



Comportamiento de la energía y el momento magnético en la dinámica de partículas cargadas en campos electromagnéticos turbulentos

Bianca Balzarini

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Septiembre de 2021

TEMA: Comportamiento de la energía y el momento magnético en la dinámica de partículas cargadas en campos electromagnéticos turbulentos

ALUMNO: Bianca Balzarini

L.U. N°: 36/16

LUGAR DE TRABAJO: Grupo Flip Fluidos y Plasmas,
Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Dmitruk

CODIRECTOR o COLABORADOR: Facundo Pugliese

FECHA DE INICIACION: Septiembre de 2020

FECHA DE FINALIZACION: Septiembre de 2021

FECHA DE EXAMEN: 30 de Septiembre de 2021

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor(a) de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

Mediante la implementación de simulaciones numéricas directas con 256^3 puntos de grilla, buscamos estudiar la dinámica de flujos MHD compresibles en un régimen turbulento bajo la acción de un campo magnético guía. Simulamos además partículas de prueba inmersas en el flujo como una primera aproximación al comportamiento de las partículas individuales que conforman al fluido. Las condiciones que modelamos son relevantes para el plasma espacial, pero particularmente para el viento y la corona solar. A lo largo del trabajo nos proponemos examinar el impacto que tienen los distintos términos de ley de Ohm generalizada sobre la dinámica de las partículas. Nos interesa también su importancia relativa. El principal resultado que encontramos es una aceleración paralela al campo guía que es inusual en este tipo de fluidos y es causada por el término del gradiente de presión electrónica. Llegamos a esta conclusión analizando las distribuciones del momento magnético en función de la energía cinética de las partículas de prueba. Además analizamos que sucede con la energía cinética de las partículas, distinguiendo entre la componente paralela y perpendicular al campo guía, si se tiene en cuenta o no el efecto Hall y la presión electrónica. Para el caso con presión electrónica, que es en el cual más nos concentramos, descubrimos un aumento de la energía paralela en detrimento de la perpendicular. Con el fin de comprender la razón detrás de esto, analizamos la estadística y estructura del campo eléctrico y, en particular, del término del gradiente de presión electrónica. Encontramos que este último, a pesar de ser predominante en la dirección perpendicular, tiene un aporte más significativo a la componente paralela del campo total. Esto ayuda a explicar la aceleración paralela inusual que genera. Además, vemos que este campo está formado por estructuras finas de gran intensidad que empujan paralelamente a las partículas que pasan a través de ellas. No encontramos semejanza entre estas estructuras y las ya conocidas hojas de corriente. Por último estudiamos partículas individuales. En particular nos quedamos con aquellas que presentan una velocidad paralela considerable en comparación con la perpendicular. Mostramos que la aceleración paralela que sufren se corresponde con la estructura del campo antes descrita, es decir que experimentan un salto en su velocidad paralela al momento de pasar por una zona de gran intensidad del gradiente de presión electrónica. También descartamos que esta interacción sea de tipo pitch-angle scattering dado que se produce una energización neta en lugar de una redistribución de la energía. Formamos así una idea más clara de por qué las partículas se aceleran paralelamente al considerar el efecto de la presión electrónica, y de cuales son los mecanismos que ocasionan esta aceleración.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Pablo Dmitruk y Facundo Pugliese por guiarme a lo largo de esta tesis y estar siempre predispuestos a darme una mano. También le debo un agradecimiento especial a todo el grupo FLiP por recibirme en el transcurso de este año.

Agradezco al departamento de física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA por brindarme una educación de excelencia y un espacio en el cual desarrollarme en lo académico pero también en lo personal durante estos años. También quiero agradecer a la Argentina por hacer posible que esto suceda.

Para terminar, gracias a mi familia y amigos por el apoyo y por estar siempre. Sobre todo en este último tiempo tan complejo en que la situación global nos obligó a recurrir a la virtualidad. En particular agradecerle a las amigas y amigos que me dio la facultad, por acompañarme a lo largo de la carrera y aportar tanto a esta etapa de mi vida.

| | |
|--|-----------|
| 1. Introduccion | 1 |
| 2. Dinámica de partículas cargadas | 5 |
| 2.1. Movimiento en campos uniformes | 5 |
| 2.2. Movimiento en campos variables | 7 |
| 2.3. Invariantes adiabáticos | 8 |
| 2.4. Pitch-angle scattering | 9 |
| 3. Descripción teórica del plasma | 11 |
| 3.1. Descripción cinética del plasma | 11 |
| 3.2. Descripción del plasma como fluido | 12 |
| 3.2.1. Modelo de dos fluidos | 13 |
| 3.2.2. Modelo MHD compresible | 13 |
| 4. Fundamentos de la turbulencia | 18 |
| 4.1. Régimen turbulento | 18 |
| 4.2. Espectro de Kolmogorov | 19 |
| 4.3. Turbulencia MHD | 20 |
| 4.4. Reconexión magnética | 21 |
| 5. Simulaciones numéricas | 23 |
| 5.1. Método pseudo-espectral | 23 |
| 5.2. Evolución temporal | 26 |
| 5.3. Paralelización | 27 |
| 5.4. Partículas | 28 |
| 6. Resultados | 29 |
| 6.1. Características de las simulaciones | 29 |
| 6.1.1. Condiciones de contorno e iniciales | 29 |
| 6.1.2. Forzados | 30 |

| | |
|---|-----------|
| 6.1.3. Dinámica de las simulaciones | 30 |
| 6.2. Efecto de los distintos términos del campo eléctrico | 32 |
| 6.2.1. Relación entre el momento magnético y la energía | 32 |
| 6.2.2. Energías medias | 36 |
| 6.2.3. Estadística y estructura del campo eléctrico | 37 |
| 6.2.4. Comportamiento de las partículas de prueba | 40 |
| 7. Conclusiones | 44 |
| Bibliografía | 47 |

| | |
|---|----|
| 2.1. Movimiento de ciclotrón de una partícula de carga positiva inmersa en un campo magnético constante y un campo eléctrico nulo. Figura tomada de [3], y luego modificada. | 6 |
| 2.2. Movimiento de una partícula con carga positiva y de otra con carga negativa en un campo electromagnético constante. Se observa la deriva producida por la presencia del campo eléctrico. Figura tomada de [3], y luego modificada. | 7 |
| 4.1. Espectro de energía de un flujo turbulento neutro. Puede verse la ley de escalas del rango inercial deducida por Kolmogorov, y se ilustra la cascada de energía propuesta por Richardson. | 20 |
| 4.2. Simulación MHD tridimensional en un régimen turbulento con un campo magnético guía en la dirección \hat{z} . La escala de colores representa la densidad de corriente J_z . Las flechas indican el vector campo magnético. A la izquierda se ve un corte en el plano xz del dominio espacial. A la derecha se ve lo mismo pero en el plano xy . La figura fue tomada de [5]. | 21 |
| 6.1. Evolución de la energía cinética $\langle u^2 \rangle$ y magnética $\langle b^2 \rangle$ del plasma antes de introducir las partículas de prueba. | 31 |
| 6.2. Espectro espacial de energía cinética luego de un intervalo de $11t_0$ de simulación. Con la línea punteada se marca $E_{\text{cin}}(k) = k^{-5/3}$. Se espera que esto sea compatible con el espectro encontrado a lo largo del rango inercial, como predice la teoría de Kolmogorov. | 31 |
| 6.3. Histogramas bidimensionales, a distintos tiempos, del momento magnético en función de la energía de las 500,000 partículas de prueba. Con la escala logarítmica de colores se indica la cantidad de partículas en cada intervalo. La línea punteada corresponde a una velocidad puramente perpendicular. Se desprecia el impacto del efecto Hall y de la presión electrónica sobre las partículas. | 33 |

| | | |
|-------|---|----|
| 6.4. | Histogramas bidimensionales, a distintos tiempos, del momento magnético en función de la energía de las 500,000 partículas de prueba. Con la escala logarítmica de colores se indica la cantidad de partículas en cada intervalo. La línea punteada corresponde a una velocidad puramente perpendicular. Se desprecia el impacto del efecto Hall sobre las partículas, pero no se desprecia la presión electrónica. | 34 |
| 6.5. | Evolución de la energía cinética $\langle u^2 \rangle$ y magnética $\langle b^2 \rangle$ del plasma durante el período con partículas de prueba. Simulación hecha con efecto Hall y el término de presión electrónica. | 35 |
| 6.6. | Evolución de las energías medias de las partículas (total, perpendicular y paralela) para el caso base sin efecto Hall ni presión electrónica (naranja) y para el caso sin efecto Hall pero con presión electrónica (violeta). | 36 |
| 6.7. | Energías medias sobre todas las partículas, tanto perpendiculares como paralelas, en el instante final de la simulación ($11t_0$). Esto se muestra para la simulación base, la simulación con PE y sin Hall, con H y sin PE, y con H y PE. Además se reportan, en cada caso, los porcentajes de energía perpendicular y paralela respecto a la energía total. | 37 |
| 6.8. | Histogramas de los campos $F_{pe,x}$ y $F_{pe,z}$ en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall. | 38 |
| 6.9. | Histogramas de E'_x y E'_z en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall. | 39 |
| 6.10. | Histogramas de $F_{pe,x}/E'_x$ y $F_{pe,z}/E'_z$ en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall. | 39 |
| 6.11. | Cortes de la caja de integración a un tiempo dado mostrando el valor de $F_{pe,z}$ con la escala de colores. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall. | 40 |
| 6.12. | Valor de $F_{pe,z}$ que siente una partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris muestra cualitativamente el intervalo de tiempo en que $F_{pe,z}$ sufre un cambio significativo respecto a la media. | 41 |
| 6.13. | Energía cinética total ($ \mathbf{v} ^2$), perpendicular ($v_x^2 + v_y^2$) y paralela (v_z^2) de la partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris es la misma que aparece en la figura 6.12. | 41 |
| 6.14. | Cociente entre el momento magnético y la energía cinética de la partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris es la misma que aparece en la figura 6.12. La línea punteada en $\mu/ \mathbf{v} ^2 = 1/8$ indica que la partícula tiene velocidad puramente perpendicular al campo magnético guía. | 42 |
| 6.15. | Momento magnético en función de la energía cinética de la partícula individual. La línea gris de pendiente 1/8 indica que la velocidad es puramente perpendicular al campo magnético guía. Los puntos correspondientes a tiempo antes, durante y después de la zona gris de la figura 6.12 están graficados con distintos marcadores y colores. | 43 |

Conocemos como plasma al estado gaseoso de la materia en el cual hay una gran cantidad de partículas ionizadas. Una porción mayoritaria del universo se encuentra en este estado. Presenta un número considerable de cargas libres, aunque es aproximadamente neutro en su conjunto. En general existen varios tipos (o especies) de iones dentro del plasma, que dependerán de la composición del mismo. Todas las cargas, iones por un lado y electrones por el otro, se mueven guiadas por el campo electromagnético que ellas mismas generan. A su vez, su movimiento modifica al campo complicando así la dinámica del sistema. Si agregamos un campo externo, se genera además un movimiento colectivo de las partículas que puede dar lugar a corrientes eléctricas macroscópicas.

Si bien gran parte de la materia presente en el universo se encuentra en estado de plasma, nos es de gran relevancia el plasma expulsado por el sol hacia el medio interplanetario. No solo nos interesa por su cercanía a nosotros, sino también porque está sumergido en campos magnéticos externos y además se encuentra en un régimen turbulento. Todo esto genera una dinámica poco trivial y sumamente atractiva para estudiar. Su complejidad muchas veces implica abordar el problema desde un punto de vista numérico en lugar de hacerlo únicamente desde una perspectiva teórica. Pese a que se ha avanzado mucho en el estudio de este tipo de sistema, aún quedan aspectos del mismo que no son comprendidos en su totalidad y que por lo tanto sirven como motivación de este y otros trabajos.

Existen al día de hoy dos problemas cruciales de la física espacial cuya explicación todavía no se conoce completamente: el calentamiento coronal y la anisotropía en la aceleración del viento solar. Veamos en qué consisten. Se conoce como corona solar a la capa más externa del sol, la cual está compuesta por plasma. Sería razonable esperar que la temperatura en la corona fuera menor a aquella en las capas más internas. De hecho, esperaríamos que la temperatura disminuya con la distancia al centro del sol como un proceso adiabático. Sin embargo, en la corona solar es varios órdenes de magnitud mayor que en el interior del sol. Este es el fenómeno conocido como calentamiento coronal. Una de las posibles explicaciones es la aceleración de las partículas cargadas que forman al plasma como consecuencia del régimen turbulento en el cual

se encuentran. En tal caso ocurriría una energización que se traduce entonces en un aumento de la temperatura. Se ha estudiado y comprobado este aumento de la energía en varios trabajos, muchas veces mediante simulaciones numéricas. De cualquier forma, se estima que esta es solo una de varias maneras en las cuales el plasma de la corona solar se calienta.

Por otra parte, existen mediciones *in situ* del viento solar que exhiben una anisotropía entre las distribuciones de velocidades paralela y perpendicular al campo magnético interplanetario. En particular, se encontró una predominancia de la velocidad en la dirección perpendicular. Todavía no hay un consenso científico sobre las causas de este fenómeno; ni de la anisotropía, ni de los mecanismos encargados de acelerar al plasma perpendicularmente. Por esta razón sigue siendo un tema abierto de estudio.

Para la descripción del plasma es posible considerar la dinámica de iones y electrones individuales, lo cual se conoce como descripción cinética. Sin embargo, es computacionalmente muy costosa y no es necesario tener en cuenta un nivel de detalle tan alto para estudiar fenómenos de baja frecuencia. En este último caso nos alcanza con considerar al plasma como un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético. De esta manera queda definido un campo de velocidades, uno de densidad y uno electromagnético. A esta descripción, introducida por primera vez por Hannes Alfvén, la conocemos como magneto-hidrodinámica (MHD por sus siglas en inglés). Es una teoría extensamente utilizada en este ámbito y es muy buena para representar la macro-escala del plasma. En particular, nos vamos a centrar en la versión compresible (CMHD) dado que se sabe que la compresibilidad juega un rol central en la aceleración de las partículas que componen al plasma (ver [1]). Además, nos interesa el caso en el que tenemos un campo magnético guía. Es decir que el plasma se encuentra inmerso en un campo externo que suele ser de una magnitud mucho mayor a la del campo propio del plasma. Este es un caso habitual en plasmas espaciales, como pueden ser las magnetosferas planetarias o la corona solar.

Si bien la descripción magneto-hidrodinámica del fluido presenta varias ventajas, no nos da información sobre las partículas individuales que lo componen. Una opción para estudiar esto, más sencilla que la teoría cinética, es continuar modelando al plasma como un fluido conductor pero agregarle partículas individuales cargadas que se muevan guiadas por las fuerzas que el fluido les ejerce. El caso más sencillo, que es el que aplicaremos en este trabajo, consiste en imponer que las partículas sean afectadas por el fluido pero que no ocurra el efecto inverso. Es decir que despreciamos el impacto que tienen las partículas sobre el propio plasma. En tal caso, se dice que las partículas son *de prueba*. Este tipo de enfoque es muy común como primera aproximación al estudio de las partículas individuales que conforman el plasma.

Como ya comentamos, la situación más usual en el plasma espacial no es encontrar flujos ordenados y laminares sino todo lo contrario. Los flujos suelen ser desordenados, irregulares y sumamente complejos. Se hallan, por lo tanto, en regímenes turbulentos. Estos ocurren cuando los términos no lineales de las ecuaciones de movimiento no pueden ser despreciados. Son estos términos los que acoplan a las estructuras que se forman en las distintas escalas espaciales del fluido, transfiriendo así la energía a través de ellas. Lo más usual es que la energía se inyecte al sistema en las escalas más grandes, como puede ser la cuchara que bate una taza de café, y se transfiera luego a escalas cada vez más chicas. Al llegar a tamaños lo suficientemente pequeños, la disipación cobra importancia y la energía se pierde. Todo este proceso se conoce

como *cascada de energía*. Por otra parte, Kolmogorov demostró cómo es el espectro de energía de un flujo turbulento. En particular, encontró un gran rango de escalas en el cual el flujo de energía es invariante. Este rango se conoce como rango inercial y se encuentra entre la escala de inyección y la de disipación. Las mediciones hechas en el viento solar muestran un espectro de energía compatible con el predicho por Kolmogorov. Podemos ahora dimensionar la dificultad que implica la presencia de la turbulencia en el viento solar. Surgen fenómenos complejos que involucran distintas escalas tanto espaciales como temporales. Esto suele complicar su estudio desde un punto de vista puramente teórico.

Un aspecto muy conocido y estudiado en este tipo de sistemas en donde tenemos plasmas turbulentos en presencia de un campo magnético guía, es que se produce una energización anisótropa del flujo entre su componente paralela y perpendicular al campo guía, como es el caso del viento solar antes mencionado. Esto puede verse claramente siguiendo partículas individuales. Si en lugar de un flujo turbulento tenemos únicamente un campo guía, sabemos que las partículas realizan un movimiento circular alrededor de las líneas de campo. Sienten por lo tanto una aceleración radial. En cambio, en la dirección paralela a las líneas la velocidad es constante dado que la fuerza neta es nula. Por lo tanto, incluso en este caso sencillo tenemos una diferencia entre la aceleración paralela, que es nula, y la perpendicular, que no lo es. Si ahora incluimos además la turbulencia, existen varios trabajos que muestran una energización significativamente mayor de las partículas en el plano perpendicular al campo guía (ver [18], [5]). Y no solo es notoria la energización dispar que se observa, sino que también ocurre una energización neta llamativa que no es sencilla de explicar desde un punto de vista teórico. Este es el caso del calentamiento coronal que se da en el sol, el cual también introdujimos previamente. Si bien no está del todo claro la razón por la cual ocurre esto, es importante tenerlo en cuenta. Un modelo fiable deberá ser capaz de reproducir este comportamiento.

El objetivo de nuestro trabajo es aportar al entendimiento más profundo de flujos cargados en regímenes turbulentos y bajo la acción de un campo magnético guía. Esto lo haremos mediante simulaciones numéricas directas de los campos MHD y de 500,000 partículas de prueba. Bajo estas condiciones intentamos reproducir, al menos de forma aproximada, la dinámica presente en la corona y el viento solar. Por lo tanto, queremos que las simulaciones respeten el espectro de Kolmogorov, y que reproduzcan tanto la anisotropía entre la velocidad paralela y perpendicular como la energización neta encontrada en el plasma espacial. Nos centraremos sobre todo en estudiar el efecto que tienen los distintos términos del campo eléctrico generado dentro del plasma sobre las partículas de prueba. Intentaremos de esta manera comprender mejor cómo actúa cada uno de ellos y cuales son sus importancias relativas.

A continuación precisamos la organización de esta tesis. En el capítulo 2 discutimos los conceptos básicos sobre partículas cargadas inmersas en campos electromagnéticos. Analizamos como varía la dinámica empezando por el caso sencillo de un campo uniforme, hasta llegar al caso más complejo de un campo variable tanto espacial como temporalmente. Además nos centramos en las cantidades que se conservan para las partículas e introducimos el concepto de pitch-angle scattering, un tipo de dispersión que nos será de interés en el trabajo. En el capítulo 3 nos enfocamos en describir al plasma teóricamente. Partimos de la descripción cinética y vamos simplificando el modelo progresivamente. Pasamos por el modelo de dos fluidos, que considera a los

iones por un lado y a los electrones por el otro. Finalmente llegamos al modelo MHD compresible que toma al plasma como un único fluido. El capítulo 4 introduce los fundamentos necesarios para entender el régimen turbulento. Analizamos la teoría de Kolmogorov que describe la transferencia de energía a través de las distintas escalas espaciales. En el capítulo 5 explicamos los métodos que vamos a utilizar en las simulaciones numéricas directas. En esta línea, introducimos el método pseudo-espectral y contamos de que manera se realiza la evolución temporal de las ecuaciones. Además explicamos los detalles de la simulación de las partículas de prueba. En el capítulo 6 presentamos las simulaciones realizadas. Comenzamos primero detallando sus características y cual es su dinámica. Luego nos enfocamos en mostrar los resultados conseguidos a lo largo de las distintas simulaciones. Para terminar, el capítulo 7 resume las conclusiones a las que llegamos luego de analizar los resultados obtenidos.

Dinámica de partículas cargadas

Una primera aproximación al estudio del plasma consiste en tomar partículas cargadas *de prueba* inmersas en un campo electromagnético. De esta manera se ignora el efecto de las partículas sobre los campos y la interacción entre ellas y sólo se toman en cuenta los efectos de los campos sobre las partículas. Para entender cómo afectan estos campos al comportamiento de las partículas, vamos a comenzar considerando un campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) constante, tanto en el tiempo como en el espacio. Analizaremos el caso particular en que el campo eléctrico es nulo y que efectos produce si no lo es. Luego permitiremos que tanto \mathbf{B} como \mathbf{E} tengan variaciones espacio-temporales. Por otra parte, definiremos el concepto de invariante adiabático y veremos por qué puede ser de utilidad en este tipo de problema. Finalmente hablaremos de pitch-angle scattering, un tipo de dispersión relevante en esta clase de sistemas.

2.1. Movimiento en campos uniformes

Consideremos una partícula de masa m y carga q en un campo electromagnético uniforme (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Su dinámica no relativista puede describirse usando la ley de Lorentz,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula. Tomando las componentes de esta ecuación paralela y perpendicular al campo magnético obtenemos,

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel} \quad (2.2)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \quad (2.3)$$

Queda claro entonces que ambas componentes, paralela y perpendicular, se desacoplan. De (2.2) vemos que, en la dirección paralela, la partícula describe un movimiento con aceleración uniforme. En la dirección perpendicular, en cambio, puede deducirse fácilmente por sustitución

que la velocidad está dada por,

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \rho\Omega\{\sin(\Omega t + \gamma_0)\mathbf{e}_1 + \cos(\Omega t + \gamma_0)\mathbf{e}_2\} \quad (2.4)$$

donde $\rho = mv_\perp/qB$ se conoce como giro-radio, $v_\perp = |\mathbf{v}_\perp|$, $B = |\mathbf{B}|$, $\Omega = qB/m$ es la giro-frecuencia, γ_0 es la fase inicial de la partícula, y $\mathbf{e}_{1,2}$ son dos versores ortogonales entre sí y perpendiculares a \mathbf{B} . Este movimiento puede dividirse en una trayectoria circular alrededor del campo \mathbf{B} de frecuencia Ω , superpuesta con una deriva de velocidad constante $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Notemos que esta última velocidad es independiente de la masa y de la carga de la partícula.

Si tomamos el caso particular en que $\mathbf{E} = 0$, la aceleración paralela es nula y $\mathbf{v}_E = 0$. Esto se traduce en un movimiento helicoidal alrededor de las líneas de campo magnético, que comúnmente se conoce como ciclotrón y que está graficado en la figura 2.1. Al agregar un campo eléctrico surge una aceleración paralela y una deriva del movimiento helicoidal, perpendicular al campo \mathbf{B} . Esto está representado en la figura 2.2. El pitch-angle, o ángulo de inclinación, de la hélice se define como

$$\chi = \arctan\left(\frac{v_\perp}{v_\parallel}\right) \quad (2.5)$$

El valor de χ también determina el ángulo comprendido entre el vector velocidad y el campo magnético. Cuando $\chi = 0^\circ$, el movimiento de la partícula es únicamente paralelo a \mathbf{B} . Y sucede lo contrario para $\chi = 90^\circ$.

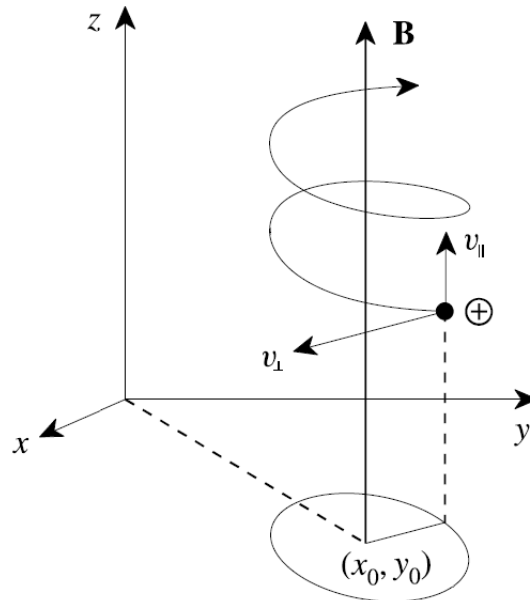


Figura 2.1: Movimiento de ciclotrón de una partícula de carga positiva inmersa en un campo magnético constante y un campo eléctrico nulo. Figura tomada de [3], y luego modificada.

Para conseguir la evolución en el tiempo de la posición de la partícula, simplemente integramos la velocidad obteniendo,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \rho \{-\cos(\Omega t + \gamma_0)\mathbf{e}_1 + \sin(\Omega t + \gamma_0)\mathbf{e}_2\} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}(t) = \left[v_{0\parallel}t + \frac{qE_{\parallel}}{m} \frac{t^2}{2} \right] \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{v}_E t \quad (2.8)$$

El centro del movimiento helicoidal está dado por $\mathbf{R}(t)$, y se lo suele llamar centro guía. Esta cantidad es útil ya que muchas veces se puede despreciar el movimiento rápido y repetitivo del ciclotrón en comparación con el movimiento mucho más lento del centro guía.

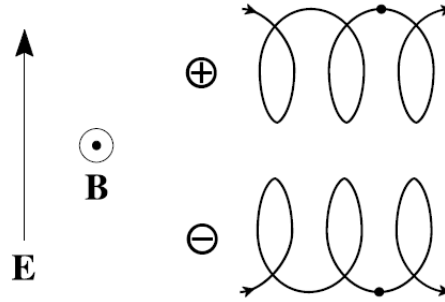


Figura 2.2: Movimiento de una partícula con carga positiva y de otra con carga negativa en un campo electromagnético constante. Se observa la deriva producida por la presencia del campo eléctrico. Figura tomada de [3], y luego modificada.

2.2. Movimiento en campos variables

Si ahora permitimos que los campos tengan variaciones tanto espaciales como temporales, la dinámica de la partícula se complejiza mucho. Para esto es beneficioso usar la aproximación de centro guía, en donde promediamos sobre el movimiento del ciclotrón. La idea entonces es calcular la nueva velocidad de deriva.

El primer caso que podemos considerar es que el campo \mathbf{B} siga siendo paralelo a \hat{z} pero que su módulo varíe en la dirección perpendicular. Pedimos también que la longitud característica de las variaciones sea grande comparada con el giro-radio de las partículas. Esto nos permite suponer que el campo visto por una partícula a lo largo de un giro es aproximadamente constante. Bajo estas condiciones, es posible demostrar que la velocidad de deriva del centro guía está dada por la siguiente expresión,

$$\mathbf{V}_{\text{gradiente}} = mv_{\perp}^2 \frac{\mathbf{B} \times \nabla_{\perp} B}{2qB^3}$$

donde $\nabla_{\perp} B$ indica el gradiente del campo magnético sobre la dirección perpendicular. Si definimos el momento magnético de la partícula como $\mu = mv_{\perp}^2/2B$, podemos reescribir la velocidad de deriva,

$$\mathbf{V}_{\text{gradiente}} = \mu \frac{\mathbf{B} \times \nabla_{\perp} B}{qB^2}$$

La situación puede complicarse más a medida que complejizamos la forma del campo magnético. Podemos, por ejemplo, agregarle una ligera curvatura, una variación a lo largo del eje \hat{z} , o incluso variaciones temporales. Si calculamos la velocidad de deriva considerando cada uno de estos casos, puede demostrarse (ver [3], [4]) que,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = & \mathbf{V}_E + \frac{m(v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2)}{2qB^3} \mathbf{B} \times \nabla_{\perp} B + \\ & + \frac{m}{qB^2} \mathbf{B} \times \left[v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) + v_{\parallel} (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\partial \mathbf{V}_E}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

El primer término, \mathbf{V}_E , es la deriva de orden cero. Se debe a la presencia de un campo eléctrico, como vimos en la sección anterior. El segundo término es de primer orden y aparece debido a las variaciones espaciales de los campos. El tercer y último término es de segundo orden y está asociado a variaciones temporales del campo electromagnético.

2.3. Invariantes adiabáticos

En el caso en que los cambios espacio-temporales del campo electromagnético son suaves y pequeños comparados con el giro-radio y el giro-período, surgen cantidades que se mantienen aproximadamente constantes. A estas se las conoce como invariantes adiabáticos, donde el término *adiabático* se utiliza para distinguirlos de los invariantes absolutos que se mantienen constantes en cualquier circunstancia, como lo son la carga, la energía o el momento.

Al orden más bajo en la variación de los campos, el invariante adiabático es simplemente el momento magnético de la partícula, el cual ya definimos como

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B} \quad (2.9)$$

donde W_{\perp} es la energía perpendicular. La invariancia aproximada de μ se debe a la existencia de una periodicidad en el movimiento de la partícula, dada por el giro alrededor de las líneas de campo magnético.

A órdenes mayores, surgen nuevos invariantes adiabáticos asociados a otras periodicidades del movimiento. Los más comunes son

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint m \mathbf{v}_{\parallel} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.10)$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint m \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.11)$$

donde las integrales son sobre la trayectoria de la partícula a lo largo de un período.

2.4. Pitch-angle scattering

Veamos ahora un tipo particular de scattering, conocido como pitch-angle scattering, que es muy común en partículas cargadas inmersas en un campo electromagnético. Para entender de qué se trata, comencemos mirando la ecuación (2.1) que describe la dinámica de una partícula. Al campo magnético total podemos dividirlo en un campo magnético guía \mathbf{B}_0 más fluctuaciones \mathbf{b} . De esta forma,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})]$$

Tomemos $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. Además, consideremos las velocidades v_\perp y v_\parallel como perpendicular y paralela, respectivamente, a \mathbf{B}_0 . Es decir que $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \hat{z})\hat{z}$ y $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$. Desarrollando, obtenemos las siguientes ecuaciones de Newton para v_\perp y v_\parallel ,

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = \alpha[\mathbf{E}_\parallel + (\mathbf{b}_\perp \times \hat{z}) \cdot \mathbf{v}_\perp \hat{z}] \quad (2.12)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \alpha[\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}_\perp \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) + \mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{b}_\perp - (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b}_\perp) \cdot \hat{z}] \quad (2.13)$$

donde $\alpha = q/m$. La idea ahora es usar este resultado para ver que sucede con la energía paralela ϵ_\parallel y perpendicular ϵ_\perp . Sus variaciones están dadas por,

$$\frac{d\epsilon_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}_\parallel|^2 \right) = \mathbf{v}_\parallel \cdot \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\epsilon_\perp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}_\perp|^2 \right) = \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \quad (2.15)$$

Desarrollando,

$$\frac{d\epsilon_\parallel}{dt} = \alpha[E_\parallel v_\parallel + (\mathbf{b}_\perp \times \mathbf{v}_\parallel) \cdot \mathbf{v}_\perp] \equiv P_\parallel + P_x \quad (2.16)$$

$$\frac{d\epsilon_\perp}{dt} = \alpha[\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp - (\mathbf{b}_\perp \times \mathbf{v}_\parallel) \cdot \mathbf{v}_\perp] \equiv P_\perp - P_x \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \hat{z}$, y definimos la potencia paralela como $P_\parallel \equiv \alpha E_\parallel v_\parallel$, la potencia perpendicular $P_\perp \equiv \alpha \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp$ y la potencia cruzada $P_x \equiv \alpha (\mathbf{b}_\perp \times \mathbf{v}_\parallel) \cdot \mathbf{v}_\perp$. Estas definiciones respetan el hecho de que la potencia es el trabajo por unidad de tiempo del campo eléctrico.

Lo que es importante notar es la potencia cruzada que aparece sumando en (2.16) y restando en (2.17). Su función es transferir energía paralela a energía perpendicular o viceversa, dependiendo de su signo. Reescribiendo P_x ,

$$P_x = \alpha (\mathbf{b}_\perp \times \mathbf{v}_\parallel) \cdot \mathbf{v}_\perp = \alpha (\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{v}_\perp) \cdot \mathbf{b}_\perp \quad (2.18)$$

Las velocidades \mathbf{v}_\parallel y \mathbf{v}_\perp son perpendiculares entre sí, por lo que $\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{v}_\perp = v_\parallel \mathbf{v}_\perp$. Si llamamos ϕ al ángulo comprendido entre $\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{v}_\perp$ y \mathbf{b}_\perp ,

$$P_x = \alpha v_\parallel v_\perp b_\perp \cos \phi \quad (2.19)$$

Recordando la definición de pitch-angle de la ecuación (2.5), podemos escribir $v_{\parallel} = v \cos \chi$ y $v_{\perp} = v \sin \chi$. Entonces,

$$P_x = \alpha v^2 \cos \chi \sin \chi b_{\perp} \cos \phi \quad (2.20)$$

El término P_x , que transfiere la energía entre las direcciones paralela y perpendicular, depende del ángulo χ y es proporcional a \mathbf{b}_{\perp} . Por lo tanto, a este tipo de interacción entre las partículas cargadas y el campo \mathbf{b} que redistribuye la energía sin producirle un aumento neto, lo llamamos pitch-angle scattering.

Para que P_x se maximice deben ocurrir dos cosas. En primer lugar necesitamos $\chi = 45^\circ$, que se corresponde con una velocidad repartida equitativamente entre sus dos componentes, es decir $v_{\perp} = v_{\parallel}$. En segundo lugar requerimos que $\phi = 0^\circ$ o $\phi = 180^\circ$, lo cual implica que $\mathbf{b}_{\perp} \propto (\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp})$. Los tres campos forman una terna derecha en el primer caso, y una terna izquierda en el segundo.

Por otro lado, en el límite en que $|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{B}_0|$, la potencia cruzada P_x se torna mayormente despreciable y solo afecta a la partícula cuando esta cruza regiones con \mathbf{b}_{\perp} intenso. Esto último ocurrirá, dentro del límite antes mencionado, de forma esporádica y localizada en el tiempo.

 Descripción teórica del plasma

Al tener un fluido conductor como lo es el plasma, este genera un campo electromagnético propio. El objetivo de este capítulo es deducir un conjunto de ecuaciones que describan la dinámica del plasma; tanto de su velocidad y densidad como de su campo electromagnético. Para esto vamos a comenzar con la descripción cinética del plasma, y a partir de ella construiremos una descripción como fluido. Pasando por el modelo de fluidos múltiples y el de dos fluidos, finalmente llegaremos a la descripción magneto-hidrodinámica (MHD) compresible del plasma. Como último paso adimensionalizaremos las ecuaciones del movimiento para luego poder simularlas con mayor facilidad.

3.1. Descripción cinética del plasma

El plasma es un sistema formado por un número muy grande de partículas, y por lo tanto, para describirlo es conveniente usar una función densidad en el espacio de fases en lugar de considerar las partículas individuales. Esta función, llamada función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, es tal que $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3rd^3v$ indica el número de partículas comprendidas en el volumen del espacio de fases dado por $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ y $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Para cada una de las especies s del plasma tendremos una función de distribución f_s , cuya evolución está dada por la ecuación cinética

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col} \quad (3.1)$$

donde q_s y m_s son la carga y la masa de la especie s respectivamente.

Los campos propios que genera el plasma pueden ser descritos como efectos colectivos de las partículas escribiendo las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s q_s \int f_s d^3v \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s d^3v + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

3.2. Descripción del plasma como fluido

Una forma de simplificar la descripción del plasma consiste en considerar únicamente los aspectos macroscópicos del mismo. Esto equivale a describir al plasma como un fluido, despreciando los detalles de las distribuciones microscópicas de partículas. Para hacer esto escribimos la densidad y la velocidad media de cada especie en función de f_s ,

$$\begin{aligned}n_s(\mathbf{r}, t) &= \int f_s d^3v \\ \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n_s} \int \mathbf{v} f_s d^3v\end{aligned}$$

Tomando momentos de la ecuación (3.1) y desarrollando cuidadosamente uno puede obtener las ecuaciones que describen al plasma como múltiples fluidos, uno por cada especie. Al integrar (3.1) sobre todo el espacio de velocidades obtenemos la ecuación de continuidad (ver [7]),

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (3.2)$$

Si ahora multiplicamos (3.1) por \mathbf{v} y luego integramos sobre todas las velocidades obtenemos la siguiente ecuación para la evolución de \mathbf{u}_s (ver [7]),

$$m_s n_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = q_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_s + \nabla \cdot \sigma_s + \sum_{t \neq s} \mathbf{R}_{ts} \quad (3.3)$$

donde definimos la derivada material o convectiva como

$$\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_s \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}_s \quad (3.4)$$

Los elementos \mathbf{P}_s y σ_s son el tensor de presión y el de esfuerzos viscosos respectivamente. Vamos a asumir que estamos en el límite de un plasma altamente colisional, y que por lo tanto $\mathbf{P}_s = p_s \mathbf{1}$. Esto se traduce en que $\nabla \cdot \mathbf{P}_s = \nabla p_s$. Para el tensor de esfuerzos vamos a usar la descripción newtoniana $\sigma_{ij} = \nu (\partial_i U_j + \partial_j U_i + (2/3) \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u})$, donde ν es la viscosidad. La cantidad \mathbf{R}_{ts} describe la tasa de momento ganado por la especie t gracias a las colisiones con la especie s . Asumimos que es proporcional a la frecuencia de colisión g_{ts} entre ambas especies y a

su velocidad relativa, de modo que

$$\mathbf{R}_{ts} = n_t m_t g_{ts} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) \quad (3.5)$$

En el proceso de derivar la ecuación (3.3) hay que hacer algunas otras suposiciones. En primer lugar tenemos que asumir una temperatura T_s propia de cada especie. Luego, usando que la energía media de interacción entre las partículas es mucho menor que su energía cinética, podemos aproximar al plasma por un gas ideal y escribir $p_s = n_s T_s$.

Lo que resta ahora es encontrar una expresión para la presión (o la temperatura) en términos de la densidad. Para esto suele usarse, ya que da muy buenos resultados, una relación barotrópica como la siguiente

$$p_s n_s^{-\gamma} = cte \quad (3.6)$$

Asumiendo procesos adiabáticos, concluimos que $\gamma = 5/3$.

3.2.1. Modelo de dos fluidos

Las ecuaciones hasta acá desarrolladas conforman la descripción de fluidos múltiples. El próximo paso consiste en tomar todas las especies de iones en un único ión promedio de carga Ze y masa m_i . Nuestros dos fluidos serán entonces el de los electrones (e) y el del ión promedio (i). Escribimos a continuación el modelo completo de dos fluidos,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (3.7)$$

$$m_s n_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = q_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \nabla p_s + \nu_s \left(\nabla^2 \mathbf{u}_s + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_s)}{3} \right) + \mathbf{R}_{s\bar{s}} \quad (3.8)$$

$$p_s n_s^{-\gamma} = cte \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.11)$$

donde $s = \{i, e\}$, $\bar{s} = \{e, i\}$, $q_e = -e$ y $q_i = Ze$. También definimos la densidad de carga y de corriente,

$$\rho_c = Zen_i - en_e \quad (3.12)$$

$$\mathbf{j} = Zen_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e \quad (3.13)$$

3.2.2. Modelo MHD compresible

Un último paso en la simplificación del problema consiste en considerar a todo el plasma como un único fluido. A este modelo se lo conoce como MHD (magneto-hidrodinámica por sus siglas en inglés). Para hacer esto vamos a necesitar introducir una longitud característica conocida como longitud de Debye. Esta representa la escala en la cual los portadores de carga generan un apantallamiento de los campos eléctricos. Nos da una idea de la distancia mínima en

la cual puede ocurrir una separación considerable de carga. Asumiendo entonces que todas las magnitudes varían en escalas más grandes que la longitud de Debye, podemos evaluar elementos de fluido más grandes que esta longitud en donde es válida la aproximación de cuasi-neutralidad,

$$Zn_i \simeq n_e \quad (3.14)$$

Teniendo esto en cuenta, escribimos la densidad de corriente del plasma, su velocidad y su densidad como

$$\mathbf{j} = en_e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u} = \frac{m_i n_i \mathbf{u}_i + m_e n_e \mathbf{u}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \quad (3.16)$$

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \quad (3.17)$$

De estas ecuaciones se puede despejar \mathbf{u}_i y \mathbf{u}_e . Si además despreciamos términos de orden m_e/m_i llegamos a que,

$$\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u} + \frac{Zm_e}{em_i n_e} \mathbf{j} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u} - \frac{1}{en_e} \mathbf{j} \quad (3.19)$$

Reemplazando esto en las ecuaciones de continuidad (3.7) para las dos especies y sumando obtenemos lo siguiente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.20)$$

Para encontrar la evolución de la velocidad podemos sumar (3.8) para ambas especies. Al hacer esto además hay que usar (3.18), (3.19) y el hecho de que $\mathbf{R}_{s\bar{s}} = -\mathbf{R}_{\bar{s}s}$. Y entonces,

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{m_e}{e^2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}\mathbf{j}}{n_e} \right) + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (3.21)$$

donde $p = p_e + p_i$ (tomando al plasma como gas ideal) y $\nu = \nu_e + \nu_i$. Si comparamos el primer y el segundo término del lado derecho con el término convectivo $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u})$ podemos ver que ambos son despreciables. Y entonces la ecuación anterior queda de la siguiente manera,

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (3.22)$$

A continuación es necesario buscar una expresión para la densidad de corriente eléctrica. Para eso consideramos procesos lo suficientemente lentos como para que los electrones lleguen a equilibrarse mecánicamente en cada instante. Esto equivale a despreciar su inercia ($m_e \approx 0$). Partiendo de este supuesto, podemos reemplazar la ecuación (3.19) en (3.8) con $s = e$ y llegamos a lo siguiente,

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} \left(\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e \right) \quad (3.23)$$

donde $\eta = \frac{m_e g_{ei}}{e^2 n_e}$ es la resistividad del plasma y p_e es la presión electrónica. Teniendo en cuenta que p_e es igual a la presión iónica p_i y recordando que $p = p_e + p_i$, podemos afirmar que $p_e = p/2$. La ecuación (3.23) se conoce como Ley de Ohm generalizada. Podemos reescribir el cociente $1/en_e$ usando la condición de cuasi-neutralidad,

$$\frac{1}{en_e} = \frac{1}{Zen_p}$$

Si escribimos $n_p = \rho/m_p$ y tomamos $Z = 1$ (asumiendo un plasma de protones y electrones),

$$\frac{1}{en_e} = \frac{1}{Zen_p} = \frac{m_p}{e\rho}$$

En (3.23), el término proporcional a $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ es el término de Hall y ∇p_e es el gradiente de la presión electrónica. Comparando estos dos términos con $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, se puede demostrar que ambos son despreciables si estamos en el límite de un radio de Larmor pequeño. Este radio se define como aquel que describe una partícula cargada alrededor de una línea de campo magnético uniforme, y es proporcional a $(\alpha B)^{-1}$. En tal caso,

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

Esta es la Ley de Ohm que se suele usar en magneto-hidrodinámica de un sólo fluido.

Queremos ahora una ecuación para la evolución del campo magnético. Para eso podemos tomar el rotor de la Ley de Ohm generalizada, teniendo en cuenta algunas consideraciones. En primer lugar, vamos a despreciar el término de Hall dado que es una corrección relevante solo en escalas del orden de la escala de disipación. Nosotros no necesitamos llegar a tamaños tan pequeños del plasma. Luego, usamos la ley de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$) y la ley de Ampere (desestimando la corriente de desplazamiento, que puede demostrarse que es despreciable frente a $\mu_0 \mathbf{j}$ para evoluciones temporales suficientemente lentas en la dinámica del plasma). Por último, el término de la presión electrónica desaparece ya que tomamos el rotor de un gradiente. Haciendo todo esto obtenemos lo siguiente,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.24)$$

El último término es el que describe la difusión del campo magnético.

Resumiendo todas las ecuaciones de nuestro sistema MHD compresible,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.25)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{m_p}{e\rho} \left(\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.28)$$

$$p\rho^{-\gamma} = cte \quad (3.29)$$

donde, yendo en orden, tenemos la ecuación de continuidad, la evolución de la velocidad del plasma, la expresión de la corriente (Ley de Ohm generalizada), la evolución del campo magnético (o inducción magnética), y la relación barotrópica.

Notemos que la ecuación 3.27 no tendrá incidencia en el fluido mismo. En cambio, nos servirá para calcular el campo eléctrico y luego usarlo para averiguar la fuerza que sienten las partículas individuales.

Hasta este punto usamos el sistema internacional de unidades. Pero a partir de ahora va a ser conveniente usar el sistema gaussiano, en donde las ecuaciones se escriben de la siguiente manera,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.30)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{4\pi} - \nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{\eta}{c} \mathbf{J} + \frac{m_p}{e\rho} \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{4\pi} - \nabla p_e \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.33)$$

$$p\rho^{-\gamma} = cte \quad (3.34)$$

Además, en este sistema de ecuaciones definimos una nueva densidad de corriente $\mathbf{J} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ y re-definimos la resistividad como $\eta = \eta/\mu_0$.

Adimensionalización de las ecuaciones

El siguiente paso que podemos dar es la adimensionalización de las ecuaciones. Esto será útil para luego poder realizar las simulaciones numéricas. Con este fin, vamos a definir escalas características para cada cantidad del problema. Para longitudes tomamos la escala de inyección de energía o escala integral, definida como

$$L_0 = 2\pi \frac{\int \frac{E(k)}{k} dk}{\int E(k) dk} \quad (3.35)$$

donde $E(k)$ es la densidad espectral de energía. Para velocidades usamos,

$$u_0 = \sqrt{\frac{\langle b^2 \rangle}{4\pi\rho_0}} \quad (3.36)$$

donde $\langle b \rangle$ es la media de las fluctuaciones del campo magnético. Además usamos esta cantidad para definir la escala característica de \mathbf{B} , es decir, $b_0 = \sqrt{\langle b^2 \rangle}$. Para tiempos tomamos $t_0 = L_0/u_0$. Al campo eléctrico vamos a medirlo en unidades de $E_0 = b_0 u_0/c$. Para la densidad y la presión usamos la densidad de equilibrio ρ_0 y la presión de equilibrio p_0 respectivamente. Solo resta la densidad de corriente \mathbf{J} , para lo cual usamos la ley de Ampere,

$$\mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \sim \nabla \times \mathbf{B} \sim \frac{b_0}{L_0} = J_0$$

Vamos a definir ahora algunos parámetros adimensionales que nos serán útiles para entender la dinámica del problema. En primer lugar, el número de Reynolds se determina con el cociente entre los términos no lineales y disipativos de la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{\nu_c \nabla^2 \mathbf{u}} \sim \frac{u_0^2/L_0}{\nu_c u_0/L_0^2} = \frac{u_0 L_0}{\nu_c} \equiv Re \quad (3.37)$$

donde $\nu_c = \nu/\rho_0$ es la viscosidad cinemática. Esta cantidad mide la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas. Si $Re \lesssim 1$, los términos disipativos dominan y el flujo es laminar. En caso contrario, cuando Re es muy grande, dominan los términos no lineales y la dinámica se torna turbulenta. Este último caso es el que nos interesa. De forma similar se puede definir el número de Reynolds magnético, donde ahora pesamos la importancia relativa de los términos de la ecuación de inducción magnética,

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\eta |\nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{u_0 B_0/L_0}{\eta B_0/L_0^2} = \frac{u_0 L_0}{\eta} \equiv R_m \quad (3.38)$$

Para R_m pequeño, el término difusivo $\nabla^2 \mathbf{B}$ domina y el campo magnético simplemente difunde. En caso contrario, se tiene un plasma de alta conductividad ($\eta \rightarrow 0$) y la inducción magnética cobra importancia. Por otra parte, para medir la velocidad de un elemento de fluido relativa a la velocidad del sonido podemos definir una cantidad conocida como el número de Mach sónico,

$$M_S = \frac{u_0}{c_S} \quad ; \quad c_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (3.39)$$

donde c_s es la velocidad del sonido y $\gamma = 5/3$ es la constante adiabática. Alternativamente, la velocidad puede medirse respecto de la velocidad de Alfvén u_A . Este valor indica la velocidad de un tipo particular de ondas que se dan en los plasmas, llamas ondas de Alfvén. En este caso definimos el número de Mach alfvénico como,

$$M_A = \frac{u_0}{u_A} \quad ; \quad u_A = \frac{b_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = u_0 \quad (3.40)$$

De esta forma queda fijado $M_A = 1$.

Para concluir, usamos todas las cantidades definidas anteriormente para reescribir las ecuaciones del problema en forma adimensional. Haciendo esto obtenemos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.41)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{M_A^2} - \frac{\nabla p}{\gamma M_S^2} + \frac{1}{R_e} \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{R_m} + \frac{\epsilon}{\rho} \left(\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{\gamma M_S^2} \right) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{R_m} \quad (3.44)$$

$$p = \rho^\gamma \quad (3.45)$$

donde $\epsilon = \rho_{ii}/L_0$ y $\rho_{ii} = \frac{m_p c}{e\sqrt{4\pi\rho_0}}$ es la longitud inercial protónica.

La turbulencia representa un flujo muy desordenado, en donde surgen vórtices y otras estructuras complejas. Solemos encontrarnos cotidianamente con este tipo de flujo. Algunos ejemplos son: la leche que se mezcla en una taza de café, el humo que sale de una chimenea, o el agua de un río que corre topándose con las piedras.

A lo largo de este capítulo introduciremos las características principales de la turbulencia y daremos un método cuantitativo para saber si un flujo es turbulento o no. Veremos luego cómo es el espectro de energía; primero en el caso de fluidos neutros y luego para el caso de plasmas. Para concluir introduciremos los conceptos de reconexión magnética y hojas de corriente, ambos fenómenos que surgen en sistemas MHD turbulentos.

4.1. Régimen turbulento

La turbulencia describe una dinámica de fluidos muy compleja, fuera del equilibrio, con una gran cantidad de grados de libertad, y que necesariamente proviene de efectos no-lineales. Esto la convierte en un sistema muy difícil de estudiar. El flujo turbulento tiene un comportamiento caótico, y es, por lo tanto, altamente irregular. Condiciones iniciales muy similares resultan en estados completamente distintos. Sin embargo, puede ser predecible a nivel estadístico.

Para entender los fundamentos del régimen turbulento, nos será útil comenzar mirando el caso más sencillo de un fluido neutro en lugar de un plasma. La dinámica de dicho sistema está determinada por la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{3} \right) \quad (4.1)$$

El término no-lineal en la velocidad $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ compite con el término viscoso $\nabla^2 \mathbf{u}$. El primero induce al fluido a entrar en un régimen turbulento, mientras que el segundo intenta prevenir esto por medio de la viscosidad. El cociente entre ambos nos da el número de Reynolds que ya

introducimos en el capítulo anterior,

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{\nu_c \nabla^2 \mathbf{u}} \sim \frac{u_0^2/L_0}{\nu_c u_0/L_0^2} = \frac{u_0 L_0}{\nu_c} \equiv R_e \quad (4.2)$$

donde $\nu_c = \nu/\rho_0$ y u_0 y L_0 representan escalas características de la velocidad y del espacio respectivamente. Recordemos que este parámetro mide la propensión que tiene el fluido de entrar en un régimen turbulento (R_e grande) o, lo que sería el opuesto, un régimen laminar (R_e pequeño). Este último caso representa un movimiento mucho más ordenado del fluido, donde este se organiza en capas que no se mezclan entre sí.

4.2. Espectro de Kolmogorov

En 1920, Lewis Richardson introdujo el concepto de *cascada de energía* en los flujos turbulentos (ver [11]). Esta idea establece que la energía va descendiendo desde las escalas espaciales más grandes del fluido, en donde es inyectada, hasta las escalas más pequeñas. En otras palabras, las estructuras que se forman en el flujo se tornan inestables y se deshacen en torbellinos cada vez más chicos. La transferencia de energía ocurre a causa de las no-linealidades. Este fue uno de los primeros descubrimientos de un comportamiento coherente dentro de la aparente irregularidad de la turbulencia.

En 1941, Kolmogorov desarrolló su teoría fenomenológica basándose en la noción de cascada de energía (ver [12, 13]). Es una de las teorías más importantes en el campo de la turbulencia hasta el momento. En su descripción dividió el rango de escalas del flujo a través del cual desciende la energía en tres partes; el rango de inyección, el inercial y el disipativo. El primero aparece en escalas grandes y allí es donde se inyecta la energía por medio de algún forzado externo. Para dar un ejemplo concreto, al batir la leche en el café, la escala de inyección está dada por el tamaño característico del movimiento de la cuchara. El tercer rango, el disipativo, se da en las escalas más pequeñas. Es aquí donde las fuerzas disipativas dominan, y la energía se disipa en forma de calor. En el medio de estos dos rangos se ubica el rango inercial. La particularidad de este es que presenta una tasa de transferencia de energía constante. La energía se transmite desde las escalas más grande a las pequeñas, sin que haya inyección ni disipación dentro de este rango. Es interesante notar que la existencia del rango inercial es universal, es decir que se da en todo tipo de fluidos.

Podemos entonces resumir lo que sucede en términos cualitativos. La energía ingresa al sistema en la escala de inyección. Luego se transfiere a escalas menores debido a la interacción no-lineal entre los grados de libertad. Pasa a través del rango inercial a una tasa constante, sin ninguna pérdida ni ganancia. Finalmente llega a la escala de disipación en donde se pierde como calor. Para que el sistema se encuentre en un equilibrio, la energía que se incorpora en la escala de inyección debe ser igual a la que se pierde en la escala disipativa. Cuando se alcanza esta condición, en que la energía se ha transferido a través de todas las escalas, decimos que llegamos a un estado de turbulencia completamente desarrollada.

En su desarrollo, Kolmogorov además realiza un análisis en donde concluye, solamente a partir de consideraciones dimensionales, cómo es el espectro de energía en el rango inercial.

Deduce que, en este rango,

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (4.3)$$

donde E es la energía y k es el número de onda. Esto se ilustra en la figura 4.1.

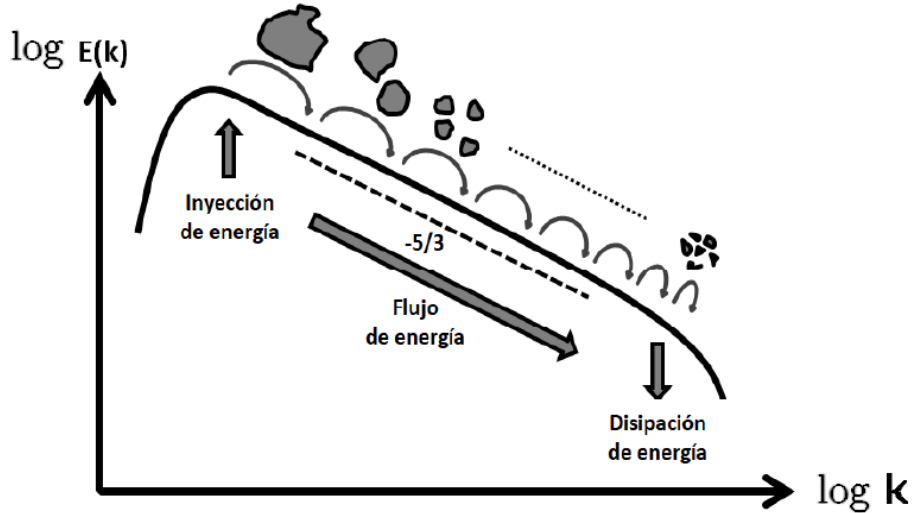


Figura 4.1: Espectro de energía de un flujo turbulento neutro. Puede verse la ley de escalas del rango inercial deducida por Kolmogorov, y se ilustra la cascada de energía propuesta por Richardson.

4.3. Turbulencia MHD

Hasta aquí nos enfocamos en turbulencia en flujos neutros. Dado que esta tesis se centra en el estudio de plasmas, vamos a hablar brevemente sobre la turbulencia en flujos electromagnéticos.

El caso más sencillo a considerar es la turbulencia generada por la interacción de ondas de Alfvén. Estas son un tipo particular de perturbaciones que ocurren en los plasmas, sobre todo en el plasma solar. Iroshnikov [15] y Kraichnan [16], ambos hicieron separadamente la deducción del espectro de energía para este caso. El resultado que obtuvieron es válido bajo las hipótesis de turbulencia isótropa y homogénea. Es decir que no es apropiado para el caso en que se tiene un campo magnético guía que introduce una anisotropía en el plasma. El espectro de energía que obtuvieron para el rango inercial es el siguiente,

$$E(k) \propto k^{-3/2}$$

donde se ve una diferencia en el exponente con el caso de flujos neutros.

Por otra parte, si consideramos el caso en que hay un campo magnético guía que introduce una anisotropía, el espectro de energía cambia. Goldreich y Sridhar [17] derivaron su forma en este caso. Como es sabido en el campo de los plasmas, la energización paralela y perpendicular al campo guía no es igual; y esto se ve reflejado en el espectro que encontraron. Para la dirección

perpendicular, hallaron que la transferencia de energía cumple lo siguiente,

$$E(k) \propto k^{-5/3}$$

Esta relación es la misma que la encontrada por Kolmogorov en el caso de turbulencia en fluidos neutros. Para la dirección paralela, en cambio, obtuvieron el siguiente espectro,

$$E(k) \propto k^{-2}$$

Cabe recordar que ambos resultados son válidos dentro del rango inercial del flujo.

4.4. Reconexión magnética

Dentro de los flujos electromagnéticos turbulentos existe un fenómeno particular conocido como reconexión magnética. Este se observa en las magnetósferas planetarias y en la superficie solar. Constituye un mecanismo de aceleración de partículas cargadas muy conocido.

La reconexión magnética describe el suceso en el cual líneas de campo magnético con polaridad opuestas son forzadas a juntarse al ser empujadas por flujos de plasma. De esta manera se obliga a las líneas de campo a reconectarse. Este efecto es posible principalmente por los efectos disipativos. La zona de reconexión, en donde la disipación domina, se denomina *hoja de corriente*. Este tipo de estructuras se forman espontáneamente en sistemas MHD. En la figura 4.2 se muestra una simulación en donde podemos ver las estructuras de reconexión magnética y hojas de corriente.



Figura 4.2: Simulación MHD tridimensional en un régimen turbulento con un campo magnético guía en la dirección \hat{z} . La escala de colores representa la densidad de corriente J_z . Las flechas indican el vector campo magnético. A la izquierda se ve un corte en el plano xz del dominio espacial. A la derecha se ve lo mismo pero en el plano xy . La figura fue tomada de [5].

Las hojas de corriente son estructuras que se extienden en una dirección en forma de hoja, de allí su nombre. Su característica principal es que la densidad de corriente varía muy poco en

la dirección paralela al plano de la hoja, y lo hace fuertemente en las direcciones transversales. En [5], los autores demostraron la importancia de las hojas de corriente en la energización de partículas cargadas dentro del plasma.

El conjunto de ecuaciones MHD, al involucrar la dinámica de fluidos en conjunto con las ecuaciones de Maxwell, es sumamente complejo y no admite una solución analítica. Para resolverlo es necesario integrar numéricamente las ecuaciones. Vamos entonces a simular computacionalmente el sistema formado por el plasma turbulento más las partículas cargadas. Estas simulaciones serán directas, lo cual significa que se resolverán todas las escalas espacio-temporales del sistema a partir de ciertas condiciones iniciales y de contorno. Dado que el poder de cómputo nos permite hacer esto, no será necesario hacer aproximaciones con el fin de evitar simular algunas escalas. Sin embargo cabe destacar que esto es posible únicamente hasta cierto valor del número de Reynolds. Esto se debe que al aumentar su valor, el flujo se torna más turbulento y se forman estructuras cada vez más pequeñas que requieren, para ser resueltas, una resolución más grande de las simulaciones.

A lo largo de este trabajo, todas las simulaciones se hicieron usando el código numérico GHOST [19] [20]. Con el fin de entender las bases de su funcionamiento, en este capítulo explicaremos los fundamentos del llamado método espectral, con el cual se computan las derivadas espaciales, y del método de Runge-Kutta, para la evolución temporal. También explicaremos brevemente la técnica de la computación en paralelo utilizada para acortar los tiempos de simulación y permitir un uso maximizado de espacio de memoria para resoluciones numéricas altas. Como último paso, veremos cómo se simulan las partículas individuales dentro del fluido.

5.1. Método pseudo-espectral

Existen varias formas de resolver numéricamente un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, como por ejemplo el sistema de MHD. Una de las maneras más sencillas es usar el método de diferencias finitas, pero el problema es que su precisión puede no ser tan buena. Un método alternativo es el que se conoce como espectral [21] [22]. Este consiste en escribir la solución en base a su serie de Fourier truncada, en donde los coeficientes de esta expansión pasan a ser las incógnitas. Implementar Fourier es especialmente apto en situaciones

con condiciones de contorno periódicas, como será nuestro caso. Por otra parte, teniendo en cuenta que para la descripción de la turbulencia es central la transferencia de energía entre las distintas escalas espaciales, resulta natural utilizar métodos espectrales. Además suelen ser más precisos que diferencias finitas dado que el truncamiento de la serie de Fourier no afecta la conservación de invariantes tales como la energía [21]. Para ver cómo funciona este método, tomemos el siguiente problema unidimensional genérico,

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = L(U(x, t)) + F(x, t) \quad (5.1)$$

donde F es conocido y L es un operador. La solución va a estar restringida al intervalo $[0, 2\pi]$, y la condición inicial estará dada por $U(x, 0) = U_0(x)$. La idea ahora es tomar un caso particular de (5.1) que se conoce como ecuación de Burgers, dado que contiene los mismos elementos que las ecuaciones MHD. Tenemos entonces,

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

con ν la viscosidad. Como planteamos anteriormente, el próximo paso es expandir la función $U(x, t)$ en una serie de Fourier truncada,

$$U_N(x, t) = \sum_{k=-N/2+1}^{k=N/2} U_k(t) e^{ikx} \quad (5.3)$$

Y vamos a tomar condiciones de contorno periódicas, es decir, $U_N(x, t) = U_N(x + 2\pi, t)$ y $\partial U(x, t)/\partial t = \partial U(x + 2\pi, t)/\partial t$

Los métodos espectrales requieren que el error introducido al truncar la serie de Fourier no tenga proyección sobre el subespacio generado por e^{ikx} , donde $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$. Esto se traduce en que la ecuación a resolver es en realidad la siguiente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L \right) U(x, t) = 0 \quad (5.4)$$

donde L es el operador que contiene las derivadas espaciales. Su forma puede deducirse comparando (5.1) con (5.2). Además debe cumplirse que,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} \left(\frac{\partial}{\partial t} - L \right) U(x, t) dx = 0 \quad (5.5)$$

con $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$. Este método se conoce como método de Galerkin. Desarrollando a partir de (5.2), se obtiene un sistema de ecuaciones para los coeficientes de Fourier,

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} = - \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_k - \nu k^2 U_k \quad (5.6)$$

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_k = \sum_{l+m=k} im U_l U_m \quad (5.7)$$

Los métodos espectrales tienen convergencia exponencial siempre y cuando estemos con-

siderando funciones continuas, periódicas e infinitamente diferenciables. Para demostrar esto escribamos un coeficiente genérico de la expansión,

$$U_k = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} U(x) dx \quad (5.8)$$

Si ahora integramos por partes y recordamos que $U(0) = U(2\pi)$,

$$U_k = \frac{1}{2\pi ik} \int e^{-ikx} \frac{\partial U(x)}{\partial x} dx \quad (5.9)$$

Dado que la integral $\partial U/\partial x$ es finita, deducimos que $U_k \approx k^{-1}$. Si repetimos este proceso asumiendo que $U(x)$ periódica y m -veces derivable, $U_k \approx k^{-m}$. Esto implica que $|U_k|/k^{-m} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, para todo m . Por lo tanto, si el desarrollo de Fourier llega hasta valores de k suficientemente grandes, la serie converge exponencialmente a la solución exacta.

Surgen ciertos problemas prácticos al querer resolver el sistema de ecuaciones formado por (5.6) y (5.7). El cálculo de la doble suma que aparece en (5.7) implica $O(N^2)$ operaciones, donde N es el número de términos que se consideran en la serie de Fourier. Pero si no usamos un método espectral sino que simplemente discretizamos el espacio en N puntos de grilla e implementamos diferencias finitas, necesitaríamos tan solo $O(N)$ operaciones. Otra desventaja es que evaluar directamente la doble suma de (5.7) introduce errores de redondeo que además se amplifican con el número de operaciones. La solución a estos inconvenientes es aplicar la transformada rápida de Fourier (FFT). Para esto es necesario discretizar la función U en el espacio físico de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{2\pi}{N} j \\ j &= 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Podemos ahora escribir los coeficientes de Fourier discretos de la función U ,

$$\begin{aligned} \hat{U}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ikx_j} U(x_j, t) \\ k &= -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Anti-transformando,

$$U(x_j, t) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{U}_k \quad (5.12)$$

Análogamente conseguimos una expresión para las derivadas,

$$\frac{\partial U(x_j, t)}{\partial x} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} ike^{ikx_j} \hat{U}_k \quad (5.13)$$

Puede demostrarse que el hecho de usar la FFT reduce el número de operaciones de $O(N^2)$ a $O(N \log N)$. El procedimiento detallado para resolver el sistema es el siguiente. Primero bus-

camos las derivadas en el espacio de Fourier usando (5.13). A continuación antitransformamos, realizando $O(N \log N)$ operaciones, y hacemos la multiplicación $U \frac{\partial U}{\partial x}$ en el espacio físico, con $O(N)$ operaciones más. Para terminar, volvemos a aplicar la FFT y obtenemos $(U \frac{\partial U}{\partial x})_k$. Este método que acabamos de describir, en donde la diferenciación se hace en el espacio espectral mientras que los productos se hacen en el espacio real, se conoce como método pseudo-espectral [23]. De esta manera se sigue manteniendo la convergencia exponencial de los métodos espectrales pero reduciendo significativamente la cantidad de operaciones a realizar.

Existe una última consideración a tener en cuenta respecto de los métodos pseudo-espectrales. El hecho de que las funciones e^{ikx} y $e^{i(k+mN)x}$ ($m \in \mathbb{Z}$) sean iguales en los puntos $x_j = \frac{2\pi j}{N}$ con $j = 0, \dots, N-1$, es un efecto espurio conocido como aliasing. Dado que nos restringimos a valores de k entre $-N/2+1$ y $N/2$, los modos armónicos $k+mN$ no son relevantes computacionalmente en los términos lineales. En los términos no-lineales en cambio, al tener acoplamiento entre modos, sí se produce aliasing. Existen varios métodos que resuelven esta dificultad, donde el más popular es la llamada regla de los 2/3 [24]. Esta se basa en anular los modos con $|k| > N/3$, es decir que se suprimen 2/3 del total de los modos de Fourier. De esta manera se impide el acoplamiento espurio de modos armónicos. Lo que no tuvimos en cuenta es que esto solo es válido si el flujo es no-compresible. En caso contrario, uno de los varios inconvenientes adicionales que aparece son las no-linealidades de orden mayor al cuadrático producto de la dependencia espacio-temporal de la densidad. Posteriormente se desarrollaron varios métodos alternativos que resuelven este problema y son válidos en el caso compresible [25].

5.2. Evolución temporal

Hasta este punto solo nos enfocamos en la parte espacial del conjunto de ecuaciones (5.6) y (5.7), pero todavía no hablamos sobre cómo se integran temporalmente. El método que vamos a utilizar para esto es el de Runge-Kutta de segundo orden. Para ver cómo funciona planteemos un problema con condiciones iniciales genérico,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

El método de Runge-Kutta propone que la evolución temporal de la función $y(t)$ esté dada por la siguiente expresión,

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \tag{5.15}$$

donde $y_n = y(t_n)$ y el tiempo está discretizado en intervalos de longitud h . Puede verse de la expresión anterior que este método es iterativo, partiendo de la condición inicial y_0 conocida. El valor de s es el orden del método y k_i es tal que,

$$k_i = f\left(t_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \tag{5.16}$$

con $i = 1, \dots, s$. Los coeficientes a_{ij} , b_i y c_i dependen de la regla de cuadratura elegida. La idea entonces es que los errores obtenidos con Runge-Kutta sean similares a los que se obtienen con los métodos de Taylor, pero evitando calcular derivadas de la función f . Puede demostrarse que la evolución temporal para Runge-Kutta de segundo orden está dada por,

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \quad (5.17)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \quad (5.18)$$

Aumentando el orden del método se obtienen errores más pequeños pero también se aumenta el tiempo de cómputo empleado. Quedarnos a segundo orden será suficiente para el objetivo de este trabajo. La elección del paso temporal h también afecta a los errores numéricos y a la convergencia del método. Más allá de que un paso menor disminuye los errores, se suele tener en cuenta para la elección de h lo que se conoce como condición CFL. Esta establece una relación entre la resolución espacial Δx (tamaño de grilla) y la temporal $\Delta t = h$ imponiendo lo siguiente,

$$\frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.19)$$

donde u_0 es una velocidad típica del sistema. Generalizado al caso tridimensional con la restricción de que las tres resoluciones espaciales sean iguales ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$), la condición CFL se escribe de la siguiente manera,

$$\frac{3u_0 \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.20)$$

5.3. Paralelización

El tipo de simulaciones que se necesitan para describir fielmente la dinámica de fluidos es muy costosa computacionalmente. Este es el principal motivo por el cual resulta extremadamente útil aplicar el procesamiento de computación paralela. Su principal característica es que divide el trabajo entre varios procesadores, disminuyendo así el tiempo total de cómputo significativamente.

Códigos basados en el método pseudo-espectral pueden paralelizarse utilizando la librería MPI (viene del inglés, Message Passing Interface). Esto puede emplearse, por ejemplo, para conectar procesadores de un mismo cluster de computadoras. Por otra parte, el método pseudo-espectral tiene la enorme ventaja de ser fácilmente aplicable en computación en paralelo al basarse en series de Fourier. Poder dividir la tarea entre varios procesadores nos permite alcanzar números de Reynolds más altos, que como ya vimos, deben ser grandes para entrar en un régimen turbulento pero además incrementan el costo computacional [27].

Para las simulaciones hechas en este trabajo se utilizó el cluster SAKURA. Este cuenta con 224 procesadores, cada uno con 32 GB de memoria RAM. Además, el código GHOST está diseñado para correrse en paralelo, ya sea en pequeños clusters como en extensos conjuntos de súper computadoras. Todo esto hace posible simular flujos turbulentos con números de Reynolds realistas en una cantidad de tiempo razonable.

5.4. Partículas

Como contamos en la introducción, además de simular el conjunto de ecuaciones MHD compresible que describen al plasma, queremos simular partículas cargadas individuales que se mueven dentro de este fluido. En general, como estas partículas tienen carga, su dinámica está descrita por la fuerza de Lorentz,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \alpha(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.21)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula y $\alpha = q/m$ con q y m la carga y la masa de la partícula respectivamente. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son los generados por el plasma, por lo tanto, al campo eléctrico vamos a reemplazarlo por la expresión de la ley de ohm generalizada (3.43) que encontramos en el capítulo 3. Notemos que no usamos la ley de Ohm ordinaria sino que usamos su forma generalizada. Esto se debe a que el término de Hall es relevante en escalas del orden de la escala de disipación, y el giroradio de las partículas es de este orden. Concluimos entonces que,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \alpha \left(\frac{\mathbf{J}}{R_m} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{\epsilon}{\rho} \left(\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{\gamma M_S^2} \right) \right) \quad (5.22)$$

donde todas las magnitudes del fluido (\mathbf{J} , \mathbf{u} , \mathbf{B} , ∇p_e) están evaluadas en la posición de la partícula. Esta ecuación para la evolución temporal de las partículas se resuelve de la misma manera que describimos en las secciones anteriores de este capítulo.

Como acabamos de ver, las partículas cargadas se ven afectadas por el campo electromagnético del plasma. Pero estas, al tener carga, generan a su vez su propio campo que altera la dinámica del fluido. Cuando se despreja este último efecto, se dice que las partículas son *de prueba*. Este es el caso que consideramos en esta tesis.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en simulaciones directas de la dinámica de partículas de prueba en campos electromagnéticos de un flujo MHD compresible. Comenzamos introduciendo las características de las simulaciones y luego pasamos a mostrar los resultados conseguidos.

6.1. Características de las simulaciones

Para poder simular un sistema físico descrito por un grupo de ecuaciones diferenciales es necesario determinar condiciones iniciales y de contorno, así como otros parámetros relevantes. Esto es lo que haremos a lo largo de esta sección.

El sistema a simular es el formado por las ecuaciones (3.41) a (3.45). Vamos a considerar siempre un campo magnético guía en la dirección \hat{z} , es decir $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. En particular, tomamos $B_0 = 8$. El campo magnético total \mathbf{B} será entonces \mathbf{B}_0 sumado a las fluctuaciones \mathbf{b} generadas por la evolución. Por lo tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$. Considerando esto podemos afirmar que las simulaciones, ignorando por ahora las partículas de prueba, consisten en evolucionar los campos \mathbf{u} , \mathbf{b} y ρ .

Veamos ahora el valor de los parámetros adimensionales introducidos en el capítulo 3. Tomamos ambos números de Reynolds como $R_e = R_m = 1000$. Que ambos valores sean iguales es compatible con las observaciones hechas en el viento solar. Para los números de Mach usamos $M_S = 0,25$ y $M_A = 1$. Se sabe que el viento solar es un sistema subsónico, y por esa razón tomamos $M_S < 1$. Además, como estamos considerando el caso compresible, pedimos que $M_S \neq 0$.

6.1.1. Condiciones de contorno e iniciales

En cuanto a las condiciones de contorno, para facilitar la implementación del método pseudo-espectral, pedimos que sean periódicas. Es decir que, por ejemplo para el caso del campo de

velocidades del fluido,

$$\mathbf{u}(x + L, y + L, z + L) = \mathbf{u}(x, y, z) \quad (6.1)$$

donde L es el tamaño del dominio de simulación. Nosotros usaremos cubos de lado $L = 2\pi$. Este espacio de simulación estará dividido en 256 intervalos en cada dirección, de modo que tendremos 256^3 puntos de grilla. El paso temporal que usaremos es $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

Por otra parte, la condición inicial que se impuso para el campo de velocidades \mathbf{u} y el campo magnético \mathbf{b} fue un valor cuadrático medio igual a 1 y fases aleatorias, siempre dentro del anillo $3 \leq k \leq 4$ en el espacio de Fourier. Para la densidad ρ , en cambio, se tomaron fluctuaciones nulas en todo el espacio.

6.1.2. Forzados

El sistema MHD compresible que queremos estudiar es un sistema disipativo. Como ya discutimos en la sección 4.2, la energía se disipa en las escalas más pequeñas del fluido. En consecuencia, para mantener un estado estable en donde la variación de energía en promedio sea nula, es necesario forzar al sistema en las escalas más grandes. Tenemos entonces que inyectarle energía tanto al campo \mathbf{u} como al campo \mathbf{b} .

En las simulaciones, el campo de velocidades es forzado por una fuerza mecánica y el potencial vector magnético por una fuerza electromotriz. Ambos forzados están decorrelacionados entre sí y no inyectan helicidad cinética ni magnética en el plasma. Están localizados en $3 \leq k \leq 4$ dentro del espacio de Fourier. Al igual que los campos \mathbf{u} y \mathbf{b} iniciales, tienen amplitud constante y fases aleatorias. Además fijamos su tiempo de correlación propio en 0,3.

6.1.3. Dinámica de las simulaciones

La energía del plasma tiene una componente cinética $\langle u^2 \rangle$ y una magnética $\langle b^2 \rangle$, donde los valores medios se definen como $\langle A \rangle = \frac{1}{V} \int A(\mathbf{r}) d^3r$. Basándonos en lo que vimos en la sección 6.1.1, podemos decir que inicialmente la energía se encuentra localizada en $3 \leq k \leq 4$. Sin embargo la situación de interés no es esta, sino cuando la energía ya se transfirió a todas las escalas del fluido, o dicho de otra forma, cuando la turbulencia está completamente desarrollada.

Entonces, la dinámica de las simulaciones es la siguiente. Comenzamos a simular sin partículas de prueba y esperamos a que la energía llegue desde la escala de inyección hasta la de disipación. Para hacer esto monitoreamos $\langle u^2 \rangle$ y $\langle b^2 \rangle$ hasta que alcancen un estado estacionario. Probando con distintos valores de los forzados podemos encontrar una combinación que estabilice ambas energías alrededor del valor esperado. Forzados muy grandes resultan en una inyección mayor que la disipación, y por lo tanto las energías divergen. En caso contrario, la disipación gana y las energías se desploman. En la figura 6.1 vemos la evolución de las energías con los valores de los forzados finalmente elegidos. Cabe aclarar que este y todos los gráficos que mostremos de aquí en adelante están en las unidades adimensionales definidas en el capítulo 3 (t_0, L_0, u_0, b_0). Notemos que tanto $\langle u^2 \rangle$ como $\langle b^2 \rangle$ oscilan alrededor de la unidad por un largo tiempo, y esto nos indica que estamos en un estado estacionario. Por otra parte, la oscilación de alta frecuencia que se observa es compatible con el tiempo de correlación del forzado.

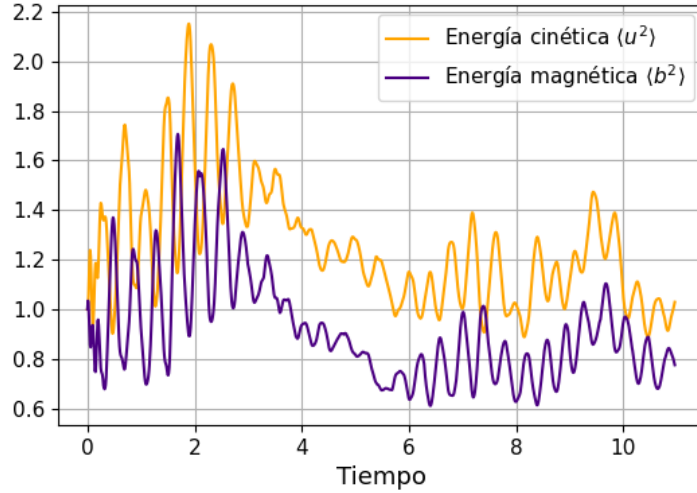


Figura 6.1: Evolución de la energía cinética $\langle u^2 \rangle$ y magnética $\langle b^2 \rangle$ del plasma antes de introducir las partículas de prueba.

En este estado debería cumplirse que la energía ya se propagó a todas las escalas del plasma. Podemos comprobar esto viendo el espectro de energía cinética del fluido en el estado final. Esperaríamos tener un espectro compatible con el predicho por Kolmogorov para turbulencia completamente desarrollada (ver capítulo 4). Queremos entonces encontrar que $E(k) \sim k^{-5/3}$ en el rango inercial. Efectivamente vemos que esto se cumple en la figura 6.2.

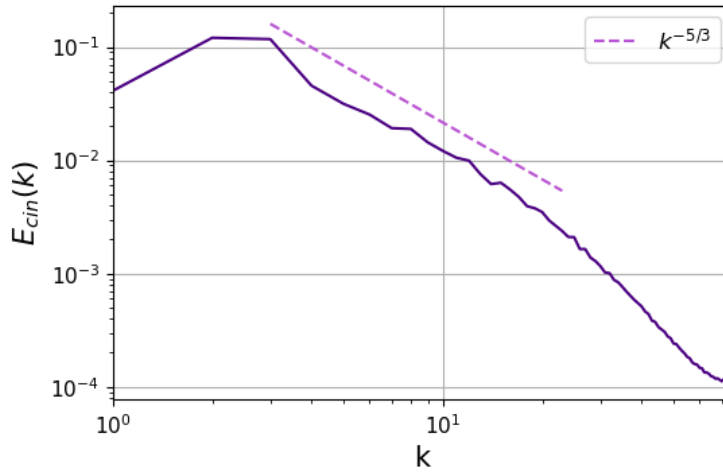


Figura 6.2: Espectro espacial de energía cinética luego de un intervalo de $11t_0$ de simulación. Con la línea punteada se marca $E_{cin}(k) = k^{-5/3}$. Se espera que esto sea compatible con el espectro encontrado a lo largo del rango inercial, como predice la teoría de Kolmogorov.

Una vez alcanzado el estado estacionario, agregamos las partículas y las evolucionamos según lo explicado en la sección 5.4. Lo hacemos durante un intervalo de $11t_0$. Paralelamente continuamos evolucionando al plasma. En todas las simulaciones usamos 500,000 partículas de prueba que inicialmente están repartidas aleatoriamente dentro del dominio espacial. La distribución inicial de sus velocidades es gaussiana con un valor cuadrático medio de 1. La giro-frecuencia la elegimos como $\Omega = 32B_0$, de forma que el giro-radio sea $(32B_0)^{-1}$. Dado que $\Omega \sim q/m = \alpha$, el valor elegido se corresponde con que las partículas estén representando protones. Por último,

la longitud inercial protónica la tomamos como $\rho_{ii} = 0,03125$. De esta forma es del orden de la escala de disipación del plasma, como lo indican las observaciones del viento solar.

6.2. Efecto de los distintos términos del campo eléctrico

Habiendo ya detallado las características de las simulaciones, pasamos ahora a mostrar los resultados que obtuvimos a lo largo de todas ellas. Nos enfocaremos en estudiar cómo afectan los términos del campo eléctrico, en particular el gradiente de la presión electrónica y el efecto Hall, a la dinámica de las partículas de prueba.

6.2.1. Relación entre el momento magnético y la energía

Para comenzar estudiamos la relación entre el momento magnético μ y la energía $|\mathbf{v}|^2$ de las partículas de prueba. A un tiempo fijo, podemos graficar la cantidad de partículas que caen dentro un rango de μ y de $|\mathbf{v}|^2$ simultáneamente. De esta manera obtenemos un histograma bidimensional, donde los ejes son μ y $|\mathbf{v}|^2$ y la cantidad de partículas en cada intervalo se indica utilizando una escala de colores. Viendo este histograma para tiempos sucesivos, podemos analizar la evolución de la distribución de partículas.

Tomamos primero el caso más sencillo en donde despreciamos la contribución del efecto Hall y de la presión electrónica sobre la dinámica de las partículas. Es decir que evolucionamos sus velocidades según (5.22) pero sin tener en cuenta el término proporcional a ϵ/ρ . El histograma que obtenemos se muestra en la figura 6.3.

Al escribir el momento magnético según (2.9) vamos a ignorar la constante $m/2$, tomamos al campo B como el campo guía B_0 , y consideramos a v_\perp como perpendicular a \mathbf{B}_0 . Es decir que, $\mu = \frac{v_x^2 + v_y^2}{B_0} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{8}$. A tiempo cero, la distribución que se ve es la que se corresponde con la condición inicial del campo de velocidades indicada en la sección 6.1.3.

Las partículas que caen sobre la recta de pendiente 1/8, marcada con una línea punteada en la figura 6.3, tienen velocidad exclusivamente perpendicular. En la zona superior no puede haber ninguna partícula ya que implicaría que $v_z^2 < 0$. Por otro lado, cuanto más se alejen las partículas de la recta 1/8, acercándose hacia el eje horizontal, más relevante se torna la velocidad paralela al campo guía en comparación con la velocidad perpendicular.

Lo que podemos ver en la figura 6.3 es que la gran mayoría de las partículas se encuentran muy cercanas a la recta de pendiente 1/8, es decir que su velocidad es principalmente perpendicular a \mathbf{B}_0 . Esta anisotropía en la velocidad que se da en plasmas turbulentos sometidos a un campo magnético guía es un fenómeno ya muy conocido y estudiado (ver [18]) que ya hemos nombrado en capítulos anteriores. Es también interesante notar cómo evoluciona la distribución. A medida que pasa el tiempo, las partículas van aumentando tanto su momento magnético como su energía, pero siempre manteniéndose relativamente cerca a la recta de pendiente 1/8. Esto nos señala que existe una energización predominantemente perpendicular (ver [5]).

Consideremos ahora el caso en que no despreciamos la contribución de la presión electrónica al campo eléctrico que sienten las partículas. Sin embargo, seguimos despreciando el efecto Hall. Repitiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, los histogramas que obtenemos se muestran en la figura 6.4.

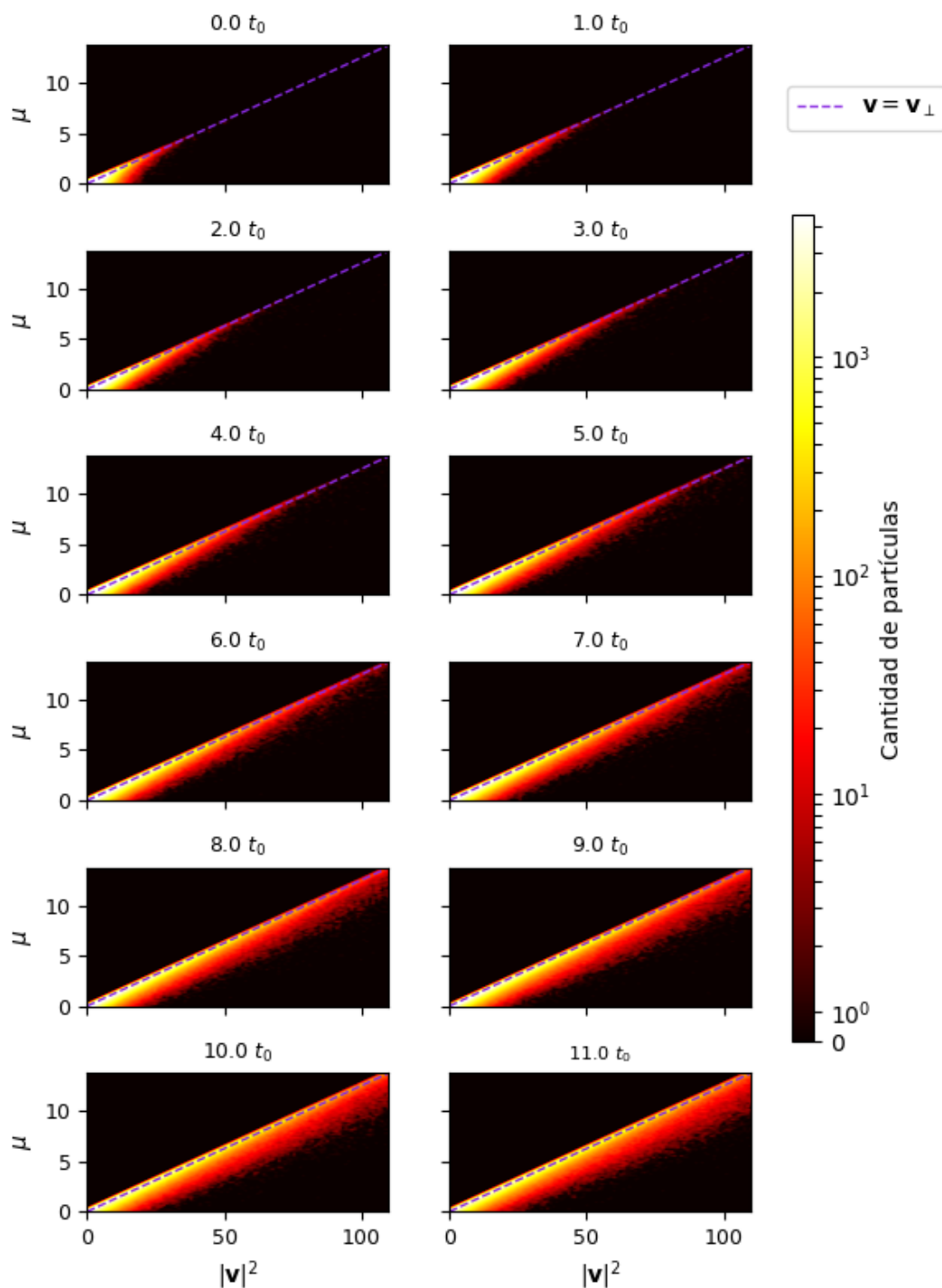


Figura 6.3: Histogramas bidimensionales, a distintos tiempos, del momento magnético en función de la energía de las 500,000 partículas de prueba. Con la escala logarítmica de colores se indica la cantidad de partículas en cada intervalo. La línea punteada corresponde a una velocidad puramente perpendicular. Se desprecia el impacto del efecto Hall y de la presión electrónica sobre las partículas.

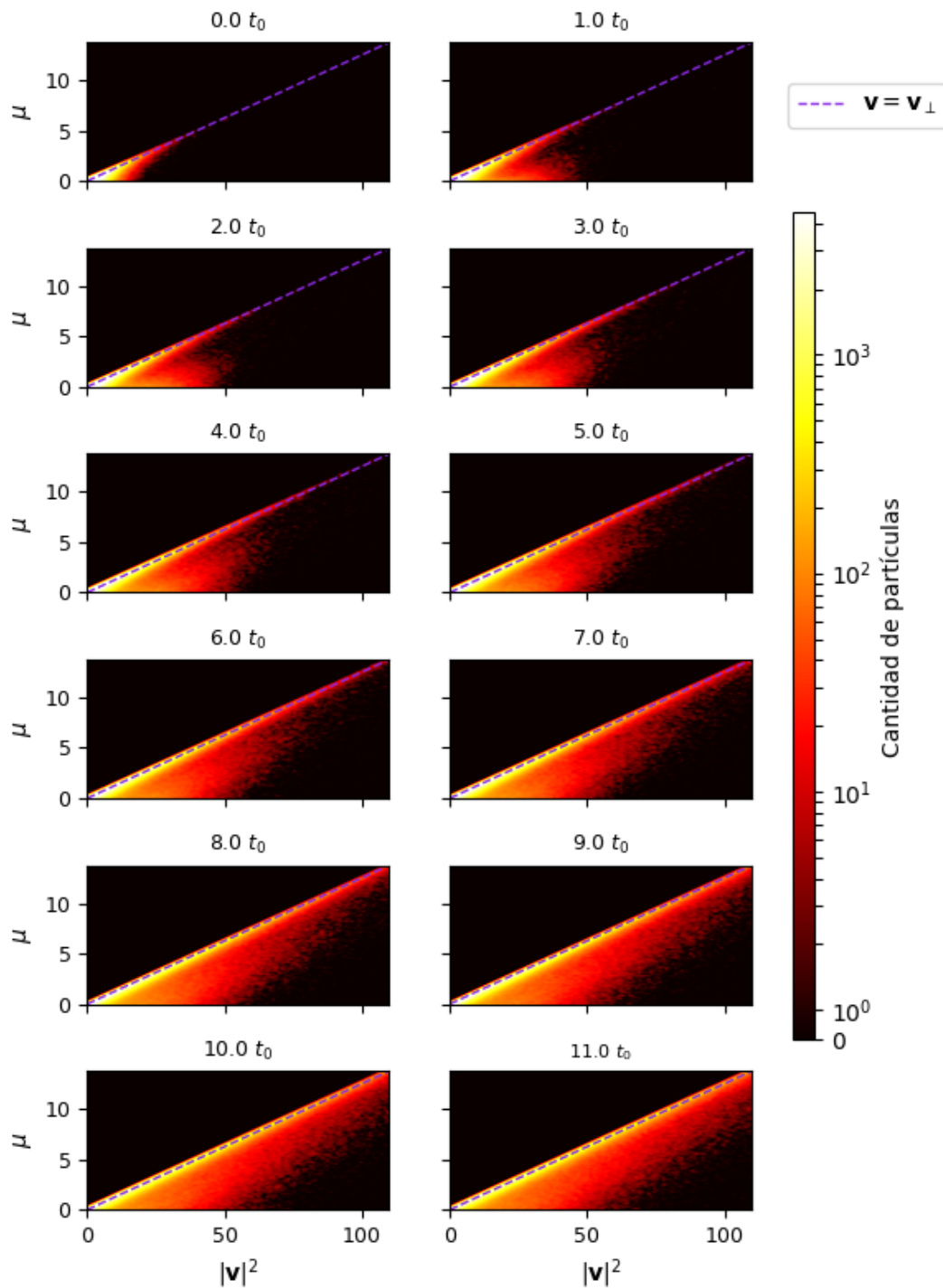


Figura 6.4: Histogramas bidimensionales, a distintos tiempos, del momento magnético en función de la energía de las 500,000 partículas de prueba. Con la escala logarítmica de colores se indica la cantidad de partículas en cada intervalo. La línea punteada corresponde a una velocidad puramente perpendicular. Se desprecia el impacto del efecto Hall sobre las partículas, pero no se desprecia la presión electrónica.

Al agregar el efecto de la presión electrónica sobre la dinámica de las partículas aparece una diferencia cualitativa en las distribuciones. Estas ya no se encuentran tan agrupadas alrededor de la recta de pendiente $1/8$, sino que se ensanchan con respecto al caso anterior. De esta forma se evidencia que la presión electrónica genera una aceleración paralela extra sobre las partículas que no es despreciable. De hecho, la población de partículas sobre la recta horizontal, correspondientes a una velocidad puramente paralela, crece notoriamente respecto al caso sin presión electrónica. Sin embargo, considerando que la escala de colores es logarítmica, concluimos que la mayoría aún tiene una velocidad predominantemente perpendicular.

Cabe mencionar que ignoramos el caso con el término del efecto Hall debido a que no es relevante. Por definición, este término es proporcional a $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, con lo cual es perpendicular al campo magnético. La particularidad de la presión electrónica es la aceleración paralela inusual que produce. Entonces, el efecto Hall no debería inducir ningún comportamiento distinto al de la figura 6.3. Efectivamente, al repetir los histogramas para el caso con efecto Hall y sin presión electrónica, lo que se encuentra es cualitativamente igual a la figura 6.3.

Un detalle a tener en cuenta es la resolución de las simulaciones. Si bien los resultados aquí presentados se realizaron con 256^3 puntos de grilla, previamente las simulaciones se llevaron a cabo con solo 128^3 puntos y los resultados fueron cualitativamente iguales. Esto nos sugiere que el efecto observado *no* es una consecuencia secundaria de la resolución. Justamente, las simulaciones en 256^3 se hicieron para confirmar que fuera así. Para mayor certeza, queda pendiente repetir las simulaciones en una resolución mayor a 256^3 .

Con el fin de corroborar que la energía cinética $\langle u^2 \rangle$ y magnética $\langle b^2 \rangle$ del plasma continúan en un estado estacionario durante la evolución de las partículas, en la figura 6.5 vemos su evolución durante el período con presencia de partículas de prueba. Esta figura corresponde a la simulación realizada con efecto Hall y con el término de presión electrónica. En todos los otros casos sigue observándose que ambas energías oscilan alrededor de un valor no nulo, comprobándose así que se mantiene el estado estacionario del plasma.

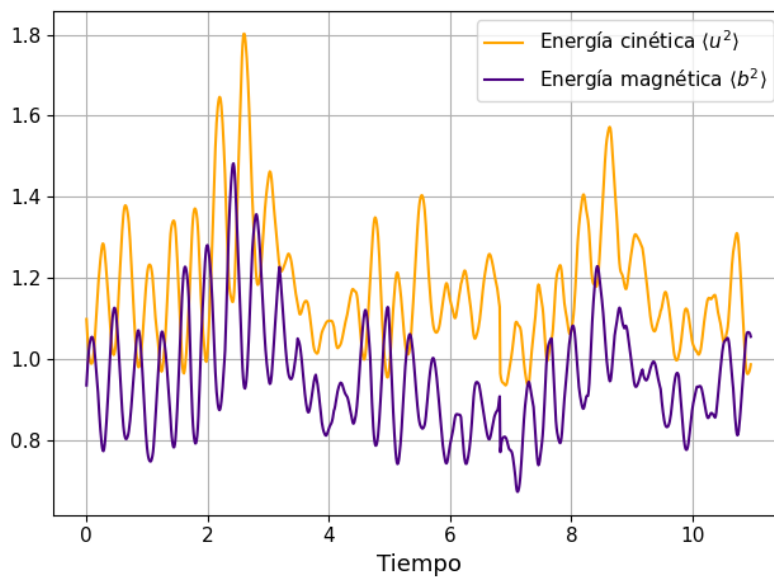


Figura 6.5: Evolución de la energía cinética $\langle u^2 \rangle$ y magnética $\langle b^2 \rangle$ del plasma durante el período con partículas de prueba. Simulación hecha con efecto Hall y el término de presión electrónica.

6.2.2. Energías medias

Para entender mejor el efecto de la presión electrónica, veamos la evolución de las energías medias sobre todas las partículas. Tanto de la energía total $|\mathbf{v}|^2$, como de la perpendicular $v_x^2 + v_y^2$ y de la paralela v_z^2 . En la figura 6.6 vemos esto para el caso sin efecto Hall ni presión electrónica (simulación base) y para el caso sin efecto Hall pero con presión electrónica (PE).

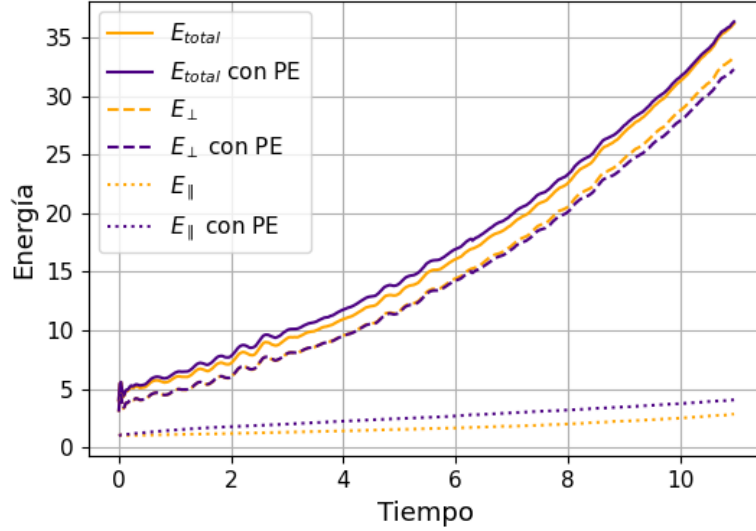


Figura 6.6: Evolución de las energías medias de las partículas (total, perpendicular y paralela) para el caso base sin efecto Hall ni presión electrónica (naranja) y para el caso sin efecto Hall pero con presión electrónica (violeta).

Lo primero que podemos notar de los gráficos de energías medias es la anisotropía ya mencionada entre la parte perpendicular y la paralela. La primera tiene un crecimiento mucho más pronunciado que la segunda.

Por otra parte, puede verse que surge una diferencia en las energías medias al agregar el efecto de la presión electrónica. La energía media total crece levemente, la perpendicular apenas decrece, pero la paralela tiene un crecimiento más notorio. Sobre todo sobre el final de la simulación, parece haber una energización paralela media de las partículas en detrimento de la energía perpendicular. Al mismo tiempo, la energía total permanece aproximadamente constante. De este comportamiento podríamos intuir que quizás la presión electrónica genera sobre las partículas un pitch-angle scattering. Todavía no tenemos evidencia suficiente para confirmar o negar esto, pero seguiremos estudiando esta posibilidad en el resto del trabajo.

Para terminar podemos comparar las energías medias sobre todas las partículas al final de la simulación, para todos los casos posibles. Es decir, para la simulación base sin efecto Hall (H) ni presión electrónica (PE), para la simulación con PE y sin H, con H y sin PE, y por último con PE y H. Esta comparación aparece en la figura 6.7.

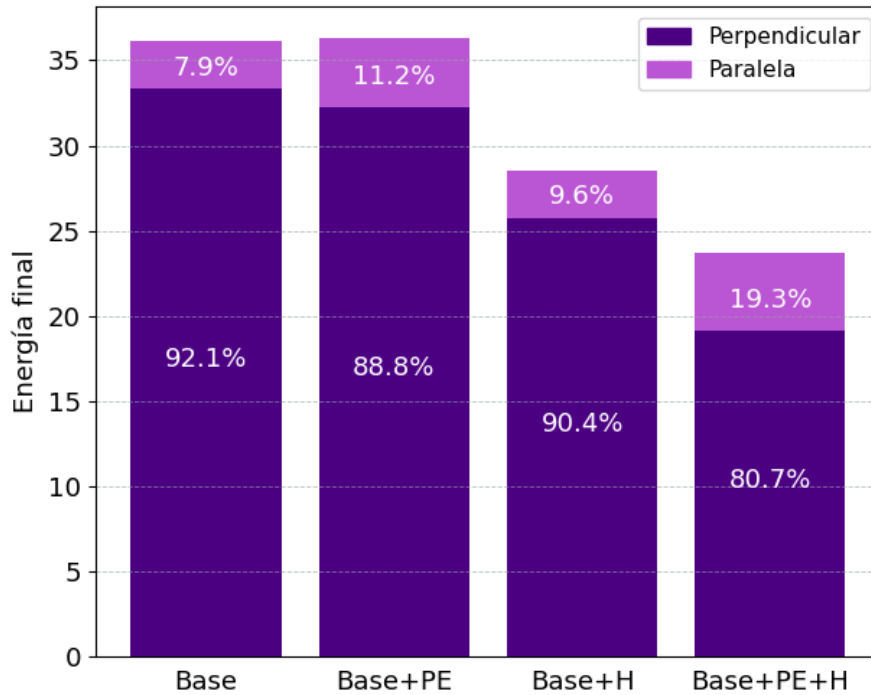


Figura 6.7: Energías medias sobre todas las partículas, tanto perpendiculares como paralelas, en el instante final de la simulación ($11t_0$). Esto se muestra para la simulación base, la simulación con PE y sin Hall, con H y sin PE, y con H y PE. Además se reportan, en cada caso, los porcentajes de energía perpendicular y paralela respecto a la energía total.

Es interesante notar en la figura 6.7 que al agregar únicamente PE, la energía total (perpendicular+paralela) permanece aproximadamente constante. Sin embargo, la parte paralela crece en detrimento de la parte perpendicular. Por otra parte, agregar H genera una disminución significativa de la energía total. A primera vista podríamos decir que impacta mayormente en la componente perpendicular. Esto es razonable si recordamos que la fuerza que ejerce es perpendicular al campo total ($\text{Hall} \propto \mathbf{J} \times \mathbf{B}$). Si bien tiene una componente paralela al campo guía \mathbf{B}_0 , esta es mucho menor que la perpendicular dado que $|\mathbf{b}| \ll \mathbf{B}_0$. No obstante, la relación entre ambas componentes prácticamente no varía. Con lo cual, la consecuencia parece ser una disminución proporcional de la energía. En cuanto a agregar tanto H como PE, el efecto que surge es más complejo. Observamos que la disminución de la energía total y el aumento de la importancia relativa de la componente paralela son considerablemente mayores que en todos los otros casos. Sin embargo, en lo que sigue no entraremos en más detalles sobre este caso particular.

A partir de ahora y en lo que resta del trabajo, todas las simulaciones que usaremos fueron hechas considerando tanto presión electrónica como efecto Hall.

6.2.3. Estadística y estructura del campo eléctrico

Sabemos que la presión electrónica genera una aceleración paralela significativa sobre las partículas de prueba. La hipótesis más sencilla que podemos plantear para explicar esto es que la fuerza generada por la presión electrónica es predominante en la dirección paralela. Llamemos \mathbf{F}_{pe} a la contribución de la presión electrónica al campo eléctrico. Es decir,

$$\mathbf{F}_{pe} = \frac{-\epsilon \nabla p_e}{\rho \gamma M_S^2} \quad (6.2)$$

De esta forma, $q\mathbf{F}_{pe}$ es la fuerza generada por la presión electrónica. Para comprobar si la hipótesis es correcta podemos ver la distribución de la parte paralela y perpendicular de \mathbf{F}_{pe} . En particular, tomamos $F_{pe,z}$ para la parte paralela y $F_{pe,x}$ como representante de la parte perpendicular. También podríamos haber tomado la componente \hat{y} en lugar de \hat{x} . Graficamos dos histogramas, uno para cada componente, del valor del campo sobre la posición de todas las partículas para todos los tiempos. Esto es lo que se muestra en la figura 6.8.

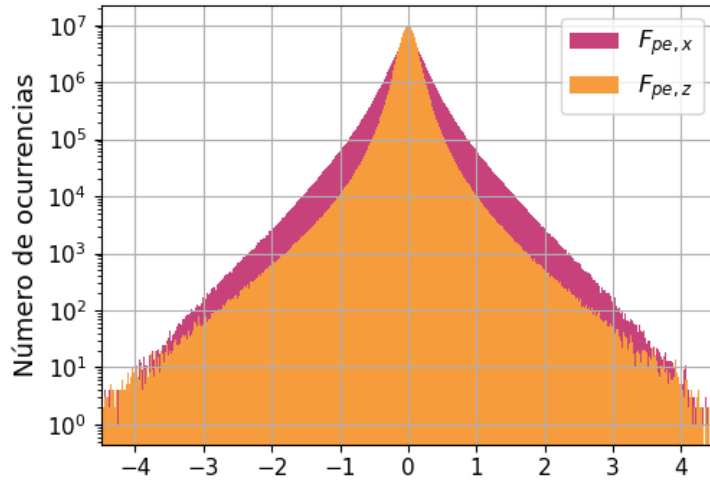


Figura 6.8: Histogramas de los campos $F_{pe,x}$ y $F_{pe,z}$ en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall.

La figura 6.8 refuta la hipótesis de que \mathbf{F}_{pe} es predominantemente en la dirección paralela al campo guía. El desvío estándar de la distribución en la dirección perpendicular es $\sigma_x^{pe} = 0,31$ mientras que en la dirección paralela es $\sigma_z^{pe} = 0,17$. Sin embargo, en la figura 6.9 podemos ver que ocurre si repetimos este análisis para el resto del campo eléctrico, es decir, para

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{F}_{pe} = \mathbf{E} + \frac{\epsilon \nabla p_e}{\rho \gamma M_S^2} = \frac{\mathbf{J}}{R_m} + \frac{\epsilon}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (6.3)$$

En tal caso, los desvíos son $\sigma_x^{E'} = 5,30$ y $\sigma_z^{E'} = 0,55$. La relación entre ellos, es decir $\sigma_z^{E'}/\sigma_x^{E'} = 0,10$, es mucho menor que para \mathbf{F}_{pe} , donde $\sigma_z^{pe}/\sigma_x^{pe} = 0,55$. Concluimos entonces que, si bien la componente perpendicular de \mathbf{F}_{pe} es más significativa que su componente paralela, esta última es mucho más relevante que para el resto del campo eléctrico.

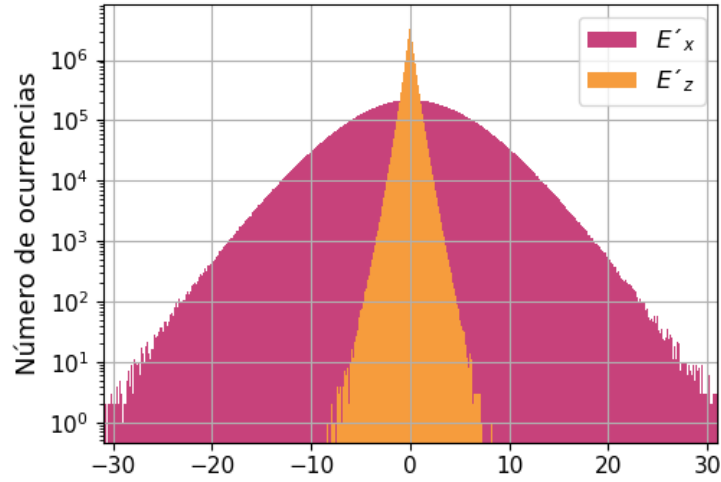


Figura 6.9: Histogramas de E'_x y E'_z en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall.

Viendo los resultados de las figuras 6.8 y 6.9, la hipótesis que surge es que la presión electrónica genera una aceleración paralela en las partículas porque es más significativo su aporte al campo total en la dirección paralela que en la perpendicular. Para comprobarlo, comparamos las dos figuras anteriores graficando los histogramas de $F_{pe,x}/|E'_x|$ y $F_{pe,z}/|E'_z|$. De esta forma podemos ver el aporte de la presión electrónica en comparación al resto del campo eléctrico. Esto se muestra en la figura 6.10. Allí observamos claramente que la dispersión de $F_{pe,z}/|E'_z|$ es mayor que la de $F_{pe,x}/|E'_x|$. De hecho, los desvíos son $\sigma_z = 11562,47$ y $\sigma_x = 700,79$ respectivamente.

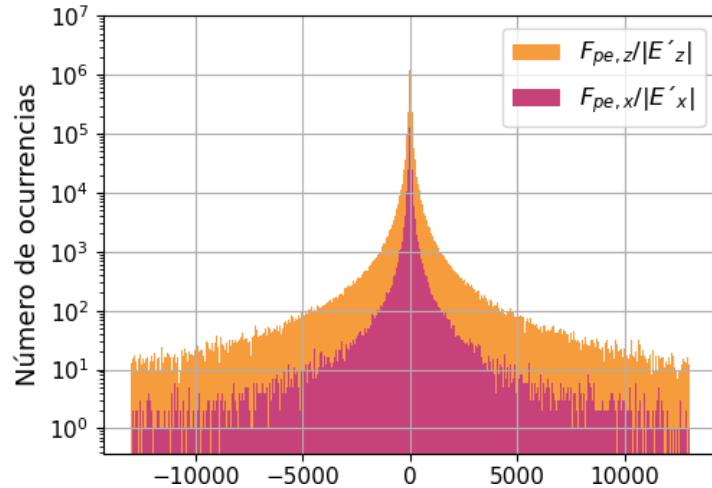


Figura 6.10: Histogramas de $F_{pe,x}/|E'_x|$ y $F_{pe,z}/|E'_z|$ en la posición de las 500,000 partículas de prueba, para todos los tiempos. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall.

Estudiemos ahora la estructura del campo producido por el término de presión electrónica. Nos interesa en particular $F_{pe,z}$. En la figura 6.11a se ve un corte en el plano ZY de la caja de integración (a un tiempo fijo) donde la escala de colores indica la intensidad de $F_{pe,z}$. De la misma forma, en la figura 6.11b se ve un corte en el plano XY .

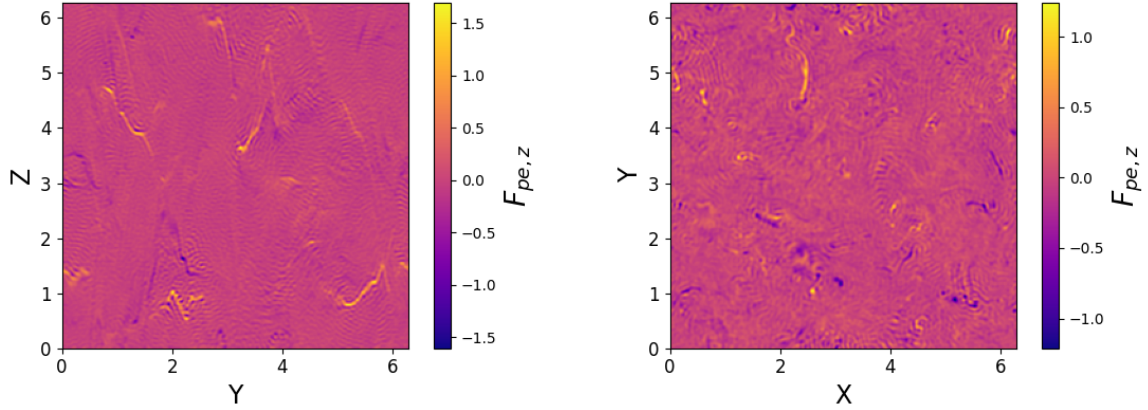
(a) Corte en el plano ZY para un X dado.(b) Corte en el plano XY para un Z dado.

Figura 6.11: Cortes de la caja de integración a un tiempo dado mostrando el valor de $F_{pe,z}$ con la escala de colores. Simulación hecha con presión electrónica y efecto Hall.

En la figura 6.11a cualitativamente observamos que $F_{pe,z}$ está compuesta por un fondo relativamente monótono y cercano a cero, dentro del cual aparecen dispersas estructuras finas, alargadas y ondulantes de valor significativamente mayor. Con esto se descarta la posibilidad de que el término de presión electrónica genere estructuras del tipo hojas de corriente. Estas últimas son más planas y alargadas en la dirección del campo guía.

En el corte transversal al campo guía \mathbf{B}_0 (figura 6.11b) vemos que el campo \mathbf{F}_{pe} tiene más estructura que en el plano ZY . De nuevo, esto es esperable en flujos MHD turbulentos bajo el efecto de un campo guía. Podemos recordar, por ejemplo, la figura 4.2 en donde se ve una situación similar.

También vale la pena destacar las pequeñas ondas que se observan en la figura 6.11. Una opción es que se traten de efectos (numéricos) del aliasing, que deberían disminuir a mayor resolución espacial de grilla. La otra posibilidad es que representen ondas de alta frecuencia. Queda pendiente discernir entre ambas opciones.

En lo que sigue veremos si la estructura particular de $F_{pe,z}$ se corresponde con la dinámica de las partículas de prueba individuales.

6.2.4. Comportamiento de las partículas de prueba

Estudiamos ahora el comportamiento de partículas individuales con el objetivo de profundizar nuestro entendimiento del efecto de la presión electrónica sobre ellas. En particular, nos interesan las partículas responsables del cambio entre los histogramas de la figura 6.3 y 6.4. Con lo cual, buscamos aquellas cuyo cociente entre momento magnético y energía cinética presenta desviaciones significativas del valor $1/8$ al menos durante algún intervalo temporal. Se encontraron numerosas partículas que cumplen este criterio pero aquí solo mostraremos una a modo de ejemplo.

Graficamos entonces cuatro cantidades distintas, todas sobre la misma partícula individual. En la figura 6.12 vemos $F_{pe,z}$ en función del tiempo para la partícula. En 6.13 tenemos la evolución de su energía total $|\mathbf{v}|^2$, perpendicular $v_x^2 + v_y^2$, y paralela v_z^2 . En 6.14 se muestra el valor de $\mu/|\mathbf{v}|^2$ a través del tiempo. Y en 6.15 tenemos el momento magnético de la partícula

en función de su energía cinética. Esto último representa una de las 500,000 contribuciones a los histogramas mostrados en 6.4. Si ahora recordamos que $\mu \propto |\mathbf{v}_\perp|^2$, deducimos que las dos últimas figuras son una forma de visualizar la relevancia relativa entre $|\mathbf{v}_\perp|$ y $|\mathbf{v}_\parallel|$.

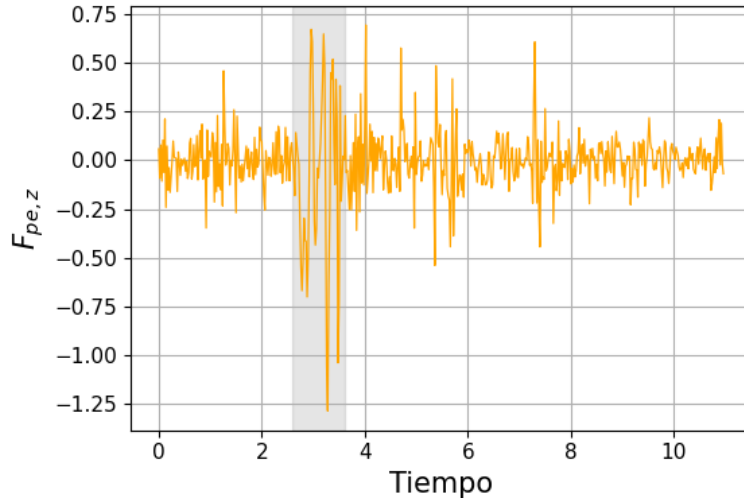


Figura 6.12: Valor de $F_{pe,z}$ que siente una partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris muestra cualitativamente el intervalo de tiempo en que $F_{pe,z}$ sufre un cambio significativo respecto a la media.

En la figura 6.12 podemos ver que la fuerza debida a la presión electrónica en la dirección vertical es relativamente constante alrededor de cero, con saltos en algunos instantes de tiempo. Este comportamiento ocurre en gran parte de las partículas cuya relación entre μ y $|\mathbf{v}|^2$ se aleja del valor $1/8$. Además, es compatible con la estructura de $F_{pe,z}$ vista en la figura 6.11a. Analizando esta última, es esperable que las partículas sientan una fuerza intensa pero de corta duración al pasar por alguna de las estructuras elongadas de $F_{pe,z}$.

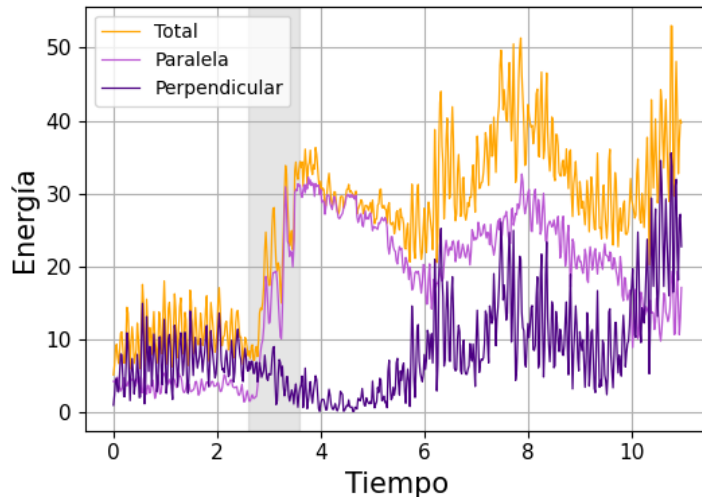


Figura 6.13: Energía cinética total ($|\mathbf{v}|^2$), perpendicular ($v_x^2 + v_y^2$) y paralela (v_z^2) de la partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris es la misma que aparece en la figura 6.12.

La figura 6.13 es interesante por varias razones. En primer lugar, en el mismo momento en que $F_{pe,z}$ tiene un salto (ver figura 6.12), la energía cinética paralela también muestra un

salto significativo. Esto es un indicativo de que la presión electrónica efectivamente acelera a las partículas paralelamente a \mathbf{B}_0 . De hecho, es interesante notar que la energía perpendicular es mayor a la paralela antes del salto. Esto es esperable en flujos MHD turbulentos con campo guía, donde ya es sabido que existe una anisotropía entre ambas direcciones. Luego del salto, a medida que corre el tiempo, el orden natural se restaura y eventualmente la energía perpendicular vuelve a ser mayor que la paralela. Podemos interpretar entonces que el rol de la presión electrónica es irrumpir este ordenamiento al generar una aceleración paralela de una magnitud que no ocurriría en el caso sin \mathbf{F}_{pe} .

Otro aspecto interesante de la figura 6.13 es que, en el momento del salto, la energía total y la paralela tienen un aumento considerable pero la perpendicular permanece casi inalterada. En particular, el hecho de que la energía total no se mantenga constante indica que el efecto de la presión electrónica sobre las partículas *no* es un pitch-angle scattering. Podemos ver claramente que no se produce una redistribución entre la energía paralela y la perpendicular, sino que aparece una energización neta de la partícula predominantemente en la dirección paralela.

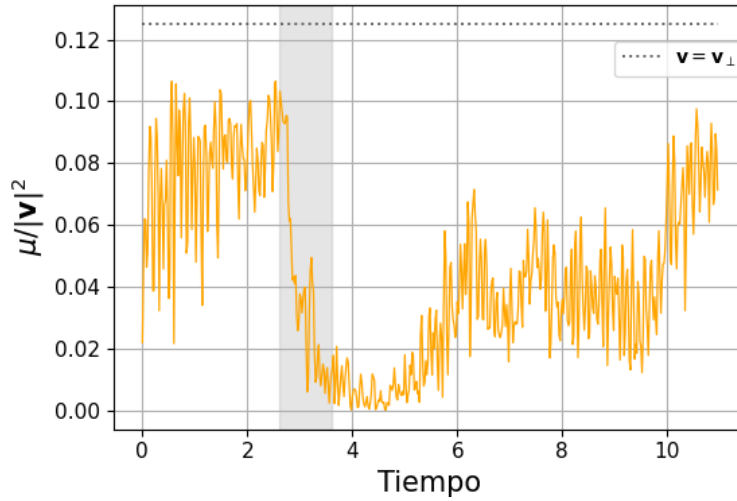


Figura 6.14: Cociente entre el momento magnético y la energía cinética de la partícula individual en función del tiempo. La zona vertical marcada en gris es la misma que aparece en la figura 6.12. La línea punteada en $\mu/|\mathbf{v}|^2 = 1/8$ indica que la partícula tiene velocidad puramente perpendicular al campo magnético guía.

Para poder visualizar como evoluciona la relación entre la energía paralela y la perpendicular, la figura 6.14 nos es útil si recordamos que,

$$\frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{B_0(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \frac{\sin^2(\chi)}{B_0} \quad (6.4)$$

Teniendo esto en cuenta deducimos que la recta horizontal ubicada en $1/B_0 = 1/8$ corresponde con una velocidad exclusivamente perpendicular o un pitch-angle $\chi = 90^\circ$. En cambio, el eje horizontal representa que la partícula tiene velocidad únicamente en el eje \hat{z} o pitch-angle $\chi = 0^\circ$. Como se puede ver en 6.14, aproximadamente al mismo tiempo que $F_{pe,z}$ presenta un salto, $\mu/|\mathbf{v}|^2$ también lo hace. Observamos en ese tiempo una marcada disminución de su valor. Nuevamente esto nos muestra cómo la presión electrónica impacta sobre la componente paralela de la velocidad. A tiempos posteriores, cuando $F_{pe,z}$ vuelve a oscilar alrededor de cero, el valor

de $\mu/|\mathbf{v}|^2$ crece nuevamente. Vemos entonces que cuando $F_{pe,z}$ es despreciable, recuperamos el caso conocido en que la velocidad es principalmente perpendicular.

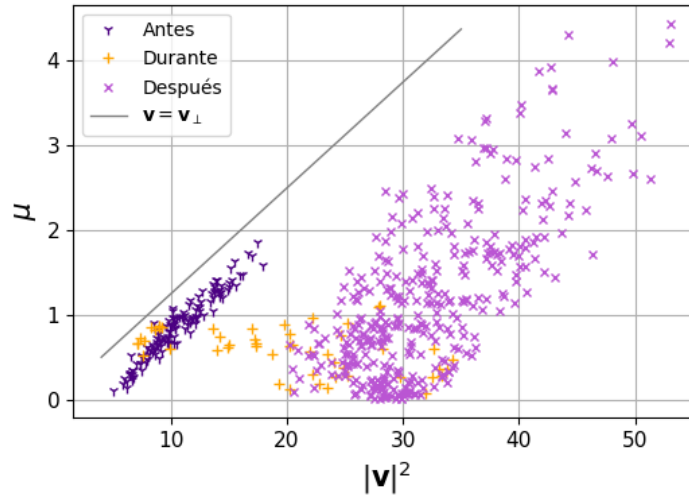


Figura 6.15: Momento magnético en función de la energía cinética de la partícula individual. La línea gris de pendiente 1/8 indica que la velocidad es puramente perpendicular al campo magnético guía. Los puntos correspondientes a tiempo antes, durante y después de la zona gris de la figura 6.12 están graficados con distintos marcadores y colores.

La última de las figuras, la 6.15, muestra una relación entre el momento magnético y la energía cinética que *no* se encuentra cerca de la recta de pendiente 1/8 a todo tiempo. Por lo tanto, esta partícula forma parte de aquellas responsables de generar las diferencias cualitativas entre los histogramas de la figura 6.3 y la 6.4. También es interesante ver la diferencia entre los puntos antes, durante y después del salto de $F_{pe,z}$. Estos están marcados con distintos colores. Los puntos cercanos a la recta de pendiente 1/8 corresponden a tiempos anteriores al salto, mientras que los puntos posteriores se encuentran muy alejados. Ambos conjuntos están conectados por los puntos naranjas que corresponden a los tiempos durante el salto.

Un aspecto importante a notar es que la mayoría de las partículas con este tipo de relación entre μ y $|\mathbf{v}|^2$ presentan saltos o algún tipo de corrimiento significativo del cero en el campo $F_{pe,z}$ que ven. Las partículas cuyo valor de $\mu/|\mathbf{v}|^2$ se mantiene constantemente cerca de 1/8, no suelen ver saltos relevantes de $F_{pe,z}$. Esto nos sugiere que estas últimas no se encuentran con ninguna de las estructuras finas de $F_{pe,z}$ durante su trayectoria, y en consecuencia no sufren una aceleración paralela atípica.

A lo largo de esta tesis realizamos simulaciones numéricas directas de flujos MHD compresibles en un régimen turbulento bajo la acción de un campo magnético guía. En particular, estudiamos la dinámica de partículas de prueba sumergidas en estos fluidos. Esto nos sirve como una primera aproximación al entendimiento de plasmas turbulentos, como puede ser el plasma solar.

Comenzamos simulando únicamente el plasma para alcanzar un estado estacionario de turbulencia completamente desarrollada, y una vez hecho esto agregamos 500,000 partículas. Estudiamos el efecto de los distintos términos del campo eléctrico, tanto del término de presión electrónica como del efecto Hall, sobre el comportamiento de las partículas. Comparando la distribución del momento magnético en función de la energía cinética de todas las partículas vemos una diferencia clara si tenemos en cuenta o no el término de presión electrónica. Al no tener en cuenta la presión electrónica ni Hall, recuperamos la anisotropía ya conocida entre la energización perpendicular y paralela al campo guía. Descubrimos, sin embargo, que al agregar la presión electrónica se genera una aceleración paralela inusual.

También analizamos la evolución de las energías medias sobre todas las partículas, tanto la total como la perpendicular y la paralela. Repetimos esto primero incluyendo y luego dejando de lado la presión electrónica y el efecto Hall, en las diferentes combinaciones (Base, Base+PE, Base+H, Base+PE+H). Encontramos que el efecto Hall deja prácticamente inalterada la relación entre la componente paralela y la perpendicular, mientras que al mismo tiempo disminuye la energía total. De todas formas en este trabajo no nos centramos en hacer un análisis tan profundo del efecto Hall. En cuanto al término de presión electrónica, nuevamente obtenemos que genera una energización paralela con respecto al caso base. Adicionalmente, produce una pequeña disminución de la energía perpendicular de forma tal que la energía total permanece aproximadamente constante. Esto podría sugerir que la presión electrónica redistribuye la energía, con lo cual podría tratarse de un pitch-angle scattering. Sin embargo, para verificarlo no alcanza solo con observar valores medios.

La energización paralela atípica producida por la presión electrónica se repitió tanto para

una grilla de 128^3 puntos como para una de 256^3 . Esto nos sugiere que no es una consecuencia numérica del tamaño de la grilla. Simulaciones con mayor resolución podrían terminar de confirmar esto.

Por otra parte, analizamos la contribución de la presión electrónica al campo eléctrico, tanto sobre la componente perpendicular como la paralela. Viendo que la dispersión del campo $F_{pe,z}$ que sienten las partículas es menor que la de $F_{pe,x}$, descartamos que la aceleración paralela inusual producida por \mathbf{F}_{pe} sea consecuencia de un campo predominante en la dirección \hat{z} . Sin embargo, cuando repetimos lo mismo para el resto del campo eléctrico observamos que la dispersión de E'_x es mucho mayor a la de E'_z comparando con el caso de \mathbf{F}_{pe} . Inspirados por esto, comparamos las dispersiones de $F_{pe,z}/|E'_z|$ y de $F_{pe,x}/|E'_x|$ obteniendo un valor mayor para el primer caso. Es decir que si bien el término de presión electrónica es preponderante en el plano transversal a \mathbf{B}_0 , la contribución de $F_{pe,z}$ al campo E_z es de mayor importancia que la de $F_{pe,x}$ a E_x . Esto explica la aceleración paralela que genera.

Examinamos también la estructura del campo \mathbf{F}_{pe} mediante cortes horizontales y verticales de la caja de integración. En el corte vertical vemos un fondo monótono, aproximadamente nulo, y superpuestas aparecen estructuras finas y alargadas de módulo considerable. De esto concluimos que $F_{pe,z}$ genera empujes de corta intensidad pero fuertes sobre las partículas que pasan por estas estructuras. Además observamos que las estructuras no son similares a las ya conocidas hojas de corriente.

Por último analizamos la dinámica de partículas individuales. Elegimos una cuya relación entre el momento magnético y la energía cinética se aleje considerablemente del valor $1/B_0$, de forma tal de que sea una de las partículas que adquiere una aceleración paralela atípica. Vemos que en un momento dado, el valor de $F_{pe,z}$ que siente la partícula sufre un salto grande. Ese salto se corresponde además con un aumento repentino en la energía paralela y la total. De esta forma confirmamos que las estructuras finas de $F_{pe,z}$ aceleran paralelamente a las partículas. También descartamos que la presión electrónica ocasione un pitch-angle scattering dado que se ve una aceleración neta clara. Por otra parte, al observar la distribución del momento magnético en función de la energía cinética, notamos que antes del salto de $F_{pe,z}$ la velocidad es mayoritariamente en el plano transversal a B_0 , y que luego adquiere una componente paralela significativa.

Este tipo de comportamiento aparece en la gran mayoría de partículas cuyo cociente entre μ y $|\mathbf{v}|^2$ se desvía notoriamente de $1/B_0$. Aquellas que no se desvían, en general no presentan ningún salto en $F_{pe,z}$. Esto sugiere que las que logran evitar las estructuras finas de $F_{pe,z}$, no se aceleran paralelamente de forma atípica. Y aquellas que sí sufren esta aceleración es porque se encontraron con alguna de estas estructuras.

A lo largo de este trabajo logramos comprender mejor cómo afectan los distintos términos del campo eléctrico, pero en particular el de presión electrónica, a la dinámica de las partículas de prueba. Estudiando la estadística y la estructura del campo logramos comprender por qué afecta a las partículas de la forma en qué lo hace. De esta manera dimensionamos el efecto de incluir o no la presión electrónica y el término de Hall en simulaciones numéricas de flujos MHD turbulentos, los cuales muchas veces suelen despreciarse en primeras aproximaciones.

Este trabajo de tesis representa un nuevo paso en la comprensión de la dinámica comple-

ja de partículas cargadas en plasmas turbulentos y contribuye al entendimiento de fenómenos observados en plasmas espaciales, como el viento solar y magnetósferas planetarias.

- [1] González, C. A., Dmitruk, P., Mininni, P. D. y Matthaeus, W. H. *On the compressibility effect in test particle acceleration by magnetohydrodynamic turbulence*. Physics of Plasmas, 2016.
- [2] Fitzpatrick, R. *Plasma Physics*. CRC Press, 2014.
- [3] Boyd, T. J. M. y Sanderson, J. J. *The Physics of Plasma*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Roederer, J. G. y Zhang, H. *Dynamics of magnetically trapped particles*. Springer, 2016.
- [5] Dmitruk, P., Matthaeus, W. H. y Seenu, N. *Test particle energization by current sheets and nonuniform fields magnetohydrodynamic turbulence*. The Astrophysical Journal, 2004.
- [6] Inan, U. S. y Golkowski, M. *Principles of plasma physics for Engineers and scientists*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] Krall, N. A. y Trivelpiece, A. W. *Principles of plasma physics*. McGraw-Hill, 1973.
- [8] Galtier, S. *Introduction to modern magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2016.
- [9] Davidson, P. A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [10] Banerjee, S. *Compressible turbulence in space and astrophysical plasmas : Analytical approach and in-situ data analysis for the solar wind*. PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, 2014.
- [11] Richardson, L. F. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.
- [12] Kolmogorov, A. N. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers*. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volumen 30, páginas 299–303, 1941.

- [13] Kolmogorov, A. N. *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volumen 32, páginas 16–18, 1941.
- [14] Jiménez, J. *The Contributions of A. N. Kolmogorov to the theory of turbulence*. Arbor 178. 10.3989/arbor.2004.i704.550, 2004.
- [15] Iroshnikov, P. S. *Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field*. Soviet Ast., 7:566, 1964.
- [16] Kraichnan, R. H. *Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence*. Phys. Fluids, 8:1385–1387, 1965.
- [17] Goldreich, P. y Sridhar, S. *Toward a theory of interstellar turbulence. II. Strong Alfvénic turbulence*. The Astrophysical Journal, 438:763-775, 1995.
- [18] Oughton, S., Priest, E. R. y Matthaeus, W. H. *The influence of a mean magnetic field on three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 1994.
- [19] Gómez, D. O. Mininni, P. D. y Dmitruk, P. *The pseudospectral method with mpi parallelization*. Phys. Scripta T116, 123, 2005.
- [20] Mininni, P. D., Rosenberg, D., Reddy, R. y Pouquet, A. *A hybrid mpi-openmp scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence*. Parallel Computing, 37(6-7):16–326, 2011.
- [21] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. y Zang, T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin etc., Springer-Verlag 1987.
- [22] Gottlieb, D. y Orszag, A. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Application*. SIAM, Philadelphia, 1977.
- [23] Fornberg, B. y Sloan, D. M. *A review of pseudospectral methods for solving partial differential equations*. Acta Numerica, 3, pp 203-267, 1994.
- [24] Orszag, S. A. *On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components*. Journal of Atmospheric Sciences, 28(6): 1074–1074, 1971.
- [25] Hossain, M., Matthaeus, W. H. y Ghosh, S. *On computing high order galerkin products*. Computer Physics Communications, 69:1–6, 02 1992.
- [26] Ghosh, S., Hossain, M., y Matthaeus, W. H. *The application of spectral methods in simulating compressible fluid and magnetofluid turbulence*. Computer Physics Communications, 1993.
- [27] Gómez, D., Mininni, P. D. y Dmitruk, P. *Parallel simulations in turbulent MHD*. Physica Scripta, 2005:123, 03 2006.
- [28] Andrés, N., Gonzalez, C., Martin, L., Dmitruk, P. y Gómez, D. *Two-fluid turbulence including electron inertia*. Physics Of Plasmas, 2014.

-
- [29] Dalena, S., Greco, A., Rappazzo, A. F., Mace, R. L. y Matthaeus, W. H. *Magnetic moment nonconservation in magnetohydrodynamic turbulence models*. Physical Review E, 2012.
- [30] González, C. A., Dmitruk, P., Mininni, P. D. y Matthaeus, W. H. *Test Particle Energization and the Anisotropic Effects of Dynamical MHD Turbulence*. The Astrophysical Journal, 2017.
- [31] Lehe, R., Parrish, I. J. y Quataert, E. *The heating of test particles in numerical simulations of alfvénic turbulence*. The Astrophysical Journal, 2009.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual
(by-nc-sa) 2.5 Argentina
Buenos Aires, 2021.