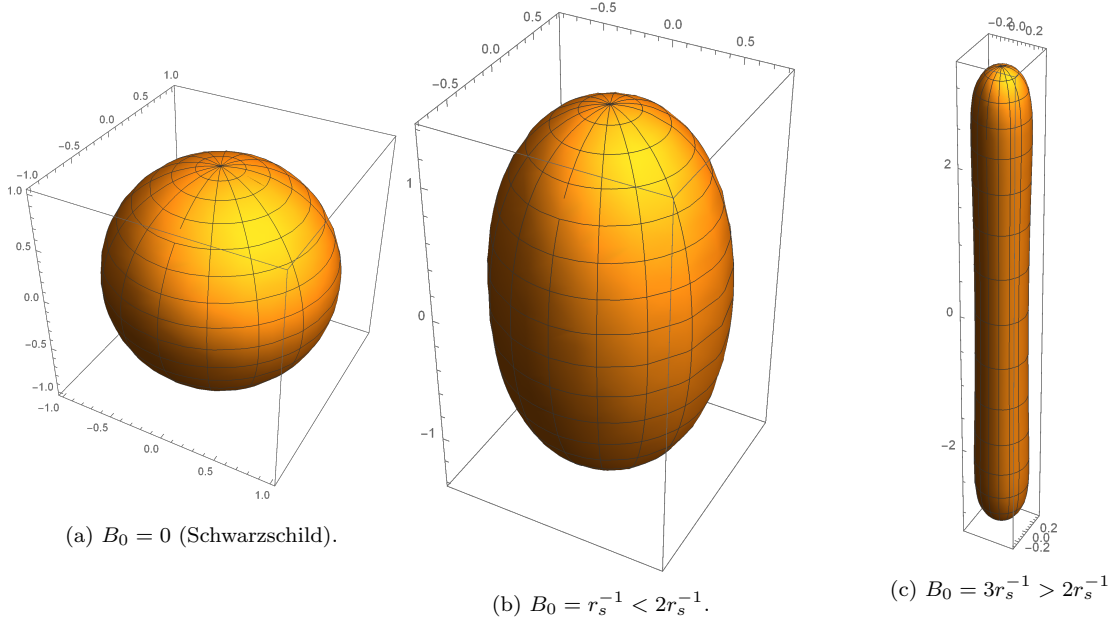


Figura 3: *Embeddings* del horizonte de Schwarzschild-Melvin con radio r_s a $t = cte$ para tres valores distintos del parámetro de intensidad de campo magnético B_0 . A mayor intensidad, más oblongo el horizonte. El tercero, con $B_0 > 2r_s^{-1}$, tiene curvatura negativa hacia el centro. Los ejes están en unidades de r_s . Es importante resaltar que esta deformación debida al campo magnético es de naturaleza gravitacional, y no un fenómeno de polarización.

4.3. Agujero negro cargado: la métrica de Reissner-Nordström

Ernst también construyó una nueva solución magnetizada a partir del agujero negro cargado, aplicando una transformación de Harrison a la métrica de Reissner-Nordström [14]. En esta subsección se introducirá esta última junto con sus características más relevantes.

Reissner-Nordström magnetizado es el principal caso de estudio de esta tesis, principalmente por el hecho de que, al magnetizarse, el agujero negro adquiere un momento angular que antes no poseía, lo que enriquece el cálculo de las cargas, el objeto central del trabajo. Este momento angular se produce debido a la densidad de vector de Poynting no nula que existe en la configuración de una carga puntual sumergida en un campo magnético en \hat{z} .

La solución de Reissner-Nordström (no magnetizada) a las ecuaciones de Einstein-Maxwell se obtiene al exigir simetría esférica, al igual que Schwarzschild, pero además permitiendo que exista un tensor de energía-momento electromagnético $T_{\mu\nu}$ no nulo. Es, en este sentido, una solución que generaliza la de Schwarzschild. Su elemento de línea es [48]

$$ds^2 = -f(r)dt + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.21)$$

con

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (4.22)$$

y la 1-forma potencial

$$A = -\frac{q}{r} dt, \quad (4.23)$$

donde M es el parámetro de masa y q el parámetro de carga eléctrica; el carácter de carga conservada de estas dos cantidades está explicado en la sección 2.6.3. Esta métrica posee dos horizontes de eventos en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - q^2}, \quad (4.24)$$

donde $r_+ > r_-$, por lo que el primero es un horizonte externo y el segundo uno interno. El horizonte externo tiende al horizonte de Schwarzschild r_s cuando $q \rightarrow 0$, mientras que el interno colapsa a la singularidad ($r_- \rightarrow 0$). Nótese que si $q = M$ entonces los horizontes se tocan — a este caso particular se lo conoce como *extremal*. Si $q > M$ deja de haber horizonte. Este último caso, sin embargo, se considera de escaso interés físico [32], pues requeriría de energía negativa para formarse a partir de colapso gravitatorio.

El elemento de volumen métrico en el horizonte de Killing $r = r_+$ es $r_+^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi$, de manera tal que el área del horizonte es $\mathcal{A} = 4\pi r_+$, igual que en Schwarzschild y Schwarzschild-Melvin.

Esta solución, a diferencia de Schwarzschild, presenta una singularidad tipo tiempo, por lo que una geodésica bien puede esquivarla; esto se relaciona con que existe una extensión maximal de la métrica [32, 48].

Si dotamos al agujero negro de una carga magnética p en vez de una carga eléctrica q , se obtiene exactamente la misma métrica, aunque con otro potencial vector,

$$A = -p \cos \theta d\phi. \quad (4.25)$$

4.4. El agujero negro cargado y magnetizado

4.4.1. Carga eléctrica

Aplicando la técnica de Ernst usando la métrica de Reissner-Nordström con carga eléctrica como semilla se obtiene

$$ds^2 = |\Lambda(r, \theta)|^2 \left(-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 \right) + |\Lambda(r, \theta)|^{-2} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega(r, \theta)dt)^2, \quad (4.26)$$

donde

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta) - i B_0 q \cos \theta, \quad (4.27)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (4.28)$$

$$\omega(r, \theta) = B_0 q \left[-\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_+} \right) + \frac{B_0^2}{2} \left(r - r_+ + r f(r) \cos^2 \theta \right) \right] + \omega_H, \quad (4.29)$$

donde r_+ es el mismo horizonte de Reissner-Nordström que se definió en la sección previa. Además, el campo electromagnético de la solución está dado por

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial B_0}(\log |\Lambda(r, \theta)|) = \frac{1}{B_0} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}(\Lambda(r, \theta))}{|\Lambda(r, \theta)|} \right) \left(\frac{\text{Re}(\Lambda(r, \theta)) - 2}{|\Lambda(r, \theta)|} \right) \right], \quad (4.30)$$

$$A_t(r, \theta) = \frac{2q}{r} + \frac{3\omega(r, \theta)}{2B_0} - A_\phi(r, \theta)\omega(r, \theta), \quad (4.31)$$

que, al derivarse, corresponden a⁶

$$H_r + iE_r = \Lambda^{-2}(r, \theta) \left[i \frac{q}{r^2} (2 - \text{Re}(\Lambda(r, \theta))) + B_0 \left(1 - \frac{1}{2} i B_0 q \cos \theta \right) \left(1 - \frac{q^2}{r^2} \right) \cos \theta \right], \quad (4.32)$$

$$H_\theta + iE_\theta = -B_0 \Lambda^{-2}(r, \theta) \left(1 - \frac{1}{2} i B_0 q \cos \theta \right) f^{1/2}(r) \sin \theta. \quad (4.33)$$

A esta solución se la denomina Reissner-Nordström-Melvin (RNM). Cuando $q = 0$ la solución se reduce a Schwarzschild magnetizado de masa M y constante de campo B_0 , mientras que si $B_0 = 0$ se tiene la métrica de Reissner-Nordström, también con masa M y carga q , y se recupera también su campo eléctrico. Ahora Λ es una función compleja.

Esta métrica tampoco es asintóticamente plana. Tiene un horizonte de Killing en $r = r_+$, cuyo campo de vectores de Killing asociado es $\partial_t + \frac{\omega_H}{|\Lambda_0|^2} \partial_\phi$, con $\omega_H = \omega(r = r_+)$ y $|\Lambda_0| = |\Lambda(\theta = 0)| = |\Lambda(\theta = \pi)|$, donde se deja explícito que Λ no depende de r en $\theta = 0, \pi$, como puede deducirse de (4.27). En [18] se muestra que este horizonte de Killing es una superficie marginalmente atrapada.

Como se anticipó, esta métrica posee una rotación, que se ve reflejada a simple vista en la presencia de un término cruzado $g_{\phi t}$. Esto es porque, dado que ∂_ϕ es un vector de Killing, p_ϕ se conserva; pero $p_\phi = g_{\phi\phi} p^\phi + g_{\phi t} p^t$, por lo que una partícula con $p^t \neq 0$ (cualquier partícula) rota con $p^\phi \neq 0$ por un efecto de arrastre de la métrica, gracias a que $g_{t\phi} \neq 0$. Esta es una rotación intrínseca que posee la métrica, en el sentido de que no es producto de una elección de carta. Nótese que la elección de gauge $\omega_H = 0$ en (4.29) es tal que $\omega(r = r_+, \theta) = 0$. Esto corresponde a elegir una carta en la que un observador que está posicionado justo en el horizonte $r = r_+$ no es arrastrado rotacionalmente (así se simplificará el cálculo de las cargas en dicho horizonte).

El grupo de isometrías de la solución RNM es $\mathbb{R} \times \text{SO}(2)$, correspondiente a las traslaciones temporales y rotaciones alrededor del eje z , cuyos generadores son los vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ , respectivamente. Nótese que la métrica no es estática, sino estacionaria, por la componente de la métrica $g_{\phi t} \neq 0$ de la que se habló más arriba.

Otra particularidad de la métrica (4.26) es que posee singularidades cónicas en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Se llama singularidad cónica a un punto del espacio-tiempo que se parece a la punta de

⁶Esta manera de escribir el campo electromagnético es recurrente en la bibliografía, ya que es posible derivarlo directamente del campo escalar complejo Φ (4.7).

un cono, en el sentido de que si se transporta paralelamente un vector alrededor de una curva infinitesimal cerrada que encierra a la singularidad, este vector cambia de orientación (incluso aunque la métrica sea localmente plana alrededor de la singularidad). Esto puede verificarse de la siguiente manera. Tómesese un corte $t = \text{cte}$, $r = \text{cte}$ de la métrica. Su elemento de línea es

$$ds_{S^2}^2 = r^2 |\Lambda(r, \theta)|^2 \left(d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta d\phi^2}{|\Lambda(r, \theta)|^4} \right), \quad (4.34)$$

Si se toma un corte de circunferencia $\theta = \text{cte}$,

$$\text{circunferencia} = \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta}{|\Lambda(r, \theta)|^2} d\phi = \frac{2\pi r \sin \theta}{|\Lambda(r, \theta)|^2}.$$

Ahora bien, cuando $\theta \rightarrow 0$ el radio de la circunferencia tiende a $r\theta$, y la relación entre circunferencia y radio resulta

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{radio}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\pi \sin \theta}{\theta |\Lambda(r, \theta)|^2} = \frac{2\pi}{|\Lambda_0|^2},$$

Es sencillo mostrar que se llega a exactamente la misma relación cuando $\theta \rightarrow \pi$. Esto pone en evidencia la singularidad cónica que existe en ambos puntos. En particular, existe un déficit angular de $\Delta\phi = 2\pi - \frac{2\pi}{|\Lambda_0|^2} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \right)$. Estas singularidades son evitables, en el sentido de que pueden deshacerse mediante una transformación de coordenadas, o bien cambiando la periodicidad de la variable ϕ . Ambas son equivalentes, pero la última es la opción elegida en este trabajo. Es decir, de ahora en más debe tenerse en cuenta que la variable ϕ está definida en el intervalo

$$\phi \in [0, 2\pi |\Lambda_0|^2]. \quad (4.35)$$

Nótese que este cambio modifica la topología del espaciotiempo en cuestión: no es un difeomorfismo. Entonces, si bien el método de Ernst nos provee de una solución específica, que es aquella cuya coordenada angular ϕ tiene una periodicidad 2π , existen infinitas soluciones diferentes que pueden obtenerse alterando esta periodicidad⁷, pero se elige aquella que no posee singularidades cónicas. Con esta definición, la circunferencia calculada más arriba queda en $2\pi r \sin \theta$ y la relación circunferencia/radio es de 2π .

Esto último debe contemplarse a la hora de calcular el área del horizonte. El elemento de volumen sigue siendo $r_+^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi$, pero los límites de integración en ϕ deben corresponder a la nueva periodicidad de la variable. Es decir,

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi |\Lambda_0|^2} \int_0^\pi r_+^2 \sin \theta d\theta d\phi = |\Lambda_0|^2 4\pi r_+^2. \quad (4.36)$$

⁷Esto no es excepcional a las soluciones que están siendo estudiadas. Podría decirse lo mismo de la redefinición de la periodicidad angular, por ejemplo, en la métrica de Minkowski: sólo se estaría introduciendo una singularidad cónica en $r = 0$, por lo que la solución global sería distinta, pero localmente, en todo otro punto, las métricas con y sin singularidad son idénticas.

Como $|\Lambda_0|^2 > 1$, el área es superior con respecto al agujero negro de Reissner-Nordström sin campo magnético, gracias al acoplamiento entre dicho campo B_0 y la carga intrínseca q (mediado, por supuesto, por la constante gravitatoria G que está igualada a 1). En la figura 4 se muestra el horizonte exterior de la métrica RNM con carga eléctrica para un conjunto de parámetros, antes y después de redefinir el periodo angular. Se ven las singularidades cónicas en los polos en el primer caso, mientras que después la geometría se torna suave.

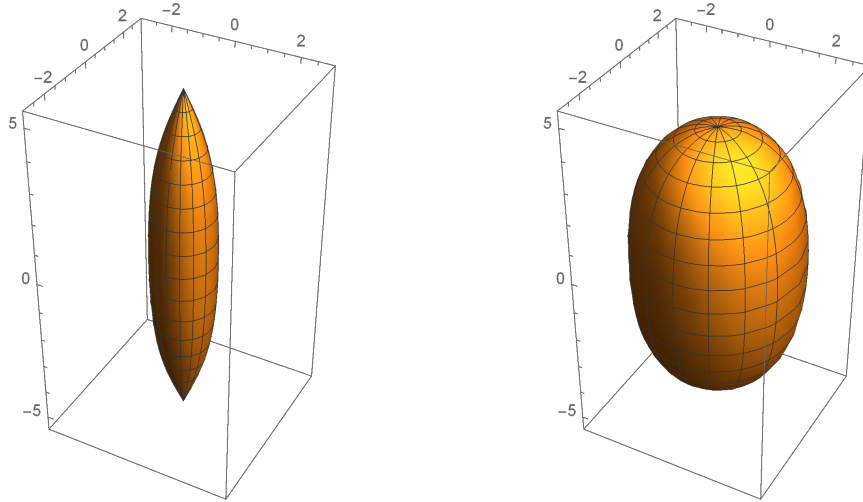


Figura 4: *Embedding* del horizonte de la métrica de Reissner-Nordström-Melvin eléctrico (4.26) con radio r_+ a $t = cte$, con $B_0 = 2r_+^{-1}$ y $q = r_+/2$. En la figura de la izquierda, el periodo de ϕ es de 2π , y se ven ambas singularidades cónicas en los polos. En la figura de la derecha se incrementa el periodo a $2\pi|\Lambda_0|^2$, lo cual permite suavizar la geometría en ambos polos. Los ejes están en unidades de $r_+/2$, y ambos en la misma escala.

La gravedad superficial del horizonte de RNM puede calcularse de (2.2), a partir del vector nulo del horizonte de Killing $\xi = \partial_t + \frac{\omega_H}{|\Lambda_0|^2} \partial_\phi = \partial_t$, resultando en

$$\kappa_{RNM} = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - q^2}}{2M^2 - q^2 + 2M\sqrt{M^2 - q^2}}, \quad (4.37)$$

que es, esta vez, idéntica a la del agujero negro de Reissner-Nordström. Recuérdese, sin embargo, que κ depende de la normalización elegida del vector de Killing en el horizonte, cuestión que será tratada más adelante, en la sección 7. Por ahora, simplemente se preserva la normalización utilizada en RN.

En [18] (ver más referencias allí) se estudian con lujo de detalle algunas propiedades de las soluciones de Melvin-Kerr-Newman (o MKN, también llamadas Ernst-Wild), que se reducen a RNM cuando el parámetro de momento angular intrínseco de Kerr-Newman es $a = 0$. Se destaca la demostración de que existe un mapa biyectivo entre soluciones no extremales de

Kerr-Newman y de MKN. Es decir, por cada solución no extremal de MKN hay una de Kerr-Newman y viceversa. Además, existen teoremas que muestran que cualquier horizonte extremal perteneciente a una cierta clase general de horizontes extremales⁸ (de los cuales el de MKN es un caso particular) es siempre isomórfico a un horizonte extremal de Kerr-Newman.

Un último comentario que puede hacerse es el hecho de que esta métrica posee una ergoregión que se extiende hacia el infinito, que no puede deshacerse con ningún cambio de coordenadas. Esto está estudiado en detalle en [16]. Como se explicó en la Sec. 2.5, las ergoregiones corresponden a regiones externas al agujero negro en las que partículas pueden orbitarlo sin caer en él, siempre y cuando posean momento angular. Se caracterizan por el hecho de que allí $g_{tt} > 0$ si t es una coordenada temporal. En la métrica de Reissner-Nordström magnetizada, $g_{tt} = -|\Lambda(r, \theta)|^2 f(r) + |\Lambda(r, \theta)|^{-2} r^2 \sin^2 \theta \omega^2(r, \theta)$. Usando coordenadas cilíndricas, con $z = r \cos \theta, \rho = r \sin \theta$, se puede hacer una expansión en potencias de z^{-1} de g_{tt} que es bastante informativa, revelándose el comportamiento de g_{tt} para valores de z muy grandes (en comparación a ρ).

$$g_{tt} = \frac{16B_0^6 q^2 (z^2 + 2Mz)\rho^2}{16 + 8B_0^2(\rho^2 + 3q^2) + B_0^4(\rho^2 + q^2)^2} + \mathcal{O}(z^0).$$

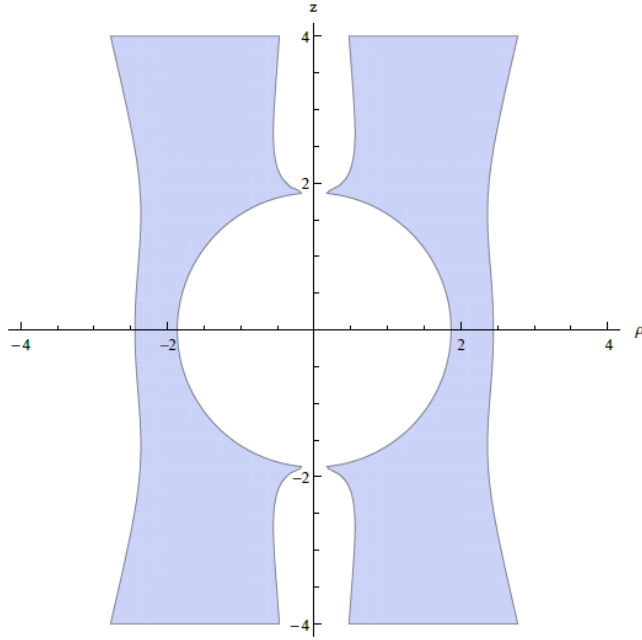


Figura 5: Sombreado, un corte diametral de la ergoregión del agujero negro de Reissner-Nordström-Melvin. La ergoregión completa es el sólido de revolución de esta superficie, rotando alrededor del eje z . Se extiende al infinito hacia arriba y abajo. Se sigue que RNM no es asintóticamente Melvin, ya que este último carece de ergoregión. Figura tomada de [16].

De inmediato se ve que g_{tt} puede ser positivo y arbitrariamente grande a medida que se

⁸Horizontes aislados extremales, de cuatro dimensiones, en espaciotiempos con $T_{\mu\nu}$ electromagnético.

incrementa $|z|$. En la Fig. 5, tomada de [16], se muestra un corte de $\phi = \text{cte}$ con la ergoregión sombreada en celeste. De esta observación es inmediato que la métrica en cuestión no es asintótica a Melvin en el infinito, pues Melvin no posee ergoregión.

4.4.2. Carga magnética

Si se utiliza como semilla del método de Ernst la métrica de Reissner-Nordström con carga magnética p , se obtiene una métrica muy parecida a Schwarzschild-Melvin (4.11),

$$ds^2 = \Lambda^2(r, \theta) \left(-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 \right) + \Lambda^{-2}(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.38)$$

aunque con otra definición de las funciones Λ y f ,

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta) - p B_0 \cos \theta, \quad (4.39)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{p^2}{r^2}. \quad (4.40)$$

El potencial vector de la solución es

$$A = \Lambda^{-1}(r, \theta) \left[\frac{1}{2} B_0 (r^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta) - p \cos \theta \right] d\phi. \quad (4.41)$$

Los horizontes de esta solución son los mismos que los de Reissner-Nordström, en virtud del resultado que se mencionó en la sección 4.2. Tal como ocurre con el agujero negro con carga eléctrica magnetizado, esta métrica presenta singularidades cónicas en los polos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Con una diferencia importante, sin embargo: el déficit angular es distinto en cada polo. En efecto

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{radio}} \Big|_{\theta \rightarrow 0, \pi} = \lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \frac{2\pi \sin \theta}{\theta |\Lambda(r, \theta)|^2} = \frac{2\pi}{|\Lambda(\theta = 0, \pi)|^2} = \frac{2\pi}{(\frac{1}{4} B_0^2 p^2 \mp B_0 p)^2}. \quad (4.42)$$

En este caso es imposible, entonces, redefinir la coordenada ϕ o cambiar su periodicidad para suavizar la métrica en los dos polos al mismo tiempo. Una de las dos singularidades es inevitable. Puede asociarse este tipo de singularidades cónicas a la presencia de una cuerda cósmica [49]. Nótese que esta singularidad es unidimensional y semi infinita, extendiéndose desde el horizonte en el polo no suavizado hacia el infinito en una línea recta, en todo punto donde $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) si eligió suavizarse $\theta = \pi$ ($\theta = 0$).

Las cuerdas cósmicas asociadas a déficits angulares tienen tensión positiva; en cambio, los excesos angulares se asocian a tensiones negativas [49]. Si se elige suavizar el polo $\theta = 0$, redefiniendo la periodicidad de ϕ a $[0, 2\pi |\Lambda(\theta = 0)|^2)$, esto resulta en una relación circunferencia/radio en $\theta = \pi$ de

$$\left(\frac{B_0 p - 4}{B_0 p + 4} \right)^2 2\pi.$$

Si $B_0 p$ es positivo, esto corresponde a un déficit angular y, por lo tanto, a una cuerda con tensión positiva. En cambio, si $B_0 p$ es negativo esta redefinición produce un exceso angular, o una cuerda con tensión negativa. Justo lo opuesto ocurre cuando se decide suavizar el polo $\theta = \pi$. Una cuerda cósmica con tensión positiva puede pensarse de manera análoga a una cuerda clásica con tensión, que *tira hacia afuera* del agujero negro. Si tuviera tensión negativa, en cambio, lo empujaría.

La inevitabilidad de una singularidad cónica en la métrica bajo estudio, entonces, tiene una interpretación física clara: es necesaria la presencia de una cuerda cósmica para mantener estático al agujero negro cargado magnéticamente, que de lo contrario se aceleraría por causa del campo magnético, y la cuerda proporciona la tensión justa para impedir su movimiento. Nótese que si se invierte el signo de pB_0 , se intercambia el rol de $\Lambda(\theta = 0)$ y $\Lambda(\theta = \pi)$. Por lo tanto, si desea mantenerse el signo de la energía de la cuerda cósmica, debe corregirse el déficit en el polo opuesto. Esto es consistente con la interpretación física dada, pues nos dice que una cuerda tensa debe atirantar desde el extremo contrario si la carga o el campo magnético cambian de signo.

En efecto, esta clase de cuerdas cósmicas aparece en universos tales como el de la C-metric y algunas de sus generalizaciones. La C-metric se interpreta como un par de agujeros negros acelerados en direcciones opuestas, precisamente por la acción de sendas cuerdas cósmicas. El análisis de esta familia de métricas que contempla, al igual que este trabajo, simetrías y cargas asintóticas en el horizonte de eventos, fue llevado a cabo recientemente [50, 51] y es complementario al presente trabajo de tesis.

5. Simetrías asintóticas

Una isometría en un espaciotiempo se define como una familia de difeomorfismos de la variedad, generado por algún campo de vectores K sobre dicha variedad tal que la métrica permanezca invariante ante estas transformaciones. Simbólicamente, $\mathcal{L}_K g = 0$ (donde \mathcal{L}_K es la derivada de Lie con respecto a K).

Dada una noción de asintótica (como la de espacio asintóticamente plano introducido en la Sec. 2.1) puede generalizarse esta definición a la de una isometría asintótica. Es decir, una familia de difeomorfismos generados por K que satisfaga $\mathcal{L}_K g = 0$, pero sólo de manera aproximada, despreciando términos que se hacen muy pequeños en la superficie asintótica (por ejemplo, en el infinito o en el horizonte). En la presente tesis se estudiarán las simetrías asintóticas en el horizonte de agujeros negros inmersos en ambientes altamente magnetizados, y sus cargas asociadas, continuando la línea de trabajo seguida en [23–27].

5.1. BMS

El grupo de isometrías asintóticas en el infinito de un espacio asintóticamente plano fue estudiado por primera vez por Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs (BMS), con la finalidad de analizar la propagación de ondas gravitacionales salientes hacia el infinito [28, 29]. La métrica de Minkowski posee 10 isometrías, es un espacio maximalmente simétrico de dimensión 4. Los vectores de Killing asociados satisfacen el álgebra de Poincaré. Los autores esperaban volver a encontrar estas isometrías para espacios asintóticamente planos; en cambio, encontraron un álgebra infinito-dimensional que tan solo contiene Poincaré como un subálgebra.

Si bien el grupo BMS no será el foco de esta tesis, es un caso ilustrativo que cuenta con abundante material bibliográfico (por ejemplo [31, 52–54]), y sirve para introducir las supertraslaciones y superrotaciones: simetrías infinito-dimensionales que surgen, aunque con ligeras variantes, tanto en BMS como en las simetrías asintóticas en el horizonte. Además, las simetrías BMS aparecen incluidas estrictamente en el álgebra de isometrías asintóticas del horizonte de agujeros negros extremales [27].

5.1.1. Las coordenadas y el gauge de Bondi

Los autores (BMS) en [28, 29] trabajaron con un conjunto de coordenadas retardadas, ya que pretendían analizar la propagación de ondas gravitacionales salientes. Sean las coordenadas cartesianas (x^0, x^1, x^2, x^3) . Se definen las *coordenadas retardadas de Bondi* (u, r, z, \bar{z}) como

$$u = x^0 - r, \tag{5.1}$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \tag{5.2}$$

$$z = \frac{x^1 + ix^2}{r + x^3}, \tag{5.3}$$

$$\bar{z} = \frac{x^1 - ix^2}{r + x^3}. \tag{5.4}$$

Las coordenadas $z^A = z, \bar{z}$ son las coordenadas estereográficas complejas y cumplen el rol de coordenadas angulares (son comunes en la literatura y se utilizarán más adelante). En estas coordenadas, la métrica de Minkowski se escribe

$$ds^2 = -du^2 - 2drdu + r^2\gamma_{AB}dz^A dz^B, \tag{5.5}$$

donde γ_{AB} es la métrica de la 2-esfera unitaria, que en estas coordenadas estereográficas es

$$\gamma_{z\bar{z}} = \gamma_{\bar{z}z} = \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2}. \tag{5.6}$$

El primer paso es imponer condiciones de gauge sobre la métrica. Son cuatro condiciones. La primera es que u sea una coordenada nula; esto equivale a pedir que la hipersuperficie de $u = cte$

sea nula (ya que las hipersuperficies nulas tienen un vector tangente nulo en todo punto). Ahora bien, la 1-forma normal a esta hipersuperficie es du , así que hay que pedir que du sea nula. Como $(du)_\mu(du)^\mu = g^{\mu\nu}(\partial_\mu u)(\partial_\nu u) = g^{uu}$, se pide

$$g^{uu} = 0. \quad (5.7)$$

La segunda y tercera condición es que las coordenadas angulares z, \bar{z} sean constantes a lo largo de geodésicas nulas de $u = cte$ (que las geodésicas nulas sean radiales). Geométricamente, esto corresponde a pedir que los dos vectores espaciales tangentes a la hipersuperficie de $u = cte$ (que posee cualquier hipersuperficie nula) sean los vectores normales a las hipersuperficies $z = cte$ y $\bar{z} = cte$. O, lo que es lo mismo, que dz y $d\bar{z}$ sean ortogonales a du . Es decir,

$$g^{uz} = g^{u\bar{z}} = 0. \quad (5.8)$$

Se hará referencia a estas primeras tres más adelante a la hora de definir las condiciones de gauge cercanas al horizonte, en la sección 5.2. Son equivalentes, además, a las condiciones $g_{rr} = g_{rz} = g_{r\bar{z}} = 0$. La cuarta y última condición de gauge de Bondi es

$$\partial_r \det\left(\frac{g_{AB}}{r}\right) = 0.$$

5.1.2. Condiciones de contorno asintóticas BMS

El siguiente paso es elegir el primer orden de *falloff* para r grande. BMS eligieron

$$\begin{aligned} ds^2 = & - du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} + \\ & + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + D^z C_{zz}dudz + D^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}}dud\bar{z} + \\ & + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{4}{3}(N_z + u\partial_z m_B) - \frac{1}{4}\partial_z(C_{zz}C^{zz}) \right) dudz + c.c. \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde D_z es la derivada covariante con respecto a la métrica de la esfera $\gamma_{z\bar{z}}$. C_{zz}, m_B y N_z son funciones que dependen de u, z y \bar{z} , pero no de r . Comparando con (5.5), se ve que los primeros tres términos corresponden a la métrica de Minkowski; el resto de los términos, pues, son las correcciones a primer orden en r^{-1} de acuerdo a estas condiciones de contorno BMS. La elipsis (...) refiere a correcciones de orden mayor. Podría parecer raro a primera vista que haya correcciones de orden $\mathcal{O}(r)$ u $\mathcal{O}(1)$, pero estas están asociadas a las variables angulares (que son adimensionales).

m_B es conocida como *Bondi mass aspect* o masa de Bondi. Como su nombre lo indica, es una medida local de masa en \mathcal{S}^+ que depende de u . Al integrarse sobre la esfera se obtiene la masa total de Bondi. De manera análoga, N_z se conoce como el aspecto de momento angular. C_{zz} describe ondas gravitacionales y se utiliza para definir el tensor de *Bondi news* como

$$N_{zz} = \partial_u C_{zz}, \quad (5.10)$$

cuyo cuadrado $N_{zz}N^{zz}$ es proporcional al flujo de energía a través del infinito nulo \mathcal{I}^+ (en analogía, por ejemplo, con el tensor de Maxwell del electromagnetismo).

5.1.3. Supertraslaciones

Dadas las condiciones de contorno (5.9) cabe preguntarse qué difeomorfismos las preservan. Es fundamental aclarar que preservar estas condiciones de contorno es un requisito bastante más relajado que preservar la métrica o, incluso, la asintótica específica de la métrica. Es decir, las funciones m_B , C_{zz} y N_z tienen permitido cambiar su forma funcional con (u, z, \bar{z}) ante el difeomorfismo. Supónganse, de momento, vectores de Killing ξ^μ con el comportamiento asintótico

$$\xi^u, \xi^r \sim \mathcal{O}(1), \quad \xi^z, \xi^{\bar{z}} \sim \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (5.11)$$

que descartan transformaciones de tipo boost/rotación (que crecen con r en el infinito) [52]. Tomando derivada de Lie de la métrica con respecto a este vector de Killing se obtiene, para r grande,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{ur} &= -\partial_u \xi^u + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{zr} &= r^2 \gamma_{z\bar{z}} \partial_r \xi^{\bar{z}} - \partial_z \xi^u + \mathcal{O}(r^{-1}), \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{z\bar{z}} &= r \gamma_{z\bar{z}} [2\xi^r + r D_z \xi^z + r D_{\bar{z}} \xi^{\bar{z}}] + \mathcal{O}(1), \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{zz} &= 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} D_z \xi^{\bar{z}} + \mathcal{O}(r), \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{uu} &= -2\partial_u \xi^u - 2\partial_u \xi^r + \mathcal{O}(r^{-1}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

La ecuación de Killing asintótica es $\mathcal{L}_\xi g = \delta g$, donde δ corresponde a una variación funcional. Esto es, se permite que las funciones C_{zz}, m_B varíen, pero el *fall-off* debe respetarse. De esta manera se preservan las condiciones de borde en el infinito (junto con las de gauge). El vector de Killing más general posible que satisface esto es

$$\xi = f(z, \bar{z}) \partial_u - \frac{1}{r} (D^z f(z, \bar{z}) \partial_z + D^{\bar{z}} f(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}}) + D^z D_z f(z, \bar{z}) \partial_r + \dots \quad (5.13)$$

Las transformaciones generadas por los vectores de Killing (5.13) son llamadas *supertraslaciones*. Si se toma $f \equiv \text{cte}$ se recuperan las traslaciones en la coordenada retardada u . Si, en cambio, se toman los armónicos esféricos con $l = 1$, se recuperan las traslaciones espaciales [52]. En general, las supertraslaciones alteran la física del universo. En particular, son capaces de modificar la energía ADM y desfasar temporalmente ondas gravitacionales que emergen en polos opuestos de \mathcal{I}^+ . Esto no es ajeno a las simetrías exactas que puede tener un sistema; por ejemplo, los boosts son difeomorfismos que modifican los momentos lineales de las partículas del universo, que son observables físicos. Es interesante, sin embargo, que en el caso de las supertraslaciones la física puede cambiar incluso cuando N_{zz}, m_B, C_{zz} son inicialmente cero, porque

C_{zz} es capaz de cambiar, lo cual se interpreta como la existencia de una familia infinita de vacíos no equivalentes en relatividad general.

Como se dijo antes, estas transformaciones en general modifican m_B , C_{zz} y N_{zz} (no hacen nada sobre N_z porque se excluyeron rotaciones y boosts). El efecto de las supertraslaciones sobre estas funciones es [52]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f N_{zz} &= f \partial_u N_{zz}, \\ \mathcal{L}_f m_B &= f \partial_u m_B + \frac{1}{4} [N^{zz} D_z^2 f + 2D_z N^{zz} D_z f + c.c.], \\ \mathcal{L}_f C_{zz} &= f \partial_u C_{zz} - 2D_z^2 f.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Estas funciones, además, están restringidas por las ecuaciones de Einstein.

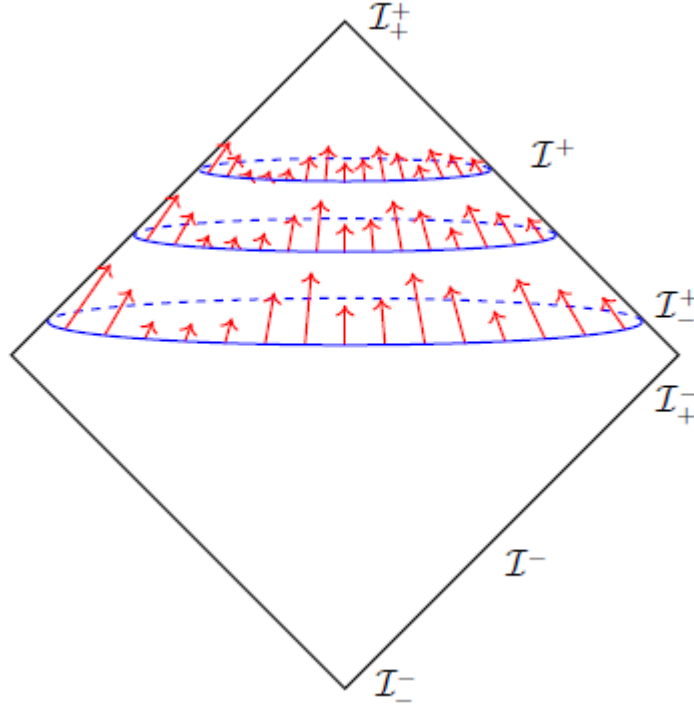


Figura 6: Representación de las supertraslaciones en el infinito conforme del espacio de Minkowski tomada de [52]. Se ve que para cada ángulo hay una flecha distinta, que representa una traslación en el tiempo retardado u . Sin embargo, para todo valor de u en un ángulo fijo, la transformación no varía.

Si se deshacen las restricciones (5.11) sobre el vector de Killing asintótico (aunque descartando algunas soluciones de acuerdo a lo que se discutirá más adelante, en la sección 5.1.4), se obtiene el grupo más general BMS^+ , que es un producto semidirecto de las supertraslaciones con las transformaciones de Lorentz en el infinito nulo \mathcal{I}^+ . Se puede decir algo análogo de las simetrías BMS^- en el infinito nulo pasado \mathcal{I}^- .

Al haber infinitas simetrías, pues, pueden definirse infinitas cargas conservadas [52]. En particular, surgen del problema de scattering de ondas gravitacionales desde \mathcal{I}^- hasta \mathcal{I}^+ y la imposición de las llamadas condiciones de *matching* de las funciones C_{zz}, m_B, N_z [53]. Cabe mencionar que estas cargas están asociadas a un fenómeno conocido como *efecto de memoria gravitacional*: el hecho de que un par de detectores de ondas gravitacionales sufren un desplazamiento relativo luego del pasaje de una onda gravitacional. Este es un fenómeno medible por interferómetros como LIGO y Virgo, que se espera observar en los próximos años [55]. Este hallazgo experimental también implicaría la verificación de la existencia de carga de supertraslación [56]. El efecto de memoria gravitacional también ha sido estudiado en el contexto de asintóticas cercanas a horizontes de agujeros negros [24].

5.1.4. Superrotaciones

Existe otro conjunto de infinitas cargas conservadas, dadas por un campo vectorial $Y^A(z, \bar{z})$ en la 2-esfera (donde $A = z, \bar{z}$, en vez de un campo escalar $f(z, \bar{z})$ como era para las supertraslaciones). Cuando Y^z es alguno de los 6 vectores de Killing conformes globales en S^2 , las cargas se corresponden al momento angular y carga de boost ADM. Estas cargas, que están asociadas a ciertas condiciones sobre la función N_z que aparece en (5.9), son denominadas *cargas de superrotación* [52].

Sin embargo, la discusión de las superrotaciones como simetrías en BMS es algo más sutil, y no se entrará en detalle aquí. En síntesis, al relajar la restricción (5.11) se obtienen vectores de Killing asintóticos, uno para cada valor de Y^z . Haciendo un procedimiento análogo al de las supertraslaciones y tomando la derivada de Lie de la métrica como en (5.12), se llega, entre otras, a la ecuación

$$\mathcal{L}_Y g_{z\bar{z}} = 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} Y^z + \mathcal{O}(r), \quad (5.15)$$

y el requerimiento de que el término de $\mathcal{O}(r^2)$ se anule para preservar la condiciones de contorno. Puede mostrarse que esto, a su vez, implica que Y^z debe ser holomorfa en z y \bar{z} . Bondi, Metzner y Sachs originalmente encontraron que las potencias z^n con $n \geq 3$ llevaban a una violación de la anulción de (5.15) en puntos aislados de la esfera celeste y por eso decidieron descartarlas. Si decide ignorarse este aparente problema, no obstante, el álgebra de Lie de $Y^z = z^n$ para cualquier n resulta ser, en vez de Lorentz, dos copias del álgebra de Virasoro [52, 57]. Las implicaciones de este grupo de simetrías extendido, en particular en lo que atañe a aplicaciones en holografía, constituyen un área de investigación activa [58–60].

5.2. Asintótica de horizonte cercano

Así como es posible establecer condiciones de contorno en el infinito nulo y estudiar las isometrías asintóticas que las preservan (y dan lugar a infinitas cargas conservadas), un tratamiento análogo puede realizarse en horizontes de Killing, que también son superficies nulas, tales como horizontes de eventos de agujeros negros. Este programa fue impulsado en la segunda mitad de la última década por las propuestas en [61, 62] relacionadas con el problema de la pérdida de información. Se han realizado varios trabajos investigando estas simetrías y cargas, a la par de nuevas propuestas y aplicabilidad de análisis a soluciones diversas e incluso teorías de gravedad más generales [23–27, 50, 51, 63–68]. Este trabajo se enfoca en la aplicación de los métodos de análisis de simetrías asintóticas en el horizonte desarrollados en [23, 24] a soluciones de agujero negro sumergidos en entornos magnetizados; en particular, las soluciones de Ernst presentadas en la sección 4. Dicho análisis resulta ser particularmente útil en soluciones como éstas debido a que permiten el cálculo de cargas sin necesidad de definir una asintótica en el infinito nulo, como sí lo requieren los métodos esbozados en la sección 2.6. En la literatura pueden encontrarse otros tratamientos diferentes, pero compatibles con los resultados a los que se arribó en este trabajo [16–22].

5.2.1. Coordenadas y condiciones de gauge

El sistema de coordenadas que se utilizará en lo que sigue, con su respectivo gauge, es análogo al de las coordenadas y gauge de Bondi utilizado para estudiar isometrías asintóticas en el infinito en la sección 5.1.1, cuya definición de manera constructiva se realiza en [69]. La principal diferencia con las coordenadas de la sección 5.1.1 es que, en el caso de un horizonte de agujero negro, los rayos de luz que interesan son entrantes, en vez de salientes; por lo tanto, se define una coordenada temporal avanzada v . Se llamará ρ a la coordenada radial, y $\Theta^A = z, \bar{z}$ a las coordenadas angulares donde, en lo que sigue, los índices latinos en mayúscula $A, B, C = 1, 2$ y $\Theta^1 = z, \Theta^2 = \bar{z}$. También podría usarse cualquier par de coordenadas angulares y, de hecho, en este trabajo se utilizará (θ, ϕ) .

Como se discutió en la sección 5.1.1, v se define como una coordenada nula. Esto quiere decir que las hipersuperficies $v = cte$ son nulas, por lo que su ecuación es $g^{\mu\nu}\partial_\mu v\partial_\nu v = 0$. Además de esto, se asume que las coordenadas angulares son constantes a lo largo de geodésicas. Es decir, $g^{\mu\nu}\partial_\mu v\partial_\nu \Theta^A = 0$. Bajo estas condiciones, sólo la coordenada ρ puede variar a lo largo de una geodésica nula; dicho de otra manera, ρ parametriza las geodésicas nulas del espaciotiempo. Es posible, entonces, exigir que ρ parametrice de manera afín dichas geodésicas [70]. Estas condiciones pueden expresarse

$$g^{vv} = 0, \quad g^{v\rho} = 1, \quad g^{vA} = 0, \quad (5.16)$$

o bien, en términos de las componentes de la métrica no invertida,

$$g_{\rho\rho}=0, \quad g_{v\rho} = 1, \quad g_{\rho A} = 0. \quad (5.17)$$

5.2.2. Condiciones de contorno en el horizonte

Considérese una hipersuperficie nula \mathcal{H}^+ en $\rho = 0$ (asumiendo $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$); este será el horizonte de Killing en las métricas que se estudiarán más adelante. Cerca de \mathcal{H}^+ , las componentes de la métrica que no están fijadas en el gauge tienen la expresión asintótica [70]

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -2\kappa\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{vA} &= \chi_A(\Theta^B)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{AB} &= \Omega_{AB}(\Theta^C) + \lambda_{AB}(\Theta^C)\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde las funciones $\kappa, \chi_A, \Omega_{AB}, \lambda_{AB}$ podrían depender del tiempo avanzado v y los ángulos Θ^A , pero no de ρ . Sin embargo, cuando \mathcal{H}^+ es un horizonte de Killing se elimina la dependencia temporal en v [70]. La función κ siempre corresponderá a la gravedad superficial [23] y, además, como se mencionó en la sección 2.3, κ es uniforme en horizontes de Killing (no depende de Θ^A), por lo que se la considerará constante en adelante. Estas condiciones de contorno son las utilizadas en [23–25] y, como allí se menciona, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que la métrica cercana a una hipersuperficie nula suave admita el desarrollo asintótico (5.18).

Nótese que en (5.18) el orden cero de g_{vA} es nulo. Esto quiere decir que, en estas coordenadas, la velocidad angular del horizonte es nula (esto no significa que el momento angular vaya a ser nulo, porque el resto del espaciotiempo puede seguir rotando).

5.2.3. Asintótica de campos electromagnéticos

Las soluciones de Ernst descritas en la sección 4 poseen campos electromagnéticos. Es necesario, pues, determinar también la asintótica del campo de Maxwell A . Esto es simplemente un desarrollo de Taylor en ρ a orden 1 [24]

$$\begin{aligned} A_v &= A_v^{(0)} + \rho A_v^{(1)}(v, \Theta^A) + \mathcal{O}(\rho^2), \\ A_B &= A_B^{(0)}(\Theta^A) + \rho A_B^{(1)}(v, \Theta^A) + \mathcal{O}(\rho^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

También se impone la condición de gauge

$$A_\rho = 0. \quad (5.20)$$

Nótese, sin embargo, que (5.19) tiene restricciones en las dependencias funcionales. En particular, $A_v^{(0)}$ se asume constante en el tiempo avanzado v y uniforme en el horizonte, mientras que $A_B^{(0)}$ también es constante en v , pero puede depender de los ángulos Θ^A .

5.2.4. Simetrías asintóticas

¿Qué transformaciones preservan las condiciones de gauge y de contorno de la métrica y el campo de Maxwell? Esta vez, además de vectores de Killing ξ asociados a difeomorfismos de la métrica, es necesario definir un parámetro de gauge ϵ para el campo A_μ . Para preservar las condiciones de gauge se requiere [25]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{\rho\rho} &= 0, \\ \mathcal{L}_\xi g_{v\rho} &= 0, \\ \mathcal{L}_\xi g_{\rho A} &= 0, \\ \mathcal{L}_\xi A_\rho + \partial_\rho \epsilon &= 0,\end{aligned}\tag{5.21}$$

y para el resto de las componentes de la métrica y el potencial electromagnético deben satisfacerse $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ y $\mathcal{L}_\xi A_\mu + \partial_\mu \epsilon = \delta A_\mu$ respectivamente para que se preserven las condiciones de contorno (5.18), donde δ expresa una variación funcional [25]. Es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{vv} &= -2\rho\delta\kappa + \mathcal{O}(\rho^2), \\ \mathcal{L}_\xi g_{vA} &= \rho\delta\chi_A + \mathcal{O}(\rho^2), \\ \mathcal{L}_\xi g_{AB} &= \delta(\Omega_{AB}) + \rho\delta\lambda_{AB} + \mathcal{O}(\rho^2), \\ \mathcal{L}_\xi A_v + \partial_v \epsilon &= \mathcal{O}(\rho), \\ \mathcal{L}_\xi A_B + \partial_B \epsilon &= \mathcal{O}(1).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Las ecuaciones (5.21) tienen como solución vectores de Killing asintóticos que, a orden ρ^2 , pueden escribirse

$$\begin{aligned}\xi^v &= f(v, \Theta^A), \\ \xi^\rho &= Z(v, \Theta^A) - \rho\partial_v f(v, \Theta^A) + \frac{\rho^2}{2}\chi_B\Omega^{BC}\partial_C f + \mathcal{O}(\rho^3), \\ \xi^B &= Y^B(v, \Theta^A) + \rho\Omega^{BC}\partial_C f + \frac{\rho^2}{2}\Omega^{BE}\Omega^{DC}\lambda_{EC}\partial_D f + \mathcal{O}(\rho^3),\end{aligned}\tag{5.23}$$

donde Ω^{AB} es el inverso de Ω_{AB} (los índices se suben con la métrica de la 2-esfera γ_{AB}) y el parámetro de gauge

$$\epsilon = U(\Theta^A) - f(v, \Theta^A)A_v^{(0)} + \rho\Omega^{BC}(\partial_C f)A_B^{(0)}(\Theta^A) + \mathcal{O}(\rho^2),\tag{5.24}$$

mientras que (5.22) implican, para el caso de la métrica, condiciones sobre las variaciones funcionales de $\kappa, \chi_A, \Omega_{AB}, \lambda_{AB}$, pero también dos condiciones para las funciones Z, Y^A , una de las cuales es (aquella correspondiente al orden cero de la segunda de las ecuaciones (5.22))

$$\chi_A Z + \partial_v Y^B \Omega_{BA} + \partial_A Z = 0.\tag{5.25}$$

Esta ecuación relaciona Z y Y^A con χ_A y Ω_{AB} ; dice, por lo tanto, que los vectores de Killing asintóticos dependen de la forma exacta de la métrica asintótica. Se asumirá, sin embargo, que no existe tal dependencia [25]. Esto sólo es posible, según (5.25), si $Z = 0$ y $\partial_v Y^B = 0$. Dado esto, la variación de las funciones $\kappa, \Omega_{AB}, \chi_A$ queda dada por

$$\begin{aligned}\delta_\xi \kappa &= 0 = \kappa \partial_v f + \partial_{vv}^2 f, \\ \delta_\xi \Omega_{AB} &= \mathcal{L}_Y \Omega_{AB}, \\ \delta_\xi \chi_A &= \mathcal{L}_Y \chi_A - 2\kappa \partial_A f - 2\partial_v \partial_A f,\end{aligned}\tag{5.26}$$

donde \mathcal{L}_Y es la derivada de Lie con respecto a Y^A . Algo análogo se puede deducir para la variación de $A_v^{(0)}$ y $A_B^{(0)}$

$$\delta_{(\xi, \epsilon)} A_v^{(0)} = 0,\tag{5.27}$$

$$\delta_{(\xi, \epsilon)} A_B^{(0)} = Y^C \partial_C A_B^{(0)} + A_C^{(0)} \partial_B Y^C + \partial_B U.\tag{5.28}$$

Nótese que en (5.26) la variación de κ se igualó a cero, precisamente porque es constante y uniforme en el horizonte de Killing. Resulta, pues, una ecuación para f con solución $f(v, \Theta^A) = T(\Theta^A) + e^{-\kappa v} X(\Theta^A)$, donde T y X son funciones arbitrarias de los ángulos. Resulta que la contribución que decae exponencialmente es de puro gauge, en el sentido de que X no contribuye a las cargas conservadas, por lo que no será de interés [24].

Las variaciones (5.26) y (5.27) generan un álgebra de Lie infinito-dimensional con un corchete de Lie modificado [24]. En particular, expandiendo T, Y^A, U en modos de Fourier,

$$\begin{aligned}T(z, \bar{z}) &= \sum_{m,n} T_{(m,n)} z^m \bar{z}^n, \\ Y^z(z) &= \sum_n z^n Y_n, \quad Y^{\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_n \bar{z}^n \bar{Y}_n, \\ U(z, \bar{z}) &= \sum_{m,n} U_{(m,n)} z^m \bar{z}^n,\end{aligned}\tag{5.29}$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$, el álgebra de Lie que forman las variaciones (5.26) se traduce en un álgebra infinito-dimensional que satisfacen los coeficientes de Fourier (5.29)

$$\begin{aligned}[Y_m, Y_n] &= (m - n) Y_{m+n}, & [\bar{Y}_m, \bar{Y}_n] &= (m - n) \bar{Y}_{m+n}, \\ [Y_k, T_{(m,n)}] &= -m T_{(m+k,n)}, & [\bar{Y}_k, T_{(m,n)}] &= -n T_{(m,n+k)}, \\ [Y_k, U_{(m,n)}] &= -m U_{(m+k,n)}, & [\bar{Y}_k, U_{(m,n)}] &= -n U_{(m,n+k)},\end{aligned}\tag{5.30}$$

donde el resto de los conmutadores son cero. Nótese que los $T_{(m,n)}$ forman un subálgebra abeliano, el álgebra de las supertraslaciones. En efecto, si se comparan los vectores de Killing cercanos al horizonte (5.23) con los supertrasladores de BMS (5.13), se ve que cuando sólo se toman los

$T_{(m,n)}$ distintos de cero, hay una analogía muy cercana entre ambos. Lo mismo ocurre con los $U_{(m,n)}$. Por otro lado, los Y_n e \bar{Y}_n forman, cada uno, una copia del álgebra de Witt, cuya extensión central es Virasoro: corresponden a las superrotaciones. Es el mismo álgebra que satisfacen las superrotaciones de BMS de la sección 5.1.4. La razón por la cual (5.30) no es el álgebra BMS es que las relaciones de conmutación que conectan las supertraslaciones con las superrotaciones en BMS [58] no es la misma en este caso.

Si sólo se enciende el modo fundamental de las supertraslaciones $T_{(0,0)}$, el vector de Killing es el correspondiente a las traslaciones temporales rígidas en v . Las cargas conservadas asociadas a esta simetría, pues, están asociadas a alguna noción de energía (como ocurría, por ejemplo, en el caso de las cargas de Komar presentado en la sección 2.6.3). Por otro lado, los modos fundamentales de las superrotaciones Y_0, \bar{Y}_0 están asociados al momento angular del agujero negro [23].

5.2.5. Cargas asintóticas

En [30] Barnich y Brandt desarrollaron una formulación covariante de simetrías asintóticas, y obtuvieron una fórmula de cargas conservadas asociadas en términos de los vectores de Killing asintóticos, demostrando un teorema análogo al primer teorema de Noether para el caso de simetrías asintóticas. En el caso bajo análisis, estas cargas resultan ser integrables [25], justamente gracias a la elección de gauge y condiciones de contorno impuestas en (5.17) y (5.18). Aplicando, pues, la fórmula de Barnich-Brandt a (5.30) se obtienen las cargas integradas

$$Q[T, Y^A, U] = \frac{1}{16\pi} \int d^2z \sqrt{|\det(\Omega_{AB})|} (2T\kappa - Y^A \chi_A - 4U A_v^{(1)} - 4A_B^{(0)} Y^B A_v^{(1)}). \quad (5.31)$$

Nótese que la función λ_{AB} no aparece en la expresión de las cargas (5.31), por lo que a la hora de hacer el desarrollo (5.18) bastará con el orden 0 de la componente g_{AB} de la métrica. Encendiendo y apagando los modos (5.29) se ve que el primer término en el integrando corresponde a las cargas de supertraslación, el segundo (y tercero) a las de superrotación y el cuarto es puramente eléctrico. El quinto término es especial porque acopla el campo eléctrico, el magnético y las superrotaciones. Las tres cosas son necesarias para que esta carga exista. Esto puede entenderse en analogía con el electromagnetismo del espacio plano, ya que si un campo en el horizonte tiene parte eléctrica radial y magnética angular distintas de cero, su vector de Poynting sería distinto de cero, por lo que el campo llevaría impulsos, y estos deben contemplarse en la conservación. Cabe aclarar que, por un efecto de arrastre, el campo electromagnético también puede dotar de momento angular a la métrica (de hecho, esto es lo que pasa en RNM), pero eso queda contemplado en el segundo/tercer término.

Se definen, entonces, las cargas asociadas a cada modo

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n &= Q[Y^z = Y_n z^n], & \bar{\mathcal{Y}}_n &= Q[Y^{\bar{z}} = \bar{Y}_n \bar{z}^n], \\ \mathcal{T}_{(m,n)} &= Q[T = T_{(m,n)} z^m \bar{z}^n], & \mathcal{U}_{(m,n)} &= Q[U = U_{(m,n)} z^m \bar{z}^n], \end{aligned} \quad (5.32)$$

y resulta ser que estas satisfacen exactamente el mismo álgebra que los modos (5.30), pero con otro corchete de Lie [25]. Llámese, en particular, a las cargas correspondientes a los modos fundamentales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^A &= Q[Y^A = 1], \\ \mathcal{T} &= Q[T = 1], \\ \mathcal{U} &= Q[U = 1]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

6. Simetrías y cargas en horizontes magnetizados

El objetivo en esta sección es aplicar el análisis de simetrías y cargas asintóticas en horizontes de Killing que se detalló en la sección 5.2 a los horizontes de las soluciones presentadas en la sección 4, correspondientes a agujeros negros sumergidos en campos magnéticos externos. El primer paso es escribir las métricas (4.11), (4.26) y (4.38) en algún sistema de coordenadas que permita un desarrollo asintótico del tipo (5.18), para posibilitar el cálculo de cargas las cargas integrables (5.31).

6.1. Schwarzschild-Melvin

Si bien el agujero negro sumergido en el campo magnético, pero *sin carga*, no es el caso de estudio más general del trabajo, es más sencillo que su homólogo cargado, por lo que sirve como ejemplo antes de analizar dicho otro caso. La solución de Schwarzschild-Melvin está dada por la métrica (4.11) y el potencial electromagnético (4.13), reescritos aquí abajo por comodidad.

$$ds^2 = \Lambda^2(r, \theta) \left(-f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 \right) + \Lambda^{-2}(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.1)$$

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad y \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (6.2)$$

$$A = \Lambda^{-1}(r, \theta) \frac{1}{2} B_0 r^2 \sin^2 \theta d\phi. \quad (6.3)$$

El cambio de coordenadas encontrado en este caso es sencillo. Se define una coordenada avanzada v tipo Eddington-Finkelstein

$$v = t + \int \frac{dr'}{f(r')}, \quad (6.4)$$

donde los límites de integración no están explícitos porque se toma la integral indefinida con constante de integración cero (esa integral es la *coordenada tortuga* que tiende a $-\infty$ cuando $r \rightarrow 2M$). Además, se define una nueva coordenada radial ρ

$$\rho = \int_{2M}^r |\Lambda(r', \theta)|^2 dr', \quad (6.5)$$

que satisface que $\rho = 0$ en el horizonte. En forma diferencial, esta transformación puede escribirse

$$\begin{aligned} dv &= dt + \frac{dr}{f(r)}, \\ d\rho &= |\Lambda(r, \theta)|^2 dr. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Estas coordenadas satisfacen el gauge (5.17). La métrica resulta

$$ds^2 = |\Lambda(r, \theta)|^2 (-f(r)dv^2 + r^2 d\theta^2) + 2dv d\rho - 2g(r, \theta)dv d\theta + |\Lambda(r, \theta)|^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.7)$$

donde la función $g(r, \theta)$ se define

$$g(r, \theta) = \int_{2M}^r \partial_\theta |\Lambda(r', \theta)|^2 dr'. \quad (6.8)$$

Desarrollando (6.7) en potencias de ρ con el mismo *falloff* que en (5.18), se obtiene

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -\partial_r f(r)|_{r=2M} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{v\theta} &= -2\partial_\theta (\log |\Lambda(r, \theta)|)|_{r=2M} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{\theta\theta} &= |\Lambda(r, \theta)|_{r=2M}^2 (2M)^2 + \partial_\rho (r^2 |\Lambda(r, \theta)|^2)|_{\rho=0} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{\phi\phi} &= |\Lambda(r, \theta)|_{r=2M}^{-2} (2M)^2 \sin^2 \theta + \partial_\rho (r^2 |\Lambda(r, \theta)|^{-2})|_{\rho=0} \sin^2 \theta \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{v\rho} &= 1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

En efecto, este desarrollo es del tipo (5.18) y se puede obtener las funciones $\kappa, \chi_A, \Omega_{AB}, \lambda_{AB}$ haciendo una comparación orden a orden. En particular, se deduce una gravedad superficial $\kappa = \frac{1}{2} \partial_r f(r)|_{r=2M} = (4M)^{-1}$, que coincide con (4.18), el valor de κ calculado a partir de la ecuación (2.2) usando la normalización $K = \partial_t$.

Se pueden calcular las cargas (5.31) asociadas a las simetrías infinito-dimensionales (5.30). Como $A_v = 0$, es inmediato que $\mathcal{U}_{(m,n)} = 0$ para todo (m, n) . Por otra parte, $\chi_\phi = g_{v\phi}^{(1)} = 0$ y $\chi_\theta = g_{v\theta}^{(1)}$ es una función impar de θ en el rango de integración de $\theta \in [0, \pi]$ (y el determinante de Ω_{AB} es par), por lo que $\mathcal{Y}^\theta = 0 = \mathcal{Y}^\phi$. La carga del modo fundamental de las supertraslaciones (es decir las traslaciones rígidas en v), \mathcal{T} , no se anula,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{|\det \Omega_{AB}|} 2\kappa d\theta d\phi.$$

Pero $\det \Omega_{AB} = (2M)^4 \sin^2 \theta = r_s^4 \sin^2 \theta$, así que

$$\mathcal{T} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{4\pi r_s^2}{4} = \frac{M}{2}, \quad (6.10)$$

que puede identificarse con el producto $T_H S_{BH}$, donde T_H es la temperatura de Hawking del agujero negro (2.26) y S_{BH} es la entropía del agujero negro de Bekenstein-Hawking (2.27). Es decir, la carga de Noether asociada a la simetría asintótica de traslaciones rígidas en el horizonte del agujero negro sumergido en un campo magnético con *back-reaction* gravitatorio es la entropía de Wald de la sección 2.8, al igual que había ocurrido para otros agujeros negros estudiados en [23–26]. Además, esta entropía no difiere de la de Schwarzschild. Esto quiere decir que la presencia de un campo magnético externo no altera la cantidad de microestados con respecto al agujero negro de Schwarzschild.

En el caso estático es sensato que las cargas de superrotación fundamentales sean cero, pues el agujero negro claramente no tiene momento angular. El campo magnético externo tampoco tiene momento angular, pues ningún campo magnético o eléctrico puros acarrearán impulso. Tampoco tendría sentido en este caso un mecanismo de producción de carga eléctrica, por lo que $\mathcal{U}_{(0,0)} = 0$ era esperable. Es meritorio, no obstante, resaltar el hecho de que, en este caso no cargado y estático, ninguna carga asociada a los modos fundamentales (ni siquiera la de energía) dependa de la presencia del campo magnético externo. No será este el escenario cuando se introduzca carga eléctrica al agujero negro.

6.2. Reissner-Nordström-Melvin magnético

El agujero negro cargado magnéticamente inmerso en el universo de Melvin tiene una métrica completamente análoga a la de Schwarzschild-Melvin (6.1), aunque con otros $\Lambda(r, \theta)$ y $f(r)$, dados por (4.39),

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta) - p B_0 \cos \theta, \quad (6.11)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{p^2}{r^2}, \quad (6.12)$$

y un campo A dado por (4.41),

$$A = \Lambda^{-1}(r, \theta) \left[\frac{1}{2} B_0 (r^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta) - p \cos \theta \right] d\phi. \quad (6.13)$$

Por este motivo, su análisis asintótico es prácticamente idéntico al de Schwarzschild-Melvin. El cambio de coordenadas encontrado para este último depende de las funciones f y Λ , pero no de su forma funcional. Por lo tanto, exactamente el mismo puede ejecutarse en este caso y la métrica en las nuevas coordenadas es también (6.7), pero redefiniendo g como la integral entre

r_+ y r , en lugar de $2M$ y r . Cerca del horizonte, usando estas coordenadas, se respetan las condiciones de contorno y de gauge (5.18) y puede escribirse igual que (6.9) cambiando $2M$ por r_+ . La gravedad superficial que se deduce es $\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+}$, exactamente la misma que Reissner-Nordström, lo cual se transparenta ya en el hecho de que el orden cero de g_{vv} no depende de B_0 . Lo único que debe hacerse para calcular las cargas es, según lo que se acaba de comentar, cambiar f, Λ y r_s en las expresiones finales. De aquí se deduce que la única carga asociada a los modos fundamentales no nula es la de supertraslaciones rígidas, que de acuerdo con (6.10) es

$$\mathcal{T} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{4\pi r_+^2}{4} = \frac{\sqrt{M^2 - q^2}}{2}. \quad (6.14)$$

Esto no difiere, nuevamente, del agujero negro de Reissner-Nordström en el espacio plano. Cuando el agujero negro se hace extremal tiende a cero porque la temperatura de Hawking lo hace $T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \rightarrow 0$. Todos los comentarios que se hicieron en la sección anterior con respecto a Schwarzschild-Melvin son válidos también para este caso.

6.3. Reissner-Nordström-Melvin eléctrico

6.3.1. Gauge y condiciones de contorno asintóticas

Ahora sí, se procederá a implementar el análisis de cargas asintóticas a la solución de agujero negro no rotatorio, cargado eléctricamente, inmerso en un campo magnético externo con *back-reaction* gravitatorio, dado por la métrica (4.26) y el potencial electromagnético (4.30), reescritos aquí abajo por conveniencia.

$$ds^2 = |\Lambda(r, \theta)|^2 \left(-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 \right) + |\Lambda(r, \theta)|^{-2} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega(r, \theta)dt)^2, \quad (6.15)$$

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{1}{B_0} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}(\Lambda(r, \theta))}{|\Lambda(r, \theta)|} \right) \left(\frac{\text{Re}(\Lambda(r, \theta)) - 2}{|\Lambda(r, \theta)|} \right) \right], \quad (6.16)$$

$$A_t(r, \theta) = \frac{2q}{r} + \frac{3\omega(r, \theta)}{2B_0} - A_\phi(r, \theta)\omega(r, \theta), \quad (6.17)$$

donde

$$\Lambda(r, \theta) = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta) - i B_0 q \cos \theta, \quad (6.18)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (6.19)$$

$$\omega(r, \theta) = B_0 q \left[-\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_+} \right) + \frac{B_0^2}{2} \left(r - r_+ + r f(r) \cos^2 \theta \right) \right] + \omega_H. \quad (6.20)$$

Igual que como se hizo en las secciones previas para las soluciones de Schwarzschild-Melvin y RNM magnético, es necesario poner la métrica (6.15) en coordenadas que satisfagan el gauge

(5.17) y permitan el desarrollo asintótico (5.18). Si bien existe un resultado que asegura que dicho cambio de coordenadas existe [23–25], encontrarlo no siempre es tarea sencilla. El cambio de coordenadas hallado para la solución RNM es algo más intrincado que el de Schwarzschild-Melvin, pero puede mostrarse que satisface todos los requisitos. Este es

$$v = t + \int \frac{dr'}{f(r')}, \quad (6.21)$$

$$\varphi = \phi + \int_{r_+}^r \frac{\omega(r', \theta)}{f(r')} dr', \quad (6.22)$$

$$\rho = \int_{r_+}^r |\Lambda(r', \theta)|^2 dr', \quad (6.23)$$

de manera tal que $\rho = 0$ y $\varphi = \phi$ en el horizonte $r = r_+$. En forma diferencial, estas transformaciones se escriben

$$\begin{aligned} dv &= dt + \frac{dr}{f(r)}, \\ d\varphi &= d\phi + \frac{\omega(r, \theta)}{f(r)} dr + h(r, \theta) d\theta, \\ d\rho &= |\Lambda(r, \theta)|^2 dr + g(r, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde se definieron las funciones

$$h(r, \theta) = \int_{r_+}^r \frac{\partial_\theta \omega(r', \theta)}{f(r')} dr', \quad (6.25)$$

$$g(r, \theta) = \int_{r_+}^r \partial_\theta |\Lambda(r', \theta)|^2 dr', \quad (6.26)$$

que se anulan en el horizonte exterior $r = r_+$. Haciendo, pues, el desarrollo asintótico en las cercanías del horizonte en estas coordenadas, la métrica resulta

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -\partial_r f(r)|_{r=r_+} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{v\theta} &= -2\partial_\theta (\log |\Lambda(r, \theta)|)|_{r=r_+} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{v\varphi} &= -|\Lambda_H(\theta)|^{-4} r_+^2 \sin^2 \theta \partial_\theta \omega(r, \theta)|_{r=r_+} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{\theta\theta} &= |\Lambda_H(\theta)|^2 r_+^2 + \partial_\rho (|\Lambda(r, \theta)|^2 r^2)|_{\rho=0} \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{\varphi\varphi} &= |\Lambda_H(\theta)|^{-2} r_+^2 \sin^2 \theta + \partial_\rho (|\Lambda(r, \theta)|^{-2} r^2)|_{\rho=0} \sin^2 \theta \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{\theta\varphi} &= |\Lambda_H(\theta)|^{-4} r_+ q B_0^3 \sin^3 \theta \cos \theta \rho + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{v\rho} &= 1, \\ g_{\rho\rho} &= g_{\rho\theta} = g_{\rho\phi} = 0, \end{aligned}$$

donde $\Lambda_H(\theta) = \Lambda(r = r_+, \theta)$ es el valor que toma $\Lambda(r, \theta)$ en el horizonte. Este desarrollo, en efecto, satisface (5.17) y (5.18). La gravedad superficial que se deduce de aquí es $\kappa = -\frac{1}{2} g_{vv}^{(0)} =$

$\frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r_+^2} - 2 \frac{q^2}{r_+^3} \right) = \frac{r_+ - M}{r_+^2}$, coincidiendo nuevamente con (4.37), el resultado obtenido a partir de la ecuación (2.2) usando la normalización $K = \partial_t$.

El potencial electromagnético, por otro lado, también debe ser reescrito en las nuevas coordenadas y, además, debe elegirse algún gauge que satisfaga la condición (5.20). Usando (6.24) para reemplazar dt y $d\phi$, se obtiene

$$A = A_t dv - \frac{1}{f(r)} (A_t + \omega(r, \theta) A_\phi) dr + A_\phi d\varphi - A_\phi h(r, \theta) d\theta. \quad (6.27)$$

A partir de (6.24) también puede verse que $A_r = 0 \Rightarrow A_\rho = 0$. Por lo tanto, bastaría con encontrar un gauge en el que $A_r = 0$. Ya que cualquier transformación del tipo $A \mapsto A + d\zeta$ es una transformación de gauge, se puede utilizar en particular

$$\zeta(r, \theta) = - \int_{r_+}^r A_r(r', \theta) dr' = \int_{r_+}^r \frac{1}{f(r')} (A_t + \omega(r', \theta) A_\phi) dr', \quad (6.28)$$

de manera tal que $d\zeta = -A_r(r, \theta) dr + \partial_\theta \zeta(r, \theta) d\theta$ y el nuevo A queda

$$A = A_t dv + A_\phi d\varphi - \left(A_\phi h(r, \theta) - \partial_\theta \zeta(r, \theta) \right) d\theta, \quad (6.29)$$

con $\partial_\theta \zeta(r, \theta) = \frac{3}{8} B_0^2 q (r^2 - r_+^2) \sin 2\theta$, que se anula en el horizonte. Este sí satisface el gauge $A_\rho = 0$. El desarrollo asintótico del campo (6.29) es

$$\begin{aligned} A_\theta^{(0)} &= 0, \\ A_\varphi^{(0)} &= A_\phi(r = r_+), \\ A_v^{(0)} &= A_t(r = r_+), \\ A_v^{(1)} &= |\Lambda_H(\theta)|^{-2} \left[\frac{q}{r_+^2} + \frac{3B_0^2 q}{4} \left(1 + r_+ \partial_r f(r)|_{r=r_+} \cos^2 \theta \right) - \partial_\theta \omega(r, \theta)|_{r=r_+} A_\varphi^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde $A_v^{(0)}$ no depende de las coordenadas angulares, porque $A_t(r = r_+)$ no lo hace. Con esto se verifica que la solución de Reissner-Nordström-Melvin obtenida a partir del método de Ernst puede escribirse en un sistema de coordenadas que satisface las condiciones de gauge y de contorno requeridas para la integrabilidad de las cargas asintóticas (5.31). Nótese que al tomar $q = 0$ en todas las expresiones de esta subsubsección se recuperan las de Schwarzschild-Melvin, y lo mismo ocurrirá en lo que sigue.

6.3.2. Cargas asintóticas y su interpretación

Para evaluar las cargas se debe tener presente la discusión de la sección 4.4 acerca de las singularidades cónicas en los polos o, más precisamente, la consecuente modificación de la periodicidad de ϕ (4.35) necesaria para repararlas, reescrita aquí abajo

$$\phi \in [0, 2\pi |\Lambda_0|^2]. \quad (6.31)$$

Si bien la coordenada que se utilizará para calcular las cargas es la nueva coordenada φ definida en (6.22), esta coincide con ϕ justo en el horizonte, allí donde se calculan las integrales. No hace falta, por ende, calcular la periodicidad de φ para todo ρ , basta con saber que

$$\varphi \in [0, 2\pi|\Lambda_0|^2) \quad \text{cuando } \rho = 0. \quad (6.32)$$

Además, debe tenerse en cuenta que esto induce una re-normalización del vector de Killing asociado a las rotaciones en φ . Esto es porque cuando se calcula una carga conservada la normalización del vector de Killing determina la normalización de la carga conservada. En la sección 7 se tratará el asunto de la normalización de las cargas en universos sin asintóticas sencillas de manera más acabada. De momento puede decirse que, dado que en el caso de Schwarzschild-Melvin se utilizaba ∂_ϕ con un ϕ de periodicidad 2π , lo consistente en este caso sería utilizar $\partial_{\varphi/|\Lambda_0|^2}$, ya que $\varphi/|\Lambda_0|^2$ tiene periodicidad 2π . Esto equivale a redefinir $\mathcal{Y}^\varphi = Q[Y^\varphi = |\Lambda_0|^2]$.

Con esto en mente, pues, las cargas en el horizonte (5.31) asociadas a los modos fundamentales de superrotación y supertraslación resultan ser

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} B_0^2 q^2 + \frac{1}{16} B_0^4 q^4 \right) \sqrt{M^2 - q^2}, \quad (6.33)$$

$$\mathcal{Y}^\varphi = Q[Y^\varphi = |\Lambda_0|^2] = \frac{1}{2} B_0 q^3 (1 - B_0^2 q^2 - \frac{1}{16} B_0^4 q^4), \quad (6.34)$$

$$\mathcal{Y}^\theta = 0, \quad (6.35)$$

$$\mathcal{U} \equiv Q = q \left(1 - \frac{B_0^2 q^2}{4} \right). \quad (6.36)$$

Como se había anticipado, esta solución posee cargas fundamentales no nulas de superrotación (al menos en φ) y de supertraslación eléctrica, además de la carga \mathcal{T} que ya estaba presente en el caso no cargado. Esta última, al igual que en el caso de Schwarzschild-Melvin y en todas las soluciones analizadas en [23–26], corresponde a la entropía de Wald del agujero negro. En efecto, (6.33) puede escribirse alternativamente

$$\mathcal{T} = |\Lambda_0|^2 \frac{r_+ - r_-}{4} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\mathcal{A}}{4} = T_H S_{BH}, \quad (6.37)$$

usando las expresiones (4.36) y (4.37) del área \mathcal{A} y κ , respectivamente. Esta carga sí depende del campo magnético externo a través del factor $|\Lambda_0|^2$ que aparece en el área y puede rastrearse hasta la redefinición de ϕ para remover las singularidades cónicas en los polos. Sin embargo, lo hace sólo en virtud de un acoplamiento con q , y tanto B_0 como q aparecen en potencias pares, lo cual es indispensable para que invertir el signo del campo magnético o la carga eléctrica no invierta el signo del área. La carga se reduce a $M/2$ cuando $q \rightarrow 0$ y va como $(B_0 q)^4$ cuando el producto $B_0 q \gg 1$. Esta última condición, restituyendo las constantes fundamentales, es $B_0 q \gg c^4/G \sim 10^{44}$ N. Cabe preguntarse si es realizable un límite en el que $B_0 q \sim c^4/G$ siquiera

en los escenarios más extremos, como las vecindades de una *magnetar*. Dado que los campos allí son del orden de $10^{14} - 10^{15}$ gauss [9], se necesitaría de una carga del orden de 10^{20} C para alcanzar este límite. Los astros más cargados podrían tener a lo sumo hasta 100 C de carga por masa solar [71], así que se necesitaría un agujero negro de $10^{18} M_{\odot}$, que no sólo no ha sido observado, además tendría una escala espacial mucho mayor que la del campo magnético de la estrella en cuestión.

La carga asociada al modo fundamental de las supertraslaciones del campo de gauge \mathcal{U} dada por (6.36) coincide con la carga eléctrica reportada en la literatura (por ejemplo [16, 17, 19]). Allí, en particular, dicha carga se calcula como la integral (2.8), es decir, $Q = (4\pi)^{-1} \int *F$. Esta carga sólo depende de B_0q cuadráticamente y posee un factor q global. Se reduce a q cuando $B_0 = 0$. Es curioso que el término cuadrático en B_0q tenga coeficiente negativo. Esto tiene la consecuencia de que, si hay campo magnético presente, aumentar demasiado el parámetro de carga q de Reissner-Nordström en un sentido puede llevar a una carga física $Q \equiv \mathcal{U}$ en el sentido contrario. De hecho, cuando $q = \pm \frac{2}{B_0} \equiv \pm \bar{\rho}$ la carga física se anula⁹. Este hecho llamativo tiene una interpretación en el acrecimiento de carga debido a la rotación del espaciotiempo. En [45] se muestra que un agujero negro de momento angular J , estacionario y axisimétrico, sumergido en un campo magnético externo sin *back-reaction* gravitatorio, atrae y acumula carga eléctrica. Allí se define un potencial de inyección ϵ , que es la diferencia de energía de una partícula de carga eléctrica e y cuadrivelocidad U_{μ} entre el infinito y el horizonte (en el eje de simetría¹⁰). La energía es simplemente $E = -P_t$, donde P_{μ} es el cuadrimomento $P_{\mu} = mU_{\mu} - eA_{\mu}$. Por lo tanto, la contribución electromagnética al potencial de inyección es

$$\epsilon = e \left(A_t^{(H)} - A_t^{(\infty)} \right).$$

Cuando este potencial es distinto de cero, las cargas (positivas o negativas, dependiendo del signo del potencial) se verán atraídas desde el infinito hacia el horizonte. Esto, a su vez, modifica los potenciales, de manera tal que el proceso de acrecimiento llega a un término cuando $\epsilon = 0$. En [45] se muestra que eso ocurre cuando $\Delta Q = 2B_0J$; esto sale de un término de potencial eléctrico en el horizonte de origen general-relativista que, recuperando constantes, va como $B_0J\frac{G}{c^3}$, y en el infinito cae a cero. Ahora bien, la carga angular en φ (6.34), correspondiente al momento angular J , va como B_0q^3 a primer orden no nulo, por lo que sería $\Delta Q \sim B_0^2q^3$. Este es el orden de la corrección a la carga q en la expresión obtenida para la carga eléctrica, (6.36). Hay una diferencia de signo y de coeficiente, además de no estar teniendo en cuenta los otros dos términos

⁹Como se discutió en el párrafo anterior, sin embargo, esta carga es inasequible en cualquier escenario astrofísico real.

¹⁰En [72] se critica este método porque el potencial ϵ es dependiente del camino, pero su resultado difiere en un factor de proporcionalidad.

de la carga angular (6.34). El problema del signo se resolverá a continuación, cuando se discuta la carga angular. Con respecto al coeficiente y los otros términos, debe tenerse en cuenta que, en este caso, la carga Q y el momento angular J son interdependientes de una manera distinta, por lo que es esperable que los factores no sean los mismos. En conclusión, la corrección a la carga eléctrica en (6.36) proviene del crecimiento de carga debido a la rotación producida por la interacción entre la propia carga eléctrica y el campo magnético externo, que se estudiará mejor en lo que sigue.

Antes de interpretar la carga angular en φ (6.34), será necesario entrar en una discusión acerca de la elección de gauge del campo potencial A_μ y su relevancia en la definición de la carga angular. En [17] se estudia en detalle la termodinámica de los agujeros negros de Kerr-Newman magnetizados por las transformaciones de Harrison, de los cuales (6.15) es un caso particular. En particular, se calcula el momento angular utilizando el procedimiento de Wald para cálculo de cargas en el horizonte [44]. Los autores exponen el hecho de que el momento angular no es independiente de la elección de gauge. En particular, si se realiza la transformación de gauge $A \mapsto A + d\lambda$, con $\lambda = \bar{\lambda} + c\phi$, con c una función de los parámetros de la solución¹¹, el momento angular también sufre una transformación

$$J \mapsto J + cQ|\Lambda_0|^2, \quad (6.38)$$

donde Q es la carga eléctrica física. Por lo tanto, la elección de la constante de gauge c no es inocua a la hora de describir la física del problema. En [17] se muestra que sólo una de ellas permite una solución completamente regular, aquella en la que la componente ϕ de A_μ se anula en el eje de simetría. Para ello, debe elegirse el gauge

$$c = -A_\phi(r_+, \theta = 0) = -A_\phi(r_+, \theta = \pi),$$

de manera tal que, al hacer el cálculo de (6.38), resulta

$$\mathcal{Y}^\varphi \equiv J = -q^3 B_0 \text{Re}(\Lambda_0) = -q^3 B_0 \left(1 + \frac{1}{4} q^2 B_0^2\right). \quad (6.39)$$

Este resultado, interpretado como momento angular del agujero negro, sí coincide con aquel obtenido en la literatura [17, 19]. Además, el signo negativo con respecto al producto qB_0 y el hecho de que aún $J = \mathcal{O}(q^3 B_0)$ es compatible con la interpretación sobre la corrección a la carga eléctrica en (6.36) debido al crecimiento, de la que se habló anteriormente.

En la sección 4.4 ya se había discutido el hecho de que la métrica de RNM posee un término cruzado, lo cual puede entenderse como una rotación de la métrica. Esta, además, es intrínseca,

¹¹ $\bar{\lambda}$ es una función de tres variables en el formalismo de reducción dimensional de Kaluza-Klein implementado en [17].

en el sentido de que no puede desaparecer con la mera aplicación de un difeomorfismo (algo análogo a lo que ocurre, por ejemplo, con la rotación de un agujero negro de Kerr). Dicha rotación se ve reflejada en el momento angular del agujero negro (6.39). Es notable que, sin embargo, la métrica de Reissner-Nordström, la cual cumple el rol de semilla en las transformaciones de Harrison para obtener la solución bajo estudio, no posee momento angular intrínseco. No ocurría lo mismo con la solución de Schwarzschild, por lo que este efecto debe atribuirse a la presencia simultánea de carga eléctrica y campo magnético externo. En efecto, la expresión (6.39) resulta ser un polinomio del producto de la carga y el campo, qB_0 , sólo con términos impares. Esto último es razonable: implica que al invertir el signo de q o B_0 por separado se invierte la dirección del momento angular en z . Se argumentó en la sección 4.4 que la rotación debe tener su origen en el efecto de *frame-dragging* producido por la densidad de momento angular que el campo electromagnético de la solución posee, en virtud de su vector de Poynting no nulo (entendido como las componentes T^{0i} del tensor de energía-momento), y tanto invertir el signo de la carga q como el del campo B_0 por separado deberían producir una inversión del vector de Poynting y, en consecuencia, de la densidad de momento angular del campo. Este fenómeno se relaciona con otro conocido: al acercar adiabáticamente un monopolo magnético(eléctrico) a un agujero negro de Reissner-Nordström eléctrica(magnética)mente cargado, éste último adquiere momento angular [73].

El hecho de que la carga angular en θ sea nula puede entenderse fácilmente por las simetrías de la solución: al ser axisimétrica, el momento angular no puede tener ninguna componente preferencial fuera del eje.

7. Termodinámica de Reissner-Nordström-Melvin

En la sección 2.7 se habló acerca de la termodinámica de agujeros negros en general, definiéndose una entropía, temperatura, y estableciendo una realización de la primera ley de la termodinámica en la ecuación (2.24), es decir

$$d\mathcal{M} = \frac{\kappa}{8\pi}d\mathcal{A} + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (7.1)$$

Aquí se ve que la carga Q , el momento angular J y el área \mathcal{A} son potenciales termodinámicos del sistema y κ, Ω, Φ son las variables termodinámicas conjugadas que corresponden a la temperatura, la velocidad angular y el potencial electrostático, respectivamente. En la sección 6.3.2 se obtuvieron expresiones para \mathcal{A}, J y Q , pero nada se dijo acerca de la masa del agujero negro \mathcal{M} (se utiliza fuente caligráfica para distinguirla del parámetro M). Como se mencionó en la sección 2.6, cuando se enumeraron algunos métodos de cálculo de masa, estos usualmente hacen uso de algún límite newtoniano, lo cual es sencillo en el caso de los espacios asintóticamente

planos. La solución de RNM no es asintóticamente plana, así que a priori dichos métodos no pueden ser aplicados, al menos sin alguna modificación. Específicamente, es necesario hallar κ, Ω y Φ , pero estas variables dependen de la escala de los vectores de Killing y la elección de gauge electromagnético. Hay un conjunto infinito de vectores de Killing $K = K^t \partial_t + K^\phi \partial_\phi$, donde K^t y K^ϕ pueden ser cualquier número real porque ∂_t y ∂_ϕ son, por separado, vectores de Killing. Lo que se hace en espacios asintóticamente planos es tomar el vector de Killing de las traslaciones temporales (llámeselo k) como aquel que tiende a ∂_t cuando $r \rightarrow \infty$ (allí es temporal y tiene norma -1), es decir, sencillamente el propio $k = \partial_t$. Se usa este vector para definir la normalización del vector nulo en el horizonte de Killing ξ como $\xi = k + \Omega_H \partial_\phi$, de donde se extrae Ω_H , la velocidad angular del horizonte. Usando ξ , pues, se calcula la gravedad superficial a partir de (2.2). Por último, el potencial en el horizonte Φ_H se elige de manera tal que A_μ sea cero en el infinito. En el caso de la solución de RNM no hay vectores de Killing que sean *timelike* en todo el espaciotiempo fuera del horizonte, puesto que, como se discutió en la sección 4.4, existe una ergoregión que se extiende hacia el infinito [16]. Hay que acudir necesariamente a otros métodos para determinar K, ξ y, por consiguiente, las funciones termodinámicas κ, Ω y Φ .

En [17–19] se hacen análisis termodinámicos de la solución más general de Kerr-Newman magnetizado (MKN) del agujero negro rotatorio cargado, sumergido en un campo magnético con *back-reaction* gravitatorio. Allí se desarrollan distintas estrategias para calcular la masa de la solución e incluso llegan a resultados que difieren entre sí. En [18] Booth, Hunt, Palomo-Lozano y Kunduri (BHLK) proponen dos métodos: uno basado el formalismo de horizonte aislado [74] y otro es una implementación de la integral de Komar. Ellos mismos comparan estos dos con el método de Gibbons, Pang y Pope (GPP) [17] de reducción dimensional. En [19], Astorino, Compère, Oliveri y Vandevorde (ACOV) implementan otro método, donde se exige la condición de que la masa sea una carga integrable y se muestra que una única elección de K, ξ y Φ lo permiten.

El método GPP consiste en realizar una reducción dimensional de la solución y calcular la energía usando el método hamiltoniano de Brown-York, ya que en gravedad 2+1 las soluciones de Kerr-Newman y MKN son localmente idénticas y sólo difieren en el periodo del ángulo azimutal ϕ . De esta manera, definen una asintótica análoga a Minkowski con el período redefinido y así les es posible calcular una masa en el infinito. Esta resulta ser, para el caso RNM ($j = 0$),

$$\mathcal{M} = M \left(1 + \frac{3}{2} q^2 B_0^2 + \frac{1}{16} q^4 B_0^4 \right) = M |\Lambda_0|^2. \quad (7.2)$$

El método BHLK de horizonte aislado, por su parte, se basa principalmente en el resultado de [74] que muestra que la evolución del sistema, en el contexto de este formalismo hamiltoniano, está bien definida si y sólo si κ, Ω y $\Phi = -\xi^\mu A_\mu$ son funciones únicamente del área \mathcal{A} , el momento

angular J y la carga eléctrica Q , y satisfacen

$$\partial_J \kappa = 8\pi \partial_{\mathcal{A}} \Omega, \quad \partial_Q \kappa = 8\pi \partial_{\mathcal{A}} \Phi, \quad \partial_Q \Omega = 8\pi \partial_J \Phi. \quad (7.3)$$

Por último, se requiere que la masa \mathcal{M} sea también función únicamente de \mathcal{A} , J , Q y satisfaga una primera ley del tipo (7.1). El criterio para elegir κ , Ω , Φ es, sencillamente, que su expresión en términos de \mathcal{A} , J , Q sea exactamente la de Kerr-Newman. La masa, luego, se calcula a partir de la ley de Smarr. La expresión resultante es, para RNM ($j = 0$)

$$\mathcal{M} = M \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{q^2}{M^2} \right) q^2 B_0^2 + \frac{1}{16} q^4 B_0^4}. \quad (7.4)$$

En el mismo trabajo se propone un método alternativo usando integrales de Komar con el mismo vector de Killing temporal obtenido en el método anterior y se obtiene el mismo valor de masa \mathcal{M} . En el método de Komar, la integral de carga puede hacerse en cualquier superficie bidimensional que encierre al horizonte, mientras que en el formalismo de horizonte aislado se trabaja exclusivamente en el horizonte. Puede parecer problemático que la masa (7.4) pueda tomar valores imaginarios cuando el radicando es negativo. Sin embargo, nótese que el único término que puede ser negativo allí es el segundo, dentro del paréntesis. Cualquier agujero negro físico subextremal satisface que $M > q$, por lo que dicho factor es siempre positivo, mayor que $1/2$.

Es evidente que los métodos GPP y BHLK dan resultados distintos de masa para $B_0 \neq 0$. En [18] se pondera esta discrepancia y no se llega a ninguna conclusión final, aunque se plantea la hipótesis de que las cargas que están calculándose en ambos casos sean, en definitiva, distintas. Además de esto, las variables termodinámicas conjugadas κ , Ω , Φ también resultan diferentes en ambos métodos debido no sólo esto último, sino también a que en GPP se propone una versión de la primera ley que incluye a B_0 como potencial termodinámico:

$$d\mathcal{M}_{GPP} = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega dJ + \Phi dQ - \mu dB_0, \quad (7.5)$$

donde μ es un momento magnético y se asume que κ es el de Kerr-Newman. Esto último corresponde a una normalización del vector de Killing nulo del horizonte como la que se adoptó en la sección 4.4, en donde se obtuvo precisamente el resultado de que $\kappa_{RNM} = \kappa_{RN}$ (4.37). Dicha normalización es incompatible con el método de horizonte aislado.

Por otra parte en el método ACOV se opta por otro método distinto de los anteriores. Se llega a una primera ley del tipo (7.1) (es decir, sin dependencia con dB_0) sin necesidad de asumir asintótica plana, pero contemplando todas las posibles normalizaciones de los vectores de Killing y las combinaciones lineales entre ellos que podrían definir la isometría asociada a la carga de energía (masa). Además, se expresa $\delta\mathcal{M}$ como aquella variación de energía producida por una

variación de los parámetros de la solución $(\delta M, \delta j, \delta q, \delta B_0)$ (en el caso de RNM, el parámetro $j = 0$), nuevamente sin asumir el vector de Killing asociado a la carga. Para definir $\delta \mathcal{M}$ se utiliza el formalismo covariante de Barnich-Brandt [30], el mismo que se utilizó en este trabajo de tesis (basado, a su vez, en [23–26]), pero fuera del contexto de simetrías asintóticas en el horizonte. El requisito que se pide a estas cargas en el trabajo de ACOV es, pues, que sean integrables. Se muestra que sólo un único vector de Killing es compatible con una carga integrable y se calcula así la masa \mathcal{M} como la carga de Barnich-Brandt integrada en cualquier superficie que encierre al horizonte, asociada a la isometría generada por este Killing. Esta masa coincide con aquella obtenida mediante el formalismo de horizonte aislado de BHLK (7.4). Las expresiones de κ, Ω y Φ se deducen, además, de la normalización hallada. Resultan ser para la solución RNM ($a = 0$ en las ecuaciones (54-56) de [19])

$$\kappa = \frac{M}{\mathcal{M}} \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad (7.6)$$

$$\Omega = \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \frac{J}{r_+^2 \mathcal{M}}, \quad (7.7)$$

$$\Phi = \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \frac{M}{\mathcal{M}} Q \left[\frac{1}{r_+} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{M}{q^2} \left(|\Lambda_0|^2 - \frac{\mathcal{M}^2}{M^2} \right) \right]. \quad (7.8)$$

Cuando $B_0 = 0$ se sigue $\mathcal{M} = M, Q = q$ y $\Lambda_0 = 1$. Por lo tanto, en ese límite κ se reduce a la gravedad superficie de Reissner-Nordström, $\Omega = 0$ y $\Phi = \frac{Q}{r_+}$, el potencial electrostático en el horizonte de la distribución esféricamente simétrica de carga. Nótese que (7.6) no es la misma gravedad superficial (4.37) calculada en la sección 4.4 a partir del vector de Killing nulo $\xi = \partial_t$. Además, la velocidad angular (7.7) no es la velocidad angular del horizonte (que es cero ya que $\Omega_H = \omega_H/|\Lambda_0|^2 = 0$), así como el potencial eléctrico Φ (7.8) no es $\Phi_H = -A_v^{(0)}$, el potencial eléctrico en el horizonte. Estas funciones termodinámicas, como se ha dicho, fueron elegidas para que la masa $\delta \mathcal{M}$ sea integrable, y coinciden con las halladas mediante el método BHLK.

En [19] se muestra, también, que la masa de BHLK/ACOV (7.4) satisface la relación de Christodolou-Ruffini [75]

$$\mathcal{M}^2 = \left(M_{\text{irr}} + \frac{q^2}{4M_{\text{irr}}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{irr}}^2}, \quad (7.9)$$

donde se define la masa irreducible $M_{\text{irr}}^2 = \frac{S}{4\pi}$. Esta ecuación habla de la cantidad de energía extraíble (a través de algún proceso) del agujero negro en forma de momento angular o carga eléctrica, ya que si bien M_{irr} sólo puede crecer o permanecer constante (esto último en procesos reversibles), \mathcal{M} puede decrecer si tanto Q como J decrecen. Nótese que el campo magnético no aparece explícitamente, sino de manera indirecta a través de Q, J y S . La masa de RNM, por ende, es idéntica a aquella de un agujero negro de Kerr Newman con entropía S , carga Q y momento angular J .

En el trabajo de ACOV se ofrece un argumento para inclinar la balanza en favor de la expresión (7.4) para la masa. Allí se calcula el límite extremal y se lo compara con un método independiente que estudia la geometría cercana al horizonte de agujeros negros Melvin-Kerr-Newman extremales [22, 76]. Ambas expresiones coinciden, pero no ocurre lo mismo con la masa GPP (7.2). Por otra parte, en el paper de GPP (que es anterior) se muestra que el orden más bajo en q del momento magnético μ , cuando $Bq \ll 1$, coincide con el conocido para agujeros negros estacionarios y axisimétricos [45]. Sin embargo, ACOV muestran que hay una familia de termodinámicas consistentes que se obtiene cuando se considera una primera ley del tipo (7.5), y todas satisfacen esa condición del momento magnético, siendo la termodinámica de GPP sólo una de ellas, que en particular no satisface el límite extremal mencionado.

En los tres trabajos citados, no obstante, se llega a las mismas expresiones de J, Q y \mathcal{A} , y estas coinciden con las obtenidas en la sección 6.3.2 del presente trabajo de tesis. Es por esto que tanto la expresión de masa (7.2) como (7.4) son compatibles con los resultados de la tesis, si se opta por una primera ley con y sin variación explícita de B_0 , respectivamente, aunque con la elección de vectores de Killing adecuada en cada caso. Ahora bien, es cierto que la carga traslacional (6.33) se calculó asumiendo un vector de Killing temporal ∂_t y esto no es compatible con los métodos BHLK y ACOV, donde se permite una normalización $\alpha\partial_t$, y la correcta resulta ser $\alpha = \frac{M}{\mathcal{M}}$ (que se reduce a 1 cuando $B_0 = 0$). Sin embargo, esto sólo modifica la definición de κ a (7.6), la entropía del agujero negro sigue siendo la de Bekenstein-Hawking $S_{BH} = \mathcal{A}/4$. Tras todas estas consideraciones, posiblemente la masa BHLK/ACOV (7.4) sea la que más se ajusta a una definición de masa deseable.

8. Conclusiones

Las soluciones de Ernst-Wild, correspondientes a agujeros negros rotatorios, cargados y sumergidos en un campo magnético intenso tipo Melvin, pueden considerarse de interés por su potencial capacidad de modelar escenarios astrofísicos como el de un sistema binario de una *magnetar* y un agujero negro estelar [10], además de que actualmente se están realizando estimaciones más precisas del campo magnético en núcleos galácticos [6–8] y el medio intergaláctico [5]. Con estas motivaciones, en esta tesis se realizó una revisión de estas soluciones, en particular del agujero negro cargado y magnetizado de Reissner-Nordström-Melvin, y se propuso la extensión del método de cálculo de cargas en el horizonte desarrollado en [23–27] a estos agujeros negros. La enorme ventaja de haber implementado este método es que permitió eludir el problema de la falta de una asintótica estándar en el infinito y se obtuvieron resultados que coinciden con la literatura [16–19].

De la solución RNM con carga eléctrica se pueden destacar algunas cosas. Esta tiene los mis-

mos dos horizontes de Killing, uno interno y otro externo, que el agujero de Reissner-Nordström sin magnetizar. En esta tesis se estudió el horizonte externo en $r = r_+$. Sin embargo, su área es más grande que el área del de RN. Esto puede rastrearse a una redefinición del periodo angular $\phi \in [0, 2\pi|\Lambda_0|^2)$ que fue necesario hacer para evitar singularidades cónicas en los polos que surgen al hacer las transformaciones de Harrison sobre RN en las coordenadas típicas. Notablemente, el agujero negro RNM posee rotación intrínseca, a pesar de que RN no. Se interpreta esto como un efecto de arrastre relativista que la densidad de momento angular del campo electromagnético ejerce sobre el espaciotiempo. Esta densidad de momento angular existe gracias a que el campo eléctrico de RN y el campo magnético de Melvin, juntos producen, en una configuración estable, un flujo de energía electromagnética que tiene componente angular (es decir, un vector de Poynting con componente angular no nula). Esta rotación se traduce, en efecto, en la existencia de una carga angular conservada, que fue capturada por el cálculo de cargas en el horizonte llevado a cabo en esta tesis. Si en vez de carga eléctrica se dota al agujero negro de carga magnética, aparece una singularidad cónica imposible de eliminar con una redefinición de periodo, que puede interpretarse como la necesidad de una cuerda cósmica que ejerza una tensión sobre el monopolo magnético para no ser arrastrado por el campo.

En primer lugar se realizó un análisis asintótico sobre la solución más sencilla de Schwarzschild-Melvin del agujero negro magnetizado sin carga. Se halló un cambio a coordenadas nulas avanzadas sencillo, que permitió establecer las condiciones de contorno requeridas para la integrabilidad de las cargas de Barnich-Brandt, como se había detallado en la sección 5.2. Se encontró, en consonancia con trabajos previos, que el modo fundamental de la carga de supertraslaciones corresponde a la entropía de Wald de la solución que, curiosamente, no depende de la presencia del campo magnético y es idéntica a la entropía de Schwarzschild. Como era de esperarse, ya que no hay ninguna fuente de impulso en ese universo, se encontró que las cargas fundamentales de superrotación son nulas. El análisis de la solución RNM magnética es prácticamente idéntico al de Schwarzschild-Melvin.

Se logró hallar también el cambio de coordenadas que permite acomodar la solución RNM eléctrico a las condiciones de contorno asintóticas y de gauge en el horizonte. Tuvieron que realizarse dos transformaciones de gauge sobre el campo A_μ para calcular las cargas de manera adecuada. La primera transformación fue necesaria para satisfacer condiciones de gauge requeridas para la integrabilidad de las cargas de Noether. La segunda transformación se hizo en virtud de que la carga de momento angular resulta no ser independiente del gauge, en particular ante transformaciones del tipo $A \mapsto A + c(M, q, B_0)d\phi$. Se eligió el gauge que regulariza la solución haciendo que A_ϕ se anule en el eje de simetría. Este también se ha utilizado en la literatura para calcular el momento angular y el resultado al que se arribó en esta tesis coincide con los

resultados allí obtenidos [16–19]. Esta es

$$J = -q^3 B_0 \left(1 + \frac{1}{4} q^2 B_0^2\right). \quad (8.1)$$

Se encontró que la carga de RNM eléctrico asociada a las supertraslaciones, igual que en los dos casos anteriores, corresponde a la entropía de Wald. A diferencia de esos otros casos, esta entropía sí depende del campo magnético. Es idéntica a la de Reissner-Nordström pero con el factor de proporcionalidad $|\Lambda_0|^2$ correspondiente a la corrección en la periodicidad de ϕ para eliminar singularidades cónicas,

$$T_H S_{BH} = \left(1 + \frac{3}{2} B_0^2 q^2 + \frac{1}{16} B_0^4 q^4\right) \frac{\sqrt{M^2 - q^2}}{2}. \quad (8.2)$$

También se calculó la carga eléctrica del agujero negro

$$Q = q \left(1 - \frac{B_0^2 q^2}{4}\right), \quad (8.3)$$

que coincide con la literatura y tiene la curiosa propiedad de que se hace negativa cuando q es demasiado positiva (y viceversa). Se interpretó que esto tiene su origen físico en el crecimiento de carga por parte de un agujero negro rotatorio, en base a un análisis hecho por Wald en [45], debido a un término de campo eléctrico que va como $B_0 J \frac{G}{c^3}$ en las cercanías del horizonte y cae a cero en el infinito, generándose así un gradiente de potencial que se anula cuando el horizonte haya absorbido suficiente carga del infinito. El momento angular encontrado es compatible con este argumento.

Por último, se discutió el cálculo de la masa del agujero negro y sus matices. El hecho de que la solución sea asintóticamente plana anula el criterio de elección del vector de Killing temporal asociado a la conservación de la energía como aquel que tiende a ∂_t en el infinito. Hay una colección infinita de vectores de Killing temporales que podrían asociarse a la energía, por lo que se necesita algún criterio para elegir uno. Se estudiaron los abordajes los tres trabajos [17–19] y en cada uno se propone una manera distinta de elegir el Killing. Como requisito principal, en todos los casos, se exige que la masa satisfaga la primera ley de la termodinámica. Esto, sin embargo, no es suficiente, porque las variables termodinámicas correspondientes a la temperatura, potencial electrostático y velocidad angular en el horizonte quedan indeterminadas: dependen de la elección del Killing mencionado más arriba. Dos de estos métodos (BHLK y ACOV) coinciden en la elección de manera independiente y llegan al mismo resultado de masa, mientras que el tercero (GPP) saca conclusiones distintas. Además de esto, BLHK y ACOV asumen una primera ley donde B_0 admite variaciones, pero no es un potencial termodinámico independiente, sino que varía a través de S, Q, J , mientras que en GPP B_0 sí se toma como potencial termodinámico, con variable conjugada μ . Dado que la la masa de BLHK/ACOV es

integrable, satisface la primera ley, satisface la relación de Christodolou-Ruffini y coincide con un límite extremal, calculado en base a un análisis de *near-horizon* hecho en [22], se considera que es razonable suponer que es una definición de masa robusta. Su expresión es

$$\mathcal{M} = M \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{q^2}{M^2}\right) + \frac{1}{16}q^4 B_0^4}. \quad (8.4)$$

Se mostró, pues, que el método de cálculo de cargas asintóticas en el horizonte de eventos implementado en esta tesis produce resultados de acuerdo con la literatura en el agujero negro de Reissner-Nordström-Melvin, una solución que podría *a priori* considerarse problemática a la hora de calcular cargas por no tener una asintótica bien conocida en el infinito. Se destaca la potencial utilidad que podría tener en otro tipo de soluciones con problemas de esta índole. La aplicación a las métricas más generales de Ernst-Wild con momento angular intrínseco queda pendiente, pero, aunque bastante más engorrosa, debería ser perfectamente realizable.

En este trabajo en particular, se ha empleado este método para estudiar las propiedades termodinámicas de agujeros negros inmersos en campos magnéticos muy intensos, entendiéndose por esto último regímenes de campo tales que la autogravitación de la energía magnética no puede ser despreciada. Se calculó la entropía de Bekenstein-Hawking, la temperatura y el momento angular de los agujeros negros en una situación tal, obteniendo las expresiones exactas que muestran cómo esas cantidades se ven afectadas por la presencia del campo magnético. Este análisis de las cargas en el horizonte de eventos revela un fenómeno de Gauss, en el sentido de que las cargas calculadas en esa región del espacio tiempo, *e.g.* el momento angular del campo electromagnético contenido en todo el espaciotiempo, resultan idénticas a las cargas calculadas con otros métodos que recurren a otras regiones del espacio. Asimismo, el resultado de esta tesis demuestra que, como ocurre con los agujeros negros de Kerr, los agujeros negros estacionarios descritos por la geometría de Ernst-Wild también exhiben un conjunto infinito de simetrías en las cercanías de sus horizontes de eventos.

Referencias

- [1] S. Brenner, G. Giribet and L. Montecchio, “The symmetries of magnetized horizons,” [arXiv:2103.06983 [hep-th]].
- [2] J. Kormendy and D. Richstone, “Inward bound: The Search for supermassive black holes in galactic nuclei,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **33** (1995), 581
- [3] R. D. Blandford and R. L. Znajek, “Electromagnetic extractions of energy from Kerr black holes,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179** (1977), 433-456
- [4] R. D. Blandford and D. G. Payne, “Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **199** (1982), 883
- [5] J. O. Chibueze, H. Sakemi, T. Ohmura, *et al.* “Jets from MRC 0600-399 bent by magnetic fields in the cluster Abell 3376.” *Nature* **593** (2021), 47-50
- [6] R. P. Eatough, H. Falcke, R. Karuppusamy, K. J. Lee, D. J. Champion, E. F. Keane, G. Desvignes, D. H. F. M. Schnitzeler, L. G. Spitler and M. Kramer, *et al.* “A strong magnetic field around the supermassive black hole at the centre of the Galaxy,” *Nature* **501** (2013), 391-394 [arXiv:1308.3147 [astro-ph.GA]].
- [7] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], “First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring,” *Astrophys. J. Lett.* **910** (2021) no.1, L12 [arXiv:2105.01169 [astro-ph.HE]].
- [8] K. Akiyama, J. C. Algaba, A. Alberdi, W. Alef, R. Anantua, K. Asada, R. Azulay, A. K. Bacsko, D. Ball and M. Baloković, *et al.* “First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. Magnetic Field Structure near The Event Horizon,” *Astrophys. J. Lett.* **910** (2021) no.1, L13 [arXiv:2105.01173 [astro-ph.HE]].
- [9] V. M. Kaspi and A. Beloborodov, “Magnetars,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **55** (2017), 261-301 [arXiv:1703.00068 [astro-ph.HE]].
- [10] Z. Stuchlík and M. Kološ, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) no.1, 32 [arXiv:1511.02936 [gr-qc]].
- [11] M. A. Melvin, “Pure magnetic and electric geons,” *Phys. Lett.* **8**, 65-70 (1964)
- [12] M. A. Melvin, “Dynamics of Cylindrical Electromagnetic Universes,” *Phys. Rev.* **139** (1965), B225-B243
- [13] K. S. Thorne, *Phys. Rev.* **139** (1965), B244-B254
- [14] F. J. Ernst, “Black holes in a magnetic universe,” *J. Math. Phys.* **17**, no.1, 54-56 (1976)

- [15] F. J. Ernst, W. J. Wild, “Kerr black holes in a magnetic universe,” *J. Math. Phys.* **17**, no.2, 182-184 (1976)
- [16] G. W. Gibbons, A. H. Mujtaba, C. N. Pope, “Ergoregions in magnetized black hole spacetimes”, *Class.Quant.Grav.* **30** (2013) [arXiv:1301.3927 [gr-qc]]
- [17] G. W. Gibbons, Y. Pang and C. N. Pope, “Thermodynamics of magnetized Kerr-Newman black holes,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.4, 044029 [arXiv:1310.3286 [hep-th]].
- [18] I. Booth, M. Hunt, A. Palomo-Lozano and H. K. Kunduri, “Insights from Melvin–Kerr–Newman spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) no.23, 235025 [arXiv:1502.07388 [gr-qc]].
- [19] M. Astorino, G. Compère, R. Oliveri and N. Vandevorde, “Mass of Kerr-Newman black holes in an external magnetic field,” *Phys. Rev. D* **94** (2016) no.2, 024019 [arXiv:1602.08110 [gr-qc]].
- [20] A. N. Aliev and D. V. Galtsov, “Magnetized Black Holes,” *Sov. Phys. Usp.* **32** (1989), 75
- [21] W. A. Hiscock, “On Black Holes in Magnetic Universes,” *J. Math. Phys.* **22** (1981), 1828
- [22] J. Bičák and F. Hejda, “Near-horizon description of extremal magnetized stationary black holes and Meissner effect,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) no.10, 104006 [arXiv:1510.01911 [gr-qc]].
- [23] L. Donnay, G. Giribet, H. A. Gonzalez and M. Pino, “Supertranslations and Superrotations at the Black Hole Horizon,” *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) no.9, 091101 [arXiv:1511.08687 [hep-th]].
- [24] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González and A. Puhm, *Phys. Rev. D* **98** (2018) no.12, 124016 [arXiv:1809.07266 [hep-th]].
- [25] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González and M. Pino, “Extended Symmetries at the Black Hole Horizon,” *JHEP* **09** (2016), 100 [arXiv:1607.05703 [hep-th]].
- [26] L. Donnay and G. Giribet, “Cosmological horizons, Noether charges and entropy,” *Class. Quant. Grav.* **36** (2019) no.16, 165005 [arXiv:1903.09271 [hep-th]].
- [27] G. Giribet, “The BMS-like symmetry of extremal horizons,” [arXiv:2011.13345 [hep-th]].
- [28] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, “Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **269** (1962), 21-52

- [29] R. K. Sachs, “Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **270** (1962), 103-126
- [30] G. Barnich and F. Brandt, “Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges,” *Nucl. Phys. B* **633** (2002), 3-82 [arXiv:hep-th/0111246 [hep-th]].
- [31] R. M. Wald, “General Relativity,” University of Chicago Press.
- [32] S. M. Carroll, “Spacetime and Geometry,” Cambridge University Press.
- [33] J. B. Hartle, “An introduction to Einstein’s general relativity,” Pearson Education (US).
- [34] D. Cassani, “Lecture Notes in Black Holes and Semiclassical Quantum Gravity,” LACES 2019.
- [35] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, “Republication of: The Dynamics of general relativity,” *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008), 1997-2027 [arXiv:gr-qc/0405109 [gr-qc]].
- [36] L. F. Abbott and S. Deser, “Stability of Gravity with a Cosmological Constant,” *Nucl. Phys. B* **195** (1982), 76-96
- [37] L. Smarr, “Mass formula for Kerr black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 71-73 [erratum: *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 521-521]
- [38] J. D. Bekenstein, “Black holes and the second law,” *Lett. Nuovo Cim.* **4** (1972), 737-740
- [39] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (1973), 2333-2346
- [40] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971), 1344-1346
- [41] L. Susskind, “The paradox of quantum black holes,” *Nature Phys.* **2** (2006) no.10, 665-677
- [42] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 161-170
- [43] P. K. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” [arXiv:gr-qc/9707012 [gr-qc]].
- [44] R. M. Wald, “Black hole entropy is the Noether charge,” *Phys. Rev. D* **48** (1993) no.8, R3427-R3431 [arXiv:gr-qc/9307038 [gr-qc]].
- [45] R. M. Wald, “Black hole in a uniform magnetic field,” *Phys. Rev. D* **10** (1974), 1680-1685
- [46] N. A. Sharp, “On embeddings of the Kerr geometry,” *Can. J. Phys.* **59**, no.5, 688-692 (1981)

- [47] F. J. Ernst, “New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II,” *Phys. Rev.* **168** (1968), 1415-1417
- [48] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, ”The large scale structure of space-time”, Cambridge University Press (1973)
- [49] A. Vilenkin and E. P. S Shellard, “Cosmic strings and other topological defects”, Cambridge University Press (1994).
- [50] L. Montecchio, “Simetrías infinito-dimensionales en pares de agujeros negros acelerados,” Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2021).
- [51] S. Brenner, G. Giribet and L. Montecchio, “A closer glance at black hole pair creation,” [arXiv:2103.05782 [hep-th]].
- [52] A. Strominger, “Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory,” [arXiv:1703.05448 [hep-th]].
- [53] A. Strominger, “On BMS Invariance of Gravitational Scattering,” *JHEP* **07** (2014), 152 [arXiv:1312.2229 [hep-th]].
- [54] D. G. Delmastro, “BMS in higher space-time dimensions and Non-relativistic BMS,” [arXiv:1708.07564 [hep-th]].
- [55] O. M. Boersma, D. A. Nichols and P. Schmidt, “Forecasts for detecting the gravitational-wave memory effect with Advanced LIGO and Virgo,” *Phys. Rev. D* **101** (2020) no.8, 083026 [arXiv:2002.01821 [astro-ph.HE]].
- [56] A. Strominger and A. Zhiboedov, “Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems,” *JHEP* **01** (2016), 086 [arXiv:1411.5745 [hep-th]].
- [57] D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski and A. Strominger, “Semiclassical Virasoro symmetry of the quantum gravity \mathcal{S} -matrix,” *JHEP* **08** (2014), 058 [arXiv:1406.3312 [hep-th]].
- [58] G. Barnich and C. Troessaert, “Aspects of the BMS/CFT correspondence,” *JHEP* **05** (2010), 062 [arXiv:1001.1541 [hep-th]].
- [59] L. Donnay, S. Pasterski and A. Puhm, “Asymptotic Symmetries and Celestial CFT,” *JHEP* **09** (2020), 176 [arXiv:2005.08990 [hep-th]].
- [60] L. Donnay, G. Giribet and F. Rosso, “Quantum BMS transformations in conformally flat space-times and holography,” *JHEP* **12** (2020), 102 [arXiv:2008.05483 [hep-th]].

- [61] S. W. Hawking, “The Information Paradox for Black Holes,” [arXiv:1509.01147 [hep-th]].
- [62] S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.23, 231301 [arXiv:1601.00921 [hep-th]].
- [63] S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, “Superrotation Charge and Supertranslation Hair on Black Holes,” JHEP **05** (2017), 161 [arXiv:1611.09175 [hep-th]].
- [64] L. Donnay, G. Giribet and J. Oliva, “Horizon symmetries and hairy black holes in AdS,” JHEP **09** (2020), 120 [arXiv:2007.08422 [hep-th]].
- [65] M. Chernicoff, G. Giribet, J. Oliva and R. Stuardo, “Quasinormal modes and black hole hairs in AdS,” Phys. Rev. D **102** (2020) no.8, 084017 [arXiv:2005.04084 [hep-th]].
- [66] S. Haco, S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, “Black Hole Entropy and Soft Hair,” JHEP **12** (2018), 098 [arXiv:1810.01847 [hep-th]].
- [67] H. Afshar, D. Grumiller, W. Merbis, A. Perez, D. Tempo and R. Troncoso, “Soft hairy horizons in three spacetime dimensions,” Phys. Rev. D **95** (2017) no.10, 106005 [arXiv:1611.09783 [hep-th]].
- [68] D. Grumiller, A. Pérez, M. M. Sheikh-Jabbari, R. Troncoso and C. Zwickel, “Spacetime structure near generic horizons and soft hair,” Phys. Rev. Lett. **124** (2020) no.4, 041601 [arXiv:1908.09833 [hep-th]].
- [69] L. A. Tamburino and J. H. Winicour, “Gravitational Fields in Finite and Conformal Bondi Frames,” Phys. Rev. **150** (1966), 1039-1053
- [70] I. Booth, “Spacetime near isolated and dynamical trapping horizons,” Phys. Rev. D **87** (2013) no.2, 024008 [arXiv:1207.6955 [gr-qc]].
- [71] J. Bally and E. R. Harrison, “The electrically polarized universe,” The Astrophysical Journal, **220** (1978), 743
- [72] L. X. Li, “Electromagnetic energy for a charged Kerr black hole in a uniform magnetic field,” Phys. Rev. D **61** (2000), 084033 [arXiv:astro-ph/0001494 [astro-ph]].
- [73] C. Bunster and M. Henneaux, “A Monopole Near a Black Hole,”
- [74] A. Ashtekar, C. Beetle and J. Lewandowski, “Mechanics of rotating isolated horizons,” Phys. Rev. D **64** (2001), 044016 [arXiv:gr-qc/0103026 [gr-qc]].
- [75] D. Christodoulou and R. Ruffini, “Reversible transformations of a charged black hole,” Phys. Rev. D **4** (1971), 3552-3555

- [76] M. Astorino, “Magnetised Kerr/CFT correspondence,” *Phys. Lett. B* **751** (2015), 96-106
[arXiv:1508.01583 [hep-th]].

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir
Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2021