Dinámica de partículas livianas y pesadas en turbulencia rotante

Florencia Zapata

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2021

TEMA:	Dinámica de partículas livianas y pesadas en turbulencia rotante
ALUMNO:	Florencia Zapata
L.U. N°:	661/15
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Pablo Mininni
FECHA DE INICIACION:	Abril de 2020
FECHA DE FINALIZACION:	Marzo de 2021
FECHA DE EXAMEN:	31 de Marzo de 2021

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor	Jurado
Director	Jurado
Profesor(a) de Tesis de Licenciatura	Jurado

Resumen

En esta tesis presentamos un estudio sistemático de la dinámica de partículas en flujos turbulentos rotantes. Este tipo de sistemas es de gran interés en una amplia variedad de contextos, tanto para entender fenómenos naturales como industriales. El estudio de los mecanismos físicos involucrados en estos procesos es relevante para entender la atmósfera terrestre a gran escala y sus océanos, atmósferas gaseosas planetarias, y otros sistemas astrofísicos. Mediante simulaciones numéricas directas de hasta 512^3 puntos de grilla se integraron las ecuaciones de Navier-Stokes y de Maxey-Riley para la trayectoria de las partículas con el software GHOST considerando efectos de masa agregada. Los efectos de la fuerza centrífuga y de Coriolis para las partículas se agregaron al código como parte de esta tesis. Las ecuaciones se integraron en un dominio cúbico, con condiciones de contorno periódicas y se dejó evolucionar el flujo hasta obtener un estado turbulento sostenido mediante un forzado de fase aleatoria e intensidad constante.

En sucesivas simulaciones se varió el número de Rossby entre 0.015 y 0.24 y se realizó además una simulación sin rotación. En todas las simulaciones se despreciaron los efectos de la gravedad. Se observó que el espectro de energía sigue un comportamiento compatible con una ley de potencias con exponente $-5/3$ en el caso sin rotación y -2 en el caso rotante. Para las partículas se usaron dos números de Stokes (0.3 y 3) para partículas con la misma densidad que el fluido. Se calcularon los tiempos de correlación de la velocidad de las partículas en la dirección paralela y perpendicular al eje de rotación y se observó que en general los tiempos paralelos son mayores a los perpendiculares. Se calcularon las funciones de distribución de probabilidad de desplazamientos en el plano paralelo y perpendicular para tiempos menores y mayores al de correlación y encontramos que las partículas recorren distancias más grandes en el plano perpendicular. A partir del análisis del desplazamiento cuadrático medio en las direcciones paralela y perpendicular se encontró que las partículas tienen un comportamiento balístico para tiempos menores al tiempo de correlación y un comportamiento difusivo para tiempos mayores al tiempo de correlación en las simulaciones con más baja rotación, pero super-balístico en el caso rotante. Otro aspecto analizado fue el de acumulación preferencial. Este estudio se realizó mediante diagramas de Voronoï para la posición de las partículas. Se encontró que no hay formación de clusters de partículas en ninguno de los casos estudiados.

Agradecimientos

Como todo logro es colectivo quiero darle su reconocimiento a las personas que de una u otra manera me ayudaron a llegar hasta acá.

A mi director, Pablo Mininni, por enseñarme mucho más que lo que quedó plasmado en estas páginas, por su paciencia y dedicación, y por haber llevado a buen puerto esta tesis aun en condiciones, por lo menos, inesperadas.

A las personas que me regaló esta carrera, a todas y cada una de ellas, por el compañerismo infinito. En especial: a Natalia, Nicolas R. y Martin, por bancarme desde el principio; a Nicolas N., Muriel y Julieta, por haberme hecho disfrutar el laboratorio a risas y cafecitos; a Andy y a Lucas, por haberse transformado en mis amigos en los eternos viajes en el 45.

A mis hermanas, Yamila, Lucia, Bianca y Constanza. Por estar cuando necesité relajarme, quejarme, llorar y, sobre todo, festejar.

A mi familia, por sostenerme y festejar mis logros. En especial a mis sobrinos, Nacho y Luis, por ser mi excusa para seguir jugando y por regalarme el disfrute más sincero.

A Federico, por ser incondicional, por cuidarme del mundo y de mi, por hacerme reir, por ser testigo y partícipe, por ser mi compañero.

A mis viejos, Silvia y Daniel, a quienes dedico esta tesis. Por regalarme la curiosidad y darme espacio infinito para crecer. Por soportar las consecuencias de mis elecciones con un amor inconmensurable. Por ese esfuerzo infinito que se que hicieron para que yo pueda encontrar y hacer lo que me gusta. Por creer en mi a ciegas.

Finalmente, a mi abuela, que sin estar estuvo a cada paso. Por regalarme mi cable a tierra y por haber soñado para mi.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Turbulencia rotante y partículas inerciales **5**

2.1. Ecuaciones y parámetros de control 5

2.1.1. Condiciones de contorno periódicas 6

2.1.2. Ecuaciones de balance 6

2.1.3. Balance de energía escala a escala 7

2.2. Turbulencia isótropa y homogénea 8

2.2.1. Cascada de Richardson y escalas características 8

2.2.2. Espectro de Kolmogorov 11

2.3. Partículas inerciales de tamaño finito 12

2.3.1. La ecuación de Maxey-Riley 12

2.3.2. Características generales de las partículas de tamaño finito 14

2.4. Turbulencia en un sistema rotante 14

2.4.1. Ecuación de Navier-Stokes para un flujo con rotación rígida 15

2.4.2. Espectro de energía en flujos rotantes 16

2.4.3. Un resultado previo 17

3. Herramientas y métodos **19**

3.1. Simulaciones numéricas directas 19

3.1.1. Métodos de integración y elección de parámetros 20

3.2. Partículas pequeñas en flujos en rotación rígida 20

3.3. Validación 22

3.4. Diagramas de Voronoï 24

3.4.1. Definición de celda de Voronoï 24

3.4.2. Aplicación al caso de partículas en flujos turbulentos 24

4. Resultados **27**

4.1. Ajuste de la viscosidad 27

4.2. Caracterización Euleriana del flujo 29

4.3. Dinámica de partículas 31
4.3.1. Tiempo de correlación y distribuciones del desplazamiento 32
4.3.2. Desplazamiento cuadrático medio 35
4.4. Estudio de acumulación preferencial 38

5. Conclusiones y perspectivas **41**

Bibliografía **45**

CAPÍTULO 1

Introducción

La turbulencia es un fenómeno ubicuo en la naturaleza. Está presente en una gran variedad de flujos, desde flujos geofísicos y astrofísicos hasta flujos industriales [1, 2, 3, 4]. La no linealidad de los sistemas turbulentos resulta en un acoplamiento entre las estructuras en las distintas escalas, y su interacción hace que el problema sea de alta complejidad. La principal característica de la turbulencia es que las interacciones no lineales comparadas con la disipación son muy grandes. El número de Reynolds, que mide esta relación, puede ser mayor a 10^8 en flujos geofísicos y mayor a 10^{12} en flujos astrofísicos. Esto hace que el problema tenga una cantidad enorme de grados de libertad. Además, no se ha encontrado al momento una teoría consistente para el problema partiendo de la ecuación de Navier-Stokes, por lo que el estudio mediante simulaciones numéricas cobra vital importancia y supone una dificultad particular relacionada a la inmensa capacidad de cálculo que se necesita para resolver todas las escalas físicas relevantes de este tipo de sistemas [5].

Dentro de la variedad de flujos turbulentos, la turbulencia en un sistema rotante es un problema de relevancia ya que existen en la naturaleza un gran cantidad de flujos en estas condiciones [5, 6]. Es el caso, por ejemplo, de la atmósfera terrestre a gran escala y sus océanos, atmósferas gaseosas planetarias, y otros sistemas astrofísicos. También existen aplicaciones industriales como en turbomaquinarias y mezcladores químicos. La intensidad de la rotación se mide mediante el numero de Rossby, que es la relación entre el período de rotación y el tiempo característico del flujo en la escala de inyección de energía. Uno de los fenómenos más importantes de la turbulencia rotante es la formación de estructuras con forma de columna de vórtices a gran escala. La aparición de estos vórtices está asociada a una bidimensionalización del flujo en el plano perpendicular a la rotación. Estas estructuras interactúan con la dinámica global en tres dimensiones y dan origen a una fuerte anisotropía que hace que los flujos turbulentos rotantes tengan una dinámica muy rica [7, 8].

En muchos de los sistemas mencionados el flujo es en realidad multifase: una fase turbulenta líquida o gaseosa, y una fase sólida de partículas que son transportadas por el fluido [9, 10, 6]. Estas partículas pueden ser contaminantes en la atmósfera o en el océano, nutrientes o

microorganismos en el océano, o las gotas de agua en las nubes. Para estudiar la dinámica de partículas de tamaño finito en flujos turbulentos, se necesita una formulación de las ecuaciones de movimiento de las partículas advectadas [11]. El problema es que las partículas de tamaño finito son objetos extensos con sus propios vínculos. Actualmente, se conoce mucho más en detalle la dinámica de partículas en el caso de turbulencia isótropa. En el caso con rotación entran en juego además las fuerzas de Coriolis y centrífuga. La aparición de las estructuras de vórtices a gran escala interactúa con las partículas y hace que la trayectoria de las mismas en el caso rotante sea muy distinta al caso isótropo.

Uno de los fenómenos de gran interés que ocurre en flujos multifase es el de acumulación preferencial [9, 10, 12]. Según las condiciones del sistema, las partículas pueden acumularse en determinadas regiones del flujo de manera no homogénea. En el caso isótropo, este fenómeno a sido ampliamente observado tanto es simulaciones numéricas como en resultados experimentales. El caso anisótropo es más complejo: por la existencia de la fuerza centrífuga, las partículas son expulsadas hacia los limites del recinto, lo que supone una dificultad tanto en experimentos como en simulaciones. Sin embargo, en los últimos años ha habido un avance en el estudio de este caso. En un trabajo del 2016, Biferale et al. [6] pudieron observar mediante simulaciones numéricas directas que las partículas livianas (de densidad menor a la del fluido) tienden a difundir en la dirección paralela al eje de rotación, mientras que las partículas pesadas tienden a acumularse en el plano perpendicular al eje de rotación. Sin embargo ellos estudiaron solo el transporte y difusión media, y no consideraron otros indicadores estadísticos ni la posible acumulación preferencial de partículas.

Tanto la rotación como la estratificación pueden ser relevantes en flujos multifase atmosféricos y oceánicos, de acuerdo a la escala de interés. Por ejemplo, el descubrimiento del efecto de difusión vertical en partículas livianas puede tener importantes aplicaciones en la dinámica de población de micronadadores activos o pasivos en el océano [6]. Sin embargo, aún existe una gran variedad de preguntas sin responder. No se sabe cuánto afectan el confinamiento y el forzado en las predicciones que se puedan obtener tanto de las simulaciones numéricas como de los experimentos. Tampoco se pudo caracterizar completamente las zonas en las que se da la acumulación preferencial de partículas. La explicación habitual para el caso isótropo está relacionada con la expulsión centrífuga de partículas pesadas desde el núcleo de los remolinos turbulentos, que resultaría en la acumulación de las partículas en regiones de baja vorticidad del flujo, para partículas con bajo número de Stokes (definido como la razón entre el tiempo de relajación de la partícula y el tiempo de disipación viscosa) o con baja inercia. Para partículas con Stokes grande, se cree que las partículas se acumulan en puntos con aceleración Lagrangiana nula, donde la fuerza local (en el sistema de referencia del fluido) se anula [13, 9]. En el caso anisótropo no se ha encontrado aun una explicación de este tipo que caracterice a las regiones donde se acumulan las partículas, aunque se han realizado avances en el caso en el que la gravedad es importante [10].

La existencia de tantas aplicaciones, tanto naturales como tecnológicas, genera la necesidad de entender en detalle la dinámica de partículas en contextos relevantes en flujos atmosféricos y oceánicos, donde la rotación o la estratificación no pueden ser despreciadas de acuerdo a la escala considerada. El espacio de parámetros de estos sistemas es muy amplio: el número de Reynolds,

el número de Rossby, el número de Stokes y la relación de aspecto del espacio que confina al fluido son solo algunos de los parámetros involucrados. Poder estudiar diferentes combinaciones de estos parámetros es importante para el modelado de flujos oceánicos y atmosféricos a gran escala.

En esta tesis se presenta un estudio sobre partículas inerciales en flujos turbulentos rotantes realizado mediante simulaciones numéricas directas, utilizando un modelo para partículas pequeñas dado por la ecuación de Maxey-Riley [11]. Para simplificar el sistema, se consideró el caso de partículas con flotación neutra y se despreciaron los efectos de la gravedad, aunque se implementaron y verificaron las ecuaciones en el caso más general posible para partículas con cualquier relación de masa. Se realizaron simulaciones con Ro entre 0.015 y 0.24, también se estudió el caso sin rotación, y para cada una de estas simulaciones se consideraron dos valores del número de Stokes de las partículas: 0.3 y 3. Para entender cómo influye la rotación en la organización del flujo se realizó una caracterización Euleriana del sistema mediante la cual se pudo verificar la presencia de estructuras coherentes de vorticidad con forma de columnas cuasi-bidimensionales. Con respecto a la dinámica de partículas, se buscó conocer cómo varía la trayectoria de las partículas y si existe acumulación preferencial en los casos estudiados. Para el estudio se calcularon los tiempos de correlación de las velocidades de las partículas en la dirección paralela al eje de rotación y en la perpendicular. Se pudo observar que en las simulaciones con más rotación los tiempos de correlación son menores en la dirección perpendicular (por la presencia de vórtices cuasi-bidimensionales, y probablemente por efecto de la fuerza de Coriolis), y mayores en la dirección paralela (por la presencia de las estructuras con forma de columna, que introducen una memoria más larga en el flujo). Para poder distinguir la dinámica a tiempos menores y mayores que el tiempo de correlación, se calcularon las funciones de distribución de desplazamiento paralelo y perpendicular de las partículas en estos casos. Se pudo notar que las partículas se desplazan más en la dirección perpendicular que la paralela, y aún a tiempos cortos es más probable encontrar partículas que se desplazan mucho en $r_\perp$ a medida que aumenta la rotación. A tiempos largos, el desplazamiento perpendicular cambia notablemente y la probabilidad de encontrar partículas a diferentes distancias se mantiene constante en un rango grande de desplazamientos. Con respecto al número de Stokes no se observan grandes cambios, lo que indica que en este caso los términos de masa agregada y de Coriolis de la ecuación de Maxey-Riley son los dominantes en la dinámica. Se calcularon también los desplazamientos cuadráticos medios en las direcciones paralela y perpendicular y se observó que a tiempos cortos el comportamiento es de tipo balístico, como era de esperarse. A tiempos largos, para los casos con menor rotación la dispersión horizontal se acerca a un comportamiento difusivo, pero para los casos con rotación fuerte parece acelerarse y volverse más rápida que balística. Para el estudio de acumulación preferencial se realizaron diagramas de Voronoï y se calcularon las funciones de distribución de probabilidad de los volúmenes de las celdas de dichos diagramas. Esto permitió observar que no existe acumulación preferencial en ninguno de los casos estudiados.

A continuación, en el Capítulo 2 presentamos los estudios y resultados previos importantes para comprender los resultados de la tesis. En el Capítulo 3 discutimos los métodos y herramientas utilizadas junto con los primeros resultados, mostrando cómo el método numérico usado captura correctamente la dinámica de partículas en sistemas de referencia rotante. En el Capí-

tulo 4 presentamos los resultados de diversas simulaciones numéricas para estudiar la dinámica de partículas inerciales en flujos turbulentos rotantes. Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos las conclusiones de la tesis.

CAPÍTULO 2

Turbulencia rotante y partículas inerciales

En este capítulo se introducen las ecuaciones que describen la dinámica de flujo turbulento, partiendo de la ecuación de Navier-Stokes. Se distingue entre el régimen laminar y el turbulento y se presentan sus ecuaciones de balance. En la sección 2.2 se presenta la teoría de la turbulencia de Kolmogorov para turbulencia isótropa y homogénea. En la sección 2.3 se introduce el problema de partículas inerciales inmersas en el fluido, y se presenta la ecuación de Maxey-Riley que describe su dinámica. Finalmente, en la sección 2.4 se particulariza el problema para el caso de turbulencia rotante.

2.1. Ecuaciones y parámetros de control

La dinámica de los flujos turbulentos en el régimen incompresible está regida por la ecuación de Navier-Stokes (NS),

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades del fluido, P es la presión, $\mathbf{f}$ son las fuerzas externas por unidad de densidad de masa, ρ_f es la densidad del fluido y ν, la viscosidad cinemática. Tanto ρ_f como ν se consideran constantes y uniformes. En la primera ecuación, el segundo término del lado izquierdo es el término de advección, que describe los efectos inerciales. El segundo término del lado derecho es el término de difusividad y describe los efectos viscosos. Existe una competencia entre estos dos términos: los elementos de fluido tienden a ganar energía cinética siguiendo inercialmente el campo de velocidades, pero el movimiento relativo entre elementos de fluido hace que se disipe más energía a medida que aumenta la viscosidad. Si se adimensionaliza la ecuación de NS se encuentra que la dependencia en los parámetros está contenida en un único número adimensional, el número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \tag{2.2}$$

donde U y L son alguna velocidad y alguna longitud características del problema. Se puede ver que el número de Reynolds pone en juego la competencia descripta anteriormente, midiendo la intensidad de los efectos inerciales sobre los viscosos:

$$Re \sim \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}. \tag{2.3}$$

El número de Reynolds permite definir dos regímenes bien distinguidos del flujo. Cuando $Re \ll 1$, los efectos viscosos logran suavizar el arrastre del flujo. A este régimen se lo conoce como **flujo laminar** y está caracterizado por una dinámica suave y ordenada. A medida que Re aumenta, los efectos inerciales le ganan a los efectos viscosos. Cuando $Re \gg 1$, el flujo puede encontrarse en el **régimen turbulento**, los efectos inerciales rigen la dinámica lo que resulta en un flujo desordenado y fuera del equilibrio.

2.1.1. Condiciones de contorno periódicas

Desde el punto de vista teórico, y para estudiar la turbulencia en su régimen universal y despreciando efectos de borde, nos gustaría considerar un recinto infinito. Como esto no es viable computacionalmente y trae dificultades matemáticas, es útil considerar condiciones de contorno periódicas en las variables espaciales. Esto significa:

$$\mathbf{v}(x + nL, y + mL, z + qL) = \mathbf{v}(x, y, z), \tag{2.4}$$

donde L es un longitud que corresponde al período del campo de velocidades. Es natural entonces considerar el flujo restringido a una caja periódica de lado L tal que $0 < x < L$, $0 < y < L$, y $0 < z < L$.

2.1.2. Ecuaciones de balance

En un sistema físico conservativo descripto por un Lagrangiano, sabemos mediante el teorema de Noether que por cada simetría del sistema existe una magnitud conservada. Si bien NS describe un sistema disipativo, para forzado y viscosidad nulas, presenta una serie de simetrías (por ejemplo de traslación espacial y temporal) que permiten derivar leyes de conservación. Para Re bajo, algunas de estas simetrías se rompen. Pero medida que Re aumenta, se desarrolla un estado turbulento que va recuperando una a una las simetrías. Cuando el flujo llega a un estado de turbulencia completamente desarrollada estas simetrías se recuperan en un sentido estadístico, es decir, en términos de valores medios (asumiendo ergodicidad, pensaremos que es equivalente tomar promedio espacial o sobre el ensamble). A continuación se enumeran las ecuaciones de balance relevantes para nuestro sistema.

En ausencia de fuerzas externas, se tiene la conservación del impulso lineal,

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u} \rangle = 0, \tag{2.5}$$

y la ecuación de balance de la energía cinética, E_c,

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle = \frac{dE_c}{dt} = -\frac{1}{2}\nu \left\langle \sum_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \right\rangle = -\nu \left\langle |\omega|^2 \right\rangle = -2\nu\Omega_c. \tag{2.6}$$

donde $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ es la vorticidad y $\Omega_c = \langle |\omega|^2 \rangle/2$ es la enstrofía. Se define también la tasa media de disipación de energía por unidad de masa como

$$\epsilon \equiv -\frac{dE_c}{dt} = 2\nu\Omega_c. \tag{2.7}$$

Finalmente se tiene la conservación de la helicidad, H,

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\omega \right\rangle = \frac{dH}{dt} = -\nu \left\langle \omega \cdot \nabla \times \omega \right\rangle = -2\nu H_\omega \tag{2.8}$$

donde $H_\omega = \langle \omega \cdot \nabla \times \omega \rangle/2$ es la helicidad vortical. Todas las cantidades mencionadas en esta sección son valores medios tomados por unidad de densidad de masa.

2.1.3. Balance de energía escala a escala

La ecuación de balance de energía (2.6) no tiene ninguna contribución del termino no lineal de NS. A partir de este resultado se puede observar que el papel de este término es redistribuir la energía entre las distintas escalas de movimiento, sin afectar la cantidad de energía global.

Para estudiar el proceso de redistribución de la energía escala a escala es útil trabajar en el espacio de momentos. Para esto se definen filtros pasa-altos y pasa-bajos de una función, que atenúan las componentes espectrales de la función por debajo y por encima de un dado número de onda $K > 0$, que está asociado a una escala espacial $l = 2\pi/K$. Entonces, dada una función $f(\mathbf{r})$ L-periódica y su transformada de Fourier discreta, $\hat{f}_K$,

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{2.9}$$

donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda, se definen las dos familias de funciones que dependen de $\mathbf{r}$ y del parámetro adicional K. La función filtrada pasa-bajos es

$$f_{K<}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|\leq|\mathbf{K}|} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{2.10}$$

y la pasa-altos-filtrada,

$$f_{K>}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{|\mathbf{k}|\geq|\mathbf{K}|} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{2.11}$$

La escala espacial $l = 2\pi/K$ se denomina la escala de filtrado. Sumando las dos funciones filtradas se recupera la original. Aplicando estos filtros al campo de velocidades se obtienen las funciones $\mathbf{u}_{K<}$ y $\mathbf{u}_{K>}$ que son los campos de velocidades asociados a vórtices de escala menor a l y mayor a l, respectivamente.

Usando la identidad de Parseval

$$\langle fg \rangle = \sum_k \hat{f}_k \hat{g}_{-k} \tag{2.12}$$

con la transformada de Fourier del campo de velocidades en la ecuación de Navier-Stokes, se deriva la ecuación de balance de energía escala a escala [14],

$$\partial_t \mathcal{E}_K + \Pi_K = -2\nu\Omega_K + \mathcal{F}_K, \tag{2.13}$$

donde se introduce la energía acumulada entre el número de onda 0 y K:

$$\mathcal{E}_K \equiv \frac{1}{2}\langle |\mathbf{u}_{K<}|^2 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{k \leq K} |\hat{\mathbf{u}}|^2, \tag{2.14}$$

la enstrofia acumulada,

$$\Omega_K \equiv \frac{1}{2}\langle |\omega_{K<}|^2 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{k \leq K} k^2 |\hat{\mathbf{u}}|^2, \tag{2.15}$$

la inyección (por el forzado $\mathbf{f}$) de energía acumulada:

$$\mathcal{F}_K \equiv \langle \mathbf{f}_{K<} \mathbf{u}_{K<} \rangle = \sum_{k \leq K} \hat{\mathbf{f}}_k \hat{\mathbf{u}}_{-k}, \tag{2.16}$$

y el flujo de energía a través del número de onda K:

$$\Pi_K \equiv \langle \mathbf{u}_{K<} \cdot (\mathbf{u}_{K<} \cdot \nabla \mathbf{u}_{K>}) \rangle + \langle \mathbf{u}_{K<} \cdot (\mathbf{u}_{K>} \cdot \nabla \mathbf{u}_{K>}) \rangle. \tag{2.17}$$

La ecuación (2.13) puede interpretarse de la siguiente manera: la tasa de cambio de la energía en la escala $l \sim K^{-1}$ es igual a la energía inyectada en esas escalas por el forzado ($\mathcal{F}_K$) menos la energía disipada en esa escala ($2\nu\Omega_K$) menos el flujo de energía (Π_K) hacia las escalas más chicas o más grandes debido a las interacciones no lineales.

2.2. Turbulencia isótropa y homogénea

2.2.1. Cascada de Richardson y escalas características

De las ecuaciones (2.15) y (2.13) vemos que, en un flujo turbulento isótropo y homogéneo, la viscosidad se vuelve despreciable en las escalas más grandes. En el sistema la energía es inyectada en alguna escala característica del mecanismo de forzado, que llamaremos l_{in}. Este forzado genera vórtices o remolinos de ese tamaño característico. El término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes se encarga de transferir la energía de esta escala a remolinos más pequeños, y la energía de estos a otros más pequeños. De esta manera, la escala de los vórtices va disminuyendo hasta llegar a otra escala característica en la que los esfuerzos viscosos se vuelven dominantes.

Se vuelve evidente que para cada sistema habrá escalas características que delimiten los rangos en los cuales determinados mecanismos físicos son dominantes por sobre los demás. Además de la **escala de inyección de energía** ya definida como l_{in}, es útil definir la **escala de disipación de Kolmogorov**, η, como la escala en la cual la viscosidad se vuelve dominante. En escalas más pequeñas que η, la energía que el flujo haya transportado se disipará en forma

de calor por acción de los esfuerzos viscosos. Se define además la **escala integral**, l_0, como el promedio del espectro de energía $E(k)$ pesado por la inversa del número de onda k,

$$l_0 = 2\pi \frac{\int_0^\infty k^{-1} E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}. \tag{2.18}$$

En general, esta escala es proporcional a la escala de inyección l_{in}. A partir de estas escalas se puede definir el **rango inercial** como el rango de escalas l dado por $\eta \ll l \ll l_0$ en el que la inyección de energía y la disipación por viscosidad son despreciables. Por la ecuación de balance (2.13), en este rango el flujo de energía Π_k se mantiene constante, y en el estado turbulento estacionario es igual a la disipación de energía media ϵ en la ecuación (2.7).

Uno de los primeros en estudiar la transferencia de energía entre escalas en flujos turbulentos fue Richardson. En su trabajo de 1922 [15] presenta por primera vez un modelo para la interacción entre vórtices de distintos tamaños. Ideas de este modelo fueron luego tomadas por Kolmogorov para su teoría de la turbulencia (K41, [14]) Antes de entrar en la descripción detallada del modelo presentaremos algunas cantidades relevantes.

En todo el trabajo llamaremos l a la escala bajo consideración, típicamente entre η y l_0, y u_l al valor típico de la velocidad asociado a la escala l, cuya definición práctica es

$$u_l \sim \sqrt{\langle \delta u_\parallel^2(l) \rangle} \tag{2.19}$$

(donde $\delta u_\parallel = [\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{l}/l$ es el incremento longitudinal de la velocidad, con $l = \mathbf{l}$) para $l \leq l_0$, y

$$u_l \sim \sqrt{\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{l}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle} \tag{2.20}$$

para $l > l_0$. Además se llama u_0 a la fluctuación r.m.s de velocidad y τ_{NL} al tiempo *no lineal*, que es el tiempo típico de giro de un remolino de tamaño $\sim l$, también llamado *tiempo de circulación*. τ_{NL} es el tiempo en el que una estructura de tamaño $\sim l$ sufre una distorsión significativa por movimiento relativo de sus componentes, y está dado por

$$\tau_{NL} \sim \frac{l}{u_l}. \tag{2.21}$$

Como se consideran flujos incompresibles, cuando dos puntos en un vórtice se separan, otros dos puntos deben acercarse. Entonces, τ_{NL} es también es también el tiempo típico en el que se transfiere energía de la escala l a escalas más pequeñas. A partir de esta idea se puede estimar el flujo de energía de escalas $\sim l$ a escalas más pequeñas,

$$\Pi_l \sim \frac{u_l^2}{\tau_{NL}} \sim \frac{u_l^3}{l}. \tag{2.22}$$

En el rango inercial, donde tanto la inyección de energía como la disipación se vuelven despreciables, el flujo debe ser independiente de l e igual a la tasa de disipación media ϵ, por lo tanto

$$u_l \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3} \tag{2.23}$$

que significa que el campo de velocidades sigue también una ley de escalas con exponente 1/3. De acá también se sigue, asumiendo autosimilaridad, la llamada ley de los 2/3: $\langle \delta u_{\parallel}^2(l) \rangle \sim u_l^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}$. Por otro lado, el tiempo no lineal también es autosemejante con el mismo exponente,

$$\tau_{NL} \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}. \tag{2.24}$$

Cerca del límite superior del rango inercial, cuando $l \sim l_0$, se tiene $u_0 \sim \epsilon^{1/3} l_0^{1/3}$, de lo que se obtiene una de las relaciones más útiles de la teoría K41,

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}. \tag{2.25}$$

Esta relación es consecuencia de la ley de los 4/5 y tiene una amplia aplicabilidad porque permite estimar la tasa a la que se disipa energía en flujos turbulentos en la atmósfera, los océanos, y en el medio interplanetario en base a parámetros macroscópicos del flujo.

El límite inferior del rango inercial, donde la viscosidad se vuelve relevante, se obtiene fenomenológicamente. El tiempo característico en el que una excitación se atenúa por difusión viscosa en escalas $\sim l$ se puede estimar como

$$\tau_{dif} \sim \frac{l^2}{\nu}. \tag{2.26}$$

que tiende a cero con l más rápido que τ_{NL}. Se sigue entonces que, sin importar lo pequeña que sea la viscosidad ν, la difusión se volverá relevante en la escala en la que sean iguales los dos tiempos,

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \tag{2.27}$$

que es la escala de disipación de Kolmogorov introducida al principio de esta sección. Podemos también definir un tiempo de disipación de Kolmogorov como $\tau_\eta \sim (\nu/\epsilon)^{1/2}$, que será muy importante más adelante cuando consideremos partículas con inercia.

El modelo de Richardson permite visualizar al flujo turbulento como una superposición de remolinos interactuantes de distintos tamaños. Esta idea se representa de manera pictórica en la figura 2.1. Los remolinos más grandes tienen una escala $\sim l_0$. Las sucesivas generaciones de remolinos tienen escalas $l_n = l_0 q^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ con $0 < q < 1$. El valor exacto de q no es relevante. Los remolinos más pequeños tienen tamaños característicos $\sim \eta$. El número de remolinos por unidad de volumen crece como q^{-3n} para asegurar que los remolinos pequeños llenen el mismo espacio que los grandes. La energía inyectada en las escalas mayores a tasa ϵ se transfiere hacia las escalas más pequeñas a través de la jerarquía de remolinos también a la misma tasa ϵ, y eventualmente será disipada al llegar a los remolinos más pequeños también a tasa ϵ. Este argumento es el que da origen a la idea de **cascada de energía** y motiva dos hipótesis importantes de la teoría K41.

La primera hipótesis importante en esta teoría es la de invariancia de escalas en el rango inercial. Esta se rompería, por ejemplo, si los remolinos más pequeños ocuparan un volumen más chico que el volumen original ocupado por el vórtice grande (la ruptura de esto da origen al fenómeno de intermitencia [16]). La segunda hipótesis que entra en juego es la de localidad.

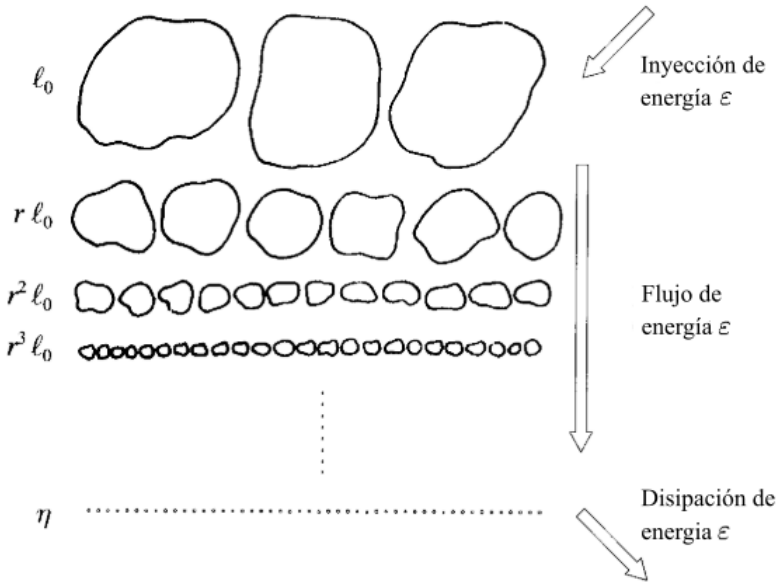

Figura 2.1: *Esquema de la cascada de energía según el modelo de Richardson.*

Esto significa que, en el rango inercial, el flujo de energía en escalas $\sim l$ involucra mayormente escalas de tamaño comparable, desde $\sim ql$ hasta $\sim q^{-1}l$ [17].

Existen dos argumentos a favor de la hipótesis de localidad. El primero tiene que ver con que los remolinos pequeños no se distorsionan por un barrido uniforme. Un remolino de tamaño dentro del rango inercial va a ser barrido por los remolinos de escalas mayores en los que está inmerso. Esto no cambiará su energía debido a que el barrido uniforme se puede pensar como una transformación Galileana aleatoria y la ecuación de Navier-Stokes es invariante frente a este tipo de transformaciones. El segundo argumento está relacionado con la distorsión de los remolinos, que está controlada por el esfuerzo de corte, es decir, los gradientes de velocidad. El esfuerzo de corte asociado a la escala l es $s_l \sim u_l/l \sim \epsilon^{1/3}l^{-2/3}$. Esto expresa que el mínimo estará en el límite superior del rango inercial $l \sim l_0$ y el máximo en el extremo $l \sim \eta$. La cizalla que sienta un remolino de tamaño l debido a otro de tamaño $l' \gg l$ no producirá distorsión, porque en las escalas más grandes hay muy poco esfuerzo de corte. La cizalla que sienta debido a remolinos de escalas $l' \ll l$ tampoco producirá distorsión porque los remolinos más chicos no están actuando coherentemente en la escala l. Por lo tanto, la distorsión de los remolinos vendrá de escalas $l' \sim l$.

2.2.2. Espectro de Kolmogorov

Una de las consecuencias más importantes de la teoría K41 es la dependencia con el número de onda que sigue el espectro de energía. Si asumimos que el espectro de energía sigue una ley de potencias

$$E(k) \propto k^{-n}, \quad 1 < n < 3, \tag{2.28}$$

usando la fórmula de Wiener-Khinchin se puede relacionar el espectro de energía con la función de correlación [14], lo que permite deducir que los incrementos cuadráticos del campo de velocidades deber ser homogéneos y seguir también una ley de potencias

$$\langle \delta \mathbf{u}_{\parallel}^2(l) \rangle \sim \langle (\mathbf{u}(\mathbf{r}') - \mathbf{u}(\mathbf{r}))^2 \rangle \propto |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{n-1}. \tag{2.29}$$

Finalmente, usando la ley de los 2/3 se llega a la fórmula para el espectro de Kolmogorov,

$$E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{2.30}$$

2.3. Partículas inerciales de tamaño finito

La descripción Lagrangiana de flujos turbulentos está en el centro de una gran variedad de problemas físicos con aplicabilidad en contextos industriales y ambientales, desde la dispersión y difusión de contaminantes hasta el mezclado de agentes químicos o biológicos, por mencionar algunos ejemplos. En muchos de estos casos, el flujo es en realidad multifase: la fase turbulenta líquida o gaseosa, y la fase de partículas sólidas que son transportadas por el fluido. El problema es complejo en su planteo general. Todavía no se ha encontrado una ecuación de movimiento aproximada que describa la dinámica de las partículas en los casos más generales posibles. Una solución directa no solo es muy difícil de hallar si no que además no sería muy esclarecedora. Desde el siglo XIX se intenta encontrar la aproximación que permita escribir las ecuaciones de movimiento de pequeñas esferas rígidas sumergidas en un flujo dado usando unas pocas ecuaciones diferenciales ordinarias, considerando conocido el campo de velocidades del flujo. Surgen algunos problemas sutiles al intentar hacer las aproximaciones e hipótesis correctas de manera autoconsistente y han aparecido gran cantidad de resultados incorrectos en la literatura. El problema fue resuelto cuando Maxey y Riley [11] escribieron una ecuación de movimiento para esferas rígidas pequeñas advectadas por un flujo suave, y Hunt et al. [18], siguiendo el trabajo de Taylor [19], corrigieron la forma del termino de masa agregada.

Los modelos más sencillos de flujos multifase toman la hipótesis de trazadores pasivos: consideran despreciable el tamaño de la partícula y su inercia. Considerar que las partículas tienen tamaño finito y su propia inercia introduce un nuevo aspecto, las partículas ya no siguen exactamente a los elementos de fluido, tienen su propia dinámica que, en consecuencia, es más compleja. Las partículas de tamaño finito no son capaces de ajustar sus velocidades a la del fluido de manera instantánea y, además, su densidad puede no ser la misma que la del fluido. Esto no solo tiene importancia desde el punto de vista teórico, en el aspecto práctico permite describir sistemas como partículas de contaminantes o fitoplancton en el océano [1], en los cuales no es correcto despreciar los efectos de inercia.

En esta sección se introduce la ecuación de Maxey-Riley, se discuten las hipótesis y el rango de validez de la misma, así como algunas de sus consecuencias.

2.3.1. La ecuación de Maxey-Riley

Para estudiar la dinámica de partículas de tamaño finito en flujos turbulentos, es necesario tener una formulación de las ecuaciones de movimiento de las partículas advectadas. El problema es que las partículas de tamaño finito son objetos extensos con sus propios vínculos. Una descripción rigurosa involucraría resolver la ecuación de Navier-Stokes con vínculos en movimiento, lo que tiene un alto costo computacional. Las ecuaciones en derivadas parciales resultantes

de este procedimiento son muy complicadas de resolver y de analizar. Es más útil buscar una descripción en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se puede escribir una ecuación diferencial aproximada para el movimiento de pequeñas partículas esféricas inmersas en un flujo. Si la partícula tiene radio a y masa m_p, la ecuación de Maxey-Riley da una buena aproximación a su dinámica,

$$\begin{aligned} m_p\dot{\mathbf{v}} = m_f\frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t) - \frac{1}{2}m_f\left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{D}{Dt}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t) + \frac{1}{10}a^2\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t)\right]\right) \\ - 6\pi a\rho_f\nu\mathbf{q}(t) + (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a^2\rho_f\nu\int_0^t d\tau\frac{d\mathbf{q}(\tau)/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde

$$\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t) - \frac{1}{6}a^2\nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.32}$$

Aquí $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t) \equiv d\mathbf{r}(t)/dt$ son la posición y la velocidad de la partícula respectivamente, y $\mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t)$ es el campo de velocidades del flujo sin perturbar en la posición de la partícula. m_f es la masa de fluido desplazada por la partícula, y ν es la viscosidad cinemática del fluido de densidad ρ_f. $\mathbf{g}$ es la gravedad, y la derivada

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \tag{2.33}$$

es la derivada hidrodinámica total tomada en el camino de un elemento de fluido, así como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \tag{2.34}$$

se toma a lo largo de la trayectoria de la partícula.

El primer término del lado derecho es la aceleración del elemento de fluido en la posición $\mathbf{r}(t)$ a tiempo t, y representa la fuerza ejercida sobre la partícula por el fluido sin perturbar. El segundo término representa el *efecto de masa agregada*, que da cuenta de que cuando la partícula se mueve relativa al flujo, desplaza cierta cantidad de fluido; el resultado es que la partícula se comporta como si tuviera masa adicional. El tercer y cuarto términos representan el arrastre de Stokes causados por la viscosidad del fluido y la fuerza de empuje, respectivamente. La integral es conocida como *término de memoria de Basset-Boussinesq* y aparece de considerar que la vorticidad se desprende y difunde desde la partícula por la viscosidad [20, 21]. Los términos que involucran el factor $a^2\nabla^2$ son conocidos como *correcciones de Faxén* [22] y dan cuenta de la variación espacial del campo de velocidad en diferentes puntos en el borde de la partícula.

La ecuación (2.31) es válida para partículas pequeñas a bajo número de Reynolds de la partícula Re_p. Este número de Reynolds se calcula usando el tamaño de la partícula como escala espacial, y la velocidad relativa entre la partícula y el flujo a su alrededor, con $Re_p = \frac{a|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}{\nu}$. Esto implica que para que la ecuación (2.31) sea una buena aproximación, la diferencia de velocidades entre la partícula y el fluido debe ser pequeña, o a debe ser lo suficientemente chica. Otra condición es que la diferencia de velocidades en los extremos de la partícula, o más precisamente, el número de Reynolds de corte debe ser chico, $Re_\Gamma = a^2\Gamma/\nu \ll 1$, donde Γ es el

gradiente de velocidades característico.

2.3.2. Características generales de las partículas de tamaño finito

Como se mencionó en la sección anterior, la dinámica de las partículas de tamaño finito es distinta a la de los trazadores pasivos. Si el tamaño de la partícula es lo suficientemente chico, en la ecuación (2.31) se pueden despreciar los términos que van como a^2. Esto significa considerar que las partículas son mucho más pequeñas que la longitud típica de variación del flujo. En este caso, la ecuación (2.31) queda de segundo orden, que sigue resultando en una dinámica diferente a considerar trazadores pasivos (en el caso de trazadores pasivos, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$, que es una ecuación de primer orden). Una consecuencia inmediata es que la dinámica de partículas con inercia y con tamaño finito tiene un espacio de fases de $2n$ dimensiones, donde n es la dimensión del espacio de configuraciones. Por lo tanto, si se considera un flujo plano, una partícula inercial de tamaño finito será descripta por 4 grados de libertad, mientras que una partícula no inercial tendrá solo 2.

Otra consecuencia importante es que la dinámica de estas partículas es disipativa, aun en flujos incompresibles, y el volumen del espacio de fases se contrae a una tasa n/St, con St el número de Stokes, definido como la relación entre el tiempo de relajación de la partícula $\tau_p = (m_p + m_f/2)/(6\pi a \rho_f \nu)$, y el tiempo de Kolmogorov τ_η. En el carácter disipativo de la dinámica yace la posibilidad de existencia de atractores en el espacio de fases, situación que no es posible para trazadores pasivos excepto que el mismo flujo Lagrangiano subyacente tenga puntos de atracción. Esto tiene consecuencias cruciales para la dinámica de partículas inerciales en flujos turbulentos.

$$\tau_p = \frac{m_p + m_f/2}{6\pi a \rho_f \nu} \tag{2.35}$$

La densidad de la partícula advectada por el fluido también juega un rol importante en su dinámica. Haciendo un análisis perturbativo en el caso de partículas pequeñas, Maxey demostró [23] que si las partículas tienen densidad mayor a la del fluido, tienden a alejarse de las regiones de vorticidad alta, como los centros de remolinos. Este efecto puede entenderse intuitivamente como el resultado de la fuerza centrifuga apartando a la partícula de una zona de rotación alta. De manera análoga, las partículas con densidad menor a la del fluido tienden a moverse hacia las zonas de alta vorticidad. Estos efectos están completamente ausentes en el caso no inercial. En el caso más general, en los últimos años se mostró tanto numérica como experimentalmente que las partículas más pesadas que el fluido, y especialmente con número de Stokes de orden uno o mayor, tienden a acumularse preferencialmente en ciertas regiones del flujo formando *clusters* [24, 9, 10]. Esta acumulación preferencial ocurre para partículas con $St > 1$ en puntos con aceleración Lagrangiana nula [13], y será un tema de interés en el capítulo 4.

2.4. Turbulencia en un sistema rotante

En esta sección se describe brevemente el efecto de la rotación en flujos turbulentos. Esta situación se encuentra en muchos problemas de flujos geofísicos y astrofísicos. El efecto de la

rotación se considera importante cuando el número de Rossby (la relación entre el período de rotación y el tiempo no lineal) es lo suficientemente chico. Los flujos atmosféricos y oceánicos a gran escala, por ejemplo, son afectados por la rotación de la Tierra. Además en estos flujos el número de Reynolds es muy alto, por lo que se encuentran en estado turbulento. La teoría de flujos rotantes puede consultarse con mayor detalle en [5, 25].

2.4.1. Ecuación de Navier-Stokes para un flujo con rotación rígida

La dinámica de un fluido incompresible sometido a rotación rígida, en el sistema de referencia rotante, se describe agregando los términos de aceleración centrífuga y de Coriolis a la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{u} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{2.36}$$

En esta ecuación, la aceleración centrífuga está absorbida en el término de presión total por unidad de densidad de masa, $\mathcal{P} = p/\rho - (\Omega r)^2/2 + \mathbf{u}^2/2$.

La rotación tiene dos efectos en el flujo: la tendencia hacia la bidimensionalización del flujo, y la aparición de ondas asociadas a la fuerza restitutiva de Coriolis. El primer efecto puede pensarse como resultado del Teorema de Proudman-Taylor [5]. En ausencia de viscosidad y de fuerzas externas, y despreciando el término no lineal, la ecuación (2.36) en el estado estacionario se reduce a un balance entre la fuerza de Coriolis y la presión, $2\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P}$. Tomando el rotor de esta igualdad se sigue que $(\Omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$, es decir, que los gradientes en la velocidad son perpendiculares al eje de rotación. Esto resulta en flujos que son fuertemente anisótropos, con dependencia espacial mucho más fuerte en las direcciones perpendiculares a la rotación que en la dirección del eje de rotación. La aparición de grandes estructuras en formas de columna, llamadas columnas de Taylor, es el resultado de esto. Y la bidimensionalización del flujo también es ayudada por las ondas inerciales, que derivamos brevemente a continuación.

A partir de la ecuación (2.36) se puede escribir una ecuación linealizada para la vorticidad ω de un fluido inviscido sometido a rotación [5],

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 2(\Omega \cdot \nabla)\mathbf{u}, \tag{2.37}$$

la cual admite soluciones de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t}, \tag{2.38}$$

que son ondas inerciales, siempre y cuando se cumpla la relación $\mathbf{k}\cdot\mathbf{h}_s = 0$ por incompresibilidad. Las ondas inerciales presentan una relación de dispersión anisótropa y dispersiva dada por

$$\omega = 2s(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega})/k. \tag{2.39}$$

Los modos helicoidales $\mathbf{h}_s \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t)$ corresponden a ondas circularmente polarizadas que se propagan en la dirección $\mathbf{k}$, con

$$\mathbf{h}_s = \zeta \times \kappa + is\zeta, \tag{2.40}$$

donde $s = \pm 1$ es la polarización, $\kappa = \mathbf{k}/k$ y $\zeta = \mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}/|\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}|$, son dos vectores unitarios definidos a partir del vector rotación fijo Ω.

Como se mencionó previamente, en flujos rotantes el número de Rossby mide la relación entre el término no lineal y el de Coriolis, siendo menor cuanto mayor es la frecuencia de rotación,

$$Ro = \frac{U}{2\Omega l_0}, \tag{2.41}$$

donde U es la velocidad característica del flujo y l_0 es la escala integral. La magnitud de Ro da una idea de cuánto afecta la rotación a la turbulencia.

2.4.2. Espectro de energía en flujos rotantes

Dada la anisotropía del flujo, para caracterizar la distribución espectral de la energía se considera usualmente un espectro anisótropo [7]. Para calcular el espectro anisótropo perpendicular, las componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ se integran alrededor del eje de rotación para obtener un espectro que depende solamente de $k_\perp$,

$$E(k_\perp, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_\perp \leq |\mathbf{k}_\perp| \leq k_\perp + 1} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|, \tag{2.42}$$

y análogamente se define el espectro paralelo al eje de rotación como

$$E(k_\parallel, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_\parallel \leq |\mathbf{k}_\parallel| \leq k_\parallel + 1} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|. \tag{2.43}$$

Los espectros de helicidad y enstrofía se pueden definir de la misma forma, reemplazando $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ por $\omega(\mathbf{k})$ donde corresponda. Siguiendo el mismo procedimiento se pueden definir también flujos de energía en las direcciones paralelas y perpendiculares.

Ahora contamos con los elementos para extender la fenomenología de turbulencia isótropa y homogénea al caso rotante. La presencia de ondas, que además son helicoidales (es decir, que reducen la amplitud del término no lineal) reduce el flujo de energía, aumentando el tiempo asociado a la cascada. Al orden más bajo, podemos asumir que este tiempo cambiará por un factor adimensional proporcional a τ_{NL}/τ_Ω, donde $\tau_\Omega \sim 1/\Omega$ es un tiempo proporcional al período de las ondas inerciales. Es decir, el tiempo de deformación de los remolinos de tamaño l será $\tau_l \sim \tau_{NL}(\tau_{NL}/\tau_\Omega) = \Omega\tau_{NL}^2$, y además la velocidad y la longitud relevantes serán las perpendiculares al eje de rotación, es decir, $l \sim l_\perp$ y $u_l \sim u_{l_\perp}$. Bajo estas condiciones el flujo de energía resulta $\Pi_l \sim \epsilon \sim u_{l_\perp}^2/\tau_{l_\perp} = u_{l_\perp}^4/(\Omega l_\perp^2)$, de donde se sigue que

$$u_{l_\perp}^2 \sim \epsilon^{1/2}\Omega^{1/2} l_\perp, \tag{2.44}$$

o en términos del espectro perpendicular,

$$E(k_\perp) \sim \epsilon^{1/2}\Omega^{1/2} k_\perp^{-2}. \tag{2.45}$$

2.4.3. Un resultado previo

En un trabajo del 2016 [6] realizado por Biferale et al se estudió turbulencia con partículas sometida a rotación usando simulaciones numéricas directas (DNS). Como se mencionó previamente, la acumulación anisótropa de energía lleva a la formación de regiones verticales coherentes de alta vorticidad en la dirección del eje de rotación. En ese trabajo se cuantificó por primera vez los efectos de estas estructuras verticales en la concentración preferencial de partículas livianas y pesadas.

Los autores observaron que millones de partículas se concentran de manera no trivial ni bien aparecen en el flujo estas estructuras rotantes coherentes. En particular, las partículas pesadas se difunden de manera más eficiente en el plano perpendicular al eje de rotación, mientras que las partículas livianas tienden a difundirse solo verticalmente. Al calcular la dispersión cuadrática media en función del tiempo, encontraron que las partículas pesadas tienden a aumentar su difusión en el plano normal a la rotación mientras que su difusión paralela disminuye. Más aún, manteniendo fija la relación entre las densidades del fluido y de las partículas, observaron que el efecto es más fuerte a mayor St. Este mecanismo se invierte para partículas livianas. Los vórtices de Proudman-Taylor las atrapan suprimiendo la difusión en el plano normal pero aumentando la difusión en la dirección paralela. Estas observaciones previas servirán de motivación para el trabajo presentado en los próximos capítulo.

CAPÍTULO 3

Herramientas y métodos

En este capítulo se presentan las herramientas numéricas y los métodos utilizados para estudiar partículas inerciales inmersas en flujos turbulentos rotantes, junto con los primeros resultados de la tesis asociados a la implementación y validación numérica de las ecuaciones para las partículas inerciales en el caso rotante. En la sección 3.1 se describen las simulaciones numéricas directas y se presenta el software GHOST, utilizado para todas las simulaciones de esta tesis. En la sección 3.2 se describen las simulaciones con partículas y se presenta la ecuación utilizada en el caso de partículas pequeñas sometidas a rotación rígida. En el marco de esta tesis se modificó el código numérico agregando los efectos asociados a la rotación para las partículas; el proceso de validación del código implementado se presenta en la sección 3.3. Finalmente, en la sección 3.4 se describen los diagramas de Voronoï, herramienta fundamental y utilizada en esta tesis para el estudio de la acumulación preferencial de partículas.

3.1. Simulaciones numéricas directas

Como vimos en el capítulo previo, la turbulencia surge de interacciones no lineales entre todas las escalas temporales y espaciales. El número de Reynolds, que mide la intensidad de las no-linealidades en flujos turbulentos, determina también el número de grados de libertad requerido para resolver todas las escalas espaciales relevantes, que crecen como $Re^{9/4}$ según la teoría K41 [14]. En flujos geofísicos, Re puede ser mayor a 10^8, lo que sugiere la necesidad de hacer evolucionar las ecuaciones de fluidos con más de 10^{18} puntos de grilla si uno quiere obtener simulaciones precisas en todas las escalas relevantes del problema. Este enfoque en el que todas las escalas espaciales y temporales están resueltas (aunque en la práctica se realice con una resolución espacial mucho menor) se llama *simulación numérica directa* (DNS, por sus siglas en inglés).

En esta tesis se utilizaron DNS para integrar las ecuaciones de Navier-Stokes para el fluido. Estas simulaciones se realizaron empleando el software GHOST [26, 27] que utiliza un método pseudo-espectral [28, 29] para la resolución espacial de las ecuaciones en derivadas parciales y

un esquema de Runge-Kutta de segundo orden para la evolución temporal. Las ecuaciones se resolvieron usando condiciones de contorno periódicas en un dominio cúbico adimensional de lado $L = 2\pi$.

3.1.1. Métodos de integración y elección de parámetros

Para poder observar todos los procesos físicos en el rango inercial, que son los que se estudian en esta tesis, es necesario resolver desde la escala integral l_0 hasta la escala de disipación de Kolmogorov η. En términos del número de onda se tiene $\eta \sim 1/k_\eta \sim (\epsilon/\nu^3)^{-1/4}$. El software GHOST utiliza la regla de los dos tercios para evitar efectos de *aliasing*. Esta regla cancela la amplitud del campo de velocidades para números de onda $k \geq N/3$ en cada iteración, con N la resolución lineal. De esta manera, el máximo número de onda resuelto será $N/3$. Esto permite relacionar la cantidad de puntos de grilla con los parámetros ϵ y ν del sistema. Para que una simulación con N puntos de grilla lineales resuelva todas las escalas relevantes se debe cumplir

$$\frac{N}{3} > \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}. \tag{3.1}$$

El criterio para elegir el paso temporal de integración dt tiene que permitir seguir a un elemento de fluido en forma unívoca, por lo tanto dt debe ser menor al tiempo que le toma a un elemento de fluido moverse un diferencial espacial dx. Según la condición de Courant, Friederichs y Lewy (CFL) [29]

$$dt \leq \frac{dx}{U_{max}} \approx \frac{1}{NU_{max}}, \tag{3.2}$$

donde U_{max} es la máxima velocidad del flujo y dx la distancia mínima entre dos puntos en la grilla espacial.

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) permiten fijar el número de Reynolds para una dada resolución espacial N, y el paso temporal dt. Fijado N, para reducir el tiempo de computo al usar alta resolución espacial y aprovechar las ventajas de usar *clusters* de cómputo, el software GHOST está paralelizado utilizando un esquema híbrido con MPI-OpenMP. Los detalles del método de paralelización se encuentran en [26].

Finalmente, para sostener la turbulencia contra la disipación se utilizó un forzado aleatorio no helicoidal, construido a partir de una superposición de modos Fourier con fases aleatorias, usando el algoritmo descripto en [30]. En todas las simulaciones se mantuvo constante la intensidad del forzado y las fases aleatorias se variaron lentamente en el tiempo con un tiempo de correlación proporcional a medio tiempo no lineal en la escala integral.

3.2. Partículas pequeñas en flujos en rotación rígida

En la sección 2.3 se presentó la ecuación (2.31) para el estudio de la dinámica de partículas de tamaño finito inmersas en un flujo con un campo de velocidades $\mathbf{u}$. Se mencionó también que en el límite de partícula pequeña, la ecuación puede simplificarse. Al tratar con un sistema rotante es necesario considerar además los efectos de las fuerzas centrífuga y de Coriolis. La ecuación en este caso resulta

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_p(t)}{dt} =& \frac{1}{\tau_p}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t),t) - \mathbf{v}_p(t)] - \left(1 - \frac{m_f}{m_p}\right) g\hat{z} + \frac{3m_f}{m_f + 2m_p} \left.\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\right|_{\mathbf{x}_p(t),t} \\ & - 2\mathbf{\Omega} \times \left[\mathbf{v}_p(t) - \frac{3m_f}{m_f + 2m_p}\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t),t)\right] \\ & - \left(1 - \frac{3m_f}{m_f + 2m_p}\right) \{\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_0)]\},\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde como se mencionó previamente m_p es la masa de la partícula, m_f la masa del elemento de fluido, $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t),t)$ es la velocidad Euleriana del fluido en el punto $\mathbf{x}_p(t)$ en el que se encuentra la partícula en el instante t, τ_p es el tiempo de Stokes, $D\mathbf{u}/Dt$ es la aceleración Euleriana del fluido, Ω es la velocidad angular de rotación del sistema y $\mathbf{x}_0$ la posición del eje de rotación. Esta ecuación es valida para partículas pequeñas pues se están despreciando los términos asociados al radio finito de las partículas, y tales que el número de Reynolds del flujo en el entorno de la partícula sea de orden unitario [6]. Los últimos dos términos corresponden, respectivamente, a las fuerzas de Coriolis y centrífuga.

Bajo dichas aproximaciones se pueden redefinir las variables usando una escala l y la velocidad en esa escala u_l como

$$\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}l, \quad \mathbf{v_p} \longrightarrow \mathbf{v_p}u_l, \quad \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}u_l, \quad t \longrightarrow t\frac{l}{u_l}, \tag{3.4}$$

de tal manera que la ecuación (3.3) queda adimensionalizada

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_p(t)}{dt} =& \frac{1}{St}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t),t) - \mathbf{v}_p(t)] - (1-\gamma)\, g\hat{z} + R \left.\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\right|_{\mathbf{x}_p(t),t} \\ & - 2\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{v}_p(t) - R\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t),t)] - (1-R)\, \{\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_0)]\},\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde se definieron las cantidades

$$\gamma = \frac{m_f}{m_p}, \quad R = \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma/2}\right), \quad St = \tau_p \frac{u_l}{l}. \tag{3.6}$$

Eligiendo como longitud de referencia a la escala de Kolmogorov, $l = \eta$, el número de Stokes queda $St = \tau_p/\tau_\eta$.

Para resolver esta ecuación se utilizan condiciones iniciales dadas por el estado turbulento estadísticamente estacionario alcanzado en las simulaciones previamente explicadas. Las partículas se inyectan en el flujo turbulento rotante y luego se integra su ecuación de movimiento junto con la del flujo por tiempos largos. La evolución temporal de la ecuación (3.5) se realiza con el método de Runge-Kutta. El cálculo de la trayectoria de las partículas requiere calcular velocidades del flujo en puntos que no corresponden a los de la grilla numérica Euleriana. Con este fin se utiliza como método de interpolación el método de splines cúbicos, siguiendo los resultados de [31]. Este método permite calcular con buena aproximación la velocidad del flujo y las fuerzas ejercidas por el fluido sobre las partículas cuando estas caen entre puntos de grilla.

Es interesante notar que, a diferencia de las ecuación para el fluido, la ecuación de las

partículas tiene una dependencia explícita con la posición del eje de rotación. Así, el uso de condiciones de contorno periódicas es solo estrictamente correcto en el caso con $m_f = m_p$ (para el que la fuerza centrífuga y la dependencia con la posición del eje se anula), o una aproximación cruda en cualquier otro caso. En esa situación, lo más correcto es detener la simulación cuando las partículas cruzan el borde del dominio.

Los términos proporcionales a $\mathbf{\Omega}$ en la ecuación (3.5) fueron agregados al código numérico en el marco de esta tesis. En la siguiente sección se cuenta el proceso de validación de las nuevas partes del código.

3.3. Validación

Una vez modificado el código numérico para considerar el efecto de la rotación en la dinámica de las partículas, se procedió a validar el mismo. Se realizaron dos simulaciones, ambas con 512^3 puntos de grilla en un flujo en reposo en el sistema de referencia rotante con $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{z}$.

En un primer caso se inyectaron en el flujo partículas con flotación neutra ($\gamma = 1$) y se modificó el código para que solo se computaran los efectos de la fuerza de Coriolis (es decir, para partículas con $St \to \infty$). La ecuación (3.5) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{v}_p(t)}{dt} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_p(t). \tag{3.7}$$

En este caso, las partículas no ven al fluido y su trayectoria es simplemente la que se deriva de la acción de la fuerza de Coriolis, que se puede hallar analíticamente y tiene la forma

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\sin(2\Omega t + \phi) + x_i - A\sin(\phi), \\ y_p(t) &= A\cos(2\Omega t + \phi) + y_i - A\cos(\phi), \\ z_p(t) &= v_{z_i} t + z_i, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde x_i, y_i, z_i, v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} son las posiciones y velocidades iniciales de la partícula elegida en las tres direcciones de movimiento. La amplitud A y la fase ϕ se obtienen a partir de las condiciones iniciales como $A = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}/2\Omega$ y $\phi = \arctan(-v_{y_i}/v_{x_i})$. Esto permite contrastar la trayectoria analítica con la simulada para verificar que el código implementado es el correcto para el fenómeno que se quiere describir. En la figura 3.1 se muestra la posición en función del tiempo de una partícula de esta simulación en las tres direcciones cartesianas. Se puede observar que la solución numérica no tiene diferencias apreciables con la analítica, por lo que se considera que el código implementado es el correcto para la descripción de la dinámica de una partícula sometida a la fuerza de Coriolis.

En un segundo caso se realizó una simulación con $\gamma = 2$ que considerara solo los efectos de la fuerza centrífuga (es decir, para una partícula en un fluido en reposo en el sistema rotante con $g = 0$, $St \to \infty$, y despreciando la fuerza de Coriolis). En este caso, la ecuación (3.5) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{v}_p(t)}{dt} = -\frac{2}{5}\{\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_0)]\}, \tag{3.9}$$

y la trayectoria también se puede obtener de manera analítica y resulta

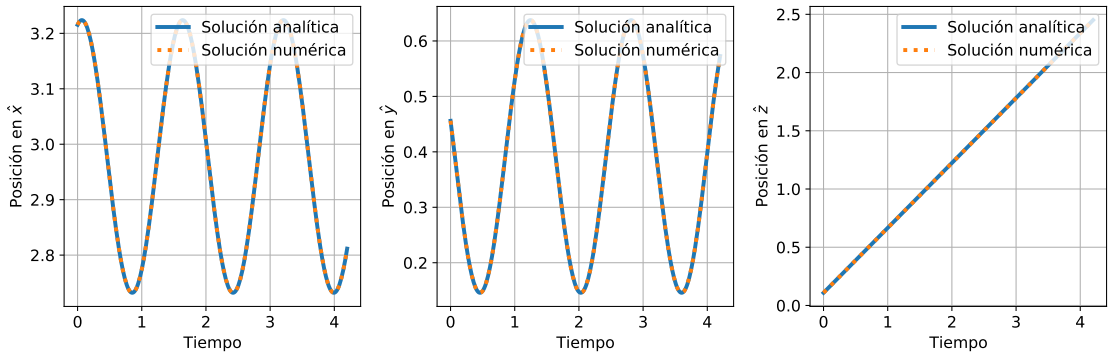

Figura 3.1: *Posición en función del tiempo en las tres direcciones cartesianas para una partícula sometida a fuerza de Coriolis en un fluido en reposo en el sistema de referencia rotante.*

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= A_x e^{\sqrt{2/5}\Omega t} + B_x e^{-\sqrt{2/5}\Omega t} + x_0, \\
y_p(t) &= A_y e^{\sqrt{2/5}\Omega t} + B_y e^{-\sqrt{2/5}\Omega t} + y_0, \\
z_p(t) &= v_{z_i} t + z_i,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

donde (x_0, y_0) es la posición del eje de rotación y las constantes se obtienen a partir de las condiciones iniciales, $A_\alpha = (\alpha_i - \alpha_0 + v_{\alpha_i}/\omega)/2$ y $B_\alpha = (\alpha_i - \alpha_0 - v_{\alpha_i}/\omega)/2$ con $\alpha = x, y$, y $\omega = \sqrt{2/5}\Omega$. La posición en función del tiempo en las tres direcciones cartesianas para una de las partículas de esta simulación se puede observar en la figura 3.2. En este caso hay que considerar que la fuerza centrifuga hace que las partículas eventualmente se escapen de la caja. Como se están usando condiciones de contorno periódicas, cuando una partícula sale por alguna de las caras de la caja, inmediatamente aparece por el otro lado. La solución analítica no contempla esta situación y por eso es que solo se puede comparar la posición hasta el tiempo en el que la partícula sale por alguno de los lados de la caja. Sin embargo, este tiempo es suficiente para verificar que el código implementado logra capturar correctamente la dinámica de una partícula sometida a la fuerza centrífuga.

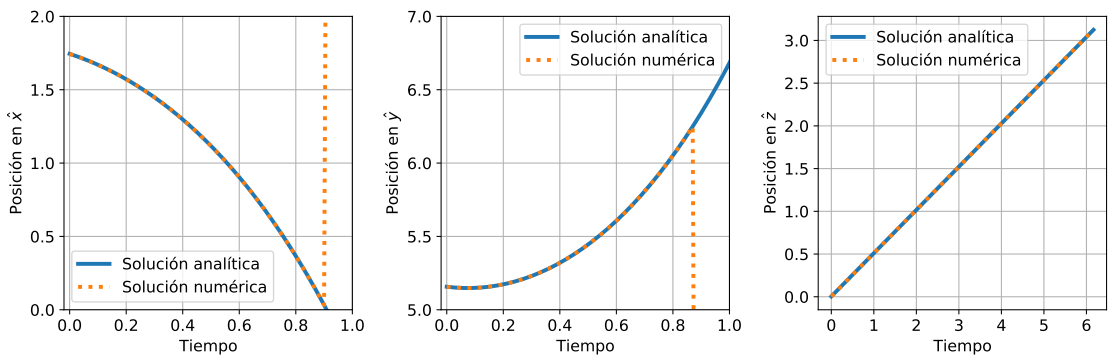

Figura 3.2: *Posición en función del tiempo en las tres direcciones cartesianas para una partícula sometida a fuerza centrífuga. Notar que la solución numérica deja de valer cuando la partícula atraviesa el borde del recinto.*

A partir de estos resultados se considera que el código implementado es válido para el sistema que se quiere describir (dentro del rango de validez de las aproximaciones realizadas), y se usa en adelante de forma completa para el resto de las simulaciones de esta tesis.

En esta instancia conviene realizar una breve aclaración sobre las unidades de las cantidades que se muestran en las figuras 3.2 y 3.1, y en todas las figuras del siguiente capítulo. Todas las magnitudes que se muestran son adimensionales usando una unidad de longitud L_0 y una unidad de velocidad U_0. Luego, el tiempo tiene unidades de L_0/U_0. A modo de ejemplo, si tomamos $L_0 = 1$ m y $U_0 = 1$ m s^{-1}, entonces la caja en la que se encuentra el fluido tiene longitud $2\pi L_0 \approx 6{,}28$ m, una velocidad adimensional $u = 1$ corresponde a 1 m s^{-1}, y un tiempo unitario corresponde a 1 s. Para dimensionar al sistema al compararlo con problemas geofísicos, es conveniente usar unidades para L_0 y U_0 más grandes. Por conveniencia, y sin perder generalidad, de ahora en adelante seguiremos usando unidades adimensionales.

3.4. Diagramas de Voronoï

Para estudiar la acumulación preferencial de partículas, una herramienta fundamental son los diagramas o teselados de Voronoï. Un diagrama de Voronoï es una separación del espacio en las regiones más cercanas a cada uno de los objetos de estudio, en este caso, las partículas. Cada partícula tendrá asociada una región a la que se llama celda de Voronoï, que consiste en todos los puntos del espacio más cercanos a esa partícula que a cualquier otra.

3.4.1. Definición de celda de Voronoï

La distancia euclidiana entre dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ la notamos como $|\mathbf{p}-\mathbf{q}|$. Por simplicidad para esta explicación (aunque más adelante consideraremos el caso tridimensional), consideraremos el caso en el que los dos puntos están sobre el plano xy. Entonces se tiene

$$|\mathbf{p}-\mathbf{q}| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}. \tag{3.11}$$

Consideremos $\mathcal{P} = \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n$, un conjunto de n puntos distintos en el plano, que llamaremos sitios. Se define el diagrama de Voronoï de $\mathcal{P}$ como la subdivisión del plano en n regiones, una para cada punto de $\mathbf{p}_i \in \mathcal{P}$, tales que los puntos $\mathbf{q}$ que pertenecen a la región asociada al sitio $\mathbf{p}_i$ cumplen la condición de proximidad $|\mathbf{q}-\mathbf{p}_i| < |\mathbf{q}-\mathbf{p}_j|$, para cada $\mathbf{p}_j \in \mathcal{P}$ $(j \neq i)$.

La región de Voronoï de cada sitio se construye a partir de la intersección de los semiplanos bisectores de $\mathbf{p}_i$ con todos los demás sitios $\mathbf{p}_j$, $j \neq i$. La intersección de estos semiplanos define una región poligonal convexa que puede ser abierta o cerrada (ver la figura 3.3).

3.4.2. Aplicación al caso de partículas en flujos turbulentos

Como ya fue mencionado, cuando se quiere estudiar la dinámica de partículas inmersas en fluidos, los diagramas de Voronoï permiten cuantificar la separación entre estas partículas y, por lo tanto, son una herramienta fundamental para estudiar acumulación preferencial.

Para estudiar el fenómeno de concentración preferencial lo usual es comparar la distribución estadística de los volúmenes de las celdas de Voronoï con la distribución obtenida en el caso

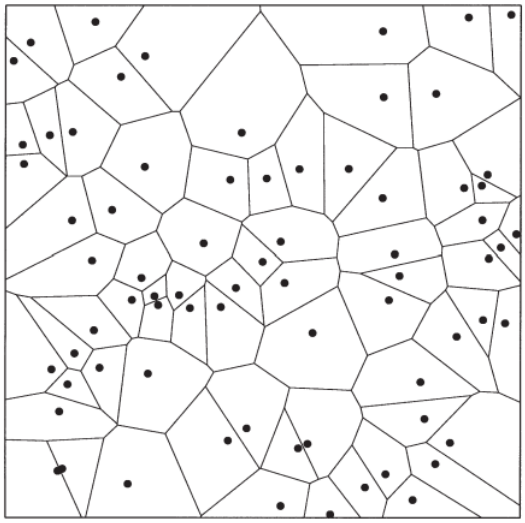

Figura 3.3: *Un ejemplo de diagrama de Voronoï en 2D. Los puntos negros representan los sitios. El polígono que delimita cada sitio es su celda de Voronoï que se determina con la intersección de los planos bisectores entre el sitio y sus vecinos.*

de un proceso aleatorio de Poisson (RPP por sus siglas en ingles), en el cual los sitios (o las partículas) están distribuidos uniformemente en el espacio.

La distribución espacial de los sitios correspondientes a un RPP fue investigada en la literatura [32]. Si bien no hay resultados analíticos disponibles, diversos autores propusieron funciones halladas empíricamente para la densidad de probabilidad de los volúmenes de las celdas de Voronoï. En un trabajo reciente de Uhlmann [33] se muestra que la densidad de probabilidad de los volúmenes de los sitios en este caso es una función Gamma generalizada de la forma

$$f(x) = \frac{cb^{a/c}}{\Gamma(a/c)} x^{a-1} e^{-bx^c}, \tag{3.12}$$

donde $a = 4{,}806$, $b = 4{,}045$ y $c = 1{,}168$ son coeficientes que, en principio, dependen de la cantidad de sitios n considerados, pero para $n \geq 10^4$ la dependencia en n es despreciable.

Este método fue utilizado para el estudio de la acumulación de partículas en flujos turbulentos por primera vez por Monchaux et al. [12, 24] que mostraron que comparar la función de distribución de probabilidad (PDF) de los volúmenes de las celdas de un diagrama de Voronoï con la PDF obtenida en el caso de un RPP permite diferenciar los casos en los que existe acumulación preferencial de los que no. Así, los diagramas de Voronoï representan una herramienta computacional muy eficiente porque no solo permiten cuantificar la concentración si no que además permiten además definir *clusters* de partículas (así como los vacíos complementarios) de manera no ambigua y notablemente simple.

CAPÍTULO 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la mayoría de las simulaciones numéricas directas realizadas en esta tesis. Nos concentramos en simulaciones con diferentes valores del número de Rossby (es decir, con diferentes velocidades angulares de rotación), a las que agregaremos partículas neutralmente flotantes (es decir, con la misma masa que el fluido desplazado). En la sección 4.1 se describe el método para la elección de los parámetros utilizados a medida que se aumenta el número de Reynolds y la resolución espacial. En la sección 4.2 se describe la caracterización Euleriana del flujo para las simulaciones sin partículas. En la sección 4.3 se describen los resultados de las simulaciones con partículas. Finalmente, en la sección 4.4 se detalla el análisis de acumulación preferencial mediante teselados de Voronoï.

4.1. Ajuste de la viscosidad

En una primera etapa se realizaron simulaciones con $N^3 = 128^3, 256^3, 512^3$ puntos de grilla. Los parámetros se ajustaron sin rotación ($\Omega = 0$), para más adelante variar el valor de Ω en las simulaciones con la resolución espacial más grande.

De la elección de los parámetros depende que el método numérico converja correctamente en cada paso y resuelva todas las escalas físicas del problema. Los parámetros involucrados son la tasa de disipación media de energía ϵ, el número de puntos de grilla N, la intensidad del forzado f_0, y la viscosidad ν. Estas simulaciones permitieron ajustar la viscosidad ν según la ecuación (3.1), a medida que se aumentaba la resolución espacial y a partir del valor obtenido en cada simulación de la tasa de disipación ϵ. La intensidad del forzado f_0 se mantiene constante en todas las simulaciones. En la tabla 4.1 se detallan los parámetros de estas simulaciones.

Se utilizó un campo de velocidades nulo como condición inicial. La amplitud del forzado f_0 se eligió de tal manera que la energía cinética cumpla que $E_c = \mathcal{O}(1)$, como se puede ver en la figura 4.1. Se observa que hay un régimen transitorio en el que la energía aumenta mientras se genera la turbulencia y luego, a $t \approx 30$ se alcanza un régimen estadísticamente estacionario, en el cual la energía se mantiene constante a menos de fluctuaciones, lo que sugiere que la turbulencia

Nombre	N^3	ν	f_0	Re
$N128$	128^3	$5 \cdot 10^{-3}$	0.492	1278
$N256$	256^3	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	0.492	2123
$N512$	512^3	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$	0.492	11783

Tabla 4.1: *Parámetros de las simulaciones con distintas resoluciones espaciales N; ν es la viscosidad cinemática, f_0 la intensidad del forzado, y Re el número de Reynolds. En todos los casos, las simulaciones no tienen rotación.*

ya está completamente desarrollada.

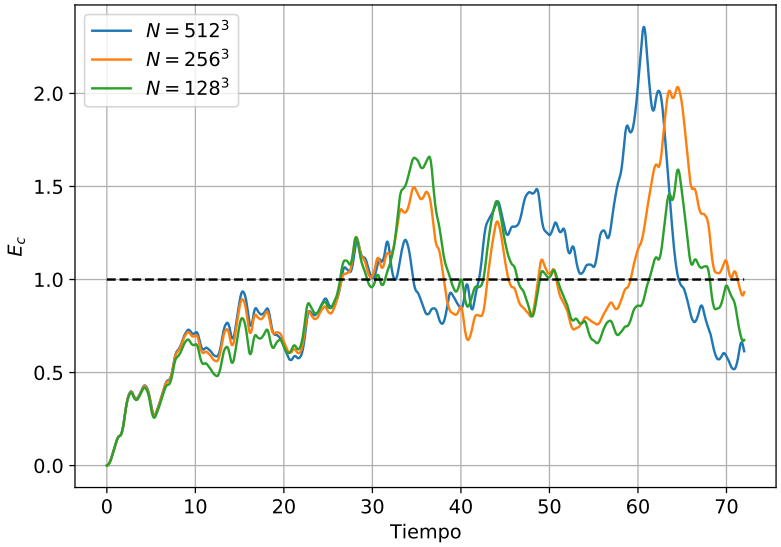

Figura 4.1: *Energía cinética por unidad de densidad de masa para las simulaciones con distinta resolución espacial, todas sin rotación ($\Omega = 0$).*

Como se mencionó previamente, la viscosidad se ajustó para tener las simulaciones correctamente resueltas. El procedimiento detallado para ajustar la viscosidad es el siguiente: se realizó una simulación con $N = 128^3$ con algún valor de ν y se calculó ϵ. En el estado turbulento estacionario ϵ es aproximadamente constante y asintóticamente independiente del número de Reynolds; entonces se utilizó ese valor para realizar una nueva simulación con un nuevo valor de ν. Esto se repitió las veces que fueron necesarias hasta obtener $k_\eta/k_{max} \lesssim 1$. Una vez obtenido esto, se puede pasar a una simulación con otra resolución espacial y una nueva viscosidad ν' usando la relación $\nu' = \nu(N/N')^{4/3}$, que se deriva de la ecuación (3.1). En la figura 4.2 se muestra la relación entre k_η y k_{max} en todas las simulaciones con resolución espacial creciente sin rotación. Notar que también se ve el régimen transitorio hasta $t \lesssim 30$ y luego, la relación se mantiene aproximadamente cercana a 1 pero menor, a menos de fluctuaciones estadísticas, indicando que la escala mínima resuelta es la escala de Kolmogorov η.

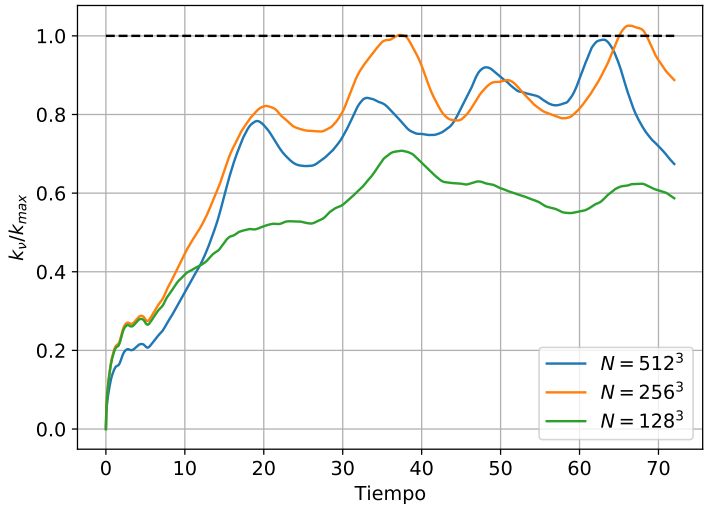

Figura 4.2: *Razón entre el número de onda de Kolmogorov k_ν y el máximo número de onda resuelto k_{max}, para simulaciones sin rotación. La linea de guiones marca el caso en el que ambos números de onda son iguales, simulaciones por debajo de esa linea están bien resueltas.*

4.2. Caracterización Euleriana del flujo

Una vez elegido el valor de ν de manera de resolver todas las escalas del problema, se mantiene el número de puntos de grilla en $N = 512$ en adelante. La simulación N512 nos provee las condiciones iniciales para poner el flujo en rotación. Los parámetros de las simulaciones con rotación de detallan en la tabla 4.2. En la figura 4.3 se muestra la energía cinética por unidad de densidad de masa, E_c, en función del tiempo para los distintos valores de Ro (recordar que los valores de Ω son inversamente proporcionales según la ecuación (2.41)). Notar que al encender la rotación el sistema tiene un estado transitorio en el que energía disminuye, hasta que en $t \approx 12$ comienza a aumentar y se estabiliza a menos de fluctuaciones estadísticas. El sistema puede acumular grandes cantidades de energía que luego disipará en forma de calor por viscosidad. También, en las simulaciones con rotación más intensa y para tiempos aún más largos, el sistema sigue aumentando su energía, especialmente en las escalas más grandes. Esto es el resultado de la formación de estructuras como las ya mencionadas columnas de Taylor.

Nombre	N^3	ν	f_0	Ro	Re	Ω
015	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.015	14398	8
03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.03	13074	4
06	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.06	13049	2
24	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.24	12477	0.5

Tabla 4.2: *Parámetros de las simulaciones con distintos números de Rossby, Ro. Ω es la velocidad de rotación en el eje z, N es la resolución espacial, ν es la viscosidad cinemática y f_0 la intensidad del forzado.*

En la figura 4.4 se observa el flujo isótropo de energía para todas las simulaciones con rotación y para la simulación N512 (sin rotación) en escala log-log. Se puede ver que existe un rango en

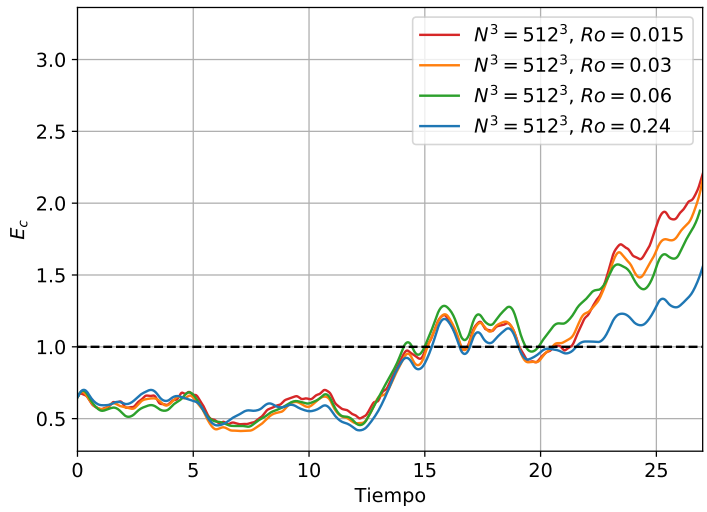

Figura 4.3: *Energía cinética para las simulaciones con distinta velocidad de rotación. Todas las simulaciones parten de la misma condición inicial (correspondiente a la simulación N512 con $\Omega = 0$). Notar el crecimiento de E_c a tiempos largos en las simulaciones con Ro más chico.*

el que se mantiene dentro del mismo orden de magnitud, que asociamos al rango inercial. Luego el flujo decrece a partir de algún valor de $k \lesssim 10$. Notar que a medida que Ro disminuye (es decir, a medida que aumenta la rotación), el flujo cae más rápido. Es decir, que la no-linealidad y la extensión del rango inercial disminuye al aumentar la rotación.

En la figura 4.5 se muestra el espectro isótropo de energía en escala log-log para cada una de las simulaciones con rotación y para la simulación N512. Como referencia se muestra en linea punteada una pendiente de $-5/3$. Notar que para esta última simulación existe también un rango en el que el espectro es compatible con esta pendiente, es decir, se comporta como una ley de potencia con exponente $-5/3$, y los números de onda para los cuales esto ocurre son similares a los números de onda para los cuales el flujo de energía se mantiene aproximadamente constante.

En el caso del espectro anisótropo, en la figura 4.6 se muestra el espectro perpendicular para cada una de estas simulaciones y también una pendiente -2 a modo de referencia. Nuevamente, existe un rango en el que los espectros siguen una ley de potencia que, dependiendo el valor de Ω, se vuelve cada vez más empinada hasta alcanzar para Ro suficientemente pequeño un exponente compatible con -2. Esto era lo esperado según la ecuación 2.45 para el espectro perpendicular en el caso de turbulencia rotante. Observando los espectros también se puede ver que a medida que disminuye Ro, el valor del número de onda en el que cada espectro deja de satisfacer en forma aproximada la ley de potencia y comienza a decaer con otra dependencia se vuelve más chico. Esto se condice con lo observado en la figura 4.4: el rango inercial disminuye con Ro a número de Reynolds fijo, es decir, a medida que aumenta la rotación.

Los cambios en el flujo de energía y en los espectros están asociados a cambios en el flujo al aumentar la rotación. La figura 4.7 muestra un corte en el plano xy (a altura constante) de la vorticidad vertical ω_z en todas las simulaciones. Mientras que en el caso sin rotación no se observan estructuras más allá de los vórtices de pequeña escala, al aumentar Ω emergen dos grandes vórtices que llenan todo el dominio, y los vórtices en las escalas más pequeñas se ordenan

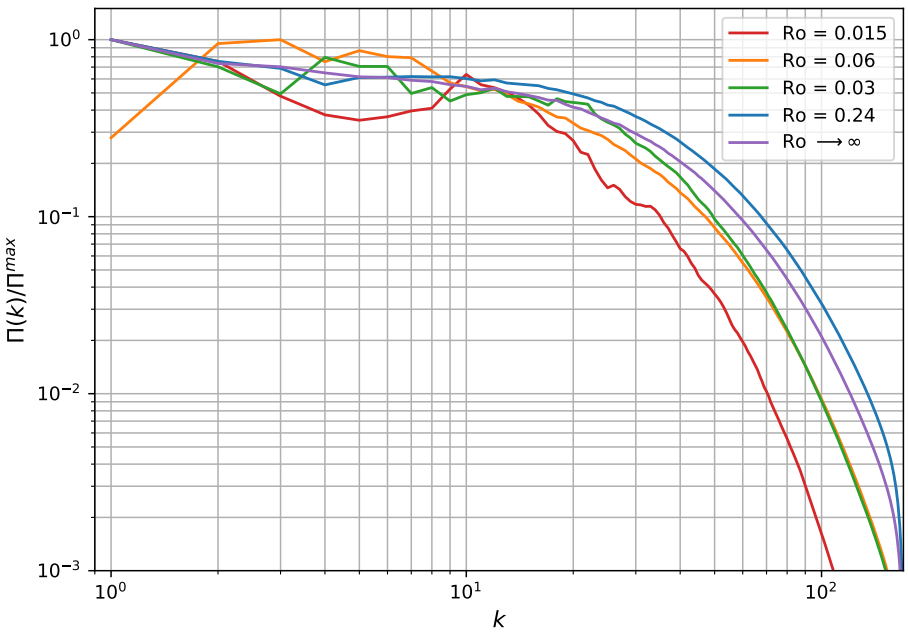

Figura 4.4: *Flujo de energía en función del número de onda k en escala log-log, normalizado por el flujo máximo (es decir, por la tasa media de disipación). Notar que existe una región en la que el flujo es aproximadamente constante. Esta región es el rango inercial.*

dentro de estas dos estructuras macroscópicas. Estos dos vórtices tienen forma de columna: cortes a diferentes alturas muestran aproximadamente la misma geometría. Así, en el caso rotante el flujo se ordena y se vuelve aproximadamente cuasi-bidimensional.

Mediante el calculo de las cantidades Eulerianas definidas en la sección 2.1 se pudo observar el efecto de la rotación en un flujo turbulento. Pudimos verificar la existencia de un rango inercial en el que el flujo de energía se mantiene aproximadamente constante y el espectro sigue una ley de potencias compatible con un exponente $-5/3$ en el caso no rotante, y con exponente -2 en el caso rotante. A continuación veremos el efecto de estos cambios en el transporte de partículas inerciales.

4.3. Dinámica de partículas

El problema del modelado de flujos multifase en presencia de rotación y gravedad es un problema de alta complejidad, como ya fue detallado en la sección 3.2. Para simplificar el sistema, en este capítulo se estudia el caso en el que $\gamma = 1$ (es decir, cuando las partículas tienen igual masa al fluido desplazado). En ese caso la gravedad y la fuerza centrífuga se anulan, y las partículas pueden ser integradas por tiempos largos ya que su evolución no depende de la posición del eje de rotación. Las partículas fueron inyectadas en el flujo al haber alcanzado un estado turbulento estacionario, con las condiciones iniciales dadas por la simulación N512 detallada en la sección anterior, o por las simulaciones 015 a 24 en el caso con rotación. En cada flujo se inyectaron dos tipos de partículas (con un millón de partículas en cada caso): partículas con número de Stokes $St = 0,3$ (es decir, con menos inercia o con tiempo de respuesta más corto que el tiempo de Kolmogorov), y partículas con $St = 3$ (con más inercia o con $\tau_p > \tau_\eta$). Para entender

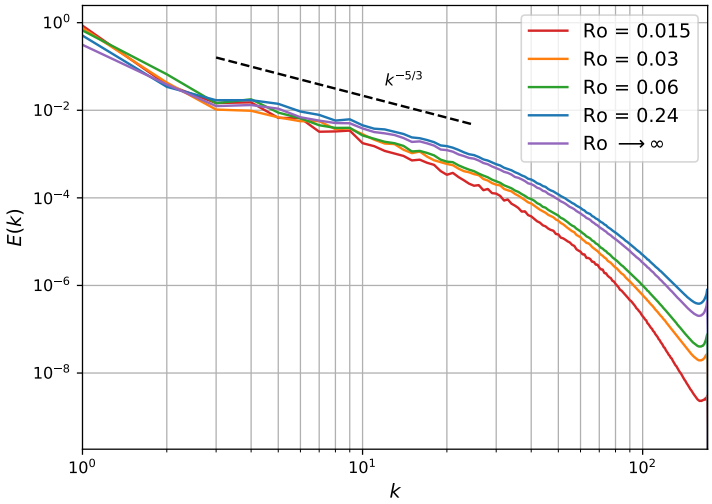

Figura 4.5: *Espectro de energía isótropo para las simulaciones con rotación, cuyos parámetros se encuentran en la tabla 4.2, y también para la simulación N512. Se observa un marcado cambio en la pendiente del espectro con Ro*

las características del movimiento de las partículas en el flujo turbulento rotante se realizaron estudios que se detallan a continuación.

Nombre	N^3	ν	f_0	Ro	Re	Ω	St
015-03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.015	43340	8	0.3
015-3	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.015	34809	8	3
03-03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.03	33471	4	0.3
03-3	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.03	26481	4	3
06-03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.06	33907	2	0.3
06-3	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.06	34092	2	3
24-03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.24	15898	0.5	0.3
24-3	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	0.24	13801	0.5	3
00-03	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	∞	13380	0	0.3
00-3	512^3	$5{,}4 \times 10^{-4}$	0.492	∞	14640	0	3

Tabla 4.3: *Parámetros de las simulaciones con partículas con distinto número de Rossby Ro, y número de Stokes St, para número de Reynolds fijo Re. Ω es la velocidad de rotación en el eje z, N es la resolución espacial, ν es la viscosidad cinemática y f_0 la intensidad del forzado.*

4.3.1. Tiempo de correlación y distribuciones del desplazamiento

Se calcularon los tiempos de correlación T_{cor} para las partículas en cada una de las simulaciones de la tabla 4.3. Estos se definen como el tiempo que tarda la función de correlación en caer hasta $1/e$ de su valor inicial y permiten estimar la memoria del sistema, es decir, durante cuanto tiempo el sistema se mantiene correlacionado.

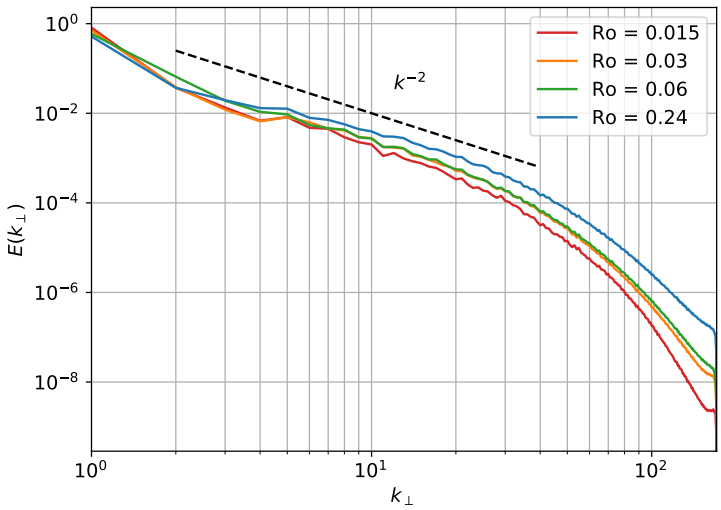

Figura 4.6: *Espectro de energía perpendicular para las simulaciones con rotación. Se muestra como referencia la ley de potencias de la ecuación (2.45).*

La función de correlación de las partículas se define como

$$C(\tau) = \langle \mathbf{v}(t+\tau) \cdot \mathbf{v}(t) \rangle, \tag{4.1}$$

donde τ es el incremento en el tiempo, y el promedio se toma sobre las partículas y sobre el tiempo de evolución del sistema t. En lugar de usar las tres componentes cartesianas de la velocidad, podemos usar también $\langle v_z(t+\tau) v_z(t) \rangle$ para construir una función de correlación con la componente paralela al eje de rotación, y $\langle \mathbf{v}_\perp(t+\tau) \cdot \mathbf{v}_\perp(t) \rangle$ para construir una función de correlación con las componentes de la velocidad perpendiculares a este eje. De ambas se obtienen entonces tiempos de correlación paralelos y perpendiculares, respectivamente.

En la figura 4.8 se muestran los tiempos de correlación de todas las simulaciones en función de Ro, para los dos valores utilizados de St. Notar que para $St = 0{,}3$, el tiempo de correlación paralelo primero crece y luego disminuye, y el tiempo perpendicular crece en función de Ro. Para $St = 3$, en el caso paralelo primero disminuye y luego crece, y en el caso perpendicular pasa lo opuesto, crece y luego disminuye. También se puede notar que los tiempos paralelo y perpendicular en el caso del mayor número de Rossby son similares (como resultado de la mayor isotropía), lo que no sucede para Ro más pequeño. El aumento del tiempo paralelo al aumentar la rotación (Ro más chico) indica que las partículas encuentran las estructuras rotantes. Si quedan atrapadas en estas estructuras, mantendrán su correlación por tiempos más largos. En resumen, partículas inerciales en las simulaciones con más rotación tienen tiempos de correlación menores en la dirección perpendicular (por los vórtices cuasi-bidimensionales, y probablemente por efecto de la fuerza de Coriolis), pero tiempos mayores en la dirección paralela (por la presencia con estructuras con forma de columna, que introduce una memoria más larga en el flujo).

El tiempo de correlación permite distinguir entre dos regímenes: uno inicial en el que las partículas están altamente correlacionadas, a tiempo $t \ll T_{cor}$, y uno posterior, en el cual las partículas ya perdieron la correlación inicial, para tiempos $t \gg T_{cor}$. Se eligieron instantes

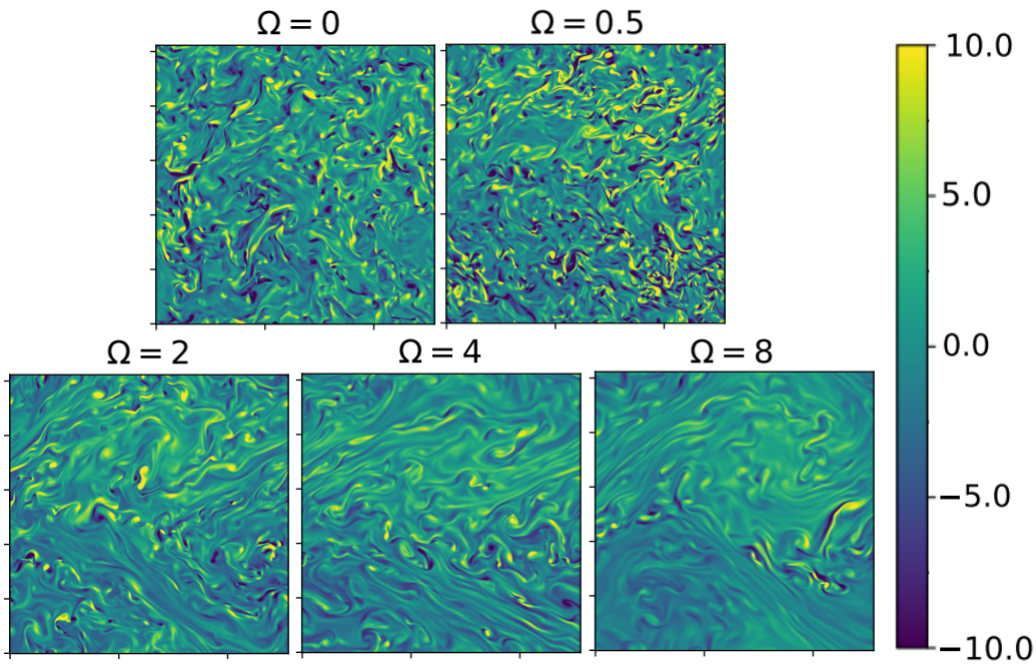

Figura 4.7: *Mapas de la componente z de la vorticidad, ω_z, en el plano xy para los distintos valores de Ω. Notar que en la simulación sin rotación el flujo está completamente desordenado, es decir, no se observan estructuras a gran escala. A medida que aumenta la vorticidad, comienzan a aparecer estas estructuras características del flujo turbulento sometido a rotación. En la figura correspondiente a la simulación con mayor velocidad de rotación se pueden ver claramente dos estructuras de tamaño del orden a la mitad del recinto, una con vorticidad positiva en la esquina superior derecha del mapa y otra con vorticidad negativa hacia la esquina inferior izquierda.*

temporales en cada uno de estos regímenes (lo suficientemente alejados de T_{cor} para despreciar variaciones de este tiempo con Ro), y para cada uno de ellos se calcularon las distribuciones de densidad de probabilidad (PDF) del desplazamiento de las partículas paralelo y perpendicular al eje de rotación. Es decir, se calcularon los desplazamientos de las partículas respecto a sus posiciones iniciales

$$r_{\parallel} = |z(t_0+\tau) - z(t_0)|, \quad r_{\perp} = [(x(t_0+\tau) - x(t_0))^2 + (y(t_0+\tau) - y(t_0))^2]^{1/2}, \tag{4.2}$$

donde t_0 es un tiempo inicial. Más adelante usaremos estas cantidades también para calcular desplazamientos cuadráticos medios y estimar la difusión: $\delta r_{\parallel}^2 = \langle r_{\parallel}^2 \rangle$, y $\delta r_{\perp}^2 = \langle r_{\perp}^2 \rangle$.

Los resultados para las simulaciones con $St = 0{,}3$ se muestran en la figura 4.9 y para las simulaciones con $St = 3$ en la figura 4.10. Para $St = 0{,}3$, a $t < T_{corr}$ ($t = 0{,}15$) las partículas se comienzan a dispersar, aunque recorren distancias cortas. Las partículas se desplazan más en la dirección perpendicular que la paralela, y aún a tiempos cortos es más probable encontrar partículas que se desplazaron mucho en $r_{\perp}$ a medida que Ro disminuye. Esto puede entenderse mirando los flujos cuasi-bidimensionales que se observan en los cortes horizontales del flujo. A tiempos largos, es decir $t > T_{corr}$ ($t = 10{,}5$), el desplazamiento cambia notablemente en el plano perpendicular, las partículas se desplazan distancias mucho mayores y la PDF se mantiene casi constante en un rango grande de desplazamientos, es decir, hay similar cantidad de partículas desplazándose distancias muy distintas. Además, a medida que aumenta la rotación, las partí-

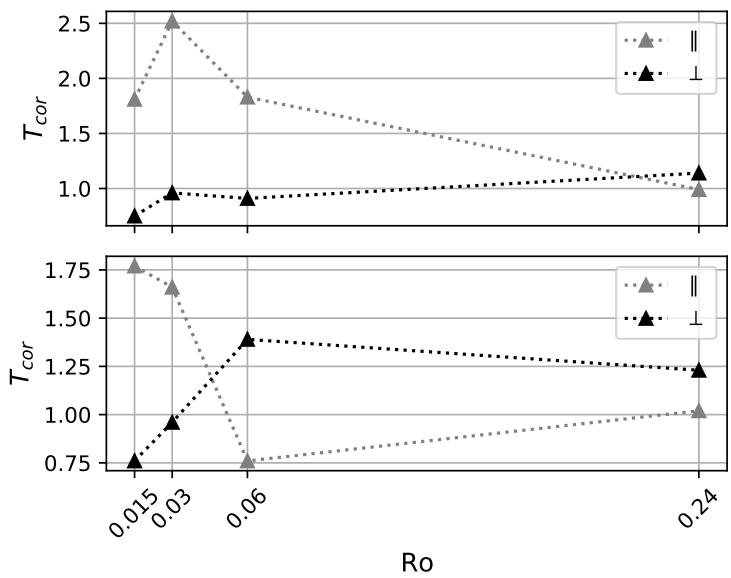

Figura 4.8: *Tiempo de correlación en función de Ro. La figura superior corresponde a las simulaciones con $St = 0{,}3$ y la inferior a $St = 3$. En gris, el tiempo de correlación asociado a la velocidad de las partículas en el plano perpendicular (xy) al eje de rotación y en negro, el asociado a la velocidad paralela (z)*

culas recorren mayores distancias en esta dirección. En el caso paralelo la dinámica a tiempos largos es similar a la de tiempos cortos, con la diferencia que las partículas llegan a recorrer distancias más grandes si la rotación es muy intensa. En efecto, el cambio más notorio se ve en la simulación con mayor rotación ($Ro = 0{,}015$), para la cual disminuye la cantidad de partículas que se desplazan distancias despreciables en el eje z y aumenta la cantidad de partículas que recorren distancias mayores. Esto puede deberse a que a rotación alta, las estructuras con forma de columna son muy importantes y pueden atrapar a las partículas e impulsarlas en la dirección z, además de aumentar su distancia recorrida en el plano xy. El caso con $St = 3$ es muy similar, indicando que en este caso los términos de masa agregada y de Coriolis son los dominantes en la dinámica.

Pudimos observar entonces que la dinámica de las partículas a tiempos cortos es diferente a la de tiempos largos, y que estas diferencias se acentúan al aumentar la rotación. En particular, se observó que el tiempo de correlación paralelo en general aumenta con la rotación mientras que el tiempo perpendicular disminuye. Esto está relacionado con que el flujo mismo tiene diferentes tiempos de correlación en presencia de rotación, y la cuasi-bidimensionalidad del flujo introduce necesariamente una memoria de largo plazo en las estructuras en la dirección paralela al eje de rotación. Además, pudimos notar a partir de las PDFs de desplazamiento que las partículas recorren distancias más grandes en el plano perpendicular.

4.3.2. Desplazamiento cuadrático medio

Se estudiaron también los desplazamientos cuadráticos medios de las partículas en función del tiempo en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación. En la figura 4.11 se muestra el desplazamiento cuadrático medio en la dirección paralela, $\delta r_{\parallel}^2$, a la izquierda, y per-

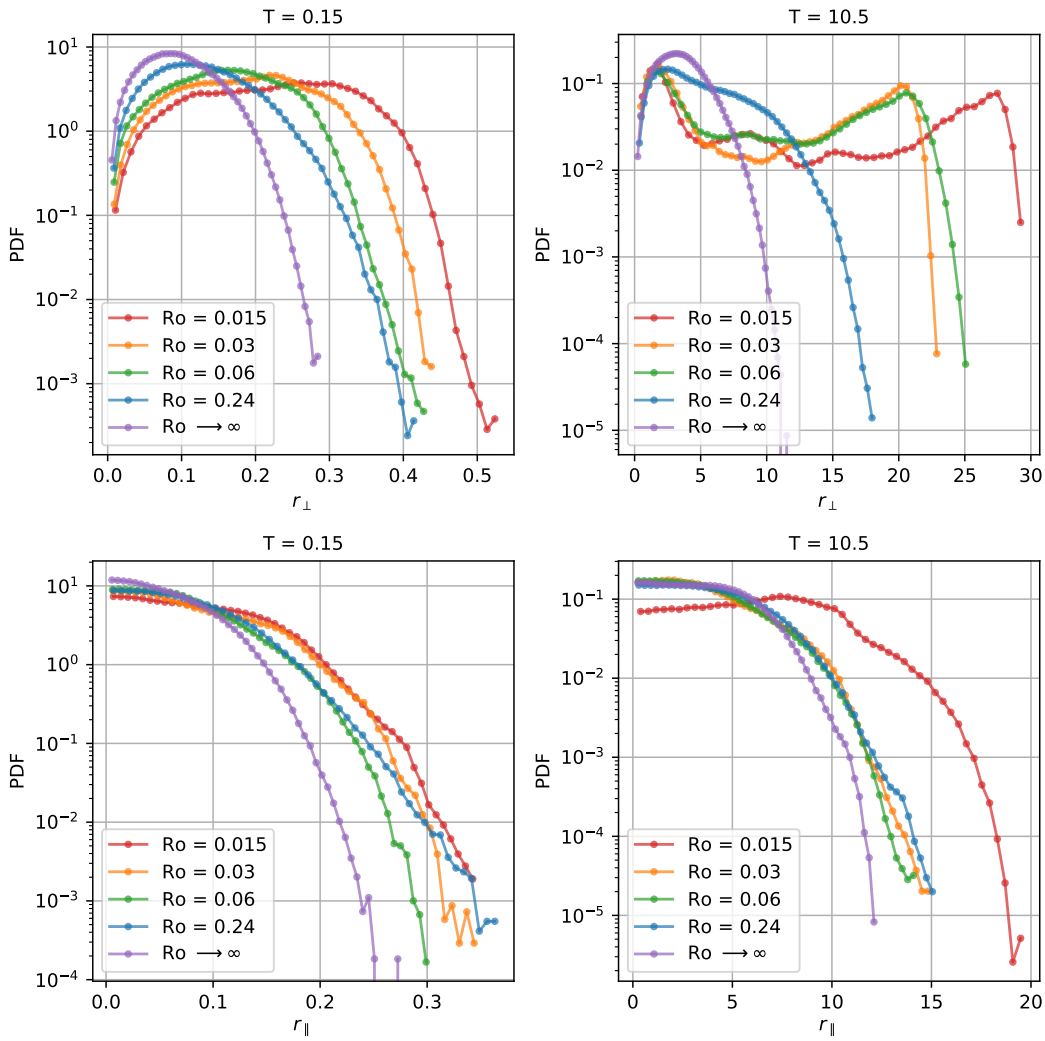

Figura 4.9: *Distribuciones de probabilidad (PDFs) de desplazamiento de las partículas para distintos Ro con $St = 0{,}3$. La fila superior corresponde al desplazamiento $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el plano perpendicular a la rotación, y la fila inferior corresponde al desplazamiento en la dirección paralela $r_\parallel = |z|$. La columna de la izquierda corresponde a un tiempo menor al de correlación, y la derecha a uno mayor.*

pendicular, $\delta r_\perp^2$, a la derecha. La fila superior corresponde a $St = 0{,}3$ y la fila inferior a $St = 3$. Se muestran también como referencia en linea punteada las pendientes 1 y 2. Estas pendientes corresponden, respectivamente, a desplazamientos para difusión Browniana y movimiento balístico. En el primer caso (esperado en turbulencia isótropa y homogénea para tiempos largos), el desplazamiento crece como en un camino al azar con $\delta r \sim t^{1/2}$, y el desplazamiento cuadrático como $\delta r \sim t$. En el segundo caso, esperado para tiempos cortos, las partículas se desplazan aproximadamente en movimiento rectilíneo uniforme dada la velocidad inicial del remolino en el que se encuentran sumergidas y $\delta r \sim t$, por lo que $\delta r^2 \sim t^2$. Se puede observar que a tiempos cortos, las partículas tienen un comportamiento de tipo balístico, es decir, siguen una ley de potencia con exponente 2. A $t \approx T_{cor}$ el comportamiento cambia. Para números de Rossby grandes (rotación pequeña) la dispersión horizontal cambia su pendiente y se acerca a un comportamiento tipo difusivo, con $\delta r_\perp \sim t$, para ambos valores de Stokes considerados. Pero para números de Rossby pequeños (rotación fuerte) la dispersión perpendicular parece acelerarse y volverse más

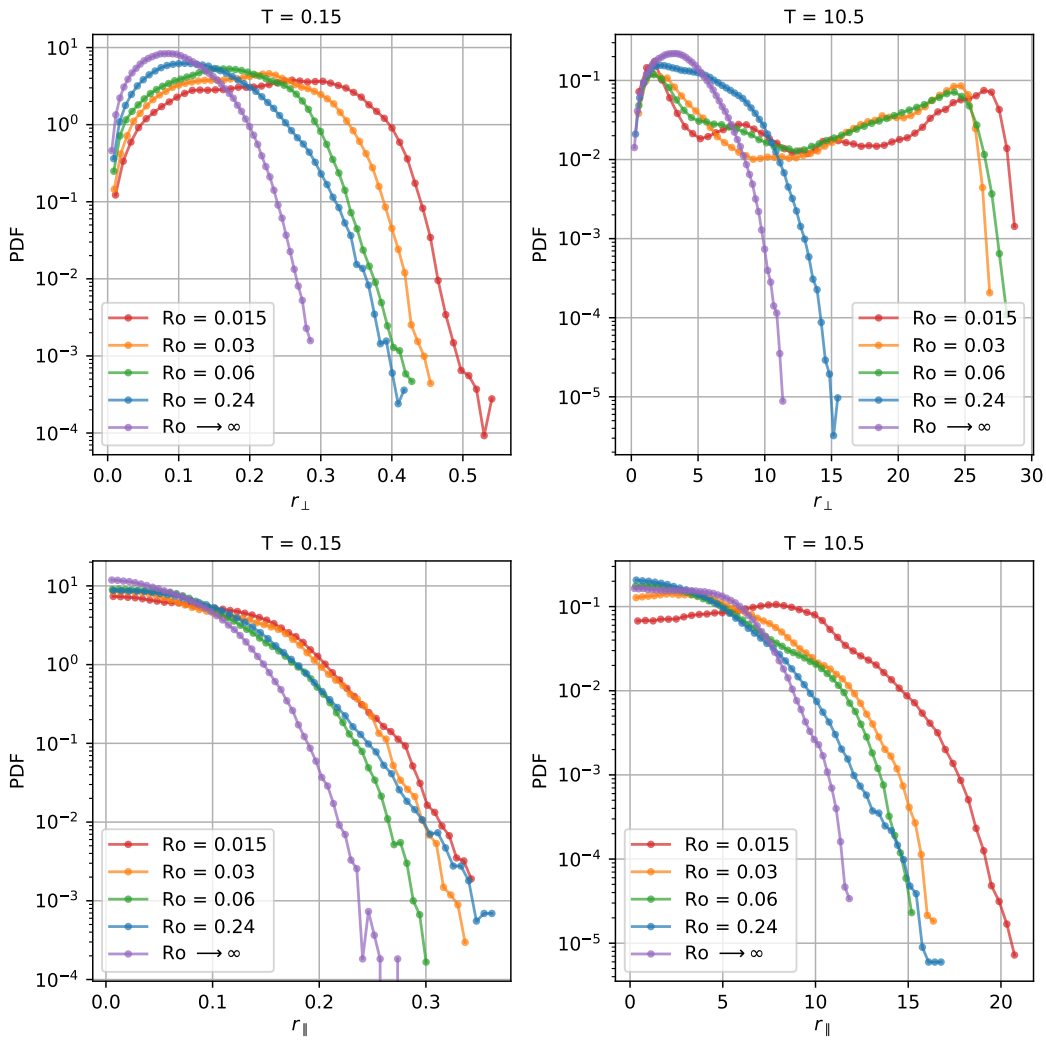

Figura 4.10: *PDFs para distintos Ro para partículas con $St = 3$. La fila superior corresponde al desplazamiento $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el plano perpendicular a la rotación y la fila inferior corresponde al desplazamiento en la dirección paralela $r_\parallel = |z|$. La columna de la izquierda corresponde a un tiempo menor al de correlación y la derecha a uno mayor.*

rápida que balística. Eso se puede deber a la aparición de un flujo ordenado y muy energético en el plano xy como resultado de la rotación, y también puede estar indirectamente asociado al efecto de la fuerza de Coriolis. En la dirección paralela al eje de rotación la dependencia con Ro no es tan clara (aunque mayor rotación resulta sistemáticamente en mayores desplazamientos). Es probable que sea necesario integrar a las partículas por tiempos más largos para observar un cambio en esta dirección, considerando que $\delta r_\parallel^2$ corresponde a un desplazamiento cuadrático medio en una dimensión, para el que se puede necesitar mayor estadística. Todas estas observaciones son compatibles, además, con las observaciones realizadas en la sección anterior a partir de las PDFs de desplazamientos.

Mediante el cálculo del desplazamiento cuadrático medio se pudo observar un comportamiento balístico para tiempos cortos $t \lesssim T_{cor}$ y comportamiento de movimiento al azar para tiempos largos $t \gtrsim 10T_{cor}$ en las simulaciones con mayor Ro. En las simulaciones con rotación fuerte esto no se llega a observar, y se observa en cambio un desplazamiento super-balístico en la dirección

perpendicular, A futuro, se estudiará si este cambio ocurre también en tiempos posteriores en la dirección paralela al eje de rotación.

4.4. Estudio de acumulación preferencial

En la sección 3.4 se introdujo una herramienta para el estudio sistemático de acumulación preferencial de partículas. En esta sección se presentan los resultados de dicho estudio para cada una de las simulaciones cuyos parámetros se detallan en la tabla 4.3. Como fue mencionado en la sección 3.4, para saber si en el sistema se forman clusters se comparan los volúmenes de las celdas de Voronoï de las partículas con aquellos generados por un RPP.

Se realizaron diagramas de Voronoï para cada una de las simulaciones con partículas en tiempos mayores al tiempo de correlación, $T \approx 20$. A partir de estos diagramas se calcularon las densidades de distribución de probabilidad de los volúmenes de las celdas de Voronoï, que se pueden observar en la figura 4.12. En esta figura se muestra también la PDF de un RPP según la ecuación (3.12), con los parámetros allí detallados. Se puede notar que todas las simulaciones tienen PDFs con diferencias despreciables entre sí. Existe una variación respecto del RPP para los volúmenes más pequeños pero esta diferencia no es muy grande y no permite concluir que haya acumulación preferencial de partículas.

Este resultado es sorprendente, por un lado por la independencia de las PDFs con el número de Stokes (aún en ausencia de rotación), y por otro por la independencia con el número de Rossby. La exploración visual de las partículas en el espacio confirma que la formación de clusters es nula o inexistente. ¿A qué se debe esto? Por un lado, estamos considerando partículas con flotación neutra ($\gamma = 1$) con efecto de masa agregada. En este régimen este término es dominante. Es probable que se necesiten partículas más pesadas para observar concentración preferencial en este caso, de forma tal que la contribución del término de arrastre de Stokes se vuelva más importante. Por otro, la fuerza de Coriolis aunque es una fuerza ficticia, esta no corresponde a un potencial central. Se sabe que la presencia de una aceleración en el sistema (como la aceleración de la gravedad [10]) puede aumentar la formación de clusters. El caso de partículas más pesadas o más livianas que el fluido también haría importante el efecto de la fuerza centrífuga, que puede jugar un rol similar al de la gravedad en otros sistemas. Sin embargo, estos casos también son difíciles de estudiar, ya que las condiciones de contorno periódicas hacen que sea necesario remover las partículas que llegan al borde del recinto, o detener la integración numérica en ese momento. El estudio de estos casos se deja para el futuro.

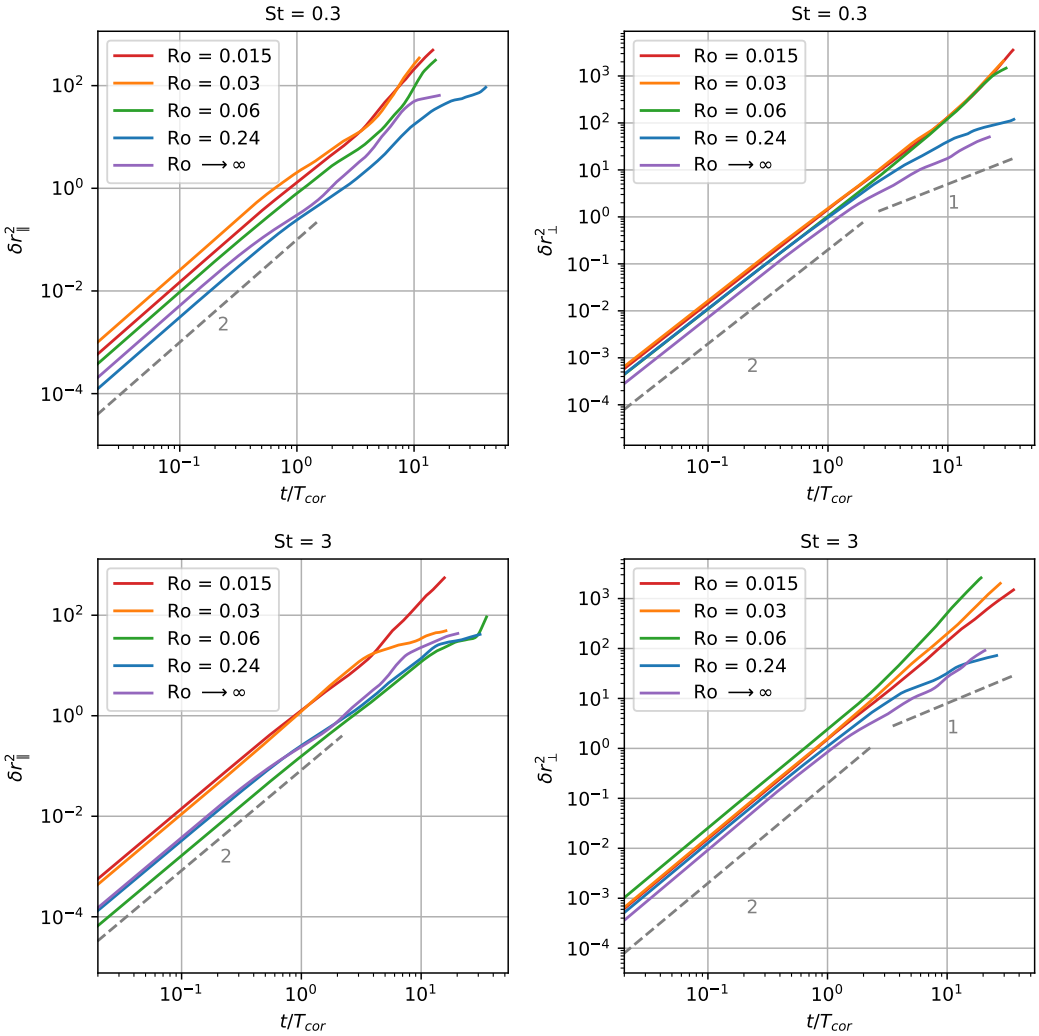

Figura 4.11: *Desplazamiento cuadrático medio en función del tiempo normalizado por el tiempo de correlación, T_{cor}. A la derecha $\delta r_{\parallel}^2$ y a la izquierda $\delta r_{\perp}^2$. Las figuras de la fila superior son para partículas con $St = 0{,}3$ y la fila inferior para partículas con $St = 3$. Como referencia se muestran en linea punteada pendientes iguales a 1 y 2. Se puede observar que el comportamiento a tiempos cortos es de tipo balístico y luego, a tiempos largos, se observa un comportamiento típico de camino al azar para las simulaciones con mayor Ro en la dirección perpendicular al eje de rotación.*

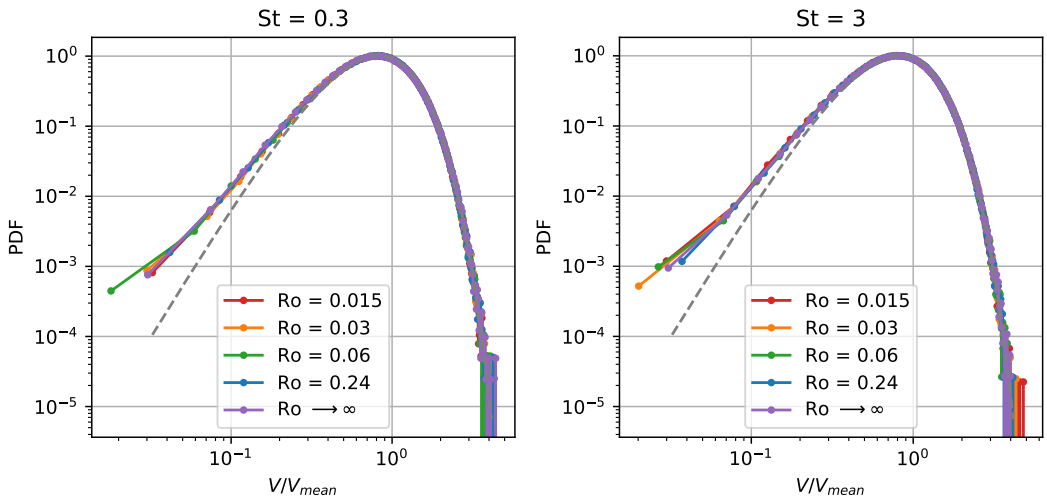

Figura 4.12: *PDFs de volúmenes de celdas de Voronoï para distintos Ro. A la izquierda para el caso con $St = 0{,}3$ y a la derecha para $St = 3$. En linea punteada la referencia para un RPP. No se observa acumulación preferencial significativa en ninguno de los casos, ni una dependencia con el número de Rossby.*

CAPÍTULO 5

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se estudió la dinámica de partículas inerciales en flujos turbulentos rotantes. El estudio se realizó mediante simulaciones numéricas directas utilizando el software GHOST que integra las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de Maxey-Riley para la trayectoria de las partículas, considerando los términos de masa agregada. Se utilizaron condiciones de contorno periódicas y un forzado de fase aleatoria de intensidad contante para generar la turbulencia. En una primera instancia se realizaron simulaciones con 128^3, 256^3 y 512^3 puntos de grilla sin rotación y sin partículas, que se dejaron evolucionar hasta llegar a un estado turbulento estadísticamente estacionario. Estas permitieron ajustar los parámetros para que todas las escalas del problema estén bien resueltas.

Como parte de esta tesis se modificó el código GHOST para que calcule los efectos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga en la trayectoria de las partículas. Para validar estas modificaciones se realizaron dos simulaciones para una partícula con el fluido en reposo en el sistema rotante: una con $\gamma = 1$ y $St \to \infty$ en donde solo entra en juego la fuerza de Coriolis y otra con $\gamma = 2$ con $g = 0$ y $St \to \infty$ despreciando la fuerza de Coriolis, por lo que solo entra en juego la fuerza centrífuga. En estos casos la trayectoria fue obtenida de manera analítica y comparada con la que resulta de la simulación, lo que permitió confirmar que el código implementado es válido para el sistema que se quiere describir, dentro del rango de validez de las aproximaciones realizadas para derivar las ecuaciones de la dinámica de partículas.

Luego, se realizaron simulaciones con 512^3 puntos de grilla con distintos números de Rossby que permitieron estudiar cómo afecta la rotación al flujo y a las partículas. Sin observar las partículas, pudimos verificar la existencia de un rango inercial en el que el flujo de energía se mantiene aproximadamente constante y el espectro sigue una ley de potencias compatible con un exponente $-5/3$ en el caso no rotante, y con exponente -2 en el caso rotante. También se pudo observar la presencia de columnas de vorticidad a gran escala que tienen mayor tamaño a medida que disminuye el número de Rossby. Esto resulta en una fuerte anisotropía en los flujos rotantes.

En cada una de estas simulaciones con 512^3 puntos de grilla se inyectaron 10^6 partículas con

masa igual a la del fluido desplazado, y radio tal que sus números de Stokes fueron $St = 0,3$ y 3. Pudimos observar que la dinámica de las partículas a tiempos cortos es diferente a la de tiempos largos, y que estas diferencias se acentúan al aumentar la rotación. Se observó que el tiempo de correlación de la velocidad de las partículas paralela al eje de rotación en general aumenta con la rotación, mientras que el tiempo perpendicular disminuye. Esto está relacionado con que el flujo mismo tiene diferentes tiempos de correlación en presencia de rotación, y la cuasi-bidimensionalidad del flujo introduce necesariamente una memoria de largo plazo en las estructuras en la dirección paralela al eje de rotación. Se calcularon además las distribuciones de probabilidad del desplazamiento de las partículas para tiempos largos y pudimos notar que las partículas recorren distancias más grandes en el plano perpendicular al eje de rotación a medida que aumenta la rotación. No se encontraron diferencias significativas con respecto al número de Stokes, lo que indica que los términos de masa agregada y de Coriolis son los dominantes en la dinámica en los casos considerados.

A partir del cálculo del desplazamiento cuadrático medio de las partículas pudimos notar un comportamiento balístico para tiempos menores al tiempo de correlación, y un comportamiento de difusión al azar para tiempos mayores al tiempo de correlación en las simulaciones con mayor Ro. En las simulaciones con rotación fuerte esto no se llega a observar, y se observa en cambio un desplazamiento súper-balístico en la dirección perpendicular.

Se realizaron diagramas de Voronoï para las posiciones de las partículas para cada una de las simulaciones en tiempos mucho mayores al tiempo de correlación. A partir de estos diagramas se calcularon las funciones de distribución de probabilidad de los volúmenes de las celdas de Voronoï. Las distribuciones calculadas se compararon con la obtenida a partir de un proceso aleatorio de Poisson, correspondiente a una distribución uniforme de partículas sin acumulación. Se encontró que todas las simulaciones tienen distribuciones de probabilidad con diferencias despreciables entre sí y con respecto a la distribución uniforme de partículas. Existe una variación respecto del proceso de Poisson para los volúmenes más pequeños pero esta diferencia no es muy grande y no permite concluir que haya acumulación preferencial de partículas. Este resultado es independiente del número de Stokes y del número de Rossby. Mediante exploración visual de las partículas en el espacio se confirmó que la formación de clusters es muy débil o inexistente. Esto puede deberse a que se consideraron partículas con flotación neutra con efecto de masa agregada. En este régimen, el término de masa agregada es dominante. Es probable que se necesiten partículas más pesadas para observar concentración preferencial, de forma tal que el término de arrastre de Stokes se vuelva más importante. Por otro lado, existe evidencia de que la presencia de una aceleración en el sistema favorece la formación de clusters. En este caso no se está considerando la aceleración de la gravedad y, si bien se considera la fuerza de Coriolis, esta no corresponde a un potencial central. En el caso de partículas más livianas o más pesadas que el fluido el efecto de la fuerza centrífuga se vuelve importante y puede jugar un rol similar al de la gravedad en otros sistemas. Sin embargo, estos casos tienen una dificultad adicional asociada a que las condiciones de contorno periódicas hacen que sea necesario remover las partículas que llegan al borde del recinto o detener la integración numérica en ese momento.

A futuro se continuará este estudio ampliando el espacio de parámetros. Se estudiará el caso de partículas más livianas y más pesadas que el fluido, variando el parámetro γ. Se considera-

rán distintos valores del número de Stokes, en particular valores más grandes para el caso de partículas neutralmente flotantes. También se utilizarán distintos valores del número de Rossby, considerando la acumulación preferencial de partículas en cada uno de estos casos.

Bibliografía

[1] N. Sujovolsky and P. Mininni. Vertical dispersion of lagrangian tracers in fully developed stably stratified turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, 4, 2019.

[2] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, and J. Pinton. Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 2001.

[3] H. Dumitrescu, V. Cardos, A. Dumitrache, and F. Frunzulică. The laminar boundary layer on a rotating wind turbine blade. *AIAA*, 2, 2010.

[4] S. Barnes. An assessment of the rotation rates of the host stars of extrasolar planets. 561, 2001.

[5] P. Davidson. Turbulence: An introduction for scientists y engineers. 2004.

[6] L. Biferale, F. Bonaccorso, I. M. Mazzitelli, M. van Hinsberg, A. Lanotte, S. Musacchio, P. Perlekar, and F. Toschi. Coherent structures and extreme events in rotating multiphase turbulent flows. *Physical Review X*, 6, 2016.

[7] A. Sen, P. Mininni, D. Rosenberg, and A. Pouquet. Anisotropy and nonuniversality in scaling laws of the large-scale energy spectrum in rotating turbulence. *Physical review. E*, 86, 2012.

[8] D. Oks, P. Mininni, R. Marino, and A. Pouquet. Inverse cascades and resonant triads in rotating and stratified turbulence. *Physics of Fluids*, 29(11), 2017.

[9] M. Obligado, T. Teitelbaum, A. Cartellier, P. Mininni, and M. Bourgoin. Preferential concentration of heavy particles in turbulence. *Journal of Turbulence*, 15(5), 2014.

[10] F. Falkinhoff, M. Obligado, M. Bourgoin, and P. Mininni. Preferential concentration of free-falling heavy particles in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 125, 2020.

[11] M. Maxey and J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26, 1983.

[12] R. Monchaux, M. Bourgoin, and A. Cartellier. Preferential concentration of heavy particles: A voronoï analysis. *Physics of Fluids*, 22, 2010.

[13] J. Vassilicos and S. Coleman. A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous, isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 21(11), 2009.

[14] U. Frisch. Turbulence: The legacy of a. n. kolmogorov. *Journal of Fluid Mechanics*, 317, 1996.

[15] L. Richardson. *Weather prediction by numerical process.* Cambridge university press, 2007.

[16] M. Buzzicotti, L. Biferale, U. Frisch, and S. Ray. Intermittency in fractal fourier hydrodynamics: Lessons from the burgers equation. *Phys. Rev. E*, 93, 2016.

[17] P. Mininni. Scale interactions in magnetohydrodynamic turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43(1):377–397, 2011.

[18] T. Auton, J. Hunt, and M. Prud'Homme. The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform ratational flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 197, 1988.

[19] G. H. Yeoh and J. Tu. *Computational techniques for multiphase flows.* Butterworth-Heinemann, 2019.

[20] M. van Hinsberg, H. Clercx, and F. Toschi. Enhanced settling of nonheavy inertial particles in homogeneous isotropic turbulence: The role of the pressure gradient and the basset history force. *Phys. Rev. E*, 95, 2017.

[21] M. van Aartrijk and H. Clercx. Vertical dispersion of light inertial particles in stably stratified turbulence: The influence of the basset force. *Physics of Fluids*, 22(1), 2010.

[22] N. Mordant and J. F. Pinton. Velocity measurement of a settling sphere. *The European Physical Journal B*, 18, 2000.

[23] M. Maxey. The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. *Journal of Fluid Mechanics*, 174, 1987.

[24] R. Monchaux, M. Bourgoin, and A. Cartellier. Analyzing preferential concentration and clustering of inertial particles in turbulence. *Int. J. Multiph. Flow*, 40, 2012.

[25] J. Pedlosky. Geophysical fluid dynamics 2da ed. 1987.

[26] P. Mininni, D. Rosenberg, R. Reddy, and A. Pouquet. A hybrid mpi-openmp scheme for scalable parallel pseu- dospectral computations for fluid turbulence. *Parallel Computing*, 37, 2010.

[27] D. Rosenberg, P. Mininni, R. Reddy, and A. Pouquet. Gpu parallelization of a hybrid pseudospectral geophysical turbulence framework using cuda. *Atmosphere*, 11, 2020.

[28] G. Patterson and S. Orszag. Spectral calculations of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interactions. *Physics of Fluids*, 14, 1971.

[29] C. Canuto, M. Yousuff Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang Jr. Spectral methods in fluid dynamics. *Applied Mathematical Modelling*, 15, 1988.

[30] A. Pouquet and G. Patterson. Numerical simulation of helical magnetohydrody- namic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 85, 1978.

[31] P. Yeung. Direct numerical simulation of two-particle relative diffusion in isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 6, 1994.

[32] M. Tanemura. Statistical distributions of poisson voronoï cells in two and three dimensions. *Forma*, 18, 2003.

[33] M. Uhlmann. Voronoï tessellation analysis ofsets ofrandomly placed finite-size spheres markus. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 555, 2020.

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2021