

Resonancia paramétrica como mecanismo de producción de materia oscura

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Gonzalo Santa Cruz Moreno

bajo la dirección de

Esteban Adolfo Calzetta

y la co-dirección de

Diana López Nacir



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Buenos Aires, Argentina

Marzo 2023

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciéndolo a mis directores Esteban y Diana por darme la oportunidad de trabajar en estos temas tan emocionantes de la física y por haberme enseñado el camino en la investigación. Empezando por adentrarme en el estudio de la bibliografía fuimos buscando la pregunta que queríamos responder. Una vez determinada la pregunta fue cuestión de construcción y discusión, a mi parecer la parte más satisfactoria del proceso. Siempre empezando por lo más simple, pero intentando retener la mayor rigurosidad y generalidad, paso a paso se fueron construyendo las ecuaciones e ideas. Haber llegado a resultados que no esperaba e interpretarlos creo que es el corazón de la física teórica. Siento haber aprendido más que lo plasmado en este trabajo, y también me doy cuenta de que, al igual que en todas las áreas de la física, cada vez uno siente que sabe un poco menos. Espero poder seguir trabajando con ellos, encontrando nuevas preguntas y respuestas.

Les quiero dar las gracias a Fernando, Susana y Paula por aceptar conformar el jurado, recibir mi tormenta de mails y dedicar el tiempo a leer la tesis. Quiero agradecerle a Silvina por estar presente en el aspecto de la materia y ayudarme a avanzar en ella.

Yendo un poco más a lo general, es claro que lo que expreso en un trabajo de finalización de la licenciatura es producto de la formación que obtuve a lo largo de los años en las clases y fuera de las clases, espacio único para discutir temas relevantes de la física. Ésto no hubiese sido posible sin los profesores y las profesoras de la licenciatura en física que me acompañaron en el proceso.

Indispensable para lo presente es que exista una facultad como Ciencias Exactas con tantas personas trabajando para que funcione de la manera en la que funciona.

Quiero también darle las gracias a los grupos de discusión de campos y cosmología que, aunque no hayamos tocado temas relevantes a lo expuesto en esta tesis, es fructífero para el entendimiento de las cuestiones relevantes para mí. Espero que sigan realizándose las juntadas y poder formar parte de ellas.

Por último, agradecer a mis compañeros y compañeras de física, a mis amigos y amigas y a mi familia.

Estos agradecimientos no son solamente por haber logrado trabajar en esta tesis, sino también por permitirme estar en el lugar que estoy y poder dibujar mi camino hacia el futuro. Sin todos ustedes no sería.

Índice

1. Introducción	4
2. Modelo	9
2.1. Espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker	10
2.2. Sistema de dos campos con interacción $V[\Phi, X] = g\Phi^2 X^2/2$	11
2.3. Regularización y renormalización del valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$	13
3. Resonancia paramétrica ancha	16
3.1. Aproximación WKB fuera de los mínimos de ω^2	18
3.2. Aproximación de ω^2 por un potencial parabólico cerca de los mínimos	19
4. Cálculo del valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$	23
4.1. Construcción de las soluciones	24
4.2. El rol de la fase	27
4.3. Creación espontánea y estimulada de partículas	28
4.4. Fin de la resonancia: valor de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Max}$	29
4.4.1. Valor óptimo de la constante de acoplamiento g	30
4.4.2. Cálculo de $q(j_M)$	33
4.5. Equilibrio térmico	33
5. Energía y presión	34
5.1. Presión del campo liviano	36
6. Expansión del universo y dilución de partículas	37
6.1. Cota superior para la temperatura inicial de la radiación	37
6.2. Corrección en $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ por la expansión del universo	40
7. Conclusiones	45
A. Sistema de unidades	46
B. Ecuaciones para un espacio-tiempo isótropo y homogéneo	46
C. Valor de expectación de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ en términos de la integral de las f_k	48
D. Pegado de dos soluciones de oscilador armónico con distinta frecuencia	49
E. Terminos de fase	50
F. Tensor de energía-momento	51

G. Ecuación cuártica para Ω_j	52
H. Integrales	53
Referencias	54

Resumen

Es conocido que los campos escalares de materia oscura ultralivianos acoplados mínimamente con la gravedad producidos en inflación por el mecanismo llamado *misalignment* generan isocurvaturas restringidas por las observaciones del fondo cósmico de microondas. Se propone entonces un campo liviano con un acoplamiento no-mínimo con la gravedad de manera de suprimir la producción generada por este mecanismo, y un campo pesado con acoplamiento mínimo que se produzca de esta manera. El campo pesado le transfiere tiempo más tarde, en la época de radiación, la energía al campo liviano rápidamente a través de la *resonancia paramétrica ancha*.

Se estudia en detalle la interacción entre ambos campos durante el proceso de la resonancia paramétrica ancha teniendo en cuenta el efecto de *backreaction* del campo liviano sobre el campo pesado y viceversa. En principio se estudia el problema en un espacio estático y luego con el espacio levemente en expansión. Se estima la duración del proceso y se obtiene una cota superior para la constante de Hubble a partir de la cual la creación de partículas se hace efectiva frente a la dilución por la expansión. Se ve que el equilibrio térmico se alcanza mucho tiempo después que el momento de la finalización de la resonancia ancha. Se calcula una constante de acoplamiento óptima para la producción del campo liviano. Además se obtiene una ecuación de estado con presión aproximadamente nula, como debe ser para la materia oscura fría.

1. Introducción

El modelo estándar junto a las ecuaciones para el espacio tiempo y sus interacciones presentan un panorama incompleto para dar cuenta del universo a gran escala: está el problema de la estabilidad de los cúmulos de galaxias descubierto por primera vez por Fritz Zwicky en 1933, la discrepancia entre la predicción y observación de la velocidad de rotación de las galaxias estudiada por Vera Rubin años más tarde, tenemos también las lentes gravitacionales conformadas por cúmulos de galaxias que precisan de una componente energética muy grande para ajustar las observaciones y el problema de que “no hay tiempo”¹ para que estructuras altamente no lineales como los cúmulos de galaxias se formen[1]. Todos estos problemas admiten una solución natural dada por la existencia de un nuevo tipo de materia que no interactuaría de manera apreciable con el modelo estándar pero sí con el espacio tiempo, la llamada *materia oscura*. A partir de estas discrepancias se ve que la proporción energética de materia oscura frente a materia del modelo estándar debe ser aproximadamente el 85 %[2]. Estos no son los únicos problemas cosmológicos, sino que al estudiar la evolución del universo vemos que hay hoy en día una expansión acelerada, que se soluciona al proponer la llamada *energía oscura* o constante cosmológica Λ . Teniendo en cuenta ésto la materia oscura debe ser el 26,4 % de la energía total.

¹La materia bariónica solo puede empezar a formar estructuras luego de la recombinación y no hay tiempo suficiente entre recombinación y el presente para que esto ocurra. Al proponer la existencia de materia oscura, ésta puede empezar a colapsar mucho antes que la recombinación, a partir del momento de la igualdad materia-radiación, dando tiempo suficiente para la formación de las estructuras.

Invirtiéndolo la película de la expansión del universo en el tiempo vamos hacia el pasado y podemos inferir su estado en tiempos más cercanos al origen. Al rebobinar esta película atravesamos varias transiciones de las que nos interesa resaltar tres: más cerca en el tiempo tenemos a la llamada *recombinación*, proceso en el cual se emite la radiación cósmica de fondo (CMB), aproximadamente en el año 380,000 luego del Big Bang; más lejos se encuentra la *igualdad materia-radiación*, ubicada alrededor del año 50,000, definida como el momento en el que las densidades de energía del modelo estándar y de la materia oscura² toman el mismo valor. Esta transición separa las etapas del universo dominado por la materia y por la radiación. Si seguimos hacia el Big Bang, entrando a la época dominada por la radiación, ya llegando a los primeros minutos, nos encontraremos con el proceso de nucleosíntesis. Si queremos ver qué es lo que pasa mucho antes que el primer segundo es necesario tener en cuenta la posibilidad de que el universo haya pasado inicialmente por una etapa llamada *inflación*[3] que soluciona dos problemas observacionales importantes: la casi isotropía en el CMB³, también conocido como el problema del horizonte, y la observación de que el universo es prácticamente plano hoy en día. Además la teoría de la inflación predice la generación de las fluctuaciones primordiales de densidad de materia y de ondas gravitacionales.

Entonces nos vemos en un marco de posibles teorías para explicar el universo donde los actores son los campos del modelo estándar, la materia oscura, la energía oscura, el inflatón y el propio espacio tiempo. Lo que nos interesa en este trabajo son las teorías de materia oscura. Si existiese, uno necesita poder hacer un seguimiento de la misma hasta los orígenes del universo, digamos hasta el proceso inflacionario, y tener una teoría sobre su generación y su evolución que ajuste las observaciones. Este estudio nos permite filtrar las posibles teorías o modelos de materia oscura.

Los modelos de materia oscura presentes hoy en día cubren un gran espectro de masas. La llamada materia oscura *ultraliviana* puede tener como mínimo⁴ una masa de 10^{-22} eV hasta masas del orden del keV. Dentro de este rango se encuentra el propuesto *axión de la QCD*, con masas entre 10^{-12} eV y 10^{-2} eV, que solucionaría el problema CP-fuerte[4]. Hay modelos para materia oscura más pesada, desde el keV hasta 10^{14} eV. En este rango están comprendidas las llamadas *WIMPs* (weakly interacting massive particles) que interactuarían débilmente con el modelo estándar y cuyas masas van desde 10^{10} eV hasta 10^{12} eV. Hay modelos más exóticos, como los agujeros negros primordiales, con masas del orden de 10^{66} eV.

Otra característica principal de los modelos de materia oscura es el espín. Como la densidad de partículas es $n = \rho/m$, donde ρ está determinada experimentalmente a partir de las observaciones gravitacionales, a menor masa la densidad de partículas debe ser mayor. Por el principio de exclu-

²La radiación está conformada por partículas del modelo estándar mientras que la materia, principalmente por materia oscura.

³Si miramos el CMB en una dirección y en alguna otra, por ejemplo en la opuesta, medimos una temperatura de la radiación $T \sim 2,7K$. Esto implica que en la recombinación las dos regiones que emitieron la radiación estaban prácticamente en el mismo estado, aunque no es posible en el modelo cosmológico estándar que ambas regiones hayan estado en contacto causal en el pasado.

⁴Esto sale de pedir que la longitud de onda de de Broglie de materia oscura moviéndose a una velocidad típica de 100km/s sea comparable al tamaño de una galaxia promedio.

sión de Pauli no es posible obtener densidades muy grandes para fermiones, lo que imposibilita que sus masas sean muy livianas. Con los bosones no hay tal problema ya que el número de ocupación puede ser grande. Se suelen proponer teorías escalares[4] con espín 0, vectoriales[5, 6] con espín 1 y tensoriales[7, 8] con espín 2.

Dada una teoría con una masa y un espín es necesario proponer un *mecanismo de producción* y estudiar su posterior evolución. La forma estándar de producción es el denominado *freeze out*, que se propuso para las WIMPs originalmente. La idea es que la radiación del modelo estándar está inicialmente en equilibrio térmico con las WIMPs, al disminuir la temperatura llega un momento en el que la interacción deja de ser efectiva frente a la expansión del espacio y se congela el número de partículas oscuras. Lo interesante de este modelo es que para ajustar las observaciones es necesario que la sección eficaz de interacción sea del orden de la electrodébil, lo que se conoce como el *WIMPs miracle*. Otro mecanismo estándar es el *freeze in*: inicialmente las interacciones entre la materia oscura y el modelo estándar no son suficientes para que haya un equilibrio térmico y se crean partículas oscuras con un espectro determinado por el tipo de interacción. Otros mecanismos de producción estudiados son el *canibalismo*, la asimetría materia oscura-anti materia oscura, los agujeros negros primordiales, entre otros. Como mencionamos antes, si consideramos la teoría de la inflación existen las fluctuaciones inflacionarias de los campos de materia. Dependiendo cómo sea el acoplamiento de los campos de materia al espacio tiempo estas fluctuaciones inflacionarias pueden dar lugar a la producción de los campos[5, 9]. En particular se conoce como *misalignment* a la producción de un campo prácticamente homogéneo producto de estas fluctuaciones: si el acoplamiento del campo a la curvatura es mínimo la producción de modos $k \sim 0$ es apreciable, mientras que si el acoplamiento es no-mínimo la producción para números de onda pequeños está suprimida[10].

La idea de este trabajo es estudiar la producción de un campo escalar de materia oscura ultraliviana con masa \tilde{m} , que llamaremos *liviano*. Para ello nos vamos a ubicar en la época dominada por la radiación⁵ que inicia luego de inflación y termina en la igualdad materia-radiación, con valores de la constante de Hubble entre $H_I \sim 10^{23}\text{eV} > H > 10^{-28}\text{eV} \sim H_{Eq}$. Este campo ultraliviano puede ser generado por el recién mencionado mecanismo de *misalignment* durante inflación si tiene un acoplamiento mínimo con la gravedad[9]. El problema de este mecanismo para el campo ultraliviano es que se producirían fluctuaciones en las densidades de la materia oscura conocidas como isocurvaturas, que están muy restringidas por la observación de la radiación cósmica de fondo.

Buscamos entonces una manera de producir este campo ultraliviano sin tener esta restricción en el espacio de parámetros. Una manera es suponer que existe otro campo escalar de materia oscura, que llamaremos *pesado*, con una masa \tilde{M} y un acoplamiento mínimo con la gravedad de manera que se genere por *misalignment* en inflación⁶ y además interactúe con el campo liviano.

⁵Esta radiación está conformada por partículas del modelo estándar.

⁶El problema de las isocurvaturas no ocurre para campos pesados.

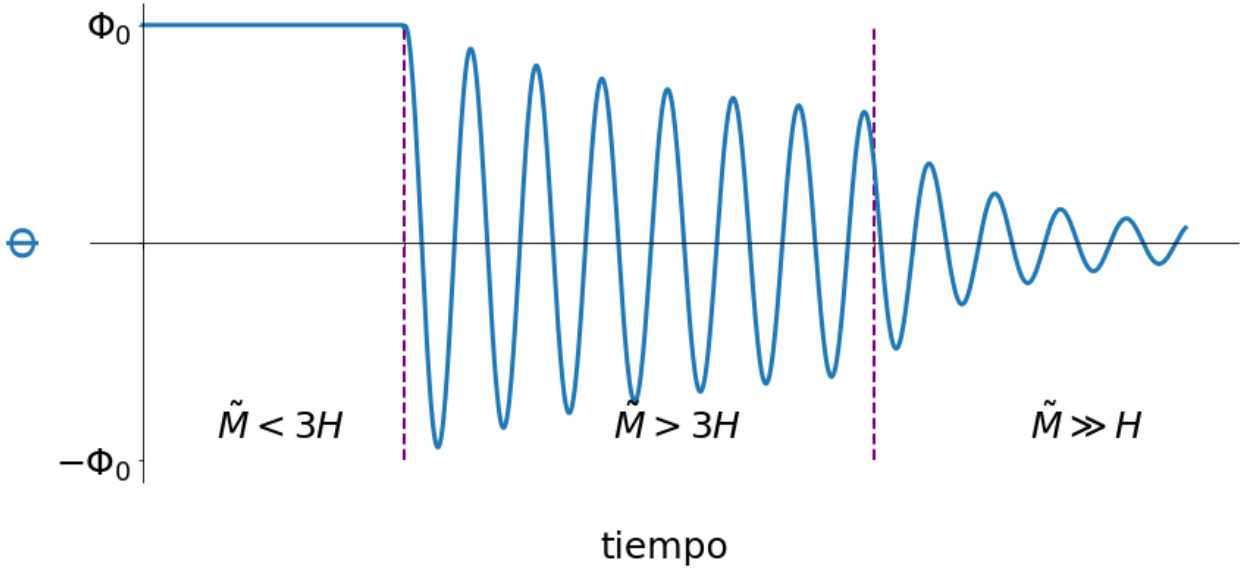


Figura 1: Amplitud del campo pesado en función del tiempo. Vemos que la historia se divide en tres etapas: mientras $\tilde{M} < 3H$ la amplitud del campo se mantiene constante; cuando $\tilde{M} > 3H$ el campo empieza a oscilar y su amplitud a decaer por la expansión del espacio. Cada vez que el campo pasa por cero se crean partículas del campo liviano al amplificar las fluctuaciones de vacío. Sin embargo la expansión del espacio entre dos valores consecutivos en los que se anula el campo pesado es suficiente para diluir las partículas y que no haya producción estimulada, es decir, amplificación de las partículas ya presentes. Solamente cuando $\tilde{M} \gg H$ la creación empieza a ser efectiva.

Este último tendrá un acoplamiento no-mínimo con la curvatura de manera que su producción por *misalignment* esté suprimida. Aproximando el campo pesado por un campo homogéneo se tiene que, mientras su masa \tilde{M} sea mayor que $3H$, su densidad de energía permanecerá “congelada”. Cuando $\tilde{M} \sim 3H$ el campo pesado empezará a oscilar y a amplificar al campo liviano a través del mecanismo no perturbativo de *resonancia paramétrica ancha*[11, 12, 13]: cada vez que el campo pesado atraviese valores nulos se viola la condición de adiabaticidad para las soluciones del campo liviano produciendo partículas en forma de “ráfagas”, como veremos más adelante. Entre estos momentos en los que se producen partículas la evolución de las soluciones del campo liviano es suave. Una característica importante de la producción es que se amplifica tanto las fluctuaciones de vacío del campo liviano como el número de partículas presente: esto genera un crecimiento exponencial del número de partículas en el tiempo. Sin embargo apenas empieza a oscilar el campo pesado la expansión del espacio es suficientemente rápida para diluir las primeras partículas creadas de las fluctuaciones de vacío de manera que el mecanismo de producción no es eficiente. Recién cuando $\tilde{M} \gg H$ la expansión del espacio se vuelve débil y empieza a ser efectiva la creación. Ver figura 1. Luego de una cantidad finita de oscilaciones del campo pesado finaliza la etapa de resonancia ancha. A continuación el sistema evoluciona interactuando vía una resonancia

paramétrica angosta[12]. Finalmente habría que tener en cuenta la interacción entre los propios modos del campo liviano y los decaimientos perturbativos para estudiar cómo el sistema llega al equilibrio del sector oscuro⁷.

En este trabajo estudiamos en detalle la primer parte del proceso: la resonancia paramétrica ancha⁸. Vemos que es necesaria la naturaleza cuántica del campo liviano para tener una amplitud no nula de las fluctuaciones de vacío de manera de poder amplificarlas mediante este mecanismo: es una cuestión conocida que la resonancia paramétrica sólo puede funcionar si la amplitud inicial es no nula[15]. En particular intentamos mantener todos los efectos posibles del llamado *backreaction*: la creación de partículas del campo amplificado modificará la frecuencia del campo pesado y en consecuencia su amplitud. Por otro lado nos interesa comparar el efecto de la expansión del espacio con la creación de partículas.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo de dos campos escalares masivos en interacción en un espacio curvo de Friedmann-Robertson-Walker dominado por radiación, es decir, ya asumimos la producción del campo pesado por misalignment en inflación debido al acoplamiento mínimo y el estado de vacío del campo liviano debido al acoplamiento no-mínimo. Se deducen las ecuaciones principales para los campos con la interacción $V[\Phi, X] = g\Phi^2 X^2/2$. En la sección 2.3 se regulariza el valor de expectación divergente de la densidad de partículas del campo liviano renormalizando la masa del campo pesado e introduciendo un autoacoplamiento $\lambda\Phi^4/4!$.

En la sección 3 se estudia la ecuación para los modos del campo liviano en el espacio estático. Esto es relevante ya que la creación de partículas ocurre en tiempos muy rápidos, del orden de \tilde{M}^{-1} . Al asumir que el campo pesado es homogéneo se ve que ocurre el fenómeno de resonancia paramétrica, y en particular estudiamos el régimen de resonancia paramétrica ancha. En las subsecciones de 3 se estudia cómo resolver estas ecuaciones.

En la sección 4 se calcula el valor de expectación del campo liviano al cuadrado $\langle \hat{\chi}^2 \rangle(t)$ teniendo en cuenta el efecto de la creación de partículas livianas sobre la frecuencia del campo pesado. En particular la frecuencia del campo pesado aumenta y su amplitud disminuye. Se calcula la densidad de partículas al finalizar la resonancia ancha, el valor óptimo de la constante de acoplamiento para maximizar la producción de partículas y se estima la duración de la resonancia. En la sección 4.5 se estudia aproximadamente la condición de equilibrio y se la compara con el estado del sistema al finalizar la resonancia ancha, para mostrar que el equilibrio ocurre mucho tiempo después.

⁷En el modelo propuesto no hay interacciones entre los campos de materia oscura y el modelo estándar, por lo que no habrá posibilidad de un equilibrio térmico entre ambos.

⁸Este tipo de producción tiene otra aplicación en la cosmología: al finalizar el proceso inflacionario los campos del modelo estándar se encuentran en un estado efectivo de vacío por lo que el campo del inflatón debe transferirles su energía. El inflatón puede aproximarse mediante un campo homogéneo y el mecanismo por el que empieza la creación de partículas del modelo estándar es la resonancia paramétrica ancha. Este fenómeno del decaimiento del inflatón en el modelo estándar es el llamado *recalentamiento* o *reheating* y la primer etapa dada por la resonancia paramétrica se denomina *preheating*[11, 12, 14].

En la sección 5 se compara la densidad de energía creada del campo liviano al finalizar la resonancia ancha contra la del pesado. Se calcula la presión de las partículas creadas para compararla con su densidad de energía y ver que corresponde a una ecuación de estado de materia oscura fría.

Finalmente, en la sección 6, se incorpora la expansión del espacio. En 6.1 se calcula una cota superior para la constante de Hubble de manera que, si ésta es satisfecha, la creación de partículas al iniciar la resonancia ancha “le gana” a la dilución por la expansión. Esta cota nos dice que la constante de Hubble debe ser mucho más pequeña que la masa del campo pesado \tilde{M} , lo que parece indicar que el campo pesado empieza a oscilar pero la creación de partículas está suprimida por la expansión del espacio hasta que H se hace lo suficientemente pequeña. Esta expansión también cambia la producción de partículas, cálculo que está desarrollado en la sección 6.2.

Las conclusiones y nuestros objetivos a futuro se presentan en 7.

2. Modelo

El problema que nos interesa resolver es sobre un campo clásico *pesado* Φ que sale de inflación con una amplitud inicial muy grande en un estado homogéneo. Este campo interactúa via el potencial de interacción $V[\Phi, X] = g\Phi^2 X^2/2$ con un campo cuántico X mucho más *liviano* que se encuentra en su estado de vacío. Nos interesa estudiar cuánto se pueden amplificar las fluctuaciones de vacío mediante el mecanismo de resonancia paramétrica ancha, que es la manera en la que empieza a evolucionar el sistema. Una vez que haya finalizado la resonancia ancha el sistema pasa por una etapa que es prácticamente imposible de resolver analíticamente y luego sigue interactuando via la resonancia paramétrica angosta. Una vez que la resonancia angosta termina todavía hay una etapa de decaimientos perturbativos e interacciones entre los modos de los campos hasta alcanzar el equilibrio térmico. Tanto la resonancia paramétrica ancha, la etapa de transición como la resonancia paramétrica angosta son fenómenos no perturbativos.

Como vamos a ver la creación de partículas debida a resonancia ancha se da en un período de tiempo muy corto que va como la inversa de la masa del campo pesado, por lo que en una primera aproximación consideraremos el espacio como estático. Luego incorporaremos las correcciones a los resultados si el espacio se expande poco.

En la subsección 2.1 empezamos definiendo el espacio tiempo de Friedmann-Roberston-Walker, en particular dominado por radiación del modelo estándar. En la siguiente subsección 2.2 se define el modelo de los campos en interacción en este espacio tiempo y se deducen las ecuaciones principales. En la subsección 2.3 se utiliza el método de regularización adiabática para tener un valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ finito y se renormaliza la teoría: se ve que es necesario absorber la divergencia en la masa del campo pesado o de algún otro campo e introducir un término de autoacoplamiento $\lambda\Phi^4/4!$.

2.1. Espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker

Consideremos una métrica de Friedmann-Robertson-Walker⁹ con espacio plano ($K = 0$)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 \quad (2.1)$$

siendo a el factor de escala que depende del tiempo. Proponiendo un tensor de energía-momento isótropo y homogéneo $T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ la ecuación 0_0 de Einstein es la llamada ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_P^2} \rho \quad (2.2)$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$ es la constante de Hubble, $M_P \equiv 1/\sqrt{G}$ es la masa de Planck (G la constante gravitacional), ρ es la densidad de energía del *modelo estándar* y p la presión que ejerce esta materia. De la componente $\nu = 0$ de $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ se tiene la ecuación de conservación de la energía

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.3)$$

Nos interesa el caso en el que el universo está dominado por radiación $p = \rho/3$, como es luego de la inflación. Obtenemos para la densidad de energía

$$\rho = \frac{a_0^4}{a^4} \rho_0. \quad (2.4)$$

Al reemplazar en la ecuación de Friedmann nos da el factor de escala en función del tiempo

$$a = a_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}} \quad (2.5)$$

donde se tomó $H_0 = 1/2t_0$. En las próximas secciones el tiempo t_0 será el instante en el que el campo pesado empieza a oscilar y a amplificar efectivamente al campo liviano.

Nos será útil luego tener la constante de Hubble en términos de la temperatura de la radiación. Para ello escribimos la densidad de energía de un gas de radiación con g_* grados de libertad (tantos como tenga el modelo estándar)

$$\rho = \frac{\pi^2 g_*}{30} T^4. \quad (2.6)$$

Reemplazando en la ecuación (2.2) se tiene

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45}} \frac{T^2}{M_P}. \quad (2.7)$$

⁹Tomamos la convención $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$ para la métrica y usamos $c = \hbar = k_B = 1$. Ver apéndice A para la correspondencia con las unidades MKS y ver apéndice B para la deducción de las ecuaciones de Einstein para el caso general con $K = 0, \pm 1$.

2.2. Sistema de dos campos con interacción $V[\Phi, X] = g\Phi^2 X^2/2$

Imaginemos en este espacio-tiempo dos campos escalares reales y masivos Φ y X con masas desnudas \tilde{M} y \tilde{m} . Definimos una interacción dada por un potencial $V[\Phi, X] = g\Phi^2 X^2/2$ con constante de acoplamiento g y un acoplamiento no-mínimo para el campo liviano $\xi R X^2/2$. La acción del sistema completo es

$$S = \int dt \int d^3x a^3 \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{\tilde{M}^2}{2} \Phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu X \partial^\mu X - \frac{1}{2} (\tilde{m}^2 + \xi R) X^2 - \frac{g}{2} \Phi^2 X^2 \right\}, \quad (2.8)$$

donde R es el escalar de curvatura dado por la ecuación (B.15) del apéndice. Como el caso de interés es cuando el universo es plano ($K = 0$) y está dominado por radiación, de manera que el factor de escala evoluciona de acuerdo a (2.5), se tiene $R = 0$. Al hacer el cambio de variable

$$\begin{cases} \Phi = \phi/a^{3/2} \\ X = \chi/a^{3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Phi} = (\dot{\phi} - \frac{3}{2}H\phi)/a^{3/2} \\ \dot{X} = (\dot{\chi} - \frac{3}{2}H\chi)/a^{3/2} \end{cases} \quad (2.9)$$

la acción se puede escribir como

$$S = \int dt \int \frac{d^3x}{2} \left\{ \dot{\phi}^2 - 3H\phi\dot{\phi} + \frac{9}{4}H^2\phi^2 - \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} - \tilde{M}^2\phi^2 + \dot{\chi}^2 - 3H\chi\dot{\chi} + \frac{9}{4}H^2\chi^2 - \frac{(\nabla\chi)^2}{a^2} - \tilde{m}^2\chi^2 - \frac{g}{2a^3}\phi^2\chi^2 \right\}. \quad (2.10)$$

De los resultados de la sección anterior se puede ver que en un universo dominado por radiación vale $\dot{H} = -2H^2$ por lo que escribimos $-3H\phi\dot{\phi} = -3H(\dot{\phi}^2)/2 = 3\dot{H}\phi^2/2 - f = -3H^2\phi^2 - f$ con $f_\phi \equiv 3(\dot{H}\phi^2)/2$ y lo mismo para el término de χ . Queda para la acción

$$S = \int dt \int \frac{d^3x}{2} \left\{ \dot{\phi}^2 - \left(\frac{3}{4}H^2 + \tilde{M}^2 \right) \phi^2 - \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} + \dot{\chi}^2 - \left(\frac{3}{4}H^2 + \tilde{m}^2 \right) \chi^2 - \frac{(\nabla\chi)^2}{a^2} - \frac{g}{2a^3}\phi^2\chi^2 \right\} - \int dt \frac{d}{dt} \left[\int d^3x (f_\phi + f_\chi) \right]. \quad (2.11)$$

Usando el principio de mínima acción tomando variaciones sobre el campo pesado $\delta S_\phi = 0$ y teniendo en cuenta que estas variaciones se anulan en los bordes, se obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + \left(\frac{3}{4}H^2 + \tilde{M}^2 + \frac{g\chi^2}{a^3} \right) \phi = 0, \quad (2.12)$$

mientras que al pedir $\delta S_\chi = 0$ tenemos

$$\ddot{\chi} - \frac{\nabla^2\chi}{a^2} + \left(\frac{3}{4}H^2 + \tilde{m}^2 + \frac{g\phi^2}{a^3} \right) \chi = 0. \quad (2.13)$$

Como se dijo al iniciar esta sección la creación de partículas ocurre en un intervalo de tiempo microscópico muy corto, del orden de la inversa de la masa del campo pesado. Por lo tanto empezaremos resolviendo el problema suponiendo que H es constante de manera de poder definir masas efectivas absorbiendo estos términos: $M^2 \equiv 3H^2/4 + \tilde{M}^2$, $m^2 \equiv 3H^2/4 + \tilde{m}^2$. Luego incorporaremos la expansión del espacio de manera perturbativa para ver qué tanto se modifican los resultados. Se ve que la masa efectiva del campo liviano¹⁰ está acotada por debajo por el valor de la constante de Hubble $m^2 \gtrsim 3H^2/4$. Una vez que el campo pesado empieza a oscilar se tiene $\tilde{M} > 3H$ por lo que la masa efectiva del campo pesado $M \sim \tilde{M}$. Tomando la aproximación de Hartree[16] para reemplazar $\chi^2 \rightarrow \langle \hat{\chi}^2 \rangle$ en la ecuación para ϕ tenemos

$$\ddot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + \left(M^2 + g \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle}{a^3} \right) \phi = 0 \quad (2.14)$$

$$\hat{\chi} - \frac{\nabla^2 \hat{\chi}}{a^2} + \left(m^2 + g \frac{\phi^2}{a^3} \right) \hat{\chi} = 0. \quad (2.15)$$

El valor de expectación es sobre el estado de vacío inicial $|0\rangle$. Ahora descomponemos el campo $\hat{\chi}$ en Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(x) &= \frac{1}{V} \sum_k e^{ikx} \hat{\chi}_k(t) \\ &= \frac{1}{V} \sum_k e^{ikx} \left(f_k(t) \hat{a}_k + f_k^*(t) \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

con V el volumen comóvil y en la segunda línea se usó que el campo es real $\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_{-k}^\dagger$. Ahora usamos la homogeneidad de ϕ para escribir las ecuaciones de movimiento como

$$\ddot{\phi} + \Omega^2(t) \phi = 0 \quad (2.17)$$

$$\ddot{f}_k + \omega^2(t) f_k = 0 \quad (2.18)$$

donde

$$\Omega^2(t) = M^2 + g \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle}{a^3}(t) \quad (2.19)$$

$$\omega^2(t) = \frac{k^2}{a^2} + m^2 + g \frac{\phi^2}{a^3}(t). \quad (2.20)$$

El operador $\hat{\chi}_k(t)$ es la solución a la ecuación de Heisenberg y lo expresamos en términos de los operadores de creación y destrucción del vacío inicial, es decir, $\hat{a}_k |0\rangle = 0$. Lo que evoluciona son las funciones f_k y f_k^* que son una base de soluciones a la ecuación (2.18).

¹⁰Un valor típico [14] de la constante de Hubble al finalizar inflación es $H_I \sim 10^{23}$ eV y para el momento de la igualdad materia-radiación se tiene $H_{Eq} \sim 10^{-28}$ eV. La amplificación del campo liviano empieza entre alguno de estos dos valores, es lo que llamamos H_0 . Pero tener en cuenta que el campo pesado empieza a oscilar *antes*, cuando la constante de Hubble se hace del orden de su masa desnuda \tilde{M} . Apenas empieza a oscilar la expansión del espacio diluye las partículas creadas de manera que no es efectiva la producción. Esto lo veremos en la sección 6.1: la amplificación del campo liviano se hace efectiva cuando la constante de Hubble toma un valor mucho más pequeño que \tilde{M} , ver ecuación (6.16).

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) describen la dinámica acoplada del sistema que depende fuertemente de las condiciones iniciales ϕ_0 y Ω_0 y de los parámetros del sistema M , m y g . Se puede pensar que dado un valor de ϕ_0 la regularización de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ fija el valor de Ω_0 , como veremos a continuación. Notar que hay una energía asociada al campo pesado, al campo liviano y a la interacción y no hay una manera clara de separarlas. En lo que sigue tomaremos por hipótesis que el factor de escala es constante durante todo el proceso de resonancia ancha y lo elegimos como la unidad cuando empieza a oscilar el campo pesado¹¹ $a(t) = a(t_0) = 1$.

2.3. Regularización y renormalización del valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$

En lo que sigue nos interesa calcular el valor de expectación¹²

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle(t) = \int_0^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |f_k|^2(t) \quad (2.21)$$

que aparece en la ecuación (2.19). Para los tiempos en los que nos interesa calcularlo las soluciones exactas del problema f_k podrán expresarse en términos de las funciones WKB de orden cero, como demostraremos en la sección 3. En consecuencia aparecerá un término divergente de la forma

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Div} \equiv \int_0^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \quad (2.22)$$

donde ω es la frecuencia de la ecuación (2.18). Podemos escribir lo siguiente¹³

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Div} \quad (2.23)$$

donde el segundo término contiene la parte finita del valor de expectación. Hemos introducido el *cut-off* Λ para ver la dependencia del valor divergente con el límite superior de la integral. Este valor de expectación contiene un término cuadrático y otro logarítmico divergentes en el ultravioleta, es decir, cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. Veámoslo primero sin el campo ϕ (utilizamos la integral (H.1) del apéndice)

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \ln \left(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2} \right) + m^2 \ln m \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Los términos divergentes se pueden absorber en una nueva masa renormalizada del campo pesado ϕ o de algún otro campo.

¹¹Es claro que al tomar $a = cte$ siempre es efectiva la creación de partículas porque no hay expansión. No hay distinción entre el segundo y el tercer caso de la figura 1.

¹²Ver apéndice C para la cuenta con los operadores de creación y destrucción.

¹³El término $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin}$ no lo vamos a trabajar en esta sección, siempre queda igual.

Ahora agreguemos el campo ϕ , que es el caso que nos interesa¹⁴

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2 + g\phi^2}} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2 + g\phi^2} - (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2 + g\phi^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\sqrt{m^2 + g\phi^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como ahora aparece un término que va como $g\phi^2$ será necesario introducir una autointeracción para el campo pesado $\lambda\phi^4/4!$ de manera de poder renormalizar la constante de acoplamiento $\lambda \rightarrow \lambda_{Ren}$ y absorber la divergencia. Un punto importante es que queremos quedarnos con una parte finita del término divergente, es decir, no tirarlo por completo. Para identificar las cantidades que debemos restar desarrollamos en $g\phi^2$ [17]

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{g\phi^2}{2(k^2 + m^2)^{3/2}} + O(k^{-5}) \quad (2.26)$$

cuyos dos primeros términos nos alcanza para sustraer las divergencias cuadrática y logarítmica. Si sumamos y restamos estas cantidades integradas desde un cut-off inferior κ hasta el superior Λ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{\chi}^2 \rangle &= \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} - \int_\kappa^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) \\ &\quad + \int_\kappa^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ahora definimos el valor de expectación que utilizaremos en las próximas secciones como la primer línea de la última ecuación (usamos las integrales (H.1) y (H.2))

$$\begin{aligned} \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Reg} &\equiv \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} - \int_\kappa^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) \\ &= \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2 + g\phi^2}} \frac{\sqrt{m^2 + g\phi^2}}{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + m^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2 + g\phi^2} - \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2} + \kappa \sqrt{\kappa^2 + m^2} + g\phi^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 + m^2} - \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Tomando el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Reg} = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + g\phi^2}}{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + m^2}} \right) + \kappa \sqrt{\kappa^2 + m^2} + g\phi^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^2 + m^2} - 1 \right) \right\}.$$

¹⁴Para usar las funciones WKB que van como $|f_k|^2 \sim 1/2\omega$ donde $\omega^2 = k^2 + m^2 + g\phi^2$ es necesario que los campos ya hayan entrado en interacción de manera adiabática. Si los campos entrasen en contacto repentinamente habría que resolver el problema transitorio.

Si ahora tomamos el límite $\kappa \rightarrow 0$ queda

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Reg} = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin} + \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + g\phi^2}}{m} \right) - g\phi^2 \right\} \quad (2.29)$$

que no depende de los *cut-off* y es finito. Vamos a definir la cantidad

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 \equiv \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (m^2 + g\phi^2) \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + g\phi^2}}{m} \right) - g\phi^2 \right\} \quad (2.30)$$

y escribir el valor regularizado como

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Reg} = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 + \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Fin}. \quad (2.31)$$

Veremos más adelante que nos interesa el caso en el que $g\phi^2 \gg m^2$, para que valga la condición de resonancia ancha, por lo que podemos escribir

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 \approx \frac{g\phi^2}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{g}\phi}{m} \right) - 1 \right\} \quad (2.32)$$

y si suponemos que la relación entre los órdenes de magnitud de estas cantidades es

$$\sqrt{g}\phi = 10^p m, \quad (2.33)$$

nos permite escribir

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 \approx \frac{g\phi^2}{8\pi^2} \left\{ 2,3p - 1 \right\} \quad (2.34)$$

y ver que

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 \approx ag\phi^2 \quad (2.35)$$

con

$$a = (2,3p - 1)/8\pi^2 \quad (2.36)$$

una cantidad de orden 1. Esta última ecuación junto a (2.31) son las que usaremos principalmente en el resto del trabajo.

Los términos que compensan están dados por la segunda línea de (2.27). El que contiene a $g\phi^2$ se puede absorber renormalizando una constante λ de una autointeracción que debemos introducir al modelo del tipo $\lambda\phi^4/4!$. El otro término se puede absorber renormalizando la masa M del campo ϕ . Agreguemos entonces el término de autoacoplamiento al Lagrangiano del sistema (2.8) y obtengamos la ecuación de movimiento

$$-\partial^2\phi + (M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle + \lambda\phi^2)\phi = 0. \quad (2.37)$$

Sumando y restando los términos como en (2.27) se puede escribir

$$-\partial^2\phi + \left(M_{Ren}^2 + g\langle\hat{\chi}^2\rangle_{Reg} + \lambda_{Ren}\phi^2\right)\phi = 0 \quad (2.38)$$

donde hemos definido

$$M_{Ren}^2 \equiv M^2 + \frac{g}{8\pi^2} \left[\Lambda\sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{m}\right) \right] \quad (2.39)$$

$$\lambda_{Ren} \equiv \lambda - \frac{g^2}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{m}\right) - \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + m^2}} \right]. \quad (2.40)$$

Vemos que la regularización y renormalización de este problema nos obliga a introducir un autoacoplamiento en el campo pesado. Si bien no lo vamos a tener en cuenta en este trabajo, éste está estudiado en la referencia [18].

3. Resonancia paramétrica ancha

En esta sección nos interesa resolver las ecuaciones (2.17) y (2.18) en el espacio estático ($a = 1$)

$$\ddot{\phi} + (M^2 + g\langle\hat{\chi}^2\rangle(t))\phi = 0 \quad (2.17)$$

$$\ddot{f}_k + (k^2 + m^2 + g\phi^2(t))f_k = 0, \quad (2.18)$$

con

$$\Omega^2(t) = M^2 + g\langle\hat{\chi}^2\rangle(t) \quad (2.19)$$

$$\omega^2(t) = k^2 + m^2 + g\phi^2(t). \quad (2.20)$$

Supongamos que la condición inicial para el campo pesado es tal que empieza oscilando en t_0 , es decir, $\phi(t) = \phi_0 \sin \Omega_0(t - t_0)$.¹⁵ Como veremos a lo largo de esta sección la creación de partículas se da alrededor de los tiempos en los que el campo pesado se anula $\phi(t_j) = 0$, que es cuando se viola la condición de adiabaticidad para las soluciones f_k . Esto hará que cambien las funciones f_k y en consecuencia cambie el valor $\langle\hat{\chi}^2\rangle$, modificando la frecuencia del campo ϕ y por lo tanto su amplitud. Por esto último, hagamos que la solución al campo pesado para todo tiempo sea un oscilador armónico con una frecuencia Ω_j y una amplitud ϕ_j que van cambiando cada vez que el campo ϕ pasa por su valor nulo $\phi(t_j) = 0$ y se crean partículas χ , como se muestra en la figura 2

$$\phi(t) = \phi_j \sin \Omega_j(t - t_j), \quad (t_j < t < t_{j+1}). \quad (3.1)$$

¹⁵Este estado puede pensarse como un condensado de partículas que oscilan en fase con $k = 0$ dando un estado homogéneo.

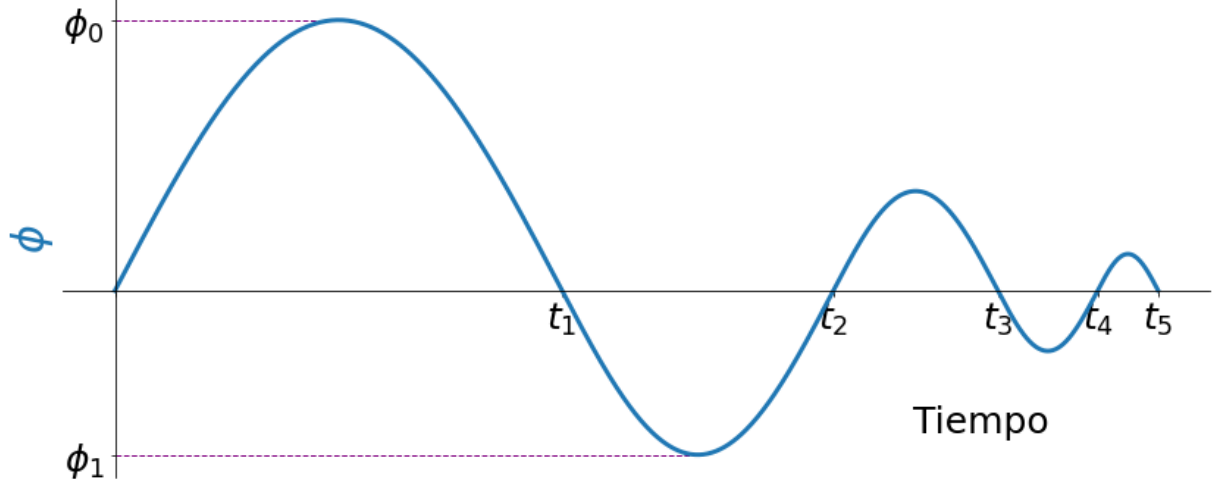


Figura 2: Amplitud del campo ϕ en función del tiempo. El campo ϕ se anula en los tiempos t_j , donde se pegan las soluciones de oscilador armónico. Como la frecuencia del campo ϕ aumenta, su amplitud disminuye. Ver apéndice D. Este gráfico corresponde a la tercer etapa de la figura 1.

Por ejemplo $t_1 - t_0 = \pi/\Omega_0$ y en general $t_j - t_0 = \sum_1^j \pi/\Omega_{n-1}$. Al introducir esta forma de ϕ en la ecuación de los modos de χ se ve

$$\ddot{f}_k + \left\{ k^2 + m^2 + \frac{g}{2}\phi_j^2 [1 - \cos 2\Omega_j (t - t_j)] \right\} f_k = 0 \quad (3.2)$$

que definiendo

$$\omega_0^2 = k^2 + m^2, \quad \omega_{1j}^2 = g\phi_j^2/2 \quad (3.3)$$

se escribe

$$\ddot{f}_k + \left\{ \omega_0^2 + \omega_{1j}^2 [1 - \cos 2\Omega_j (t - t_j)] \right\} f_k = 0. \quad (3.4)$$

Notemos que esta ecuación tiene una frecuencia ω^2 que depende del tiempo de manera armónica con una frecuencia $2\Omega_j$. Para ciertos valores del número de onda k las soluciones a esta ecuación pueden crecer exponencialmente en el tiempo[19]. En el caso en que la amplitud de la oscilación de ω^2 sea muy pequeña, es decir cuando $\omega_{1j}^2 \ll \omega_0^2, 4\Omega_j^2$, las bandas de k para las que ocurre la amplificación son angostas y al fenómeno se le llama *resonancia paramétrica angosta*. Mientras que para valores

$$\omega_{1j}^2 \gg \omega_0^2, \quad \omega_{1j}^2 \gg 4\Omega_j^2 \quad (3.5)$$

ocurre lo contrario y toma el nombre de *resonancia paramétrica ancha*. Nos interesa el caso en el que la amplitud inicial del campo pesado ϕ_0 es muy grande de manera que valgan estas condiciones inicialmente. En términos de las cantidades físicas se expresan como

$$\frac{g\phi_j^2}{2} \gg k^2 + m^2, \quad \frac{g\phi_j^2}{2} \gg 4\Omega_j^2. \quad (3.6)$$

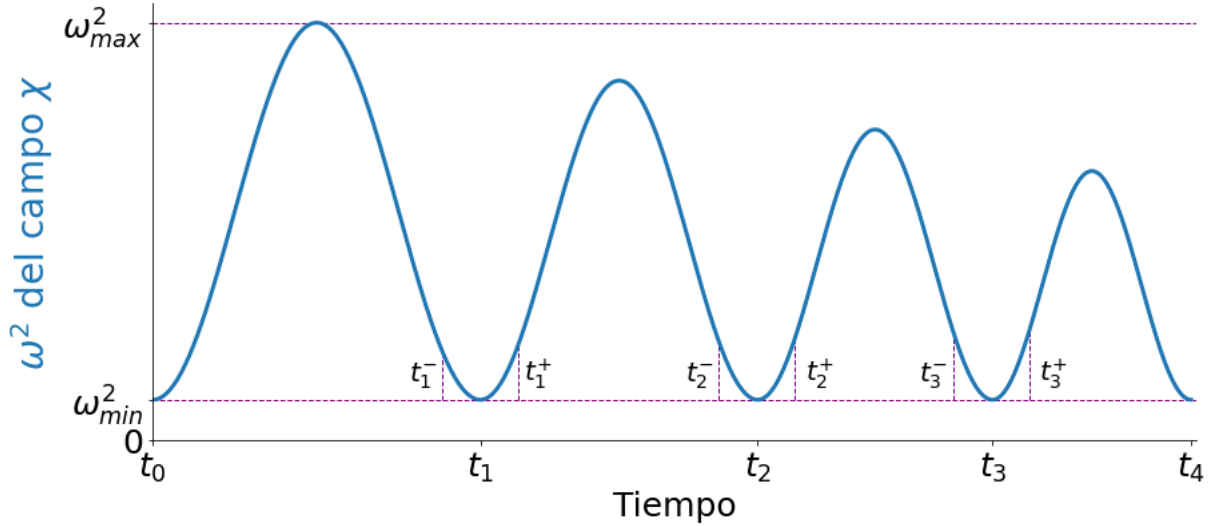


Figura 3: Frecuencia cuadrada del campo χ en función del tiempo. El campo ϕ se anula en los tiempos t_j . En los tiempos t_j^\pm pegaremos las soluciones WKB válidas entre t_j^+ y t_{j+1}^- con las soluciones del potencial parabólico temporal, que vale cerca de los mínimos t_j .

Veremos a continuación, en la sección 3.1, que las soluciones f_k a la ecuación (3.4) pueden ser bien aproximadas por las soluciones WKB del orden más bajo en todo el intervalo temporal de la oscilación de ϕ , excepto cerca de los tiempos t_j para los cuales se anula el mismo ϕ , ver figura 3. La velocidad de variación de ϕ es máxima cerca de estos tiempos y las soluciones WKB no pueden seguir la evolución adiabática. Cerca de estos mínimos es posible desarrollar ω^2 y obtener el problema con solución exacta de scattering de ondas sobre un potencial parabólico (temporal), como veremos en la sección 3.2. La idea es construir las soluciones f_k para todo tiempo *pegando* las soluciones WKB válidas fuera de los mínimos t_j con las soluciones exactas que obtendremos cerca de ellos.

3.1. Aproximación WKB fuera de los mínimos de ω^2

Para ver dónde es posible aproximar las soluciones f_k por las WKB empecemos definiendo una nueva función $f_{1k} = \omega^{1/2} f_k$ y una nueva variable \tilde{t} tal que $\omega = d\tilde{t}/dt$ y escribamos la ecuación

$$\ddot{f}_k + \omega^2 f_k = 0 \quad (2.18)$$

como

$$\frac{d^2 f_{1k}}{d\tilde{t}^2} + (1 + \epsilon_2) f_{1k} = 0 \quad (3.7)$$

donde

$$\epsilon_2 = -\frac{1}{\omega^{1/2}} \frac{d^2 \omega^{1/2}}{d\tilde{t}^2} \quad (3.8)$$

se llama *la corrección de frecuencia adiabática*. Cuando ésta es pequeña, la solución a (3.7) es simplemente $f_1 = A \exp i\tilde{t} + B \exp -i\tilde{t}$, con lo cual la solución que buscamos será la WKB de orden más bajo

$$f_k = \frac{A}{\sqrt{\omega}} \exp \left[-i \int_{t_0}^t \omega(t') dt' \right] + \frac{B}{\sqrt{\omega}} \exp \left[i \int_{t_0}^t \omega(t') dt' \right]. \quad (3.9)$$

En particular nos interesa definir la solución WKB de frecuencia positiva como la que tiene $B = 0$ y está normalizada de la siguiente manera

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \exp \left[-i \int_{t_0}^t \omega(t') dt' \right] \quad (3.10)$$

siendo la WKB de frecuencia negativa, su conjugada.

Cuando ϕ toma la forma (3.1) la corrección de frecuencia adiabática se transforma en

$$\epsilon_2 = \frac{\Omega_j^2}{\omega_{1j}^2} \frac{[1 - (1 + \omega_0^2/\omega_{1j}^2) \cos 2\Omega_j(t - t_j) + \sin^2 2\Omega_j(t - t_j)/4]}{[1 + \omega_0^2/\omega_{1j}^2 - \cos 2\Omega_j(t - t_j)]^3}. \quad (3.11)$$

Nos interesa estudiar el valor de esta cantidad para saber si las soluciones a la ecuación (3.4) pueden ser bien aproximadas por (3.9). Depende de la relación entre los tres parámetros Ω_j , ω_{1j} y ω_0 . En el caso en el que se cumplen las condiciones de resonancia ancha $\omega_{1j}^2 \gg \omega_0^2$ y $\omega_{1j}^2 \gg 4\Omega_j^2$ se tiene que $\epsilon_2 \ll 1$ lejos de los t_j . Cerca de estos tiempos t_j donde el campo ϕ se anula, ϵ_2 se hace grande y la aproximación WKB no es válida. En la figura 4 graficamos la cantidad $\ln(1 + |\epsilon_2|)$ que se anula cuando $|\epsilon_2| \approx 0$. En la figura 3 la aproximación WKB valdría por ejemplo entre t_1^+ y t_2^- .

3.2. Aproximación de ω^2 por un potencial parabólico cerca de los mínimos

En la subsección anterior vimos que las soluciones f_k pueden ser aproximadas por las WKB siempre y cuando no estemos cerca de los t_j . Si estamos cerca de estas zonas expandimos ω^2 de la ecuación

$$\ddot{f}_k + \omega^2 f_k = 0, \quad (2.18)$$

con $\omega^2 = k^2 + m^2 + g\phi^2$, hasta orden cuadrático alrededor de los t_j . Recordando que $\phi(t_j) = 0$ la expansión queda

$$\begin{aligned} \omega^2(t - t_j) &= \omega^2(t_j) + \frac{d(\omega^2)}{dt}(t_j) (t - t_j) + \frac{1}{2} \frac{d^2(\omega^2)}{dt^2}(t_j) (t - t_j)^2 + \mathcal{O}((t - t_j)^3) \\ &= k^2 + m^2 + g\phi_j^2 \Omega_j^2 (t - t_j)^2 + \mathcal{O}((t - t_j)^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

La ecuación (2.18) se convierte en

$$\ddot{f}_k + (\omega_0^2 + \omega_1^4 \tau^2) f_k = 0 \quad (3.13)$$

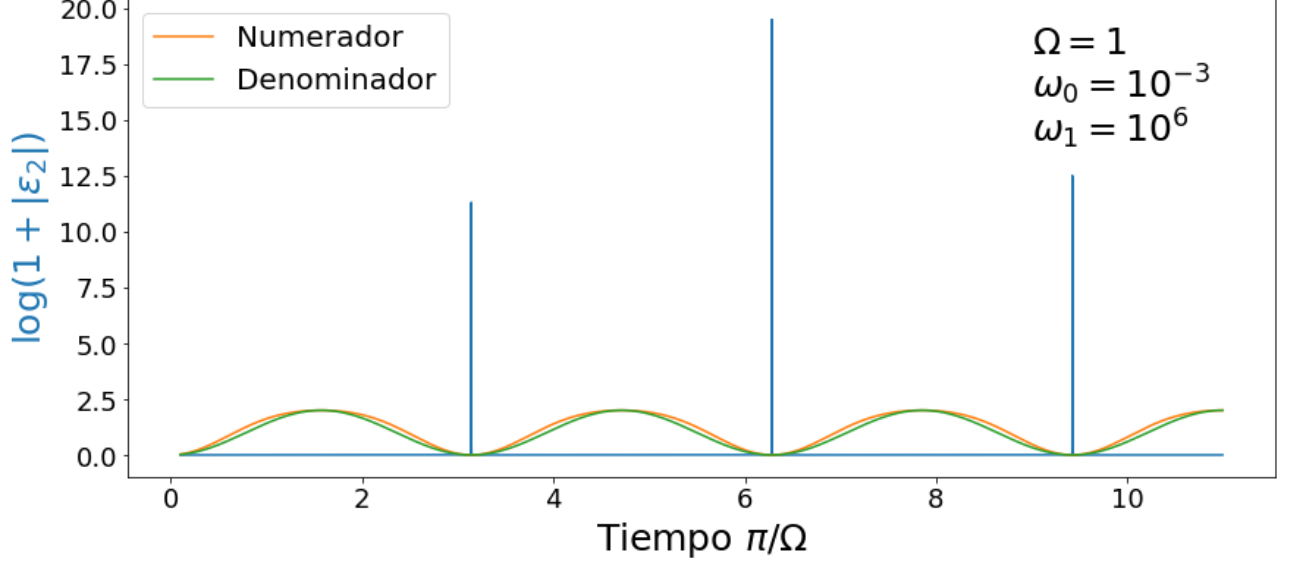


Figura 4: Graficamos el $\ln(1 + |\epsilon_2|)$ en función del tiempo para valores $\Omega = 1$, $\omega_1 = 10^6$ y $\omega_0 = 10^{-3}$. Vemos que $\epsilon_2 \approx 0$ fuera de los t_j . En naranja se grafica el numerador de (3.11) y en verde el denominador.

donde

$$\tau = t - t_j, \quad \omega_0^2 = k^2 + m^2 \quad \omega_1^4 = 2\omega_{1j}^2\Omega_j^2 = g\phi_j^2\Omega_j^2, \quad (3.14)$$

y el problema es el de scattering de ondas en un potencial parabólico temporal[19].¹⁶ La idea es la siguiente: la ecuación (3.13) vale cerca de los tiempos t_j y tiene solución exacta dadas por las funciones del cilindro parabólico. Estas funciones no coinciden con las funciones WKB. En otras palabras, las funciones WKB no son soluciones a esta ecuación. Sin embargo para tiempos asintóticos, alejándonos de los tiempos t_j hacia el pasado o hacia el futuro, las funciones WKB son soluciones a la ecuación del cilindro parabólico y se pueden hacer coincidir con las soluciones del cilindro parabólico evaluadas a esos mismos tiempos.

Para ver ésto empecemos considerando la corrección de frecuencia adiabática de segundo orden de la ecuación (3.13) con el objetivo de ver que a tiempos asintóticos se puede usar la aproximación WKB. De (3.8) y (3.13) se tiene

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_1^4}{[\omega_0^2 + \omega_1^4\tau^2]^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \frac{\omega_0^2}{[\omega_0^2 + \omega_1^4\tau^2]} \right) \quad (3.15)$$

que resulta pequeña para $|\tau| \gg 1/\omega_1 > \omega_0/\omega_1^2$, es decir para $|\tau| \gg \sqrt{k^2 + m^2} / (\sqrt{g}\phi_j\Omega_j)$. El

¹⁶Omitimos los subíndices j para simplificar la notación. De todas maneras en el caso en el que el universo es estático ω_1 no depende de j si el campo pesado es de la forma de un oscilador armónico ya que el módulo del producto $\phi_j\Omega_j$ se mantiene constante. Ver apéndice D.

miembro derecho es pequeño¹⁷ debido a la condición de resonancia ancha y a que $M \gg m$. Se ve entonces que para valores suficientemente lejos de los tiempos t_j las soluciones pueden ser aproximadas por las WKB. A estos tiempos $\tau \rightarrow \pm\infty$ son los que llamamos t_j^\pm . Algo que hay que tener en cuenta a la hora de hacer el pegado de las soluciones es que los tiempos t_j^\pm deben ser lo suficientemente lejanos a t_j como para que valga que ϵ_2 del potencial parabólico sea pequeña, pero no tan lejanos como para que la aproximación cuadrática de la frecuencia deje de ser válida.

Veamos la forma de las funciones WKB en estos tiempos asintóticos y omitamos los subíndices k para simplificar la notación. La solución WKB de frecuencia positiva en tiempo $\tau \rightarrow \infty$ viene dada por (3.10) para lo que calculamos la fase de la exponencial utilizando la integral (H.3) del apéndice

$$\begin{aligned}\theta &\equiv \int_0^\tau \omega(t') dt' \\ &= \omega_1^2 \int_0^\tau \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1^2}\right)^2 + \tau^2} \\ &= \frac{\omega_1^2}{2} \left[\tau \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_1^2}\right)^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^4} \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_1^2 \tau}{\omega_0} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.17)$$

Nos interesa esta cantidad para $\tau \rightarrow +\infty$ por lo que desarrollamos la raíz cuadrada y el seno hiperbólico inverso¹⁸ para obtener

$$\theta(\tau) = \frac{\omega_1^2 \tau^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{4\omega_1^2} + \frac{\omega_0^2}{2\omega_1^2} \ln \left(\frac{2\omega_1^2 \tau}{\omega_0} \right) + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad (\tau \rightarrow +\infty). \quad (3.19)$$

La fase para la función WKB en $\tau \rightarrow -\infty$ se obtiene mirando la expresión (3.17) y notando que $\theta(-\tau) = -\theta(\tau)$. Podemos escribir entonces para $\tau \rightarrow -\infty$

$$\theta(\tau) = -\frac{\omega_1^2 \tau^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{4\omega_1^2} - \frac{\omega_0^2}{2\omega_1^2} \ln \left(\frac{2\omega_1^2 |\tau|}{\omega_0} \right) + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad (\tau \rightarrow -\infty). \quad (3.20)$$

Para escribir la solución WKB de frecuencia positiva (3.10) también necesitamos expresar la frecuencia $\omega(\tau)$ que aparece en el denominador. Se tiene para $\tau \rightarrow \pm\infty$

$$\omega(\tau) \approx \omega_1^2 \tau, \quad (\tau \rightarrow +\infty) \quad (3.21)$$

$$\omega(\tau) \approx \omega_1^2 |\tau|, \quad (\tau \rightarrow -\infty). \quad (3.22)$$

¹⁷Para ver esto escribamos esta cantidad de la siguiente manera

$$|\tau| \gg \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\sqrt{g}\phi_j} \frac{1}{\Omega_j} = \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\sqrt{g}\phi_j} \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2\pi}. \quad (3.16)$$

El primer factor es muy pequeño debido a la primera condición de resonancia ancha (3.6). Vemos que podemos considerar tiempos suficientemente lejos de t_j de manera que valga esta condición.

¹⁸Se tiene para x grandes $x = \sinh^{-1}(e^x - e^{-x})/2 \approx \sinh^{-1}(e^x/2)$. Tomando $x = \ln(2\omega_1^2 \tau/\omega_0)$ se tiene

$$\sinh^{-1} \left(\frac{\omega_1^2 \tau}{\omega_0} \right) \approx \ln \left(\frac{2\omega_1^2 \tau}{\omega_0} \right). \quad (3.18)$$

La solución WKB de frecuencia positiva (3.10) es entonces

$$f^+(\tau) = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{2|\tau|}} \left[\frac{2\omega_1^2 |\tau|}{\omega_0} \right]^{-i(\omega_0/\omega_1)^2/2} \exp \left[-\frac{i\omega_1^2 \tau^2}{2} - \frac{i\omega_0^2}{4\omega_1^2} \right], \quad (\tau \rightarrow +\infty) \quad (3.23)$$

$$f^+(\tau) = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{2|\tau|}} \left[\frac{2\omega_1^2 |\tau|}{\omega_0} \right]^{i(\omega_0/\omega_1)^2/2} \exp \left[\frac{i\omega_1^2 \tau^2}{2} + \frac{i\omega_0^2}{4\omega_1^2} \right], \quad (\tau \rightarrow -\infty). \quad (3.24)$$

Como ya dijimos, estas funciones no son soluciones a la ecuación del potencial parabólico (3.13). Sin embargo *definiremos* la solución exacta del vacío de entrada f_{in} como la que coincide con f^+ en $\tau \rightarrow -\infty$. De la misma manera definiremos la solución exacta del vacío de salida f_{out} como la que coincide con f^+ en $\tau \rightarrow +\infty$. La solución f_{in} no coincide con la f_{out} al evaluarlas en el mismo tiempo: la solución f_{in} se está haciendo coincidir con la solución WKB de frecuencia positiva f^+ en $\tau \rightarrow -\infty$ y al evolucionar esta f_{in} , como la función WKB no es solución exacta a la ecuación, va a evolucionar en $\tau \rightarrow +\infty$ genéricamente a una combinación lineal de soluciones a la ecuación f_{out} y f_{out}^* .

Ahora vamos a hallar las soluciones exactas a esta ecuación para ver cómo es esta transformación. Hacemos el cambio de variable $p = i(\omega_0/\omega_1)^2/2 - 1/2$ y $z = (-1 + i)\omega_1\tau$ en la ecuación (3.13) para escribirla en la forma

$$f'' - \left[\frac{z^2}{4} - \left(p + \frac{1}{2} \right) \right] f = 0 \quad (3.25)$$

con las primas denotando derivada respecto de z y se escribió $(-1 + i) = \sqrt{2} \exp(i3\pi/4)$. Una base de soluciones a esta ecuación son las funciones del cilindro parabólico $D_p(z)$ y $D_{p^*}(z^*)$. Ver capítulo 16 de la referencia [20]. Para $\tau \rightarrow -\infty$ se puede escribir $z = \sqrt{2} \exp(-i\pi/4)\omega_1|\tau|$ que tiene $\arg z = -\pi/4$ y vale la expansión con $|z| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D_p(z) &\sim e^{-z^2/4} z^p \\ &\sim \left(\sqrt{2}\omega_1|\tau| \right)^{-1/2} \left(\sqrt{2}\omega_1|\tau| \right)^{i\omega_0^2/2\omega_1^2} e^{i\pi/8} e^{\pi\omega_0^2/8\omega_1^2} e^{i\omega_1^2\tau^2/2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

mientras que, cuando $\tau \rightarrow +\infty$, se escribe $z = \sqrt{2} \exp(i3\pi/4)\omega_1\tau$ con $\arg(z) = 3\pi/4$ y se tiene

$$\begin{aligned} D_p(z) &\sim e^{-z^2/4} z^p - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma[-p]} e^{i\pi p} e^{z^2/4} z^{-p-1} \\ &\sim \left(\sqrt{2}\omega_1\tau \right)^{-1/2} e^{-i3\pi/8} \left[\left(\sqrt{2}\omega_1\tau \right)^{i\omega_0^2/2\omega_1^2} e^{-3\pi\omega_0^2/8\omega_1^2} e^{i\omega_1^2\tau^2/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma[-p]} e^{-i\pi/2} \left(\sqrt{2}\omega_1\tau \right)^{-i\omega_0^2/2\omega_1^2} e^{-\pi\omega_0^2/8\omega_1^2} e^{-i\omega_1^2\tau^2/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La función Γ es la gamma de Euler. Tenemos expresadas las soluciones base a la ecuación para tiempos $\tau \rightarrow \pm\infty$ y sabemos que para $\tau \rightarrow -\infty$ la solución debe ser la WKB. Además hemos definido la solución exacta *in* a la ecuación como la que coincide con la WKB en $\tau \rightarrow -\infty$, es

decir, $f_{in}(\tau \rightarrow -\infty) = f^+(\tau \rightarrow -\infty)$. Entonces vamos a escribir la solución WKB en términos de las $D_p(z)$. Para ello comparamos (3.23) con (3.26). Se obtiene

$$f_{in} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\omega_1}} \left(\frac{\sqrt{2}\omega_1}{\omega_0} \right)^{i\omega_0^2/2\omega_1^2} e^{-i\pi/8} e^{-\pi\omega_0^2/2\omega_1^2} D_p(z), \quad (\tau \rightarrow -\infty), \quad (3.29)$$

que al evolucionar la solución $D_p(z)$ a $\tau \rightarrow +\infty$ se transforma en

$$f_{in} = \alpha f^+ + \beta f^-, \quad (\tau \rightarrow +\infty) \quad (3.30)$$

donde los coeficientes son

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}\omega_1}{\omega_0} \right)^{i(\omega_0/\omega_1)^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma[-p]} e^{i(\omega_0/\omega_1)^2/2} e^{-\pi(\omega_0/\omega_1)^2/4} \quad (3.31)$$

$$\beta = e^{-i\pi/2} e^{-\pi(\omega_0/\omega_1)^2/2} \quad (3.32)$$

y constituyen una transformación de Bogoliubov[19]. En particular se puede chequear¹⁹, como corresponde a esta transformación, que $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Nos interesa el módulo cuadrado del coeficiente β en término de las cantidades físicas

$$|\beta_j|^2 = \exp \left[-\pi \frac{k^2 + m^2}{\sqrt{g}\phi_j\Omega_j} \right] \quad (3.34)$$

donde se usaron las definiciones (3.14). De la ecuación (3.30) ve que la solución exacta f_{in} en tiempo $\tau \rightarrow +\infty$ es una combinación lineal de soluciones WKB de frecuencia positiva y negativa.

En la figura 5 vemos el comportamiento de $|\beta_j|^2$ en función de k . La creación y amplificación de partículas va como $|\beta_j|^2$, como veremos en la próxima sección. Esto nos muestra que se crearán partículas alrededor de $k = 0$ con un ancho dado por $k_* \equiv \sqrt{\sqrt{g}\phi_j\Omega_j - m^2}$ que es muy grande debido a la condición de resonancia ancha $g\phi_j^2/2 \gg m^2$ y a que el campo pesado es mucho más pesado que el liviano $\Omega_0 \gg m$. Aquí vemos lo ancho de la resonancia.²⁰

4. Cálculo del valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$

Consideremos nuevamente las ecuaciones acopladas(2.17) y (2.18) con $a = 1$ y etiquetando con j las cantidades que cambian cada vez que el campo pesado atraviesa sus ceros

$$\ddot{\phi} + \Omega_j^2(t)\phi = 0 \quad (2.17)$$

$$\ddot{f}_k + \omega_j^2(t)f_k = 0 \quad (2.18)$$

¹⁹Hay que usar que

$$\left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + ib \right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi b}. \quad (3.33)$$

²⁰Es importante aclarar que en cada t_j se amplifica la cantidad ya presente de partículas, por lo que el número de ocupación cerca de $k \sim 0$ va a crecer mucho más rápido que el correspondiente a k_* .

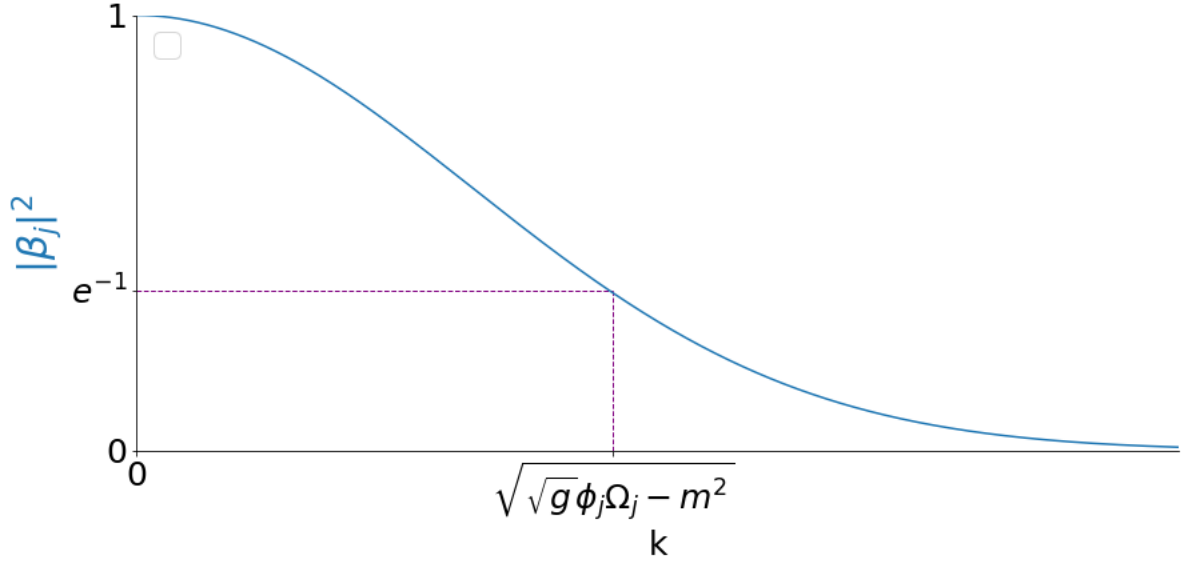


Figura 5: $|\beta_j|^2$ en función de k . Está marcado el número de onda para el cual la tasa de creación cae a e^{-1} .

donde

$$\Omega_j^2(t) = M^2 + g\langle\hat{\chi}^2\rangle_j(t) \quad (2.19)$$

$$\omega_j^2(t) = k^2 + m^2 + g\phi^2(t). \quad (2.20)$$

En esta sección lo que haremos es calcular el valor de expectación $\langle\hat{\chi}^2\rangle$ en un tiempo $t_j < t < t_{j+1}$.

4.1. Construcción de las soluciones

Para proponer para el campo pesado ϕ soluciones del oscilador armónico, cuya frecuencia y amplitud van cambiando en cada t_j , es necesario considerar que $\Omega_j(t)$ es constante entre dos tiempos t_j consecutivos. Para ello asumiremos que $\langle\hat{\chi}^2\rangle$ no depende del tiempo promediando su valor como se verá más abajo. La solución para tiempos $t_{j-1} < t < t_j$ es

$$\phi(t) = \phi_{j-1} \sin \Omega_{j-1}(t - t_{j-1}), \quad (t_{j-1} < t < t_j) \quad (4.1)$$

y para tiempos $t_j < t < t_{j+1}$

$$\phi(t) = \phi_j \sin \Omega_j(t - t_j), \quad (t_j < t < t_{j+1}). \quad (4.2)$$

Si pegamos las soluciones en t_j pidiendo continuidad de ϕ y su derivada se tiene que

$$\phi_j = -\phi_{j-1} \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j} \quad (4.3)$$

como se demuestra en el apéndice D. Como el valor de expectación $\langle\hat{\chi}^2\rangle_j$ irá aumentando luego de cada transición la frecuencia Ω_j aumentará y en consecuencia la amplitud ϕ_j disminuirá. En la

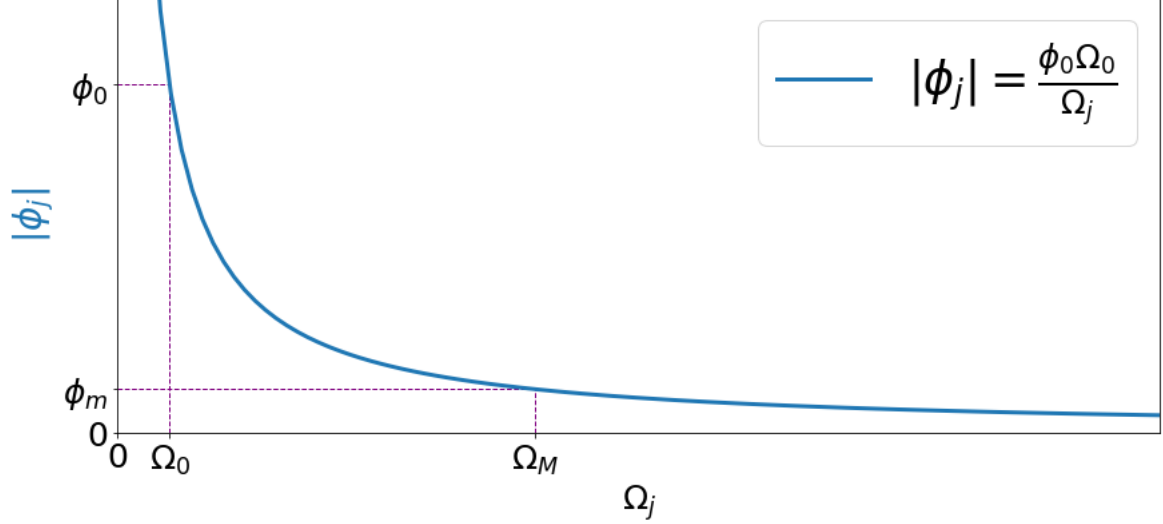


Figura 6: $|\phi_j|$ en función de Ω_j . A medida que la frecuencia del campo pesado aumenta su amplitud disminuye de acuerdo a una hipérbola. Los valores ϕ_m y Ω_M son los correspondientes a cuando finaliza la resonancia ancha que se deducen en la subsección 4.4.

figura 6 se grafica $|\phi_j|$ en función de Ω_j . La solución inicial es

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \Omega_0(t - t_0), \quad (t_0 < t < t_1). \quad (4.4)$$

Para el campo liviano sabemos que entre dos tiempos $t_j^+ < t < t_{j+1}^-$ la solución general se puede expresar en términos de una base de funciones WKB. Omitimos el subíndice k en lo que sigue y escribimos las funciones WKB de frecuencia positiva (3.10) de la siguiente manera

$$\vec{f}_j(t) = \begin{pmatrix} f_j \\ f_j^* \end{pmatrix}, \quad f_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} e^{-i\theta_j(t)}, \quad (t_j^+ \leq t \leq t_{j+1}^-), \quad (4.5)$$

donde $\theta_j(t) = \int_{t_j}^t \omega_j(t') dt'$. Vemos que la fase vale cero en $t = t_j$. Estas funciones van cambiando luego de cada transición porque la frecuencia ω_j que aparece en las WKB depende del campo ϕ .

La solución exacta del problema la notaremos como $f(t)$ y para tiempos $t_j < t < t_{j+1}$ podrá escribirse como una combinación lineal de las WKB

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}, \quad f(t) = A_j f_j(t) + B_j f_j^*(t), \quad (t_j \leq t \leq t_{j+1}). \quad (4.6)$$

Para ver cómo va transformando la solución exacta la escribimos en t_{j-1}^+ en términos de la base WKB

$$f(t_{j-1}^+) = A_{j-1} f_{j-1}(t_{j-1}^+) + B_{j-1} f_{j-1}^*(t_{j-1}^+) \quad (4.7)$$

que evoluciona hasta t_j^- de manera que las WKB adquieren una fase²¹

$$f(t_j^-) = A_{j-1} e^{-i\theta_j} f_j(t_j^-) + B_{j-1} e^{+i\theta_j} f_j^*(t_j^-), \quad (4.8)$$

²¹En el pasaje de la ecuación (4.7) a la ecuación (4.8) estamos cambiando la frecuencia ω_{j-1} por ω_j al hacer el

donde $\theta_j = \theta_j(t_{j+1})$, es decir, es la fase acumulada entre dos t_j . Luego de la transición en t_j debemos reemplazar $f_j(t_j^+) \rightarrow \alpha_j f_j(t_j^+) + \beta_j f_j^*(t_1^+)$ de acuerdo a la transformación de Bogoliubov (3.30) y entonces queda

$$f(t_j^+) = A_{j-1} e^{-i\theta_j} [\alpha_j f_j(t_j^+) + \beta_j f_j^*(t_1^+)] + B_{j-1} e^{+i\theta_j} [\alpha_j^* f_j^*(t_j^+) + \beta_j^* f_j(t_1^+)]. \quad (4.9)$$

Esto puede reordenarse de manera que la solución exacta se exprese como una combinación lineal de la base WKB del nuevo ciclo

$$f(t_j^+) = A_j f_j(t_j^+) + B_j f_j^*(t_j^+) \quad (4.10)$$

con

$$A_j = \alpha_j e^{-i\theta_j} A_{j-1} + \beta_j^* e^{+i\theta_j} B_{j-1} \quad (4.11)$$

$$B_j = \beta_j e^{-i\theta_j} A_{j-1} + \alpha_j^* e^{+i\theta_j} B_{j-1}. \quad (4.12)$$

Notemos que

$$|A_j|^2 - |B_j|^2 = |A_{j-1}|^2 - |B_{j-1}|^2 = \dots = |A_0|^2 - |B_0|^2 = 1, \quad (4.13)$$

donde es necesario utilizar que $|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2 = 1$ y la última igualdad surge de que, en el caso de interés del campo χ en vacío, se tiene la condición inicial $A_0 = 1$ y $B_0 = 0$. La ecuación (4.12) nos permite calcular $|B_j|^2$ en términos de $|B_{j-1}|^2$

$$|B_j|^2 = |B_{j-1}|^2 (1 + 2|\beta_j|^2) + |\beta_j|^2 + 2\Re [\alpha_j \beta_j A_{j-1} B_{j-1}^* e^{-2i\theta_j}]. \quad (4.14)$$

Multiplicando por 2 y sumando 1 se tiene

$$1 + 2|B_j|^2 = (1 + 2|B_{j-1}|^2) \mathcal{A} + 4\Re [\alpha_j \beta_j A_{j-1} B_{j-1}^* e^{-2i\theta_j}] \quad (4.15)$$

donde

$$\mathcal{A} = 1 + 2|\beta_j|^2 \quad (4.16)$$

es el coeficiente de amplificación. Para el caso del espacio estático \mathcal{A} no depende de j ya que el coeficiente β_j depende del módulo del producto $\phi_j \Omega_j$ que es constante ciclo a ciclo. Ver ecuación (3.34). Como se muestra en la siguiente sección las fases $\theta_j \gg 2\pi$ por lo que los términos de fase de la ecuación (4.15) irán tomando valores aleatorios y eso nos permite promediarlos a cero. Ahora podemos resolver la recurrencia de manera sencilla

$$1 + 2|B_j|^2 = (1 + 2|B_{j-1}|^2) \mathcal{A} = (1 + 2|B_{j-2}|^2) \mathcal{A}^2 \dots = (1 + 2|B_0|^2) \mathcal{A}^j = \mathcal{A}^j \quad (4.17)$$

cambio de las funciones f_{j-1} a f_j , cuando todavía no atravesamos el t_j . Es una cuestión de notación que no cambia el resultado porque en la próxima ecuación se hace la transformación de Bogoliubov. Además vale aclarar que el problema resuelto del potencial parabólico depende del módulo del producto $\phi_j \Omega_j$ que se mantiene constante, es decir la curvatura de ω^2 en sus mínimos es constante. Es por ésto que podemos usar las soluciones a este problema de forma exacta aunque ϕ_j y Ω_j cambien en t_j .

y por lo tanto

$$|B_j|^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^j - 1). \quad (4.18)$$

Escribimos el valor de expectación para tiempos $t_j^+ < t < t_{j+1}^-$ utilizando la ecuación (4.6)

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_k|^2(t) \quad (4.19)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_j} \left\{ 1 + 2|B_j|^2 + 2\Re [A_j B_j^* e^{-2i\theta_t}] \right\}. \quad (4.20)$$

Acá θ_t es la fase acumulada entre el tiempo t_j^+ y el tiempo t . Mirando (4.15) junto a la (4.20) se ve que el término $2|B_{j-1}|^2 \mathcal{A}$ corresponde a producción estimulada de partículas ya que amplifica el número presente en el ciclo anterior, mientras que el término con \mathcal{A} solamente corresponde a la producción espontánea de partículas o amplificación de las fluctuaciones de vacío.

4.2. El rol de la fase

Al desglosar la expresión para $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j$ dada por (4.20) aparecen términos que poseen fases θ_n . Veamos cuánto vale la fase en función del ciclo j

$$\begin{aligned} \theta_j &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' \omega(t') \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' \sqrt{k^2 + m^2 + g\phi_j^2 \sin^2 \Omega_j(t' - t_j)} \\ &= \int_0^{\pi/\Omega_j} dt' \sqrt{k^2 + m^2 + g\phi_j^2 \sin^2 \Omega_j t'} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por la condición de resonancia ancha $g\phi^2/2 \gg k^2 + m^2$ podemos hacer el desarrollo para k chico

$$\theta_j = \int_0^{\pi/\Omega_j} dt' g^{1/2} \phi_j \sin \Omega_j t' + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{g\phi^2}\right) \quad (4.22)$$

$$= \frac{2\sqrt{g}\phi_j}{\Omega_j} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{g\phi^2}\right) \quad (4.23)$$

que se puede escribir haciendo uso de (4.3)

$$\theta_j = \frac{2\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}{\Omega_j^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{g\phi^2}\right). \quad (4.24)$$

De esta expresión vemos que a medida que la frecuencia del campo pesado aumenta la fase disminuye. La fase inicial es

$$\theta_0 = \frac{2\sqrt{g}\phi_0}{\Omega_0} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{g\phi^2}\right), \quad (4.25)$$

valor que es mucho mayor a 2π debido a la condición de resonancia ancha $g\phi_0^2/2 \gg 4\Omega_0^2$. Entonces cuando el campo pesado empieza a oscilar esta fase es órdenes de magnitud más grande que 2π y se hace del orden de 2π cuando

$$\Omega_j \sim \sqrt{\frac{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}{\pi}}. \quad (4.26)$$

Veremos luego que este valor para Ω_j es prácticamente igual a (4.45), que es el que se obtiene cuando se empieza a violar la condición de resonancia ancha. De esto vemos que nuestra hipótesis de promediar los términos de fase a cero es válida a lo largo de todo el proceso de resonancia ancha ya que van tomando valores aleatorios. En el apéndice E se estudian estos términos con un poco más de detalle.

4.3. Creación espontánea y estimulada de partículas

Ahora calculamos el valor de expectación (4.20) promediando a cero el término que contiene θ_t , usando la solución a la recurrencia (4.18) y restando los términos necesarios para regularizar la divergencia (el valor $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t)$ es el denominador $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Reg}$ en la sección 2.3)

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(|f_k|^2(t_j^+) - \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) \quad (4.27)$$

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\omega_j} - \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{A}^j - 1}{2\omega_j}. \quad (4.28)$$

La primera integral es el valor $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0$ dado por la ecuación (2.30) o (2.35), con el detalle de que aparece la frecuencia ω_j , y por lo tanto lo denotaremos como $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j}$. Para el segundo término usamos el binomio de Newton teniendo en cuenta que $\mathcal{A} = 1 + 2|\beta|^2$. Notemos que los coeficientes β de Bogoliubov (3.32) dependen del módulo del producto $\phi_j\Omega_j$ que se mantiene constante en cada ciclo. Nos olvidamos entonces del subíndice j en $|\beta_j|^2$, que no seguirá siendo cierto cuando incorporemos la expansión del espacio. Obtenemos entonces

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t) = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^j 2^n \binom{j}{n} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2 + g\phi_j^2 \sin^2 \Omega_j(t - t_j)}} \exp \left[-\frac{\pi(k^2 + m^2)}{g^{1/2}\phi_j\Omega_j} \right]^n. \quad (4.29)$$

Como el valor de expectación calculado es entre tiempos $t_j^+ < t < t_{j+1}^-$, para los cuales estamos lejos de los valores en los que se anula ϕ , podemos asumir que en el denominador domina el término de interacción debido a la primer condición de resonancia ancha $g\phi_j^2/2 \gg k^2 + m^2$. Además aproximaremos $\sin^2 \Omega_j(t - t_j) \sim 1/2$ para que $\Omega_j^2(t) = M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t)$ no dependa del tiempo y no aparezcan anarmonicidades en ϕ . Teniendo en cuenta que $\phi_j\Omega_j = \phi_0\Omega_0$ nos queda luego de integrar

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j = \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \Omega_j Q(j) \quad (4.30)$$

donde hemos definido²²

$$Q(j) = \frac{2^{1/4}}{8\pi^3} \sqrt{\frac{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}{\sqrt{8}}} q(j) \quad (4.31)$$

$$q(j) = \sum_{n=1}^j \binom{j}{n} \frac{2^n}{n^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{\pi m^2}{g^{1/2}\phi_j\Omega_j}\right) \right]^n \quad (4.32)$$

con $Q(0) = 0$. Se ve que Q es creciente con j . Haciendo uso de (2.35) el valor de expectación se puede escribir

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j = ag\phi_j^2 + \Omega_j Q(j). \quad (4.33)$$

Vemos que el valor de expectación de base irá disminuyendo al disminuir ϕ_j mientras que la frecuencia Ω_j contribuirá al aumento de la producción.

Ahora volvemos a la frecuencia del campo pesado

$$\Omega_j^2 = M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j \quad (2.19)$$

y según la ecuación (4.30) se expresa

$$\Omega_j^2 = M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + g\Omega_j Q(j) \quad (4.34)$$

que haciendo uso de (2.35) queda de la siguiente manera

$$\Omega_j^2 = M^2 + ag^2\phi_j^2 + g\Omega_j Q(j). \quad (4.35)$$

A partir de la constancia $\phi_j\Omega_j = \phi_0\Omega_0$ se puede escribir una ecuación cuártica para Ω_j que necesitaremos más adelante al introducir la expansión del espacio

$$\Omega_j^4 - gQ(j)\Omega_j^3 - M^2\Omega_j^2 - ag^2\phi_0^2\Omega_0^2 = 0 \quad (4.36)$$

con (recordar que $Q(0) = 0$)

$$\Omega_0^2 = M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 \quad (4.37)$$

$$= M^2 + ag^2\phi_0^2. \quad (4.38)$$

4.4. Fin de la resonancia: valor de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{Max}$

Las condiciones de resonancia ancha

$$\omega_{1j}^2 \gg \omega_0^2, \quad \omega_{1j}^2 \gg 4\Omega_j^2 \quad (4.39)$$

²²La exponencial tendrá un valor cercano a 1 debido a la condición de resonancia ancha $g\phi_j^2/2 \gg k^2 + m^2$ y a que un campo es mucho más pesado que el otro $\Omega_0 \gg m$.

se expresan de la siguiente manera en términos de las cantidades físicas

$$\frac{g\phi_j^2}{2} \gg k^2 + m^2, \quad \frac{g\phi_j^2}{2} \gg 4\Omega_j^2. \quad (4.40)$$

Viendo la forma del coeficiente de Bogoliubov (3.32)

$$\beta = e^{-i\pi/2} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \frac{k^2 + m^2}{g^{1/2}\phi_j\Omega_j} \right]$$

notamos que la creación de partículas es importante para $g^{1/2}\phi_j\Omega_j > k^2 + m^2$. Esto permite ver que la condición de la izquierda está contenida en la de la derecha. A partir de esta última se tiene

$$\frac{g^{1/2}\phi_j}{2} \gg \sqrt{2}\Omega_j \quad (4.41)$$

que multiplicando por $g^{1/2}\phi_j$ queda

$$\frac{g\phi_j^2}{2} \gg \sqrt{2}g^{1/2}\phi_j\Omega_j > \sqrt{2}(k^2 + m^2) \quad (4.42)$$

por lo que basta considerar la segunda relación (4.40).

Esta condición deja de ser válida cuando

$$\frac{g\phi_j^2}{2} \sim 4\Omega_j^2 \quad (4.43)$$

que en virtud de la constancia $\phi_j\Omega_j = \phi_0\Omega_0$ se convierte en

$$\frac{g\phi_0^2\Omega_0^2}{2\Omega_j^2} \sim 4\Omega_j^2 \quad (4.44)$$

y entonces la frecuencia *máxima* y la amplitud *mínima* son del orden (ver figura 6)

$$\Omega_M \sim \sqrt{\frac{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}{\sqrt{8}}}, \quad \phi_m \sim \sqrt{\frac{\sqrt{8}\phi_0\Omega_0}{\sqrt{g}}}. \quad (4.45)$$

Por un lado vemos que $\phi_m \neq 0$ y por otro que la frecuencia máxima del campo pesado disminuye al disminuir g . Además la amplitud mínima del campo pesado aumenta al disminuir la constante de acoplamiento.

4.4.1. Valor óptimo de la constante de acoplamiento g

En esta sección estudiamos el valor de la constante de acoplamiento que maximiza la producción de partículas. Antes veamos cómo las distintas condiciones del problema nos imponen restricciones sobre g . De la condición de resonancia ancha

$$\frac{g\phi_0^2}{2} \gg 4(M^2 + ag^2\phi_0^2) \quad (4.46)$$

tenemos por un lado que, al ser $g\phi_0^2 \gg 8M^2$, hay una cota inferior

$$g > \frac{8M^2}{\phi_0^2}, \quad (4.47)$$

y por otro lado se ve que $g\phi_0^2 \gg 8ag^2\phi_0^2$ y entonces aparece una cota superior

$$g < \frac{1}{8a}. \quad (4.48)$$

Esta última condición nos dice que g debe ser a lo sumo de orden 1.

Ahora escribamos

$$M^2 = \Omega_0^2 - ag^2\phi_0^2 \quad (4.49)$$

y tengamos en cuenta que la masa debe ser positiva (y real) de lo que se deduce una cota superior más restrictiva que la anterior, que la llamamos de la siguiente manera

$$g < \frac{\Omega_0}{\sqrt{a}\phi_0} \equiv \tilde{g}. \quad (4.50)$$

Ahora vamos a comparar la producción de partículas cuando deja de haber resonancia ancha respecto del valor inicial $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0 = ag\phi_0^2$. Mirando la ecuación (2.19) se puede escribir $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j = \Omega_j^2/g - M^2/g$ y el valor de expectación máximo es

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_M \sim \frac{\phi_0\Omega_0}{\sqrt{8g}} - \frac{M^2}{g} \quad (4.51)$$

donde se usó la primera de las ecuaciones (4.45). El cociente es

$$R \equiv \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_M}{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0} \sim \frac{\Omega_0}{\sqrt{8g}ag\phi_0} - \frac{M^2}{ag^2\phi_0^2}. \quad (4.52)$$

Reemplazando el valor de M^2 de la ecuación (4.49) se tiene

$$R \sim 1 + \frac{\Omega_0}{\sqrt{8g}ag\phi_0} - \frac{\Omega_0^2}{ag^2\phi_0^2} \quad (4.53)$$

y en términos de \tilde{g}

$$R \sim 1 - \frac{\tilde{g}^2}{g^2} + \frac{\tilde{g}}{g^{3/2}\sqrt{8a}} \quad (4.54)$$

Vamos a definir una variable y un parámetro

$$h \equiv \frac{\tilde{g}}{g} > 1, \quad \rho \equiv \frac{1}{\sqrt{8a\tilde{g}}}, \quad (4.55)$$

para expresar el cociente así

$$R(h) = 1 - h^2 + h^{3/2}\rho. \quad (4.56)$$

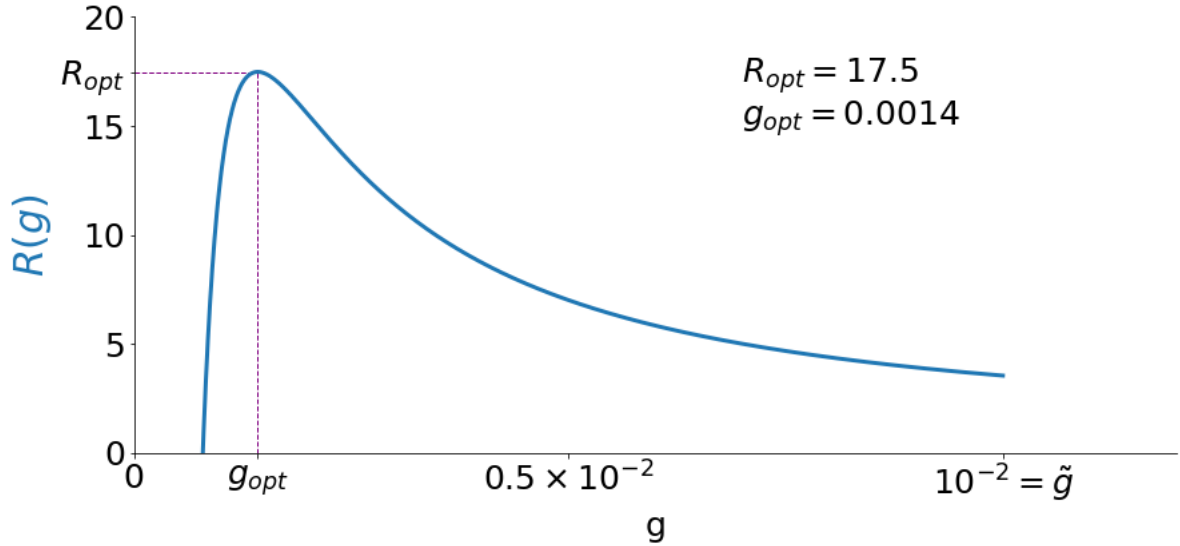


Figura 7: R en función de g para valores $a = 1$, $\Omega_0 = 1$ y $\phi_0 = 10^2$. La constante de acoplamiento no puede tomar valores por encima de \tilde{g} para que la masa sea positiva. Vemos que hay un valor óptimo de g .

Notar que $R(1) = \rho$. Para que haya producción debe valer que $R(h) > 1$ de lo que se deduce

$$h < \rho^2 \quad (4.57)$$

y nos da una cota inferior para g un poco más restrictiva que (4.47)

$$g > \frac{8\Omega_0^2}{\phi_0^2} = 8a\tilde{g}^2. \quad (4.58)$$

Entonces los valores permitidos de g son

$$8a\tilde{g}^2 < g < \tilde{g} \quad (4.59)$$

o en términos de las cantidades físicas

$$8\frac{\Omega_0^2}{\phi_0^2} < g < \frac{\Omega_0}{\sqrt{a}\phi_0}. \quad (4.60)$$

El máximo de la producción es cuando $R'(h_{opt}) = 0$ de donde se deduce

$$h_{opt} = \frac{9}{16}\rho^2 \quad (4.61)$$

que nos da el valor óptimo de g

$$g_{opt} = \frac{128}{9} \frac{\Omega_0^2}{\phi_0^2}. \quad (4.62)$$

En la figura 7 se grafica $R(g)$ para ciertos valores de los parámetros como ejemplo. El cociente de amplificación para el valor óptimo queda

$$R(g_{opt}) \sim 1 + 1,65 \times 10^{-3} \frac{1}{a} \left(\frac{\phi_0}{\Omega_0} \right)^2. \quad (4.63)$$

4.4.2. Cálculo de $q(j_M)$

A partir de la comparación del valor de expectación calculado analíticamente y del obtenido a partir de la violación de la condición de resonancia ancha podremos obtener la duración en ciclos del proceso. Para ello despejemos la función Q de (4.30) para obtener su valor máximo

$$Q(j_M) = \frac{\langle \chi^2 \rangle_M - ag\phi_m^2}{\Omega_M} \quad (4.64)$$

y al reemplazar el valor $\langle \chi^2 \rangle_M$ de (4.51) junto con $M^2 = \Omega_0^2 - ag^2\phi_0^2$ se transforma en

$$Q(j_M) = \frac{\Omega_M}{g} - \frac{\Omega_0^2}{g\Omega_M} + \frac{ag}{\Omega_M} (\phi_0^2 - \phi_m^2) \quad (4.65)$$

que usando (4.45) se puede expresar así

$$Q(j_M) = \frac{\Omega_M}{g} \left[1 - 8ag - \sqrt{\frac{8}{g}} \frac{\Omega_0}{\phi_0} \left(1 - a \frac{g^2\phi_0^2}{\Omega_0^2} \right) \right]. \quad (4.66)$$

Comparando con (4.31) se obtiene

$$q(j_M) = \frac{8\pi^3}{2^{1/4}g} \left[1 - 8ag - \sqrt{\frac{8}{g}} \frac{\Omega_0}{\phi_0} \left(1 - a \frac{g^2\phi_0^2}{\Omega_0^2} \right) \right], \quad (4.67)$$

de donde se puede obtener el número de ciclos del proceso j_M de forma implícita usando la expresión de $q(j)$ dada por (4.32).

4.5. Equilibrio térmico

En este problema se tiene un estado inicial de no-equilibrio $M^2\phi^2 \gg m^2\chi^2$. Supongamos que se llega a un equilibrio térmico del sistema completo luego de un cierto tiempo. Como vimos la creación de partículas de χ está centrada alrededor de $k = 0$, por lo que vamos a suponer para simplificar la cuenta que también es un campo homogéneo y lo tomaremos como un grado de libertad clásico. El valor de expectación de alguna cantidad F es

$$\langle F \rangle = \int d\phi dP_\phi d\chi dP_\chi F \exp[-\beta V\mathcal{H}] \quad (4.68)$$

donde la densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \frac{P_\phi^2}{2} + \frac{M^2}{2}\phi^2 + \frac{P_\chi^2}{2} + \frac{m^2}{2}\chi^2 + \frac{g}{2}\phi^2\chi^2. \quad (4.69)$$

Por el teorema de equipartición de la energía se tiene

$$\left\langle \phi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right\rangle = \left\langle \chi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \chi} \right\rangle = \frac{kT}{V} \quad (4.70)$$

que al reemplazar \mathcal{H} queda

$$\langle M^2\phi^2 + g\phi^2\chi^2 \rangle = \langle m^2\chi^2 + g\phi^2\chi^2 \rangle \quad (4.71)$$

y se deduce la condición de equilibrio

$$M^2 \langle \phi^2 \rangle_{eq} = m^2 \langle \chi^2 \rangle_{eq}. \quad (4.72)$$

Si suponemos que el equilibrio se alcanza cuando se termina la resonancia ancha y escribimos $\langle \phi^2 \rangle_{eq} = \phi_m^2$ se tiene usando (4.72) y (4.45)

$$\langle \chi^2 \rangle_{eq} \sim \frac{M^2 \sqrt{8} \phi_0 \Omega_0}{m^2 \sqrt{g}}. \quad (4.73)$$

Comparando este valor con el valor de expectación de $\hat{\chi}^2$ al finalizar la resonancia ancha dado por (4.51) y teniendo en cuenta que $M \gg m$ se tiene

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_M \sim \frac{\phi_0 \Omega_0}{\sqrt{8g}} - \frac{M^2}{g} \ll \frac{M^2 \sqrt{8} \phi_0 \Omega_0}{m^2 \sqrt{g}} \sim \langle \chi^2 \rangle_{eq}. \quad (4.74)$$

Vemos que el equilibrio no debe alcanzarse cuando finaliza la resonancia ancha, sino mucho después.

5. Energía y presión

Usando la primera de las ecuaciones (F.7) escribimos la densidad de energía del campo pesado

$$\rho_\phi(t) = \frac{M^2 \phi_j^2}{2}. \quad (5.1)$$

Inicialmente vale

$$\rho_{\phi_0} = \frac{M^2 \phi_0^2}{2} \quad (5.2)$$

y al finalizar la resonancia ancha disminuye al valor

$$\rho_{\phi_m} = \frac{M^2 \phi_m^2}{2}. \quad (5.3)$$

Si consideramos la interacción la energía inicial del campo pesado es

$$\rho_{\phi_0} = \frac{\Omega_0^2 \phi_0^2}{2}. \quad (5.4)$$

La densidad de energía del campo liviano podemos expresarla como una inicial y una variación como en la ecuación (F.13)

$$\rho_\chi = \rho_{\chi_0} + \Delta \rho_\chi \quad (5.5)$$

$$= \rho_{\chi_0} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k |B_j|^2. \quad (5.6)$$

Usando la solución a la recurrencia (4.18)

$$\rho_\chi = \rho_{\chi_0} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \frac{\mathcal{A}^j - 1}{2} \quad (5.7)$$

$$= \rho_{\chi_0} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^j \binom{j}{n} 2^n \exp\left[\frac{-\pi m^2 n}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}\right] \int dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2 + g\phi^2} \exp\left[-\frac{\pi k^2 n}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0}\right]. \quad (5.8)$$

Notamos que al ser $\phi_m < \phi_j$ para todo j previo al fin de la resonancia para calcular la energía basta ver que $g\phi_m^2$ domina en la raíz ya que

$$\frac{g\phi_m^2}{k^2 + m^2} \sim \frac{\sqrt{8g}\phi_0\Omega_0}{k^2 + m^2} \gg 1 \quad (5.9)$$

excepto cuando $k^2 > \sqrt{8g}\phi_0\Omega_0$, valores suprimidos por la exponencial dentro de la integral. Nos queda luego de integrar y tomar $\sin^2 \sim 1/2$

$$\rho_\chi = \rho_{\chi_0} + \frac{\sqrt{g}\phi_j}{\sqrt{2}16\pi^3} (\sqrt{g}\phi_0\Omega_0)^{3/2} q(j) \quad (5.10)$$

donde $q(j)$ está definida en (4.32). En el momento del fin de la resonancia tomamos $\phi_j = \phi_m$ usando la ecuación (4.45) y $j = j_M$

$$\rho_{\chi_M} = \rho_{\chi_0} + \frac{2^{1/4}}{16\pi^3} g (\phi_0\Omega_0)^2 q(j_M). \quad (5.11)$$

El cociente entre la densidad de energía creada de partículas livianas y la inicial del campo pesado considerando la interacción es

$$\frac{\Delta\rho_{\chi_M}}{\rho_{\phi_0}} = \frac{2^{1/4}}{8\pi^3} g q(j_M). \quad (5.12)$$

Este cociente debe ser menor a la unidad, de lo que deducimos

$$q(j_M) < \frac{8\pi^3}{2^{1/4}g} \quad (5.13)$$

y tomando logaritmo natural

$$\ln q(j_M) \lesssim 5,4 + \ln \frac{1}{g}. \quad (5.14)$$

En la figura 8 graficamos la función $\ln q(j)$ de la ecuación (4.32) con $b \equiv 2 \exp[-\pi m^2/\sqrt{g}\phi_0\Omega_0]$. Nos interesa el caso en el que $b \approx 2$ de manera que vale la condición de resonancia ancha y $M \gg m$. Se ve de la figura que $\ln q \sim bj/2$. De la última ecuación se tiene

$$j_M \lesssim 5,4 + \ln \frac{1}{g}. \quad (5.15)$$

Vemos que el número de ciclos que dura el proceso crece al disminuir g . Además el número de ciclos es una cantidad finita del orden de 10.

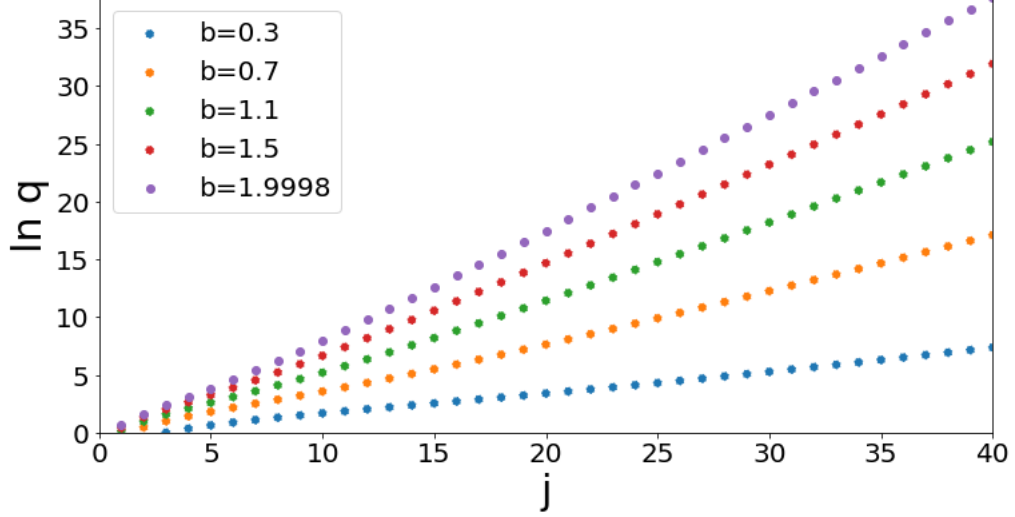


Figura 8: Gráfico del logaritmo natural de $q(j)$ en función de los ciclos j . Nos interesa el caso $b \approx 2$ donde $b \equiv 2 \exp[-\pi m^2 / \sqrt{g} \phi_0 \Omega_0]$. Como $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j \sim Q(j) \sim q(j)$ se ve que la amplificación del campo liviano es exponencial en el número de ciclos.

5.1. Presión del campo liviano

Ahora calculemos la presión del campo liviano usando la ecuación (F.20) del apéndice

$$p_\chi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{6\omega_k} (\mathcal{A}^j - 1) \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{12\pi^2} \sum_{n=1}^j \binom{j}{n} 2^n \exp\left[-\frac{\pi m^2 n}{\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0}\right] \int dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2 + g\phi^2}} \exp\left[-\frac{\pi k^2 n}{\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0}\right] \quad (5.17)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{32\pi^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{g} \phi_j} \frac{(\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0)^{5/2}}{\pi^{5/2}} \sum_{n=1}^j \binom{j}{n} \frac{2^n}{n^{5/2}} \exp\left[-\frac{\pi m^2 n}{\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0}\right]. \quad (5.18)$$

En el último paso se aproximó como antes $\sqrt{k^2 + m^2 + g\phi^2} \approx \sqrt{g} \phi_j / 2$. Definimos

$$q_{5/2}(j) \equiv \sum_{n=1}^j \binom{j}{n} \frac{2^n}{n^{5/2}} \exp\left[-\frac{\pi m^2 n}{\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0}\right] \quad (5.19)$$

que difiere de la función $q(j)$ dada por (4.32) en que contiene $n^{-5/2}$ en vez de $n^{-3/2}$. En la figura 9 se comparan $\ln q(j)$ y $\ln q_{5/2}(j)$. Nos queda

$$p_\chi = \frac{\sqrt{2}}{32\pi^4} \frac{g^{3/4}}{\phi_j} (\phi_0 \Omega_0)^{5/2} q_{5/2}(j). \quad (5.20)$$

Viendo el momento en el que termina la resonancia ancha reemplazamos ϕ_j por ϕ_m

$$p_{\chi M} = \frac{\sqrt{2}}{32\pi^4} \frac{g}{2^{3/4}} (\phi_0 \Omega_0)^2 q_{5/2}(j_M). \quad (5.21)$$

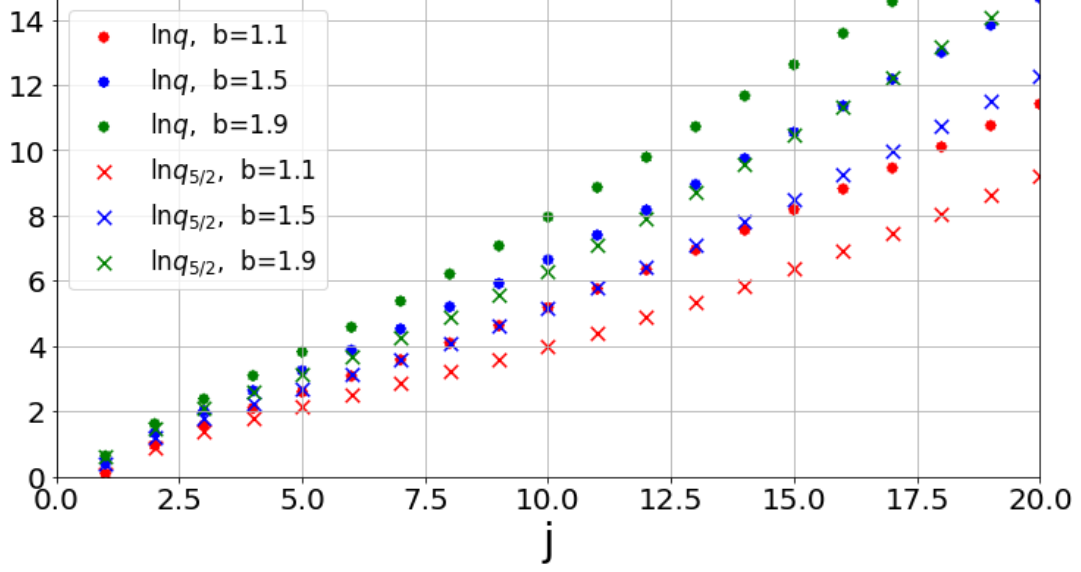


Figura 9: Gráfico de $\ln q(j)$ y de $\ln q_{5/2}(j)$ en función del ciclo j para distintos valores de $b \equiv 2 \exp[-\pi m^2 / \sqrt{g} \phi_0 \Omega_0]$. Se ve que $q_{5/2}(j)$ es más pequeña que $q(j)$ para todo $j > 1$.

Ahora reordenamos la expresión para comparar p con $\Delta\rho_{\chi_M}$ de la ecuación (5.11)

$$p_{\chi_M} = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \frac{2^{1/4}}{16\pi^3} g (\phi_0 \Omega_0)^2 q_{5/2}(j_M). \quad (5.22)$$

Como $q_{5/2}(j) < q(j)$ para todo j escribimos

$$p_{\chi_M} < \frac{1}{2^{3/2}\pi} \frac{2^{1/4}}{16\pi^3} g (\phi_0 \Omega_0)^2 q(j_M) \quad (5.23)$$

$$< \frac{1}{2^{3/2}\pi} \Delta\rho_{\chi_M} \quad (5.24)$$

Finalmente vemos que la presión de las partículas creadas

$$p_{\chi_M} < 0,11 \Delta\rho_{\chi_M}. \quad (5.25)$$

es compatible con que sea la materia oscura fría del universo.

6. Expansión del universo y dilución de partículas

6.1. Cota superior para la temperatura inicial de la radiación

Volvamos a considerar la expansión del universo que despreciamos a lo largo de las cuentas. Como la creación de partículas se da en tiempos del orden Ω^{-1} tiene sentido asumir que el espacio se expandió poco. Sin embargo la creación de partículas será también pequeña en los primeros ciclos cuando aún no hay producción estimulada de partículas. Queremos comparar estos

dos efectos. A partir de la definición $X = \chi/a^{3/2}$ podemos escribir el cociente entre los valores de expectación del campo físico cuadrado de ciclos contiguos

$$\frac{\langle \hat{X}^2 \rangle_{j+1}}{\langle \hat{X}^2 \rangle_j} = \frac{a_j^3 \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{j+1}}{a_{j+1}^3 \langle \hat{\chi}^2 \rangle_j}. \quad (6.1)$$

En un universo dominado por radiación $a \sim t^{1/2}$ por lo que el espacio se expande cada vez menos a intervalos de tiempo iguales. Además como $t_{j+1} = t_j + \pi/\Omega_j$ y Ω_j es cada vez mayor, los tiempos t_{j+1} y t_j están cada vez más juntos a medida que j crece. En otras palabras la expansión del espacio entre tiempos contiguos es cada vez menor por dos cuestiones: el campo pesado oscila cada vez más rápido y la expansión del espacio en un universo dominado por radiación es cada vez menor. El cociente de la derecha se puede expresar de la siguiente manera usando la ecuación (4.30)

$$\frac{\langle \hat{X}^2 \rangle_{j+1}}{\langle \hat{X}^2 \rangle_j} = \frac{a_j^3}{a_{j+1}^3} \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j+1} + \Omega_{j+1}Q(j+1)}{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \Omega_jQ(j)}. \quad (6.2)$$

Es claro que el cociente de la derecha es cada vez mayor a medida que j crece. Ésto junto con que el cociente a_j/a_{j+1} es creciente en j nos lleva a que si vale $\langle \hat{X}^2 \rangle_1 > \langle \hat{X}^2 \rangle_0$ entonces vale lo mismo para cualquier j : si la dilución de las partículas no es pronunciada en el primer ciclo entonces no será importante luego. La condición $\langle \hat{X}^2 \rangle_1 > \langle \hat{X}^2 \rangle_0$ nos lleva a la siguiente relación (recordar que $Q(0) = 0$)

$$\frac{a_1^3}{a_0^3} < \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{01} + \Omega_1Q(1)}{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0}. \quad (6.3)$$

Escribiendo $t_1 = t_0 + \pi/\Omega_0$, donde $t_0 = 1/2H_0$ es el tiempo en el que empieza a oscilar el campo pesado, eligiendo $a_0 = 1$ y usando la ecuación (2.5) se tiene

$$a_1 = \left(1 + 2\pi \frac{H_0}{\Omega_0}\right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Usando la ecuación (2.35) nos queda

$$\left(1 + 2\pi \frac{H_0}{\Omega_0}\right)^{3/2} < \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_{01} + \Omega_1Q(1)}{\langle \hat{\chi}^2 \rangle_0} \quad (6.5)$$

$$< \frac{ag\phi_1^2 + \Omega_1Q(1)}{ag\phi_0^2} \quad (6.6)$$

que al usar la ecuación para Ω_j dada por (4.35) y luego $M^2 = \Omega_0^2 - ag\phi_0^2$ se expresa

$$\left(1 + 2\pi \frac{H_0}{\Omega_0}\right)^{3/2} < \frac{\Omega_1^2 - M^2}{ag\phi_0^2} \quad (6.7)$$

$$< 1 + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{ag^2\phi_0^2}. \quad (6.8)$$

El valor de Ω_1 habría que obtenerlo de la solución a la ecuación cuártica (4.36). Como mostramos en el apéndice G el valor de Ω_j es menor que el valor de la solución $\tilde{\Omega}_j$ a la ecuación cuadrática

$$\tilde{\Omega}_j^2 = \Omega_0^2 + g\tilde{\Omega}_j Q(j) \quad (6.9)$$

que es

$$\tilde{\Omega}_j = \frac{gQ(j)}{2} + \sqrt{\left(\frac{gQ(j)}{2}\right)^2 + \Omega_0^2}. \quad (6.10)$$

Como buscamos la cota superior reemplazamos Ω_1^2 por $\tilde{\Omega}_1^2$

$$\left(1 + 2\pi \frac{H_0}{\Omega_0}\right)^{3/2} < 1 + \frac{\tilde{\Omega}_1^2 - \Omega_0^2}{ag^2\phi_0^2} \quad (6.11)$$

$$< 1 + \frac{1}{ag^2\phi_0^2} \left\{ 2 \left(\frac{gQ(1)}{2}\right)^2 + gQ(1) \sqrt{\left(\frac{gQ(1)}{2}\right)^2 + \Omega_0^2} \right\} \quad (6.12)$$

$$< 1 + \frac{Q(1)^2}{2a\phi_0^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\Omega_0}{gQ(1)}\right)^2} \right\}. \quad (6.13)$$

El valor que aparece en la raíz se puede escribir aproximando la exponencial que aparece en $q(1)$ por 1 de la siguiente manera $2\Omega_0/gQ(1) = 16\pi^3\sqrt{\Omega_0}/g^{5/4}\sqrt{\phi_0}$. Queremos ver que este valor es grande. Para ello reemplazamos el máximo valor de g que sale de que la masa sea positiva y viene dado por el límite superior de la ecuación (4.60). Se tiene $2\Omega_0/g_{Max}Q(1) = 16\pi^3a^{3/4}(\phi_0/\Omega_0)^{3/4}$ y como $\phi_0 \gg \Omega_0$ esta cantidad es grande²³. La cota se simplifica a

$$\left(1 + 2\pi \frac{H_0}{\Omega_0}\right)^{3/2} < 1 + \frac{Q(1)\Omega_0}{ag\phi_0^2} \quad (6.14)$$

que despejando la constante de Hubble inicial y reemplazando $Q(1)$ de la ecuación (4.31)

$$H_0 < \frac{\Omega_0}{2\pi} \left\{ \left[1 + \frac{1}{a8\pi^3} \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{g}\phi_0}\right)^{3/2} \right]^{2/3} - 1 \right\}. \quad (6.15)$$

Para todos los valores de g permitidos la cantidad que suma con el 1 es pequeña por lo que desarrollamos y obtenemos

$$H_0 < \frac{1}{24\pi^4 a} \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{g}\phi_0}\right)^{3/2} \Omega_0. \quad (6.16)$$

Como la cantidad entre paréntesis es pequeña vemos que la constante de Hubble debe ser mucho menor a la frecuencia inicial del campo pesado para que el efecto de dilución de partículas no le gane a la creación en el primer ciclo. Podemos pensar que mientras $H > H_0$ la creación está

²³Notar que es necesario que $\phi_0 \gg \Omega_0$ para que haya un rango permitido de valores de g , ver ecuación (4.60).

suprimida y cuando se empieza a cumplir la cota (6.16) se hace efectiva la creación de partículas, ver figura 1.

De esta desigualdad también podemos ver que el tiempo que dura la resonancia ancha es mucho menor al tiempo típico de expansión del universo. De (6.16) tenemos

$$\frac{1}{\Omega_0} \ll \frac{1}{H_0} \quad (6.17)$$

y como el tiempo que dura la resonancia es $t_{j_M} - t_0 = \pi \sum_{i=0}^{j_M-1} \Omega_i^{-1} < \pi j_M / \Omega_0$, ya que Ω_0 es la menor de las frecuencias, se tiene

$$\frac{\pi j_M}{\Omega_0} \ll \frac{1}{H_0} \quad (6.18)$$

donde πj_M es un número del orden de las decenas como se observó anteriormente.

6.2. Corrección en $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ por la expansión del universo

Nos interesa calcular cómo cambia el valor de expectación $\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j$ debido a la expansión débil del universo. Para ello vamos a introducir los factores de escala a donde sea necesario y hacer un seguimiento de la cuenta. Partamos de las ecuaciones para los campos reescalados

$$\ddot{\phi} + \left(M^2 + g \frac{\langle \hat{\chi}^2 \rangle}{a^3} \right) \phi = 0 \quad (2.17)$$

$$\ddot{f}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 + g \frac{\phi^2}{a^3} \right) f_k = 0 \quad (2.18)$$

donde estamos considerando a las masas efectivas que contienen H^2 como constantes. Seguimos proponiendo para el campo pesado soluciones de oscilador armónico para cada ciclo que pegamos en los t_j pidiendo la continuidad de la función y su derivada. Notar que el decaimiento de la amplitud del campo pesado debido a la expansión del espacio está absorbida en el reescalo del campo $\Phi = \phi/a^{3/2}$. La diferencia es que ahora la frecuencia del campo pesado durante un ciclo $\Omega_j(t) = M^2 + g\langle \hat{\chi}^2 \rangle/a^3$ dependerá del tiempo no solo por la dependencia $\langle \hat{\chi}^2 \rangle(t)$, sino también a través del factor $a^3(t)$. En la cuenta sin la expansión del espacio ya estamos considerando que $\langle \hat{\chi}^2 \rangle(t)$ es constante en el tiempo dentro de un ciclo y ahora haremos lo mismo con el factor de escala, dándole un valor constante $a(t_j) = a_j$. Ésto nos permite que el campo pesado sea, como antes, un oscilador armónico que cambia su frecuencia y amplitud ciclo a ciclo sin incluir anarmonicidades.

Con la forma (3.1) para el campo pesado la ecuación para los modos del campo χ es

$$\ddot{f}_k + \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m^2 + \frac{g}{2a^3} \phi_j^2 [1 - \cos 2\Omega_j(t - t_j)] \right\} f_k = 0. \quad (6.19)$$

Las condiciones de resonancia ancha van a ser

$$\frac{g\phi_j^2}{2a_j^3} \gg \frac{k^2}{a_j^2} + m^2, \quad \frac{g\phi_j^2}{2a_j^3} \gg 4\Omega_j^2. \quad (6.20)$$

Para calcular tanto la corrección de frecuencia adiabática (3.8) como el desarrollo de ω^2 alrededor de los tiempos para los cuales se viola la adiabaticidad es necesario calcular las derivadas temporales primera y segunda de ω^2

$$\frac{d(\omega^2)}{dt} = -2\frac{k^2}{a^2}H + \frac{g}{a^3} [2\phi\dot{\phi} - 3\phi^2H] \quad (6.21)$$

$$\frac{d^2(\omega^2)}{dt^2} = 8\frac{k^2}{a^2}H^2 + \frac{g}{a^3} [2\dot{\phi}^2 + 2\phi\ddot{\phi} - 12\phi\dot{\phi}H + 15\phi^2H^2] \quad (6.22)$$

donde usamos que $\dot{H} = -2H^2$ en un universo dominado por radiación. La corrección de frecuencia adiabática puede escribirse como

$$\epsilon_2 = \frac{1}{4\omega^6} \left[\frac{5}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{d(\omega^2)}{dt} \right) - \omega^2 \frac{d^2(\omega^2)}{dt^2} \right] \quad (6.23)$$

que termina expresándose de una manera muy complicada. Hemos definido los tiempos t_j como aquellos para los cuales el campo pesado se anula. Al analizar esta expresión vemos que los tiempos para los cuales $\epsilon_2 \gg 1$, de manera que se viola la adiabaticidad, no coinciden con los t_j . Sin embargo, este efecto solo tiende a alargar o acortar el tiempo entre dos momentos en los que se crean partículas y no la cantidad de partículas que se producen. Para ver cómo se modifica la cantidad de partículas que se crean es necesario mirar los coeficientes de Bogoliubov β_j . Estos coeficientes surgen de haber aproximado el problema por el de scattering en un potencial parabólico temporal cerca de las regiones donde se viola la adiabaticidad. Vamos a asumir que aún es posible desarrollar ω^2 alrededor de estos tiempos de manera que el orden lineal se anule. El desarrollo, considerando que los t_j son los tiempos en los que se anula el campo pesado, es

$$\omega^2(t - t_j) \approx \omega^2(t_j) + \frac{d(\omega^2)}{dt}(t_j)(t - t_j) + \frac{1}{2} \frac{d^2(\omega^2)}{dt^2}(t_j)(t - t_j)^2 \quad (6.24)$$

$$\omega^2(t - t_j) \approx \frac{k^2}{a^2} + m^2 + \left(\frac{g}{a^3} \dot{\phi}_j^2 + 4\frac{k^2}{a^2}H^2 \right) (t - t_j)^2 \quad (6.25)$$

$$\omega^2(t - t_j) \approx \frac{k^2}{a^2} + m^2 + \frac{g}{a^3} \phi_j^2 \Omega_j^2 (t - t_j)^2. \quad (6.26)$$

En el último paso se despreció la cantidad con H^2 debido a la cota dada por la ecuación (6.16) y a la condición de resonancia ancha $g\phi_j^2/2 \gg k^2$. Vemos que los parámetros de la ecuación (3.32) son ahora

$$\omega_0^2 = \frac{k^2}{a^2} + m^2, \quad \omega_{1j}^2 = \frac{\sqrt{g}}{a_j^{3/2}} \phi_j \Omega_j \quad (6.27)$$

y nos queda de la ecuación (3.32)

$$|\beta_j|^2 = \exp \left[-\pi \frac{k^2/a_j^{1/2} + m^2 a_j^{3/2}}{\sqrt{g} \phi_j \Omega_j} \right]. \quad (6.28)$$

El módulo del producto $\phi_j \Omega_j$ es constante al igual que antes, pero $|\beta_j|^2$ depende de j a través del factor de escala. La fase acumulada entre dos t_j es ahora, a primer orden en $k^2/a_j^2 + m^2$,

$$\theta_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t') dt' \quad (6.29)$$

$$= \int_0^{\pi/\Omega_j} \sqrt{\frac{k^2}{a_j^2} + m^2 + \frac{g}{a_j^3} \phi_j^2 \sin^2 \Omega_j t'} dt' \quad (6.30)$$

$$\approx 2 \frac{\sqrt{g}}{a_j^{3/2}} \frac{\phi_j}{\Omega_j} \quad (6.31)$$

$$\approx 2 \frac{\sqrt{g}}{a_j^{3/2}} \frac{\phi_0 \Omega_0}{\Omega_j^2}. \quad (6.32)$$

Vemos que la fase se hace del orden de 2π cuando

$$\Omega_j \sim \sqrt{\frac{\sqrt{g} \phi_0 \Omega_0}{\pi a_j^{3/2}}}. \quad (6.33)$$

Como $a > 1$ esta condición se viola antes que la del caso sin expansión del universo. En otras palabras, la resonancia dura menos. Mientras dure la resonancia ancha podemos promediar a cero los términos de fase al igual que antes y escribir

$$1 + 2|B_j|^2 = (1 + 2|B_{j-1}|^2) \mathcal{A}_j \quad (6.34)$$

donde el coeficiente de amplificación ahora sí depende del ciclo $\mathcal{A}_j = 1 + 2|\beta_j|^2$. La solución a la ecuación de recurrencia se obtiene al igual que antes

$$1 + 2|B_j|^2 = \prod_{i=1}^j \mathcal{A}_i. \quad (6.35)$$

Ahora reescribimos para aproximar a primer orden $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1(1 + \delta\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_1)$ y así obtener

$$1 + 2|B_j|^2 = \mathcal{A}_1^j \prod_{i=1}^j \left(1 + \frac{\delta\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_1}\right). \quad (6.36)$$

La variación la podemos expresar como

$$\delta\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_1 \quad (6.37)$$

$$= 2|\beta_1|^2 \left(\frac{|\beta_i|^2}{|\beta_1|^2} - 1 \right) \quad (6.38)$$

$$= 2|\beta_1|^2 \left\{ \exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} \left(k^2 \left(\frac{1}{a_i^{1/2}} - \frac{1}{a_1^{1/2}} \right) + m^2 (a_i^{3/2} - a_1^{3/2}) \right) \right] - 1 \right\}. \quad (6.39)$$

Expandiendo en potencias de $k^2/\sqrt{g}\phi_0\Omega_0$ y de $m^2/\sqrt{g}\phi_0\Omega_0$ y quedándonos a primer orden se tiene

$$\delta\mathcal{A}_i \approx -\frac{2\pi|\beta_1|^2}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} \left[k^2 \left(\frac{1}{a_i^{1/2}} - \frac{1}{a_1^{1/2}} \right) + m^2 (a_i^{3/2} - a_1^{3/2}) \right]. \quad (6.40)$$

Volviendo a la expresión (6.36) a primer orden, en esta última aproximación²⁴, se puede escribir

$$1 + 2|B_j|^2 \approx \mathcal{A}_1^j \left(1 + \sum_{i=2}^j \frac{\delta \mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_1} \right) \quad (6.41)$$

donde la suma se puede expresar

$$\sum_{i=2}^j \frac{\delta \mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_1} \approx -\frac{2\pi|\beta_1|^2}{\mathcal{A}_1\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} [k^2 R_1 + m^2 R_2] \quad (6.42)$$

con las definiciones

$$R_1 \equiv \sum_{i=2}^j \left(\frac{1}{a_i^{1/2}} - \frac{1}{a_1^{1/2}} \right), \quad R_2 \equiv \sum_{i=2}^j \left(a_i^{3/2} - a_1^{3/2} \right). \quad (6.43)$$

Considerando H constante se puede escribir $a_i = a_1 \exp[H_0(t_i - t_1)]$ y desarrollando a primer orden se tiene

$$R_1 \approx -\frac{H_0}{2a_1^{1/2}} \sum_{i=2}^j (t_i - t_1), \quad R_2 \approx \frac{3H_0 a_1^{3/2}}{2} \sum_{i=2}^j (t_i - t_1). \quad (6.44)$$

Ahora usando que $t_i - t_1 = \sum_{n=1}^{i-1} \pi/\Omega_n$ escribimos

$$R_1 \approx -\frac{\pi H_0}{2a_1^{1/2}} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j-i)}{\Omega_i}, \quad R_2 \approx \frac{3\pi H_0 a_1^{3/2}}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j-i)}{\Omega_i}. \quad (6.45)$$

habiendo expresado la doble suma como una sola suma.

Queremos calcular

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(|f_k|^2 - \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{g\phi^2}{4(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) \quad (6.46)$$

$$= \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_j} 2|B_j|^2 \quad (6.47)$$

$$= \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_j} \left[\mathcal{A}_1^j \left(1 + \sum_{i=2}^j \frac{\delta \mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_1} \right) - 1 \right] \quad (6.48)$$

$$= \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(\mathcal{A}_1^j - 1)}{2\omega_j} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{A}_1^{j-1}}{2\omega_j} \sum_{i=2}^j \delta \mathcal{A}_i \quad (6.49)$$

$$\equiv \langle \hat{\chi}^2 \rangle_{0j} + a_1^{3/2} a_j^{3/2} \Omega_j Q(j) + \Delta_j \quad (6.50)$$

donde Δ_j es la corrección en la creación de partículas respecto al caso del espacio estático y vale cero para $j = 0, 1$. Hay otra corrección dada por el factor $a_j^{3/2}$ del segundo término que proviene del acoplamiento “efectivo” g/a^3 de la frecuencia ω_j . Para $j = 1$ la corrección está dada por el factor a_1^3 que aparece en el segundo término y viene a mostrar la expansión del espacio desde que

²⁴Notar que el próximo término en la expansión va como $(j-1)(k^2 + m^2)/\sqrt{g}\phi_0\Omega_0$.

el campo pesado empieza a oscilar en t_0 hasta la primera creación de partículas en t_1 . Utilizando el binomio de Newton para expresar \mathcal{A}_i^{j-1} y la ecuación (6.42) se tiene

$$\Delta_j = -\frac{1}{2\pi\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} \sum_{n=0}^{j-1} \binom{j-1}{n} 2^n \int dk \frac{k^2}{\omega_j} (|\beta_1|^2)^{n+1} [k^2 R_1 + m^2 R_2]. \quad (6.51)$$

Haciendo el cambio $n+1 \rightarrow n$ y usando las integrales (H.4) y (H.5) queda

$$\Delta_j = -\Omega_j \frac{a_j^{3/2}}{j} a_1^{3/4} \left[\frac{3}{2} a_1^{1/2} R_1 Q(j) + \frac{m^2}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} R_2 Q_{1/2}(j) \right] \quad (6.52)$$

donde $Q(j)$ está definida en (4.31) y

$$Q_{1/2}(j) = \frac{2^{1/4}}{8\pi^3} \Omega_M q_{1/2}(j) \quad (6.53)$$

$$q_{1/2}(j) = \sum_1^j \binom{j}{n} \frac{2^n}{n^{1/2}} \exp \left[-\frac{\pi m^2}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} \right]^n. \quad (6.54)$$

Es la misma expresión que $Q(j)$ con la diferencia de que los coeficientes de la suma van como $n^{-1/2}$ en vez de $n^{-3/2}$. Reemplazando las expresiones para R_1 y R_2 aproximadas (6.45)

$$\Delta_j = \frac{3\pi}{2} \Omega_j H_0 \frac{a_j^{3/2}}{j} a_1^{3/4} \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j-i)}{\Omega_i} \right) \left[\frac{Q(j)}{2} - \frac{\pi m^2}{\sqrt{g}\phi_0\Omega_0} a_1^{3/2} Q_{1/2}(j) \right]. \quad (6.55)$$

Vemos que la expansión del universo tiende a aumentar la producción de acuerdo con que la creación está centrada en $k=0$. De hecho, la contribución positiva proviene de las integrales de k mientras que la contribución negativa es de m . Despreciemos el término que resta y calculemos el cociente

$$\frac{\Delta_j}{\Omega_j Q(j)} \approx \frac{3\pi}{4} H_0 a_1^{3/2} \frac{a_j^{3/2}}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{j-i}{\Omega_i}. \quad (6.56)$$

Escribimos para la suma

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{j-i}{\Omega_i} < j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\Omega_i} < \frac{j^2}{\Omega_0} \quad (6.57)$$

y queda

$$\frac{\Delta_j}{\Omega_j Q(j)} < \frac{3\pi}{4} \frac{H_0}{\Omega_0} a_1^{3/2} a_j^{3/2} j. \quad (6.58)$$

Sabemos de la cota de H_0 dada por la ecuación (6.16) que $H_0 \ll \Omega_0$. Podemos escribir para el factor de escala tomando $H = cte = H_0$

$$a_j^{3/2} = a_1^{3/2} \exp \left[\frac{3}{2} H_0 (t - t_1) \right] \quad (6.59)$$

$$\approx a_1^{3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{H_0 \pi}{\Omega_1} \right]. \quad (6.60)$$

Escribimos entonces

$$\frac{\Delta_j}{\Omega_j Q(j)} < \frac{3\pi H_0}{4 \Omega_0} a_{1j}^3 j \ll 1 \quad (6.61)$$

Recordar que j es un número del orden de las decenas. Vemos que si el espacio se expande poco la corrección a la creación de partículas respecto al caso estático es pequeña, de manera consistente.

7. Conclusiones

Hemos estudiado la resonancia paramétrica ancha como mecanismo de producción de materia teniendo en cuenta el *backreaction* sobre la frecuencia del campo pesado. Vimos que luego de un número finito de oscilaciones del campo pesado el sistema sale de la condición de resonancia ancha en un estado lejano al equilibrio térmico. Durante el proceso se observó que el coeficiente de amplificación $\mathcal{A} = 1 + 2|\beta|^2$ es independiente del ciclo debido a que depende del módulo del producto $\phi_j \Omega_j$. Se calculó un rango de valores permitidos para la constante de acoplamiento y un valor óptimo para la producción. Además se estudió el efecto de la expansión del espacio sobre la creación de partículas obteniendo una cota superior para la constante de Hubble por debajo de la cual la creación es efectiva.

Dejamos para futuros trabajos: (1) el estudio del autoacoplamiento del campo pesado $\lambda\phi^4/4!$ necesario para regularizar el valor $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$. Este autoacoplamiento tendrá una energía asociada $\lambda\phi^4 \sim g^2\phi^4$ que es del orden de la energía de interacción; (2) el estudio de las anarmonicidades del campo pesado producto de la dependencia temporal de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle(t)$ durante cada ciclo; (3) la regularización y renormalización de la energía; (4) el estudio de la dinámica del sistema una vez finalizada la resonancia paramétrica ancha; (5) estudiar en mayor detalle los términos de fases; por último (6) incorporar las fluctuaciones del campo pesado teniendo en cuenta que al crear partículas del campo liviano aumentan las fluctuaciones del mismo con la posibilidad de que se pierda la homogeneidad.

El objetivo principal es generalizar este modelo para estudiar la creación de vectores masivos que puedan componer la materia oscura[5, 6] a partir de la oscilación de un campo escalar que es natural proponer para darle masa a los vectores.

A. Sistema de unidades

Vamos a considerar el sistema de unidades habitual en cosmología donde las tres constantes universales c , k_B y \hbar toman el valor de uno. A partir del valor conocido para la constante de Boltzmann en unidades de eV/K se puede obtener el valor del grado Kelvin

$$K \approx 8,6 \times 10^{-14} \text{ GeV}.$$

Del valor de la constante de Planck partida en eV \times s se obtiene el segundo

$$s \approx 1,5 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$$

y del valor de la velocidad de la luz en m/s se tiene el metro

$$m \approx 5 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}.$$

Para expresar el kilogramo escribimos un Joule $6,24 \times 10^{18} \text{ eV} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$ y tras utilizar las expresiones del metro y del segundo recién obtenidas se encuentra

$$\text{kg} \approx 5,5 \times 10^{26} \text{ GeV}.$$

La masa de Planck, que se puede obtener mediante el análisis dimensional, es $M_P = \sqrt{\hbar c/G}$ y por lo tanto en estas unidades toma el valor

$$M_P = \frac{1}{\sqrt{G}} \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}.$$

Otros valores útiles son el año luz expresado en kilómetros

$$1 \text{ año luz} \approx 9,46 \times 10^{12} \text{ km}$$

y el megapársec

$$1 \text{ Mpc} = 3,26 \text{ años luz} \times 10^6 \approx 3,1 \times 10^{19} \text{ km}.$$

B. Ecuaciones para un espacio-tiempo isótropo y homogéneo

Las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden cuyas incógnitas son las componentes de la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$ son

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.1})$$

El tensor $R_{\mu\nu}$ es el llamado *Tensor de Ricci* definido a partir del *Tensor de Riemann* como

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{B.2})$$

y éste a su vez, a partir de los *símbolos de Christoffel*

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\gamma\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Éstos son las componentes en base coordenada de la conexión de Levi-Civita y se expresan en términos de la métrica como

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\sigma}}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (\text{B.4})$$

Para obtener la forma de estas ecuaciones en el caso que nos interesa debemos especificar formas para la métrica y el tensor de energía momento. La métrica isótropa y homogénea es[21]

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-1, \frac{a^2}{1 - Kr^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (\text{B.5})$$

con $K = 0$ para el espacio plano y $K = \pm 1$ para el espacio cerrado y abierto. Proponemos para el tensor de energía momento

$$T^\mu_{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (\text{B.6})$$

Los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{0i} &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma^0_{ii} &= \frac{\dot{a}}{a} g_{ii} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{rK}{1 - Kr^2} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -(1 - Kr^2)r & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -(1 - Kr^2)r \sin^2 \theta & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \cot \theta & & \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que no dependen de la signatura de la métrica por ir cuadráticos en la métrica. Recordar que son simétricos en los índices de abajo. Nos bastará calcular las componentes del Ricci 00 y rr

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{B.8})$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2} \quad (\text{B.9})$$

que tampoco dependen de la signatura de la métrica ya que se obtiene contrayendo un índice alto con uno bajo del Riemann. Como el espacio es homogéneo el tensor de Ricci espacial escrito como operador que manda vectores en vectores debe ser proporcional a la identidad para que no haya una dirección privilegiada

$$R^i_j = \lambda \delta^i_j \quad (\text{B.10})$$

de lo que se obtiene el escalar de curvatura espacial

$$R_{Esp} = 3\lambda \quad (\text{B.11})$$

y por lo tanto

$$R^i_j = \frac{R_{Esp}}{3} \delta^i_j. \quad (\text{B.12})$$

Se ve que $R^r_r = R^\theta_\theta = R^\varphi_\varphi$. De acá podemos obtener sencillamente las otras dos componentes espaciales del Ricci que no son necesarias para calcular el escalar de curvatura

$$R_{\theta\theta} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \quad (\text{B.13})$$

$$R_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K). \quad (\text{B.14})$$

El escalar de curvatura sale de contraer los índices del Ricci por lo que el signo depende de la signatura y vale

$$R = 6 \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K}{a^2}. \quad (\text{B.15})$$

La ecuación 00 de Einstein da

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (\text{B.16})$$

y la espacial se puede calcular de cualquiera de las tres componentes ya que da lo mismo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (\text{B.17})$$

Las dos últimas ecuaciones se les suele llamar la ecuación de Friedmann y la ecuación de Raychaudhuri.

C. Valor de expectación de $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ en términos de la integral de las f_k

Usando la expansión en Fourier (2.16) expresamos

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{k,k'} e^{i(k+k').x} \langle \hat{\chi}_k(t) \hat{\chi}_{k'}(t) \rangle \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{1}{V^2} \sum_{k,k'} e^{i(k+k').x} \left\langle \left(f_k(t) \hat{a}_k + f_k^*(t) \hat{a}_k^\dagger \right) \left(f_{k'}(t) \hat{a}_{k'} + f_{k'}^*(t) \hat{a}_{k'}^\dagger \right) \right\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Notemos que el operador $a_{k'}$ en el campo de la derecha aniquila al vacío, mientras que lo mismo ocurre para el a_k^\dagger del campo que está a la izquierda. Usando la relación de conmutación

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = V \delta_{k,k'} \quad (\text{C.3})$$

obtenemos

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_k f_k(t) f_{-k}^*(t) \quad (\text{C.4})$$

que al ser la ecuación (2.18) invariante ante $k \rightarrow -k$ la solución depende solo del módulo de k y, tomando además el límite al continuo, se puede escribir

$$\langle \chi^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_k|^2(t). \quad (\text{C.5})$$

En el paso al continuo se cambia la suma discreta por una integral donde la medida de integración es $(2\pi)^3/V$, es decir,

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3/V}. \quad (\text{C.6})$$

D. Pegado de dos soluciones de oscilador armónico con distinta frecuencia

Para tiempos $t_{j-1} < t < t_j$ se tiene la ecuación

$$\ddot{\phi} + \Omega_{j-1}^2 \phi = 0 \quad (\text{D.1})$$

mientras que para $t_j < t < t_{j+1}$ cambia a

$$\ddot{\phi} + \Omega_j^2 \phi = 0 \quad (\text{D.2})$$

donde la frecuencia la asumimos constante en ambas ecuaciones. Una solución para (D.1) es de la forma

$$\phi = A e^{i\Omega_{j-1}(t-t_{j-1})} + B e^{-i\Omega_{j-1}(t-t_{j-1})} \quad (\text{D.3})$$

mientras que una a (D.2) se expresa

$$\phi = A' e^{i\Omega_j(t-t_j)} + B' e^{-i\Omega_j(t-t_j)}. \quad (\text{D.4})$$

De la continuidad de la función y su derivada en $t = t_j$ se obtienen las relaciones

$$A' = -\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j}\right) A + \left(1 - \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j}\right) B \right] \quad (\text{D.5})$$

$$B' = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j}\right) A + \left(1 + \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j}\right) B \right]. \quad (\text{D.6})$$

donde se usó que $\exp(i\Omega_j(t_j - t_{j-1})) = -1$. Si tomamos $A = -B = \phi_{j-1}/2i$ se tiene

$$\phi = \phi_{j-1} \sin \Omega_{j-1}(t - t_{j-1}), \quad t_{j-1} < t < t_j \quad (\text{D.7})$$

$$\phi = -\phi_{j-1} \frac{\Omega_{j-1}}{\Omega_j} \sin \Omega_j(t - t_j), \quad t_j < t < t_{j+1} \quad (\text{D.8})$$

por lo que si la frecuencia aumenta la amplitud del campo disminuye de manera que el producto $-\phi_{j-1}\Omega_{j-1} = \phi_j\Omega_j$ mantiene constante su módulo.

E. Terminos de fase

Consideremos la expresión (4.20)

$$\langle \hat{\chi}^2 \rangle_j(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_j} \left\{ 1 + 2|B_j|^2 + 2\Re [A_j B_j^* e^{-2i\theta_t}] \right\} \quad (4.20)$$

y observemos que las fases van a aparecer de dos maneras. Por un lado el último término contiene el producto $A_j B_j^*$ que viendo las expresiones (4.11) y (4.12) notamos que contienen las fases θ_n desde $n = 0$ hasta $n = j$. Sin embargo este término está multiplicando $\exp(-2i\theta_t)$ cuya fase es una cantidad muy grande y por lo tanto el último término de (4.20) es una cantidad de oscila fuertemente al variar poco el tiempo t dentro del mismo ciclo donde se está calculando el valor de expectación. Como lo que nos interesa es el valor promedio en un ciclo, promediamos este término a cero. Para analizar los primeros dos términos de (4.20) miramos la expresión (4.15) y escribimos usando la independencia de α y β con j

$$\begin{aligned} 1 + 2|B_j|^2 &= (1 + 2|B_{j-1}|^2) \mathcal{A} + 4\Re [\alpha\beta A_{j-1} B_{j-1}^* e^{-2i\theta_j}] & (4.15) \\ &= (1 + 2|B_{j-2}|^2) \mathcal{A} + 4\mathcal{A}\Re [\alpha\beta A_{j-2} B_{j-2}^* e^{-2i\theta_{j-1}}] + 4\Re [\alpha\beta A_{j-1} B_{j-1}^* e^{-2i\theta_j}] \\ &= \dots \\ &= \mathcal{A}^j + 4 \sum_{n=1}^j \mathcal{A}^{n-1} \Re [\alpha\beta A_{j-n} B_{j-n}^* e^{-2i\theta_{j-n+1}}]. & (E.1) \end{aligned}$$

Si los términos de esta sumatoria son del mismo orden es natural que promedie a cero luego de varios ciclos. Si los términos son exponencialmente crecientes o decrecientes es posible que ocurra una corrección debida al término más grande. Entonces hagamos lo siguiente: expresemos las cantidades en términos de módulos y fases y llamemos Θ_{jn} al factor oscilatorio que dependerá de j y de n . Es decir

$$1 + 2|B_j|^2 = \mathcal{A}^j + 4 \sum_{n=1}^j \mathcal{A}^{n-1} |\alpha||\beta| |A_{j-n}| |B_{j-n}| \Theta_{jn}. \quad (E.2)$$

Para calcular $|A_{j-n}|$ y $|B_{j-n}|$ usamos la solución a la recurrencia tirando los términos de fase (4.18)

$$|B_{j-n}|^2 \approx \frac{1}{2} (\mathcal{A}^{j-n} - 1), \quad (E.3)$$

y usando que $|A_{j-n}|^2 = 1 + |B_{j-n}|^2$ se tiene

$$|A_{j-n}|^2 \approx \frac{1}{2} (1 + \mathcal{A}^{j-n}). \quad (E.4)$$

Volviendo a (E.2) y teniendo en cuenta que $\mathcal{A} > 1$ para tirar los 1's escribimos

$$1 + 2|B_j|^2 = \mathcal{A}^j + 2|\alpha||\beta| \mathcal{A}^{j-1} \sum_{n=1}^j \Theta_{jn}. \quad (E.5)$$

Vemos que en una primera aproximación es posible promediar estos términos a cero.

F. Tensor de energía-momento

Consideremos la acción del sistema en el espacio plano

$$S = \int dt \int \frac{d^3x}{2} \left\{ \dot{\phi}^2 - M^2\phi^2 - \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} + \dot{\chi}^2 - m^2\chi^2 - \frac{(\nabla\chi)^2}{a^2} - \frac{g}{a^3}\phi^2\chi^2 \right\} - \int dt \frac{d}{dt} \left[\int d^3x (f_\phi + f_\chi) \right]. \quad (2.11)$$

A partir del teorema de Noether, haciendo una traslación en el espacio tiempo y requiriendo que la acción sea invariante ante esta transformación, se obtiene el tensor de energía momento (lo llamamos Θ para diferenciarlo del tensor de energía momento usado para el modelo estándar)

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\phi} \partial_\nu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\chi} \partial_\nu\chi + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (F.1)$$

$$= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (F.2)$$

Para un fluido isótropo y homogéneo se tiene $\Theta_{00} = \rho$ y $\Theta_{ii} = p$. Considerando $\phi = \phi_j \sin \Omega_j(t - t_j)$ y $\Omega_j^2 = M^2 + ag^2\phi_j^2$, la densidad de energía es

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{M^2\phi^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{2} + \frac{m^2\chi^2}{2} + \frac{g}{2}\phi^2\chi^2 \quad (F.3)$$

$$= \frac{\Omega_j^2\phi_j^2}{2} \cos^2 \Omega_j(t - t_j) + \frac{M^2\phi_j^2}{2} \sin^2 \Omega_j(t - t_j) + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{2} + \frac{m^2\chi^2}{2} + \frac{g}{2}\phi^2\chi^2 \quad (F.4)$$

$$= \frac{M^2\phi_j^2}{2} + \frac{ag^2\phi_j^4}{2} \cos^2 \Omega_j(t - t_j) + \rho_\chi \quad (F.5)$$

$$= \rho_\phi + \rho_{int} + \rho_\chi \quad (F.6)$$

donde se promedió $\cos^2 \sim 1/2$ y se definió

$$\rho_\phi \equiv \frac{M^2}{2}\phi_j^2, \quad \rho_{int} \equiv \frac{ag^2\phi_j^4}{4}, \quad \rho_\chi \equiv \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{2} + \frac{m^2\chi^2}{2} + \frac{g}{2}\phi^2\chi^2. \quad (F.7)$$

La densidad de energía del campo χ la calculamos tomando el valor de expectación y usando el desarrollo en Fourier (2.16)

$$\rho_\chi = \frac{1}{2} \langle \dot{\chi}^2 - (\nabla\chi)^2 + m^2\chi^2 + g\phi^2\chi^2 \rangle \quad (F.8)$$

$$= \frac{1}{2V^2} \sum_{k,k'} e^{i(k+k')x} [\langle \dot{\chi}_k \dot{\chi}_{k'} \rangle + (k \cdot k' + m^2 + g\phi^2) \langle \chi_k \chi_{k'} \rangle] \quad (F.9)$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_k [|\dot{f}_k|^2 + \omega_k^2 |f_k|^2]. \quad (F.10)$$

Reemplazando las expresiones para las f_k tirando los términos de fase, ver ecuación (4.20), y tomando el límite al continuo

$$\rho_\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2|B_j|^2}{2} \omega_k \quad (F.11)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k |B_j|^2 \quad (F.12)$$

$$\equiv \rho_{\chi_0} + \Delta\rho_\chi. \quad (F.13)$$

Para calcular la presión tomamos la traza espacial sobre el tensor de energía momento $p = \Theta_i^i/3$.

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - M^2 \frac{\phi^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{6} - m^2 \frac{\chi^2}{2} - \frac{g}{2} \phi^2 \chi^2 \quad (\text{F.14})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} M^2 \phi_j^2 (\cos^2 \Omega_j(t - t_j) - \sin^2 \Omega_j(t - t_j)) + \frac{ag^2 \phi_j^4}{2} \cos^2 \Omega_j(t - t_j) \\ &\quad + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{6} - m^2 \frac{\chi^2}{2} - \frac{g}{2} \phi^2 \chi^2. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

El primer término promedia a cero en el tiempo, y además promediamos $\cos^2 1/2$. Tomamos valor de expectación sobre la parte del campo liviano

$$p \approx \frac{ag^2 \phi_j^4}{4} + \left\langle \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{(\nabla\chi)^2}{6} - m^2 \frac{\chi^2}{2} - \frac{g}{2} \phi^2 \chi^2 \right\rangle. \quad (\text{F.16})$$

Reemplazando el desarrollo en Fourier (2.16)

$$p \approx \frac{ag^2 \phi_j^4}{4} + \frac{1}{2V^2} \sum_{k,k'} e^{i(k+k')x} \left[\langle \dot{\chi}_k \dot{\chi}_{k'} \rangle + \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{k}'}{3} - m^2 - g\phi^2 \right) \langle \chi_k \chi_{k'} \rangle \right] \quad (\text{F.17})$$

$$\approx \frac{ag^2 \phi_j^4}{4} + \frac{1}{2V} \sum_k \left[|f_k|^2 - \left(\frac{k^2}{3} + m^2 + g\phi^2 \right) |f_k|^2 \right]. \quad (\text{F.18})$$

Tomando el límite al continuo y reemplazando las f_k (no escribimos la parte divergente)

$$p \approx p_{int} + p_\chi \quad (\text{F.19})$$

donde

$$p_{int} = \frac{ag^2 \phi_j^4}{4}, \quad p_\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{6\omega_k} (\mathcal{A}^j - 1). \quad (\text{F.20})$$

G. Ecuación cuártica para Ω_j

Vimos que se tiene la ecuación (4.36) para Ω_j . La idea es obtener una cota superior para las soluciones a esta ecuación y no resolverla de manera exacta. Podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\frac{\Omega_j^4 - M^2 \Omega_j^2 - ag^2 \phi_0^2 \Omega_0^2}{\Omega_j^2} = gQ(j)\Omega_j. \quad (\text{G.1})$$

Usando $M^2 = \Omega_0^2 - ag^2 \phi_0^2$

$$\frac{\Omega_j^2 + ag^2 \phi_0^2}{\Omega_j^2} (\Omega_j^2 - \Omega_0^2) = gQ(j)\Omega_j. \quad (\text{G.2})$$

Si llamamos c al cociente de la izquierda entonces $1 < c < 2$ y escribimos

$$\Omega_j^2 - \frac{gQ(j)}{c}\Omega_j - \Omega_0^2 = 0 \quad (\text{G.3})$$

que tiene solución

$$\Omega_j = \frac{gQ(j)}{2c} + \sqrt{\left(\frac{gQ(j)}{2c}\right)^2 + \Omega_0^2}. \quad (\text{G.4})$$

Vemos que podemos acotar por encima al Ω_j si tomamos $c = 1$ que es justamente la solución a la ecuación cuadrática.

H. Integrales

Algunas integrales útiles son:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C \quad (\text{H.1})$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C \quad (\text{H.2})$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \sinh^{-1} \frac{x}{a} \right] + C \quad (\text{H.3})$$

$$\int_0^\infty x^2 \exp[-ax^2] = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} \quad (\text{H.4})$$

$$\int_0^\infty x^4 \exp[-ax^2] = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{5/2}} \quad (\text{H.5})$$

Escribamos la integral de la fase de una manera exacta. Tenemos

$$\theta_j = \int_0^{\pi/\Omega_j} dt \sqrt{k^2 + m^2 + g\phi_j^2 \sin^2 \Omega_j t} \quad (\text{H.6})$$

Definiendo $\kappa^2 = -g\phi_j^2/\sqrt{k^2 + m^2}$, $\Omega_j t' = \tilde{t}$ y teniendo en cuenta que la integral es par respecto de $\pi/2$ se puede escribir

$$\theta_j = 2 \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\Omega_j} \int_0^{\pi/2} d\tilde{t} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \tilde{t}} \quad (\text{H.7})$$

y la integral que queda es una elíptica completa de segunda especie con parámetro negativo y módulo mayor a 1

$$\theta_j = 2 \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\Omega_j} E \left[\frac{\pi}{2} | \kappa^2 \right]. \quad (\text{H.8})$$

Referencias

- [1] S. Dodelson and F. Schmidt. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2020.
- [2] Planck Collab. *2018 Results VI*. *Astron. Astrophys.*641, A6. arXiv:1807.06209, 2020.
- [3] A. H. Guth. *Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*. *Phys. Rev. Letter*. Vol. 23, No. 2, 1981.
- [4] D. J. E. Marsh. *Axion Cosmology*. arXiv:1510.07633v2, 2016.
- [5] P. W. Graham, J. Mardon, and S. Rajendran. *Vector Dark Matter from Inflationary Fluctuations*. arXiv:1504.02102v1, 2015.
- [6] J. A. Dror, K. Harigaya, and V. Narayan. *Parametric Resonance production of ultralight vector dark matter*. *Phys. Rev. Lett.* D 99 035036, 2019.
- [7] J. M. Armaleo, D. López Nacir, and F. R. Urban. *Searching for spin-2 ULDM with gravitational waves interferometers*. *JCAP* 04(2021)053, 2021.
- [8] J. M. Armaleo, D. López Nacir, and F. R. Urban. *Binary pulsars as probes for spin-2 ultralight dark matter*. *JCAP* 01(2020)053, 2020.
- [9] G. Alonso Álvarez J. Jaeckel. *Lightish but clumpy: scalar dark matter from inflationary fluctuations*. arXiv:1807.09785v2, 2018.
- [10] G. Alonso Álvarez T. Hügler J. Jaeckel. *Misalignment Co.-(Pseudo-)scalar and vector dark matter with curvature couplings*. arXiv:1510.07633v2, 2020.
- [11] L. Kofman, A. Linde, and A. Starobinsky. *Reheating after Inflation*. *Physical Review Letters*, Vol. 73, No. 24, 1994.
- [12] L. Kofman, A. Linde, and A. Starobinsky. *Towards the Theory of Reheating After Inflation*. arXiv:hep-ph/9704452v2, 1997.
- [13] R. Allahverdi, R. Brandenberger, F. Cyr-Racine, and A. Mazumdar. *Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications*. <http://arxiv.org/abs/1001.2600v3>, 2010.
- [14] K. Lozanov. *Lectures on reheating after inflation*. arXiv:1907.04402v1, 2019.
- [15] L. D. Landau E. M. Lifshitz. *Mecánica, Vol. I del Curso de Física Teórica*. Editorial Reverté S. A., 1965.
- [16] W. Greiner J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, 1993.
- [17] L. Parker and D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime - Quantized Fields and Gravity*. Cambridge University Press, 2009.

- [18] D. Boyanovsky, H.J. de Vega, R. Holman, and J. F. J. Salgado. *Analytic and numerical study of preheating dynamics*. arxiv.org/abs/hep-ph/9608205v2, 1996.
- [19] E. Calzetta and B. L. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [20] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course on modern analysis*. Cambridge University Press, 1940.
- [21] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford, 2008.

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5
Argentina Buenos Aires, 2023