



DOS CAMPOS DE GAUGE ABELIANOS EN  $d = 2 + 1$  CON  
GAUGE-MIXING Y CAMPOS DE MATERIA

ALAN RAPOPORT

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Director: Dr. Fidel A. Schaposnik

Marzo 2020



TEMA: Dos campos de gauge abelianos en  $d = 2 + 1$  con gauge-mixing y campos de materia

ALUMNO: Alan Rapoport

LU N° : 675/14

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata

DIRECTOR DEL TRABAJO: Prof. Fidel A. Schaposnik

FECHA DE INICIACION: Abril de 2019

FECHA DE FINALIZACION: Marzo de 2020

FECHA DE EXAMEN: 27 de marzo de 2020

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesor de Tesis de Licenciatura

---

Jurado



*A mi madre,  
a mi padre,  
a mi familia,  
a mis amigos.*



## RESUMEN

En la presente tesis estudiamos una teoría de gauge abeliana en  $d = 2 + 1$  dimensiones con dos sectores. Uno de ellos, que puede considerarse como el sector *visible*, contiene sólo un campo de gauge abeliano que actuará como campo de prueba para el otro sector (*oscuro* o *escondido*), el cual incluye otro campo de gauge abeliano, un campo escalar masivo, y dos fermiones de Dirac. Las derivadas covariantes de los campos de materia y un término BF de *gauge-mixing* combinan estos dos sectores. La integración funcional sobre los campos fermiónicos conduce a una teoría efectiva con interacciones de Chern-Simons que admite soluciones tipo vórtices en ambos sectores. Estudiamos las soluciones numéricamente, que en el caso general corresponden a vórtices cargados eléctricamente, excepto para un valor crítico de la constante de acoplamiento BF en la que únicamente existen vórtices puramente magnéticos.

Está probado que una teoría de campos de gauge y materia en  $d = 4$  dimensiones deviene, a altas temperaturas, en una teoría en  $d = 3$  dimensiones. Desde este punto de vista, los resultados de nuestra acción efectiva pueden ser de interés en relación al área de materia oscura.

Existe también una conexión entre nuestro modelo y resultados recientes en el tema de orden topológico en sistemas de materia condensada en  $d = 3$  dimensiones, en particular en relación al trabajo de Metlitski y Vishwanath [31] sobre aisladores topológicos bosónicos con efectos magnetoeléctricos, en el cual se utiliza una acción efectiva que puede ser ligada a la que presentamos en este trabajo.

## ABSTRACT

In the present thesis we study an abelian gauge theory in  $d = 2 + 1$  dimensions with two sectors. One of them, which can be considered as the *visible* sector, contains just a abelian gauge field which will act as a probe for the other (*hidden*) sector, which includes another abelian gauge field, a massive scalar field and two Dirac fermions. Covariant derivatives of the matter fields and a BF gauge mixing term couple these two sectors. Integration over fermionic fields leads to an effective theory with Chern-Simons interactions that admits vortex-like solutions in both sectors. We study the solutions numerically, which in the general case correspond to electrically charged vortices, except for a critical value of the BF coupling constant at which solely purely magnetic vortices exist.

It is known that a theory of gauge and matter fields in  $d = 4$  dimensions becomes, at high temperatures, a theory in  $d = 3$  dimensions.

From this point of view, the results of our effective action may be of interest in relation to dark matter research.

There is also a connection between our model and recent results in the field of topological order in condensed matter systems in  $d = 3$  dimensions, in particular in relation to the work of Metlitski and Vishwanath [31] on bosonic topological insulators with magnetoelectric effects, in which it is used an effective action which can be linked to the one presented in this work .



*Nature seems to take advantage of the simple mathematical representations of the symmetry laws. When one pauses to consider the elegance and the beautiful perfection of the mathematical reasoning involved and contrast it with the complex and far-reaching physical consequences, a deep sense of respect for the power of the symmetry laws never fails to develop.*

— Chen-Ning Yang

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecerle a Fidel por haber sido el principal responsable de que esta tesis tenga lugar. Desde el primer momento en que me junté con él, allá por el año 2018, me sentí bienvenido en su oficina para trabajar juntos. No sólo me llevo como aprendizaje una inmensidad de conceptos de teoría cuántica de campos, en la cual tan importantes contribuciones él hizo, sino también infinitas jocosas historias del mundo de la física, tanto Argentina como mundial. Su pasión por la investigación es no sólo contagiosa sino también inspiradora, y es por eso que quiero agradecerle haber aceptado ser mi director. Sólo espero algún día tener la oportunidad de ganar la “pelea” por la cuenta en el restaurante y poder invitarle yo un almuerzo.

Pero llegar a realizar esta tesis implica primero haber transitado por una larga y laboriosa cursada, y acá es donde mis compañeros toman protagonismo. Por un lado, me aterra pensar qué habría sido de mis cursadas de laboratorio si no hubiese sido por un compañero como Andy, con el cual congeniamos y nos complementamos como si lo hubiéramos ensayado previamente. Y a pesar de haber protestado incesablemente por los laboratorios debo reconocer que, de no haber sido por ellos, probablemente no me hubiese llevado esta amistad. Y por otro lado, agradezco a la vida haber estado en la misma órbita del grupo de Lie del fibrado principal de la carrera con alguien como Agus, con el cual hemos hecho cuatrimestres maratónicos de cursada, en los cuales lo veía más que a mi mismísima madre. Dudo llegar a conocer otra persona con la cual pueda juntarme a tomar una birra durante cinco horas, salir de joda, y que al mismo tiempo entienda chistes como el que comienza la frase anterior. Definitivamente es una de esas amistades que perduran toda la vida.

Sin duda haber llegado a esta instancia requirió esfuerzo y dedicación, pero sin un cable a tierra que te distienda, definitivamente no hay cabeza que aguante. Y este cable es mi grupo de amigos, los de la vida, con los cuales he compartido una cantidad de historias que dejarían al largo esta tesis minúsculo en comparación. Algunos aún siguen acá presentes, otros tomaron rumbos distintos en diversas partes del mundo. Pero físicamente o no, siguen presentes igual. A veces me pregunto si es común o es un privilegio encontrar un grupo de gente así, con visiones de vida tan similares y a la vez complementarias a

las de uno. Y cada vez estoy más convencido de que de un privilegio se trata. Por eso y mucho, mucho más, les digo gracias muchachos.

Y por último, quiero agradecerle a la principal responsable de que todo esto en mi vida haya sido posible, entendiéndose “todo” en el sentido más general y literal de la palabra. Esa persona que no pareciera conocer los límites de lo posible, y que a la vez no sabe hacer algo que no sea por y para mi bien. Que me dio fuerzas para seguir en todo momento, y gracias a la cual hoy soy la persona que soy. Mi mamá.

## ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Organización de la tesis	2
2	RUPTURA DE SIMETRÍA Y SOLITONES EN $d = 1 + 1$	5
2.1	Definiciones	5
2.2	Ruptura espontánea de la simetría	6
2.2.1	Simetrías discretas	6
2.2.2	Simetrías continuas	8
2.2.3	Ruptura de simetrías de gauge	10
2.3	Kinks	10
3	SOLUCIONES TIPO VÓRTICE	15
3.1	Vórtices globales	15
3.2	Modelo abeliano de Higgs	16
3.2.1	Ansatz de Nielsen-Olesen	17
3.3	Punto Bogomol'nyi, supersimetría y superconductividad	19
4	TEORÍA DE CHERN-SIMONS	23
4.1	Término de Chern-Simons	23
4.2	Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs	26
4.3	Fermiones en $d = 2 + 1$	29
4.3.1	Simetrías $\mathcal{P}$ , $\mathcal{C}$ , $\mathcal{T}$	30
4.4	Término de Chern-Simons inducido mediante cálculo perturbativo	31
5	MODELO PROPUESTO	37
5.1	Motivación	37
5.2	Especificación del modelo propuesto	38
5.2.1	Acción efectiva	39
5.2.2	Interludio	41
5.2.3	Ecuaciones resultantes	41
5.2.4	<i>Ansätze</i> y soluciones	42
5.3	Comportamiento asintótico y transiciones de fase	44
5.4	Resultados numéricos	45
6	CONCLUSIONES	51
	BIBLIOGRAFÍA	53

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Forma del potencial $V[\phi]$ para el caso $m^2 < 0$ .	9
Figura 2.2	Gráfico de la solución tipo kink. . . . .	12
Figura 2.3	Gráfico de la densidad de energía del kink. . .	12
Figura 4.1	Diagrama de Feynman de autoenergía del fotón a un loop. . . . .	34
Figura 5.1	Perfil de los campos magnéticos $B_A$ y $B_C$ para distintos valores de $m_1$ . . . . .	45
Figura 5.2	Perfil de los campos eléctricos radiales $E_A$ y $E_C$ para distintos valores de $m_1$ . . . . .	46
Figura 5.3	Perfil del módulo del campo de Higgs para distintos valores de $m_1$ . . . . .	47
Figura 5.4	Perfil de la densidad de energía para distintos valores de $m_1$ . . . . .	47
Figura 5.5	Perfil de los campos magnéticos $B_A$ y $B_C$ para distintos valores de $\varepsilon$ . . . . .	48
Figura 5.6	Perfil de los campos eléctricos radiales $E_A$ y $E_C$ para distintos valores de $\varepsilon$ . . . . .	48
Figura 5.7	Perfil del módulo del campo de Higgs para distintos valores de $\varepsilon$ . . . . .	49
Figura 5.8	Perfil de la densidad de energía para distintos valores de $\varepsilon$ . . . . .	50

# 1

## INTRODUCCIÓN

El uso de ciertas soluciones en teorías de campos llamadas *solitones* en el contexto de la física de altas energías comenzó hace más de cuatro décadas, cuando se emplearon soluciones exactas a las ecuaciones de movimiento clásicas de ciertas teorías de campo no lineales, con un enfoque semiclásico, para estudiar aspectos no perturbativos de la teoría cuántica de campos. En particular, este tipo de soluciones fue utilizada en el estudio de confinamiento en QCD (Schäfer y Shuryak [39], 't Hooft [46]), descripción de fenómenos nucleares (Skyrme [44]), y otros (Rajaraman [37]). Es relevante también en cosmología y teorías de cuerdas (Klinkhamer y Manton [27], Kogan [28], Kibble [25], Duff *et al.* [14]). Asimismo, tienen un papel importante en física de bajas energías, en particular en lo que respecta a materia condensada (para aplicaciones recientes ver, por ejemplo Emery, Kivelson y Tranquada [17], Shifman, Tallarita y Yung [42], Yan *et al.* [53] y Zhang [56]).

Por otra parte, el estudio de las soluciones tipo solitón a las ecuaciones clásicas de movimiento de teorías de campo bosónicas también ha encontrado relación con la supersimetría. Se sabía desde 1976 que, bajo ciertas circunstancias, las ecuaciones de movimiento de segundo orden que conducen a soluciones de solitón podrían reducirse a ecuaciones de primer orden más simples, también conocidas como ecuaciones BPS en honor a Bogomo'lny, Prasad y Sommerfield (ver Prasad y Sommerfield [35], Bogomol'nyi [10]), y que esta reducción estaba relacionada con la supersimetría. Esta relación tuvo mayor sustento teórico luego del trabajo de Witten y Olive [52]. Se puede consultar sobre los usos de los solitones en teorías supersimétricas en Shifman y Yung [43].

En el presente trabajo estaremos interesados en un tipo de solitones llamados *solitones topológicos*; más precisamente, en un tipo particular de ellos, llamados *vórtices* por su simetría axial. Dicha solución surge del estudio de ciertos modelos con campos escalares acoplados a campos de gauge. Por otra parte, en el caso de dimensión espacio-temporal impar estas teorías admiten lo que se conoce como *interacción de Chern-Simons*. Esta interacción es importante dado que otorga una alternativa al mecanismo de Higgs para la generación de masa de campos de gauge. Por otra parte, este término también es importante en el estudio de teorías fermiónicas en  $d = 2 + 1$  dimensiones, ya que aparece al calcular la acción efectiva que resulta de integrar los fermiones a primer orden en la energía. Cabe destacar que la física planar de  $d = 2 + 1$  no sólo es relevante para describir fenómenos de superficie en materia condensada, sino que también se puede

aplicar al estudio de teorías efectivas en  $d = 3 + 1$  en el límite de altas temperaturas. Además, en materia condensada, el término de Chern-Simons ha resultado de gran utilidad en el estudio del efecto Hall cuántico, como se discute en Zhang [55] (ver Tong [47] para una revisión general de la teoría), superconductividad de anyones (Dunne [15]) y en otras teorías planas de bajas energías (Fradkin [18]).

En las últimas décadas, las teorías de Chern-Simons tomaron importancia en el estudio de ciertas dualidades en  $2 + 1$  dimensiones (Radičević, Tong y Turner [36], Hsin y Seiberg [21]). Por ejemplo, en la dualidad partícula-vórtice (Peskin [34], Dasgupta y Halperin [12]), bosonización (Stone [45]), y en la correspondencia AdS/CFT en el límite *large N* (Vasiliev [48], Aharony, Gur-Ari y Yacoby [3]), entre otras.

### 1.1 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el [Capítulo 2](#) se dará la definición de *solitón* y, en particular, de *solitón topológico*, que será objeto de estudio central en este trabajo. Se estudiará el proceso de ruptura de simetría a partir de la introducción de un potencial de Higgs en el lagrangiano en cuestión, lo cual servirá para introducir en tipo más sencillo de solitones topológicos en dimensión  $d = 1 + 1$  conocido como *kink*.

En el [Capítulo 3](#) consideraremos soluciones estáticas y con simetría axial de ecuaciones de Euler-Lagrange en un espacio-tiempo de  $d = 3 + 1$  dimensiones, de modo que sus soluciones corresponden, de manera efectiva, a un espacio-tiempo con dimensión  $d = 2 + 1$ . Promoviendo la invariancia de gauge de global a local, introduciremos un acoplamiento a un campo de gauge abeliano, dando lugar a lo que se conoce como modelo abeliano de Higgs, y expondremos el *ansatz* de Nielsen-Olesen para las ecuaciones resultantes. Finalmente se verá la relación entre este modelo y el modelo de superconductividad de Ginzburg-Landau, así como también su posible extensión supersimétrica para  $\mathcal{N} = 2$  en el caso en que el parámetro  $\lambda$  se encuentra en el punto Bogomol'nyi.

En el [Capítulo 4](#) se expondrán rudimentos de la teoría de Chern-Simons para el caso particular de campos de gauge abelianos, y cómo la presencia de un tal término es un mecanismo alternativo al de Higgs para dar masa al campo de gauge en cuestión. Agregando este término al lagrangiano del modelo descrito en el [Capítulo 3](#), obtendremos el conocido modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, y daremos sus propiedades principales. Por último veremos cómo el término de Chern-Simons aparece naturalmente al realizar la integral funcional de los fermiones en un lagrangiano del tipo QED, exponiendo previamente algunos resultados esenciales que cumplen los fermiones en 3 dimensiones.

Luego, en el [Capítulo 5](#) mostraremos el modelo propuesto, dando previamente las motivaciones existentes para el mismo. Se obtendrán las ecuaciones clásicas de movimiento correspondientes, y se hará un *ansatz* para obtener su solución. Si bien dicha solución no es conocida analíticamente, se procederá a resolver las ecuaciones numéricamente a modo de observar el comportamiento de los perfiles de los campos a medida que se varían algunos parámetros del modelo.

Por último, en el [Capítulo 6](#) se realizará una discusión de los resultados obtenidos, y se mencionará un posible trabajo a futuro como continuación de lo realizado aquí.





# 2

## RUPTURA DE SIMETRÍA Y SOLITONES EN $D = 1 + 1$

Veremos aquí la definición de *solitón* y, en particular, de *solitón topológico*, que será el objeto de estudio central en este trabajo. Luego estudiaremos el proceso de ruptura de simetría a partir de la introducción de un potencial de Higgs al lagrangiano en cuestión, lo cual nos servirá para introducir en tipo más sencillo de solitones topológicos en dimensión  $d = 1 + 1$  conocido como *kink*.

### 2.1 DEFINICIONES

Comencemos con la definición de *solitón*. Originalmente, los nombres *ondas solitarias* y *solitones* correspondían a ciertas soluciones de ecuaciones de ondas no lineales con dos características principales:

1. Son soluciones con localización espacio-temporal (paquetes de ondas) viajando a velocidad constante y sin sufrir distorsión de forma.
2. Luego de la colisión de dos paquetes localizados, éstos mantienen la forma y velocidad inicial.

Estos tipos de ondas fueron descriptas por primera vez en el año 1834 por el ingeniero civil y arquitecto naval John Scott Russell (1808–1882), a partir de la observación de una onda solitaria en el *Union Canal* de Escocia. Pasaron 131 años hasta que Zabusky y Kruskal [54] introdujeron el nombre *solitón* en un artículo científico. Algunos años después, se propuso la cuantización semi-clásica de ciertas soluciones clásicas de ecuaciones de movimiento no lineales correspondientes a teorías de campo, con el objetivo de describir partículas elementales. Soluciones tipo solitón eran entonces candidatas naturales para este cometido debido a las propiedades enumeradas previamente.

En física de partículas y altas energías, la definición de solitones difiere ligeramente de la dada previamente. Adoptaremos la siguiente definición:

**SOLITONES:** son soluciones a ecuaciones de movimiento no lineales que cumplen la propiedad de ser localizadas en el espacio, de energía finita y estables, donde la dispersión es cancelada por las alinealidades de las ecuaciones.

Se puede considerar solitones dependientes del tiempo, pero no cubriremos este caso en el presente trabajo (ver Rajaraman [37] para

una discusión en detalle). Además, la condición de energía finita puede relajarse en algunos casos. Por ejemplo, con una regularización adecuada se puede mostrar que ciertos solitones juegan un papel importante en distintos escenarios físicos, como por ejemplo en la famosa transición KT (Kosterlitz y Thouless [29]).

En este trabajo estaremos interesados en un tipo de solitones particulares llamados *solitones topológicos*. En este caso, existe una *carga topológica* que no cambia bajo deformaciones suaves de la solución. Las propiedades topológicas de los solitones están relacionadas con la topología de la variedad subyacente y con condiciones de borde del sistema (en el infinito espacial para el caso de variedades no compactas), que aseguran la estabilidad de la solución. Estas propiedades están caracterizadas por las cargas topológicas preservadas, que no se relacionan con la conservación de corrientes de Noether de la teoría.

En el contexto de teorías clásicas de campo relativistas, los solitones topológicos se asemejan mucho a las partículas clásicas. Su densidad de energía está localizada en una región acotada del espacio, su energía total es finita, y las soluciones son estables. Además, debido a que las ecuaciones de campo son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, una vez encontrada una solución  $\varphi(x)$ , uno puede hacer un *boost* y hallar automáticamente una familia de soluciones  $\varphi\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$  para cada  $v$ , con  $|v| < c$ . Esto es, los solitones pueden moverse en el espacio a velocidad constante.

Comenzaremos entonces por describir el proceso de ruptura espontánea de la simetría por medio del agregado de un potencial de estudio, que dará las condiciones topológicas necesarias para poder obtener solitones topológicos.

## 2.2 RUPTURA ESPONTÁNEA DE LA SIMETRÍA

### 2.2.1 Simetrías discretas

Siguiendo el desarrollo en Shifman [41], consideremos en primer lugar un sistema descrito por un campo escalar real  $\phi(x)$ , cuya acción está dada por

$$\mathcal{S} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - V[\phi] \right\}, \quad (2.1)$$

siendo  $V[\phi]$  un potencial de autointeracción, y  $D$  la dimensión del espacio. En nuestro caso de interés tendremos  $D = 2 + 1$ , pero por el momento consideramos  $D$  arbitrario. La signatura de la métrica de Minkowski utilizada en todo el trabajo será  $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ .

En cuanto a  $V[\phi]$ , tomamos el potencial no trivial más sencillo posible, dado por

$$V[\phi] = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g^4 \phi^4, \quad (2.2)$$

siendo  $m$  y  $g$  constantes, con  $g^2$  “pequeña”, de forma tal de estar en la región de validez de un tratamiento semiclásico.

Es claro que el sistema descrito por la acción (2.1) tiene simetría discreta  $\mathbb{Z}_2$ , ya que el cambio

$$\phi(x) \mapsto -\phi(x) \quad (2.3)$$

deja dicha acción invariante. Esta simetría es *global*, ya que la transformación (2.3) es la misma para todo  $x$ .

El estado de vacío del sistema (esto es, el de mínima energía) se obtiene minimizando el potencial  $V[\phi]$ . Será el signo de  $m^2$  el encargado de decidir si este mínimo conserva la simetría global mencionada o no, ya que el término cinético por su parte no depende de dicho mínimo.

#### *Vacío simétrico*

Este caso corresponde a  $m^2 > 0$ . Es inmediato notar que la única solución real al mínimo del potencial  $V[\phi]$  se corresponde, para este  $m^2$ , con la solución

$$\phi(x) = 0 \quad \forall x. \quad (2.4)$$

Este valor de vacío del campo  $\phi$  conserva la simetría  $\mathbb{Z}_2$ . Decimos entonces que *no hay ruptura de la simetría del sistema*.

Podemos considerar perturbaciones alrededor de este valor de vacío del campo, con lo cual la acción en la aproximación cuadrática de campo libre queda de la forma

$$\mathcal{S} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}. \quad (2.5)$$

Es inmediato reconocer al parámetro  $m$  como la masa de la partícula correspondiente al campo  $\phi$ .

#### *Vacío no simétrico*

En este caso  $m^2$  toma valores negativos. Para simplificar notación, definimos el parámetro  $\mu^2 \equiv -m^2$ . Ahora existen tres soluciones reales para  $V'[\phi] = 0$ . La solución  $\phi(x) = 0$  se corresponde con un máximo del potencial, mientras que los mínimos (los verdaderos valores de vacío del campo  $\phi$ ) se alcanzan en

$$\phi(x) = \pm v \quad \forall x, \quad v \equiv \frac{\mu}{g}. \quad (2.6)$$

El potencial toma el mismo valor tanto para la solución positiva como la negativa, con lo cual el vacío en este caso está doblemente degenerado. En este caso, el valor de vacío no conserva la simetría  $\mathbb{Z}_2$ , con lo cual decimos que la elección de uno de los vacíos *rompe “espontáneamente” la simetría del sistema*.

Podemos reescribir el potencial de la forma

$$V[\phi] = \frac{1}{4}g^2 (\phi^2 - v^2)^2 . \quad (2.7)$$

Definimos un nuevo campo  $\chi$  correspondiente a la excitación de  $\phi$  respecto de su valor de vacío  $v$  (el caso para  $-v$  es análogo). Esto es,

$$\phi = v + \chi . \quad (2.8)$$

Este campo  $\chi$  representa una fluctuación de  $\phi$  alrededor de  $v$  que servirá para estudiar el modelo a nivel cuántico. Reemplazando en el lagrangiano, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \left( \mu^2 \chi^2 + \mu g \chi^3 + \frac{1}{4}g^2 \chi^4 \right) . \quad (2.9)$$

De esta forma, observando el término  $\mu^2 \chi^2$ , concluimos que la masa de la partícula correspondiente al campo  $\chi$  está dada por

$$m_\chi = \sqrt{2}\mu . \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Simetrías continuas

Tomaremos ahora el caso de un sistema con simetría global continua, dada por algún grupo de Lie  $G$ . Consideraremos el caso más sencillo, correspondiente al grupo abeliano  $G = U(1)$ , que será la simetría de gauge presente en el sistema a estudiar más adelante. Tomamos un campo escalar complejo  $\phi(x)$ , cuya acción es ahora

$$S = \int d^D x \{ (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V[\phi] \} \quad (2.11)$$

con potencial  $V[\phi]$  dado por

$$V[\phi] = m^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2}g^2 |\phi|^4 . \quad (2.12)$$

El lagrangiano es ahora invariante frente al cambio de fase *global* dado por

$$\phi \mapsto e^{i\alpha} \phi \quad , \quad \phi^* \mapsto e^{-i\alpha} \phi^* , \quad (2.13)$$

con  $\alpha$  un parámetro real. Para  $m^2 > 0$  tenemos la fase con simetría no rota, siendo  $\phi = 0$  el único vacío de la teoría. En este caso, el campo complejo  $\phi$  representa a dos partículas, correspondientes a las excitaciones de  $\text{Re } \phi$  y  $\text{Im } \phi$ , ambas con valor de masa igual a  $m$ .

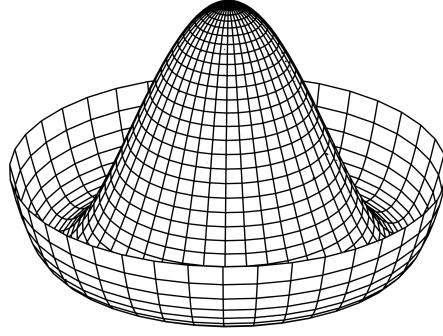
Por otra parte, para  $m^2 < 0$ , tenemos la fase con ruptura de simetría. El potencial puede escribirse de la forma

$$V[\phi] = \frac{1}{2}g^2 (\phi^2 - v^2)^2 , \quad (2.14)$$

donde

$$v^2 = -\frac{m^2}{g^2} \equiv \frac{\mu^2}{g^2} . \quad (2.15)$$

El potencial toma forma de “sombrero mexicano” (ver [Figura 2.1](#)). Existe ahora un continuo de mínimos de  $\phi$ , todos ellos físicamente equivalentes, que forman una variedad diferencial isomorfa a la circunferencia  $S^1$ , llamada *variedad de vacío*.



**Figura 2.1** – Forma del potencial  $V[\phi]$  para el caso  $m^2 < 0$ .

Tomaremos el estado de vacío  $\phi = v$ , y una expansión a su alrededor de la forma

$$\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\chi(x) , \quad (2.16)$$

siendo  $\varphi$  y  $\chi$  campos reales. Reescribiendo el lagrangiano en términos de ellos, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi)] \\ & - \left[ g^2 v^2 \varphi^2 + \frac{g^2 v}{\sqrt{2}} \varphi (\varphi^2 + \chi^2) + \frac{g^2}{8} (\varphi^2 + \chi^2)^2 \right] . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Vemos dos situaciones sustancialmente distintas para cada campo. En el caso de  $\varphi$ , su masa está dada por  $m_\varphi = \sqrt{2}gv = \sqrt{2}\mu$ , mientras que  $\chi$  es no masivo, ya que no hay términos cuadráticos en  $\chi$ . Esto es lo que se conoce como *bosón de Goldstone*. En general, el teorema de Goldstone afirma que, luego de la ruptura de la simetría, habrá tantas partículas no masivas como generadores de dicha simetría rotos. En el caso del grupo  $U(1)$  se rompe el único generador de la simetría, con lo cual hay un solo bosón de Goldstone.

A modo de ejemplo, si el campo  $\phi$  estuviera dado por un triplete real  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , el grupo de simetrías es  $O(3)$ . Luego de la ruptura, la variedad de vacío es la esfera bidimensional  $S^2$ , quedando una simetría remanente  $U(1)$ . De esta forma, dos de los tres generadores de  $O(3)$  están rotos, obteniendo entonces dos bosones de Goldstone.

### 2.2.3 Ruptura de simetrías de gauge

Veamos ahora el caso de ruptura de simetría en teorías de gauge abelianas, que son las que usaremos en el resto del trabajo. Para eso, *gaugeamos* el lagrangiano de la acción (2.11) de forma tal que sea invariante frente a transformaciones  $U(1)$  locales agregando un campo de gauge  $A_\mu$  y su respectiva dinámica, obteniendo el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V[\phi] , \quad (2.18)$$

El tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  asociado al campo  $A_\mu$  toma la forma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \quad (2.19)$$

y la derivada covariante  $D_\mu$  está definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu , \quad (2.20)$$

siendo  $e$  la carga asociada. Es claro que este lagrangiano tiene simetría  $U(1)$  local, siendo invariante bajo transformaciones de los campos de la forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\phi(x) \quad , \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) . \quad (2.21)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, es posible ver que si  $\phi$  adquiere un valor de expectación de vacío no nulo (que es el caso para el potencial  $V[\phi]$  utilizado), el espectro de la teoría no contiene ningún campo vectorial no masivo. El fotón  $A_\mu$  adquiere tres polarizaciones y una masa  $m_A = \sqrt{2}ev$ . El grado de libertad remanente es un campo real, el campo de Higgs, con masa  $m_H = \sqrt{2}gv$ .

## 2.3 KINKS

El término *kink* (que puede traducirse del inglés como *pliegue*) hace referencia a soluciones de las ecuaciones de movimiento de un campo escalar real  $\phi$  en dimensión  $d = 1 + 1$ , con dinámica gobernada por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - V[\phi] , \quad (2.22)$$

donde  $\dot{\phi}$  indica derivada temporal, y  $\phi'$  derivada con respecto a la (única) coordenada espacial. Tomaremos un potencial de la forma de la [Figura 2.1](#) (más precisamente, como estamos en una dimensión espacial la curva del gráfico del potencial es la intersección entre

la figura mencionada y un plano paralelo al eje vertical). Podemos entonces parametrizarlo como

$$V[\phi] = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2, \quad (2.23)$$

con  $m^2$  y  $\lambda$  positivos. Comparando con la [Ecuación \(2.7\)](#), tenemos que los mínimos de  $V$  (y en este caso ceros) están dados en los puntos

$$\phi = \pm v, \quad v \equiv \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.24)$$

Por otra parte, la energía del sistema está dada por

$$E = T + V = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + V[\phi] \right\}, \quad (2.25)$$

Buscaremos soluciones de solitones estáticos (esto es, con  $\dot{\phi} = 0 \forall t$ ) ya que, como se mencionó previamente, a partir de dicha solución podemos construir un solitón moviéndose (a velocidad constante) haciendo un *boost* de Lorentz.

Para que la energía no diverja, las soluciones deben tender a un mínimo de  $V$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ . El estado fundamental, dado por una configuración de campo constante de valor  $\pm v$  en todo el espacio, satisface trivialmente esta condición. Sin embargo, debido a la existencia de más de un mínimo del potencial  $V$  podemos encontrar otro tipo de soluciones, en las cuales  $\phi \rightarrow v$  para  $x \rightarrow -\infty$  y  $\phi \rightarrow +v$  para  $x \rightarrow +\infty$  o viceversa. Buscaremos entonces ese tipo de perfil para  $\phi$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano toman la forma

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi} = \lambda\phi^3 - m^2\phi. \quad (2.26)$$

Multiplicando a ambos lados por  $\phi'$  e integrando, se obtiene

$$\int \phi'' \phi' dx = \int \frac{dV}{d\phi} \phi' dx, \quad (2.27)$$

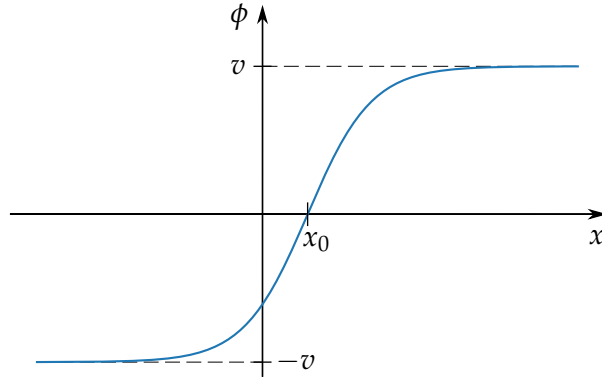
esto es,

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 = V[\phi]. \quad (2.28)$$

Conociendo la forma funcional de  $V[\phi]$ , esta expresión se integra inmediatamente. Tomando  $x_0$  tal que  $\phi(x_0) = 0$  e invirtiendo, se obtiene

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \quad (2.29)$$

Notar que el hecho de pedir que haya al menos un punto  $x$  en el cual  $\phi = 0$  ya garantiza que la solución no sea trivial, dado que



**Figura 2.2** – Gráfico de la solución tipo kink.

necesariamente deberá haber un cruce desde la región  $\phi \approx -v$  a  $\phi \approx v$ .

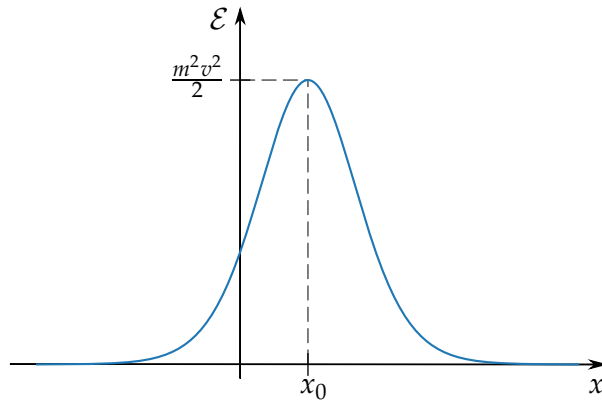
La forma de la solución positiva (llamada *kink*) puede observarse en la [Figura 2.2](#). En el caso de signo opuesto se conoce con el nombre de *antikink*.

Podemos ahora obtener una expresión para la densidad de energía  $\mathcal{E}(x)$  a partir de la [Ecuación \(2.25\)](#), dada por

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + V[\phi] = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right], \quad (2.30)$$

cuyo gráfico se presenta en la [Figura 2.3](#), donde se observa que la energía se encuentra localizada en el espacio alrededor del punto  $x = x_0$ . Integrando en  $x$ , obtenemos

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}. \quad (2.31)$$



**Figura 2.3** – Gráfico de la densidad de energía del kink.



Si trabajamos en un espacio-tiempo de más dimensiones espaciales, podemos embeber esta solución de manera trivial, mediante

$$\phi(x, x_2, \dots, x_n) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right], \quad (2.32)$$

lo cual se conoce con el nombre de *pared de dominio*. La densidad de energía está ahora concentrada en un hiperplano  $(n - 1)$ -dimensional que pasa por  $x = x_0$ . Notar, sin embargo, que esto no es una solución de energía finita. De hecho, el teorema de no existencia (*no-go*) de Derrick [13] demuestra la imposibilidad de hallar soluciones no triviales (esto es, aparte del estado fundamental) para sistemas con lagrangiano de la forma (2.22) en dimensión espacial  $d \geq 2$ , que sean no singulares, independientes del tiempo y de energía finita. Sin embargo, si se introducen campos de gauge podemos esquivar este inconveniente y obtener soluciones de solitones, sólo que ahora no serán paredes de dominio sino *vórtices*. Esto lo veremos en el capítulo siguiente.

Volviendo al caso de soluciones tipo kink en  $d = 1 + 1$  (una dimensión espacial y una temporal), el hecho de que exista más de un vacío degenerado permite establecer la existencia leyes de conservación topológicas, las cuales no se relacionan con ninguna corriente de Noether. Estas leyes de conservación emergen debido a la topología no trivial de la variedad del espacio presente, razón por la cual este tipo de solitones recibe el nombre de *solitones topológicos*.

Podemos establecer una *corriente topológica* conservada  $j^\mu$  dada por

$$j^\mu = \frac{1}{2\nu} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.33)$$

siendo  $\pm\nu$  los valores de vacío del campo, y  $\varepsilon^{\mu\nu}$  el símbolo antisimétrico en dos dimensiones. Esta corriente satisface

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.34)$$

Vemos que esta identidad se cumple trivialmente sin hacer uso de las ecuaciones de movimiento ni de ninguna simetría del lagrangiano; sólo se relaciona con la existencia de vacíos degenerados.

Esta  $j^\mu$  (y de aquí el nombre de corriente) tiene una *carga topológica* conservada asociada, definida como

$$Q \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx = \frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{1}{2\nu} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)], \quad (2.35)$$

la cual toma valores 1 ó  $-1$  para el kink y antikink, respectivamente.



# 3

## SOLUCIONES TIPO VÓRTICE

En este capítulo consideraremos soluciones estáticas y con simetría axial de las ecuaciones de Euler-Lagrange de los modelos descritos en el [Capítulo 1](#) en un espacio-tiempo de  $d = 3 + 1$  dimensiones. Por tal motivo las soluciones que estudiaremos corresponden, de manera efectiva, a un espacio-tiempo con dimensión  $d = 2 + 1$ . Promoviendo la invariancia de gauge de global a local, introduciremos un acoplamiento a un campo de gauge abeliano, dando lugar a lo que se conoce como modelo abeliano de Higgs, y expondremos el *ansatz* de Nielsen-Olesen para las ecuaciones resultantes. Finalmente se verá la relación entre este modelo y el modelo de superconductividad de Ginzburg-Landau, así como también su posible extensión supersimétrica para  $\mathcal{N} = 2$  en el caso en que el parámetro  $\lambda$  se encuentra en el punto Bogomol'nyi.

### 3.1 VÓRTICES GLOBALES

El tipo de vórtice más sencillo posible surge a partir de un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - V[\phi] , \quad (3.1)$$

con un potencial dado por

$$V[\phi] = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 , \quad (3.2)$$

siendo  $\phi$  un campo escalar complejo con simetría  $U(1)$  global, tal como se vio en la [Subsección 2.2.2](#). El valor de vacío de  $\phi$  (i. e., aquel en el cual la energía es mínima) es tal que  $|\phi| = \phi_0$ , pero su fase no está determinada. De hecho, para un radio  $r$  fijo, podemos movernos alrededor de la circunferencia determinada por  $r$  manteniendo el módulo del campo  $\phi$  fijo, pero variando su fase. Imponiendo la condición natural de que  $\phi$  esté unívocamente definido en cada punto, dicha fase puede incrementar en múltiplos de  $2\pi$  por cada vuelta realizada. De esta manera,  $\phi$  es de la forma

$$\phi(r, \varphi) \rightarrow \phi_0 e^{in\varphi} \quad \text{para } r \rightarrow \infty , \quad (3.3)$$

siendo  $(r, \varphi)$  las coordenadas polares usuales en dos dimensiones y  $n$  un número entero. Esta configuración se conoce con el nombre de *vórtice global*. Por razones topológicas, es claro que esta solución no puede ser deformada continuamente a una solución de vacío

$\phi = \phi_0$ . En términos formales, la variedad de vacío para  $r \rightarrow \infty$  es una circunferencia que denotamos  $S^1_\infty$ . El elemento  $g_n(\varphi) = e^{in\varphi}$  del grupo de simetrías  $U(1)$  de la teoría mapea  $S^1_\infty$  a la circunferencia  $S^1$ , isomorfa a  $U(1)$ ; esto es,

$$g_n : S^1_\infty \rightarrow S^1 . \quad (3.4)$$

Tales mapeos están categorizados en distintas clases para cada  $n$ , llamadas *clases de homotopía*, siendo  $n$  el *número de winding*, es decir, el número de vueltas realizadas alrededor de la circunferencia  $S^1_\infty$ . Dichas clases forman el *grupo de homotopía de orden 1*, llamado  $\Pi_1$ . En este caso,

$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z} , \quad (3.5)$$

con  $\mathbb{Z}$  el conjunto de números enteros. Así, cada clase queda determinada por un número entero  $n$ , como se dijo previamente.

Sin embargo, el teorema de Derrick mencionado en el capítulo anterior descarta la existencia de soluciones no triviales de energía finita para esta teoría. En efecto, para  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\partial_i \phi \sim in\phi \partial_i \phi = -in\epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} , \quad i, j = 1, 2 . \quad (3.6)$$

Luego,

$$\int dx^2 \{ \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V[\phi] \} \sim 2\pi\phi_0^2 n^2 \int \frac{dr}{r} \rightarrow \infty . \quad (3.7)$$

Una forma de obtener vórtices con energía finita es promoviendo la simetría de gauge  $U(1)$  de global a local, como veremos a continuación. Sin embargo, con una regularización adecuada se puede mostrar que estos vórtices juegan un papel importante en distintos escenarios físicos, como por ejemplo en la famosa transición KT (Kosterlitz y Thouless [29]).

### 3.2 MODELO ABELIANO DE HIGGS

Consideramos ahora un modelo con acoplamiento mínimo a un campo de gauge abeliano  $A_\mu$ , dado por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V[\phi] , \quad (3.8)$$

con  $\phi = \phi^1 + i\phi^2$ . El tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  asociado al campo  $A_\mu$  toma la forma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \quad (3.9)$$

y la derivada covariante  $D_\mu$  está definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu , \quad (3.10)$$

siendo  $e$  la carga asociada. En cuanto al potencial  $V[\phi]$ , tomamos el mismo que para el caso de simetría global. Es claro que este lagrangiano tiene simetría  $U(1)$  local, siendo invariante bajo transformaciones de los campos de la forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \phi(x) , \quad (3.11)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) . \quad (3.12)$$

Por lo visto en la [Sección 2.2](#), debido al mecanismo de Higgs el campo  $A_\mu$  adquiere una masa  $m_A$  dada por

$$m_A = e\phi_0 . \quad (3.13)$$

La parte imaginaria de  $\phi$ , por su parte, es absorbida por el mecanismo de Higgs, de manera que  $\phi(x) = \phi_0 + \eta(x)/\sqrt{2}$ . Este campo  $\eta(x)$  remanente, llamado *campo de Higgs*, tiene una masa  $m_H$  según

$$m_H = \sqrt{2\lambda}\phi_0 . \quad (3.14)$$

Haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones que se derivan del lagrangiano (3.8) toman la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad (3.15)$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi^*} , \quad (3.16)$$

donde la corriente  $j^\nu$  está dada por

$$j^\nu = \frac{ie}{2} (\phi D^\nu \phi^* - \phi^* D^\nu \phi) = \frac{ie}{2} (\phi \partial^\nu \phi^* - \phi^* \partial^\nu \phi) + e^2 |\phi|^2 A^\nu . \quad (3.17)$$

Buscaremos entonces soluciones regulares no triviales de energía finita para este modelo.

### 3.2.1 Ansatz de Nielsen-Olesen

Consideramos el gauge  $A_0 = 0$  y buscamos soluciones estáticas no triviales (esto es, además del caso  $\phi = \phi_0$  de energía cero) con energía finita, la cual adquiere la forma

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \frac{1}{2} |D_i \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right] . \quad (3.18)$$

Para que  $E < \infty$  es condición necesaria, aunque no suficiente, que el potencial  $V$  tienda a cero cuando  $r = |\mathbf{x}|$  tiende a infinito, lo cual se logra pidiendo

$$|\phi| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \phi_0 . \quad (3.19)$$

Tomamos una circunferencia de radio  $R$  (el cual luego haremos tender a infinito) centrado en el origen. Sobre ella,  $\phi$  debe ser tal que  $|\phi| = \phi_0$ , aunque la condición  $V \rightarrow 0$  no impone restricciones sobre su fase. De esta manera, proponemos

$$\phi = \phi_0 e^{if(\varphi)}, \quad (3.20)$$

siendo  $\varphi$  el ángulo sobre la circunferencia. Notemos que el número de *winding* no depende de propiedades locales de la función  $f(\varphi)$ , sino de sus propiedades globales (o bien, topológicas). A modo de ejemplo, consideremos  $f(\varphi) = \varphi$ , que pertenece a la clase de homotopía correspondiente a  $n = 1$ . Cualquier transformación de gauge continua independiente del tiempo provoca transformaciones en  $f(\varphi)$  que mantiene sus extremos fijos, con lo cual  $f(\varphi)$  sigue perteneciendo a la clase de  $n = 1$ . En general, cualquier  $f$  continua que satisfaga  $f(0) = 0$  y  $f(2\pi) = 2n\pi$  puede ser continuamente deformada en  $f(\varphi) = n\varphi$  manteniéndose en la clase de homotopía correspondiente a  $n$ . Por estos motivos, no perdemos generalidad al tomar

$$\phi = \phi_0 e^{in\varphi}. \quad (3.21)$$

Esta condición para  $\phi$  no garantiza, sin embargo, convergencia de la energía. En efecto, si asumimos que  $A_i \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ , entonces

$$\int |D_i \phi|^2 d^2x \rightarrow \int |\partial_i \phi|^2 d^2x \sim 2\pi n^2 \phi_0^2 \int \frac{dr}{r}, \quad (3.22)$$

que diverge logarítmicamente. Vemos que esta falla en la convergencia se debe al número de *winding*, ya que para  $n = 0$  la integral converge, pero para cualquier otro  $n \in \mathbb{Z}$  no.

Para salvar este problema haremos uso del campo  $A_\mu$ . En primer lugar, para  $r \rightarrow \infty$  este campo debe ser puro gauge, para que el tensor  $F_{\mu\nu}$  tienda a cero de manera suficientemente rápida como para que la contribución del término  $F_{ij}^2$  converja. Por otro lado, la propia derivada covariante  $D_i \phi$ , y no sólo  $A_i \phi$ , debe ir a cero de forma tal que

$$\int |D_i \phi|^2 d^2x < \infty \quad (3.23)$$

y la energía converja.

Bajo estas consideraciones pediremos que, para  $r \rightarrow \infty$ ,  $A_i$  sea de la forma

$$A_i \sim \frac{n}{e} \partial_i \varphi = -\frac{n}{e} \varepsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2}. \quad (3.24)$$

Así, tanto  $F_{ij}$  como  $D_i \phi$  tienden a cero (exponencialmente), logrando la convergencia de  $E$ .

A partir de esta expresión para  $A_i$  podemos hallar el flujo  $\Phi$  del campo magnético  $B$  en términos del número de *winding*  $n$ . Sabemos que

$$B = F_{12} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} F_{ij}, \quad (3.25)$$

con lo cual

$$\Phi = \int_B d^2x = \frac{1}{2} \int \varepsilon^{ij} F_{ij} d^2x = \oint_{c_\infty} A_i dx^i = \frac{n}{e} \oint_{c_\infty} \partial_i \varphi dx^i = \frac{2\pi}{e} n . \quad (3.26)$$

Vemos entonces que el flujo magnético está cuantizado, siendo proporcional a  $n$ .

Volviendo a la solución propuesta, existe aún otro problema a subsanar. Las soluciones propuestas (3.21) y (3.24) para  $\phi$  y  $A_i$  son singulares en  $r = 0$ , ya que el elemento del grupo de gauge  $g_n = e^{in\varphi}$  lo es. Para solucionar este inconveniente, empleamos el *ansatz de Nielsen-Olesen* [32], dado por

$$\phi = \phi_0 f(r) g_n(\varphi) , \quad (3.27a)$$

$$A_i = -ia(r) g_n^{-1}(\varphi) \partial_i g_n(\varphi) , \quad (3.27b)$$

siendo  $f(r)$  y  $a(r)$  funciones reales con condiciones de contorno dadas por

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad , \quad f(\infty) = 1 , \\ a(0) = 0 \quad , \quad a(\infty) = 1 . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las condiciones de contorno en el origen garantizan la ausencia de singularidades en ese punto. Por otra parte, debido a la condición en el infinito, para  $r \rightarrow \infty$  este *ansatz* tiende a las soluciones propuestas anteriormente, con lo cual el flujo magnético  $\Phi$  no se altera.

Cabe destacar que, en  $d = 3 + 1$ , el *ansatz* de Nielsen-Olesen corresponde a un tubo magnético axialmente simétrico cuyo flujo está cuantizado según el valor de  $n$ . Debido a la invariancia traslacional en la nueva coordenada espacial  $z$ , la energía total diverge, pero la energía por unidad de longitud se mantiene finita.

Reemplazando el *ansatz* anterior en las Ecuaciones (3.15) y (3.16) obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} (n + ea)^2 = 2\lambda f (f^2 - \phi_0^2) , \quad (3.29a)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} - e(n + ea)f^2 = 0 . \quad (3.29b)$$

No se conocen soluciones exactas analíticas de este sistema de ecuaciones de segundo orden con este *ansatz*, aunque pueden resolverse numéricamente.

### 3.3 PUNTO BOGOMOL'NYI, SUPERSIMETRÍA Y SUPERCONDUCTIVIDAD

Resulta interesante estudiar el caso en que las masas  $m_A$  y  $m_H$  son iguales. A partir de las expresiones (3.13) y (3.14), esto sucede cuando se tiene una relación entre  $e$  y  $\lambda$  dada por

$$\lambda = \frac{e^2}{2} . \quad (3.30)$$

Esta elección particular de los parámetros se conoce con el nombre de *punto Bogomol'nyi*. Las ecuaciones resultantes para este caso resultan ser de primer orden. Bajo esta condición particular para  $\lambda$ , el modelo admite una extensión supersimétrica con  $\mathcal{N} = 2$  supersimetrías (ver Edelstein, Núñez y Schaposnik [16]). Esto es, primero se construye un lagrangiano supersimétrico con  $\mathcal{N} = 1$ , del cual el lagrangiano (3.8) sea su parte bosónica. Esta supersimetría se puede extender a  $\mathcal{N} = 2$  sólo cuando el potencial es de la forma presente en el lagrangiano en cuestión, con constante de acoplamiento dada por el punto Bogomol'nyi, es decir,  $\lambda = e^2/2$ . Esto se relaciona con la igualdad de masas  $m_H = m_A$ , ya que para  $\mathcal{N} = 2$  necesitamos pares de campos bosónicos de masas iguales (de hecho, la extensión a  $\mathcal{N} = 2$  supersimetrías requiere un campo escalar neutral adicional apareado con  $A_\mu$ ).

Por otra parte, las soluciones de vórtice del modelo de Higgs abeliano son importantes en la teoría de superconductividad de Ginzburg-Landau, ya que la funcional de energía estática (3.18) para el modelo abeliano de Higgs relativista coincide con la energía libre de Ginzburg-Landau no relativista correspondiente a la teoría de superconductores tipo II. Las soluciones de vórtices para este caso fueron inicialmente estudiadas por Abrikosov [1]. Dependiendo de la magnitud relativa de las masas  $m_H$  y  $m_A$ , el modelo exhibe propiedades cualitativamente distintas, ya que si  $m_H > m_A$  los vórtices se repelen, mientras que para  $m_H < m_A$  se atraen. Cuando estas masas son iguales, la fuerza entre vórtices se anula. En términos de la teoría de Ginzburg-Landau, esto se corresponde con el punto de separación entre superconductividad tipo I y tipo II.

Veamos ahora el resultado de trabajar en el punto Bogomol'nyi en las ecuaciones y la energía. Utilizando la identidad

$$|D\phi|^2 = |D_1 \pm iD_2|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \varepsilon^{ij}\partial_i J_j, \quad (3.31)$$

con la corriente  $J_j$  definida como

$$J_j = \frac{1}{2i} [\phi^* D_j \phi - \phi (D_j \phi)^*], \quad (3.32)$$

podemos entonces reescribir la funcional de energía de la expresión (3.18) de la forma

$$\begin{aligned} E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (B \mp e(|\phi|^2 - \phi_0^2))^2 + |D_\pm \phi|^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \mp e\phi_0^2 B \right], \quad (3.33) \end{aligned}$$

con  $D_\pm = D_1 \pm iD_2$ , y habiendo supuesto condiciones apropiadas de contorno para eliminar el término de superficie. En cuanto a la ambigüedad en el signo, éste depende del sentido de circulación que se haya tomado para el vórtice.



En el punto Bogomol'nyi vemos que se cancela la contribución del potencial a la energía, de modo que  $E$  está acotada por debajo por un múltiplo de la magnitud del flujo magnético; esto es,

$$E \geq \phi_0^2 |\Phi_B|. \quad (3.34)$$

Esta cota se satura en el caso en el caso en que los campos satisfacen las ecuaciones autoduales (Bogomol'nyi [10])

$$D_{\pm} \phi = 0, \quad (3.35a)$$

$$B = \pm e (|\phi|^2 - \phi_0^2), \quad (3.35b)$$

con lo cual el sistema se reduce de ecuaciones diferenciales de segundo a primer orden.



# 4

## TEORÍA DE CHERN-SIMONS

Veremos aquí rudimentos de la teoría de Chern-Simons para el caso particular de campos de gauge abelianos, y cómo la presencia de un tal término es un mecanismo alternativo al de Higgs para dar masa al campo de gauge en cuestión. Agregando este término al lagrangiano del modelo descrito en el [Capítulo 3](#), obtendremos el conocido modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs, y daremos sus propiedades principales. Por último veremos cómo el término de Chern-Simons aparece naturalmente al realizar la integral funcional de los fermiones en un lagrangiano del tipo QED, exponiendo previamente algunos resultados esenciales que cumplen los fermiones en 3 dimensiones.

### 4.1 TÉRMINO DE CHERN-SIMONS

En dimensión espacio-temporal  $d = 2 + 1$  (y en general en cualquier dimensión impar) existe otro término local, invariante de Lorentz e invariante de gauge (para condiciones de contorno apropiadas y transformaciones “pequeñas”, es decir, con número de *winding* cero) que se puede agregar al lagrangiano de Maxwell, formado exclusivamente por el propio campo de gauge  $A_\mu$ . Es el denominado *término de Chern-Simons*, que para  $A_\mu$  abeliano (que es nuestro caso de interés) toma la forma

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha = \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha} , \quad (4.1)$$

donde los índices  $\mu, \nu$  y  $\alpha$  toman los valores 0, 1 y 2.

En cuanto a las dimensiones de  $\kappa$ , dado que en  $d = 2 + 1$  el campo  $A_\mu$  tiene dimensiones de  $M^{1/2}$  (fijada por el término de Maxwell), para mantener la acción adimensional necesitamos que

$$[\kappa] = M . \quad (4.2)$$

Este parámetro es llamado *masa topológica*. Para entender las razones de este nombre, consideremos un modelo de Maxwell-Chern-Simons, con lagrangiano dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\nu \partial_\mu A_\alpha . \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de movimiento para este lagrangiano resultan

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0 . \quad (4.4)$$

Consideramos el pseudo-vector  $\tilde{F}^\mu$  (en general, pseudo-tensor para el caso de dimensión mayor) dual a  $F^{\mu\nu}$  dado por

$$\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . \quad (4.5)$$

Equivalentemente,

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{F}_\alpha . \quad (4.6)$$

Debido a la antisimetría del símbolo de Levi-Civita,  $\tilde{F}^\mu$  satisface la identidad de Bianchi dada por

$$\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0 . \quad (4.7)$$

Es decir, la divergencia de  $\tilde{F}^\mu$  es idénticamente cero. Por otra parte, la [Ecuación \(4.4\)](#) puede escribirse como

$$\varepsilon^{\nu\alpha\beta} \left( \partial_\beta \tilde{F}_\alpha + \frac{\kappa}{2} F_{\alpha\beta} \right) = 0 . \quad (4.8)$$

Multiplicando por  $\varepsilon_{\nu\lambda\rho}$  y usando que  $\varepsilon^{\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho} = \delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\lambda^\beta$ , obtenemos

$$\partial_\alpha \tilde{F}_\beta - \partial_\beta \tilde{F}_\alpha - \kappa F_{\alpha\beta} = 0 . \quad (4.9)$$

Tomando divergencia y usando [\(4.4\)](#) y [\(4.7\)](#), se obtiene finalmente

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \kappa^2) \tilde{F}^\mu = 0 . \quad (4.10)$$

Vemos entonces que  $\tilde{F}^\mu$  satisface la ecuación de Klein-Gordon, con masa  $m$  igual a  $\kappa$ . De esta manera, tenemos un mecanismo para proveer de masa al campo de gauge  $A_\mu$  sin necesidad de introducir un potencial de Higgs. La razón de llamar *topológica* a esta masa se entenderá en breve, cuando veamos que el término de Chern-Simons es topológico, en el sentido de que no depende de la métrica de la variedad, sino que sólo depende de sus propiedades globales.

A simple vista se ve claramente la invariancia de Lorentz del término de Chern-Simons, aunque su invariancia de gauge es menos evidente, ya que es el propio campo  $A_\mu$  el que está presente, en lugar de su correspondiente (manifiestamente invariante de gauge) tensor  $F_{\mu\nu}$ . Ante una transformación de gauge  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ,  $\mathcal{L}_{CS}$  cambia en una derivada total, dada por

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu (\Lambda \partial_\nu A_\alpha) . \quad (4.11)$$

Luego, bajo condiciones de contorno apropiadas este término no modifica la acción, de manera que la teoría es invariante. Cabe destacar, sin embargo, que para el caso no abeliano el cambio de la acción sí depende de la transformación de gauge realizada. Para que la física sea invariante, debe suceder que la exponencial de  $i$  veces la acción se

mantenga constante, lo cual se logra sólo para elecciones específicas de la masa topológica  $\kappa$ , de manera que queda cuantizada. Por otra parte, incluso en el caso abeliano tenemos la condición de cuantización de la masa topológica si requerimos invariancia bajo transformaciones *grandes* de gauge como las vistas en el capítulo anterior.

Las ecuaciones de movimiento que se derivan del lagrangiano (4.1) están dadas por

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha} = 0, \quad (4.12)$$

o bien,

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad (4.13)$$

cuyas soluciones son conexiones planas, que en  $\mathbb{R}^n$  se traduce en

$$A_\mu(x) = \partial_\mu \Lambda(x). \quad (4.14)$$

Por este motivo, una teoría de Chern-Simons pura sin acoplamiento con corrientes externas carece de dinámica, en contraste con la teoría de Maxwell libre, cuyas soluciones son ondas planas. Sin embargo, la teoría provee aspectos interesantes en muchos casos, tales como en presencia de acoplamiento con campos de materia, acoplamiento con términos de Maxwell, campos de gauge no abelianos, variedades de topología no trivial, o incluso teorías de gravedad.

Otra manera de ver la trivialidad de la dinámica dada por el lagrangiano (4.1) es calculando el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ , dado por

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.15)$$

siendo  $\mathcal{S}$  la acción de la teoría y  $g$  el determinante de la métrica  $g^{\mu\nu}$ . Para realizar esta derivada funcional, se piensa al espacio-tiempo como una variedad con curvatura arbitraria, en cuyo caso el elemento de volumen adecuado para la acción es  $\sqrt{|g|} d^3x$ . Por otra parte, el pseudo-tensor de Levi-Civita está ahora dado por [11]

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha} = \frac{\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{|g|}}, \quad (4.16)$$

siendo  $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha}$  el símbolo de Levi-Civita, cuyos elementos son 0, 1 ó  $-1$  según las convenciones tradicionales sobre sus índices (en el caso de métrica plana,  $\sqrt{|g|} = 1$ , con lo cual utilizamos  $\varepsilon$  y  $\tilde{\varepsilon}$  indistintamente). Explícitamente, la acción queda de la forma

$$\mathcal{S} = \frac{\kappa}{4} \int d^3x \sqrt{|g|} \frac{\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{|g|}} A_\mu F_{\nu\alpha}. \quad (4.17)$$

Vemos que los factores  $\sqrt{|g|}$  se cancelan, quedando  $\mathcal{S}$  independiente de la métrica. Decimos entonces que el término de Chern-Simons es un término *topológico*. De esta forma,

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (4.18)$$

lo que implica que

$$T_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.19)$$

Por lo tanto no hay dinámica no trivial en esta teoría, tal como obtuvimos anteriormente con otros argumentos. En particular,  $T_{00}$  se anula, con lo cual la contribución del término de Chern-Simons al hamiltoniano es nula. Esto será importante más adelante cuando consideremos la energía de los modelos a estudiar.

#### 4.2 MODELO DE MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS

Consideremos ahora un acoplamiento entre el modelo abeliano de Higgs introducido en la [Sección 3.2](#) y un término de Chern-Simons. El lagrangiano del sistema a estudiar es entonces

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V[\phi] , \quad (4.20)$$

siendo  $V[\phi]$  el potencial usual de Higgs. Este modelo ha sido estudiado por Paul y Khare [33] y Jacobs *et al.* [23]. Las ecuaciones de movimiento para este lagrangiano están dadas por

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + \kappa\tilde{F}_\nu = -j_\nu , \quad (4.21)$$

$$D_\mu D^\mu\phi = -\frac{\delta V}{\delta\phi^*} , \quad (4.22)$$

con  $j_\nu$  la corriente de Higgs definida en (3.17). Integrando en todo el espacio la componente temporal  $\nu = 0$  de la primera ecuación se obtiene

$$\int \left( \partial^i F_{i0} + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij} \right) d^2x = \int j_0 d^2x . \quad (4.23)$$

El miembro del lado derecho se identifica con la *carga eléctrica* de la configuración. En cuanto al miembro del lado izquierdo, el primer término se anula por ser término de superficie, mientras que el segundo es proporcional al flujo magnético  $\Phi$ . De esta forma se llega a

$$\kappa\Phi = Q , \quad (4.24)$$

que es la forma integral de la ley de Gauss para este sistema, con  $\Phi$  dado por

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \varepsilon^{ij}F_{ij} d^2x = \int B d^2x . \quad (4.25)$$

Para configuraciones estáticas se tiene  $\partial_0 \equiv 0$ , con lo cual  $j_0$  toma la forma

$$j_0 = e^2|\phi|^2 A_0 . \quad (4.26)$$

Se ve que para tener carga eléctrica  $Q$  (y por lo tanto flujo  $\Phi$ ) no nulos, de manera de tener soluciones tipo vórtice,  $A_0$  necesariamente debe ser distinto de cero, a diferencia de lo que sucedía en el modelo de Higgs abeliano.

Se propone entonces un *ansatz* similar al propuesto para dicho modelo, pero ahora se incluye una contribución no nula de  $A_0$ , de la forma

$$\phi = \phi_0 f(r) e^{in\varphi} , \quad (4.27a)$$

$$A_i = -\frac{1}{e} a(r) \partial_i \varphi , \quad (4.27b)$$

$$A_0 = e a_0(r) , \quad (4.27c)$$

o en componentes polares,

$$A_\phi = -\frac{1}{e} \frac{a(r)}{r} , \quad (4.28a)$$

$$A_r = 0 , \quad (4.28b)$$

donde los perfiles  $a(r)$ ,  $a_0(r)$  y  $f(r)$  son adimensionales. En cuanto a las condiciones de contorno, éstas deben ser adecuadas para que la energía por unidad de longitud sea finita, con lo cual

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 , & f(\infty) &= 1 , \\ a(0) &= 0 , & a(\infty) &= n , \\ a_0(0) &= 0 , & a_0(\infty) &= b_0 , \end{aligned} \quad (4.29)$$

con  $b_0$  una constante no nula. Puede verse en Lozano, Manias y Schaposnik [30] que, para tener soluciones no triviales, este valor debe ser necesariamente distinto de cero, y su valor está fijado por las mismas ecuaciones. Reemplazando este *ansatz* en las ecuaciones de movimiento (4.21) y (4.22), se obtienen las ecuaciones diferenciales para estos perfiles dadas por

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} (n - a)^2 + e^4 f a_0^2 - \frac{\lambda \phi_0^2}{2} f (f^2 - 1) = 0 , \quad (4.30a)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} + e^2 \phi_0^2 f^2 (n - a) - e^2 \kappa a_0' r = 0 , \quad (4.30b)$$

$$a_0'' + \frac{a_0'}{r} - e^2 \phi_0^2 a_0 f^2 - \frac{\kappa}{e^2} \frac{a'}{r} = 0 , \quad (4.30c)$$

Por otra parte, desarrollando el propagador del campo de gauge, se obtiene que  $A_\mu$  tiene ahora dos grados de libertad masivos, con masas dadas por (Dunne [15])

$$m_\pm = \pm \frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + e^2 \phi_0^2} , \quad (4.31)$$

mientras que la masa  $m_H$  sigue siendo la misma que en ausencia del término Chern-Simons, es decir,  $m_H = \sqrt{2\lambda\phi_0}$ . Estos mismos resulta-

dos pueden obtenerse al considerarse el comportamiento asintótico de los campos para  $r \rightarrow \infty$ . Como se muestra en Paul y Khare [33],

$$a(r) \rightarrow n + \alpha_{\pm} e\sqrt{r} e^{-m_{\mp} r}, \quad (4.32a)$$

$$a_0(r) \rightarrow \pm \frac{1}{e\sqrt{r}} \alpha_{\mp} e^{-m_{\mp} r}, \quad (4.32b)$$

$$f(r) \rightarrow 1 + \frac{1}{e\sqrt{r}} \beta_{\mp} e^{-m_H r}, \quad (4.32c)$$

con  $\alpha_{\pm}$  y  $\beta_{\pm}$  constantes adimensionales, lo cual indica que los coeficientes presentes en el exponente corresponden a las masas de los respectivos campos.

El conteo de los grados de libertad es consistente. En efecto, antes de la ruptura de simetría, el campo complejo  $\phi$  tiene dos grados de libertad masivos, mientras que el campo de gauge tiene una excitación masiva, proveniente del término de Chern-Simons, tal como se mostró en la sección anterior. Luego de la ruptura, el bosón de Goldstone correspondiente a una componente de  $\phi$  se combina con la parte longitudinal del campo de gauge para producir un nuevo grado de libertad de gauge masivo. Así, se termina obteniendo un modo masivo escalar, correspondiente al bosón de Higgs, y dos modos masivos correspondientes al campo de gauge.

El mecanismo de Higgs también tiene lugar en el caso en el que se desacopla el término de Maxwell. Esto sucede para  $e^2 \rightarrow \infty$ , manteniendo  $\kappa/e^2$  fijo. Puede pensarse este modelo como un truncamiento a largas distancias (esto es, bajas energías), donde el término de Chern-Simons, de primer orden en sus derivadas, domina al término de Maxwell, cuyas derivadas son de segundo orden. En este caso, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\alpha} + \frac{1}{2} (D_{\mu} \phi)^* (D^{\mu} \phi) - V[\phi]. \quad (4.33)$$

El conteo de grados de libertad es, sin embargo, distinto al del modelo de Chern-Simons-Higgs. Antes de la ruptura de simetría, el campo de gauge es no propagante debido a la dinámica trivial de la teoría, teniendo entonces dos modos reales escalares correspondientes al campo  $\phi$ . Luego de la ruptura, un bosón de Goldstone se combina con la parte longitudinal del campo de gauge para producir un grado de libertad de gauge masivo. Así, se termina obteniendo un grado de libertad escalar real masivo (bosón de Higgs), y uno correspondiente al campo de gauge. De hecho, a partir de la expresión para las masas (4.31), este desacople de uno de los campos de gauge se observa al tomar el límite mencionado, obteniendo

$$m_{+} \rightarrow \infty, \quad m_{-} \rightarrow \frac{e^2 \phi_0^2}{\kappa}. \quad (4.34)$$

El modo con masa  $m_{+}$  se desacopla, mientras que el remanente adquiere masa  $m_{-}$ .



Volviendo al caso con término de Maxwell, cabe destacar que en presencia del término de Chern-Simons no existe punto Bogomol'nyi para este modelo, con lo cual no es posible, bajo ninguna elección de los parámetros, reducir el sistema de ecuaciones obtenido al reemplazar el *ansatz* (4.27) en las ecuaciones de movimiento (4.21) y (4.22) a un sistema de primer orden. Una forma de evitar este problema es eliminando el término de Maxwell, a costa de cambiar el potencial de ruptura de simetría de cuarto orden a uno de sexto orden. Notar que con un tal potencial la teoría sigue siendo renormalizable, dado que estamos trabajando en dimensión  $d = 2 + 1$ . El lagrangiano del sistema es entonces

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V^{(6)}[\phi], \quad (4.35)$$

y el punto Bogomol'nyi se obtiene tomando

$$V^{(6)} = \frac{e^4}{8\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2. \quad (4.36)$$

Vemos que no hay una constante de acoplamiento independiente para este potencial ya que la misma queda fijada al imponer la condición de Bogomol'nyi.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = j^\mu, \quad (4.37)$$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\delta V^{(6)}}{\delta \phi^*}, \quad (4.38)$$

con la corriente  $j^\mu$  definida de la misma forma que en (3.17). Podemos obtener la ley de Gauss del modelo tomando la componente temporal de la primera ecuación; esto es,

$$\kappa F_{12} = j_0, \quad (4.39)$$

donde, al igual que en (4.26),  $j_0 = e^2 |\phi|^2 A_0$  para el caso estático. De esta forma,

$$A_0 = \frac{\kappa}{2e^2} \frac{F_{12}}{|\phi|^2}. \quad (4.40)$$

### 4.3 FERMIONES EN $d = 2 + 1$

Existen diferencias notorias a la hora de considerar campos fermiónicos en un espacio bidimensional. En particular, la representación irreducible del álgebra de Clifford es de dimensión 2, con lo cual las matrices de Dirac ya no son de  $4 \times 4$ , sino de  $2 \times 2$ . Correspondientemente, la representación irreducible de los fermiones corresponde ahora a espinores de 2 componentes.

Las relaciones de anticonmutación del álgebra de Clifford son

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

con la convención  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1)$ . En la representación de Dirac, las matrices  $\gamma^\mu$  están dadas por

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

que satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} \mathbb{1} - i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, \quad (4.43)$$

$$\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\} = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho}. \quad (4.44)$$

Notar que, en  $d = 3 + 1$ , la traza de un número impar de matrices de Dirac es siempre cero, mientras que en este caso obtenemos un término totalmente antisimétrico. Por otra parte, no existe una matriz  $\gamma^5$  que anticonmute con las restantes  $\gamma^\mu$  (ver que  $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \mathbb{1}$ ). Por este motivo no existe la noción de quiralidad en el sentido usual.

#### 4.3.1 Simetrías $\mathcal{P}$ , $\mathcal{C}$ , $\mathcal{T}$

Las simetrías discretas de paridad  $\mathcal{P}$ , conjugación de carga  $\mathcal{C}$  e inversión temporal  $\mathcal{T}$  actúan de manera diferente en dimensión  $2 + 1$  al caso de  $3 + 1$ . En cuanto a la primera, la noción de paridad en el espacio tridimensional es la del cambio  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Sin embargo, en el plano dicha transformación es equivalente a una rotación, lo cual se traduce, en términos formales, en el hecho de que dicha transformación de Lorentz  $\Lambda$  tiene determinante  $+1$  en lugar de  $-1$ . De esta forma, la transformación de paridad apropiada debe ser tal que sólo cambie el signo de una de las coordenadas, por ejemplo

$$x^1 \rightarrow -x^1, \quad x^2 \rightarrow x^2. \quad (4.45)$$

A partir del término cinético del lagrangiano de Dirac, para tener invariancia de paridad los espinores deben transformar, a menos de una fase global, de la forma

$$\psi \rightarrow \gamma^1 \psi. \quad (4.46)$$

Pero entonces el término de masa del lagrangiano cambia de signo y rompe paridad, ya que tenemos

$$\bar{\psi} \psi \rightarrow -\bar{\psi} \psi. \quad (4.47)$$

En cuanto al campo de gauge, bajo  $\mathcal{P}$  se tiene que

$$A^0 \rightarrow A^0 \quad , \quad A^1 \rightarrow -A^1 \quad , \quad A^2 \rightarrow A^2 . \quad (4.48)$$

De esta forma, el término de Maxwell es invariante, mientras que el Chern-Simons adquiere un signo menos,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \rightarrow -\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho . \quad (4.49)$$

Con respecto a la conjugación de carga  $\mathcal{C}$ , sabemos que la ecuación de Dirac para el electrón está dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi = 0 . \quad (4.50)$$

La transformación  $\mathcal{C}$  la convierte en la ecuación del positrón, de la forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi_c = 0 , \quad (4.51)$$

siendo  $\psi_c \equiv C\gamma^0\psi^*$ , con  $C$  la matriz de conjugación de carga que satisface

$$(\gamma^\mu)^\top = -C^{-1}\gamma^\mu C . \quad (4.52)$$

Podemos elegir  $C = \gamma^2$  en la representación de Dirac mostrada en la sección anterior. De esta forma, el término masivo es invariante ante  $\mathcal{C}$  debido a la anticonmutatividad de los fermiones, al igual que el término Chern-Simons.

Por último, sabemos que la transformación de inversión temporal  $\mathcal{T}$  es una operación antiunitaria que realiza el mapeo  $x^0 \rightarrow -x^0$ , dejando invariantes las coordenadas espaciales. Nuevamente en la representación de Dirac, la acción sobre espinores es de la forma

$$\psi \rightarrow \gamma^2 \psi , \quad (4.53)$$

mientras que el campo de gauge  $A_\mu$  cambia mediante

$$\bar{A} \rightarrow -\bar{A} \quad , \quad A^0 \rightarrow A^0 . \quad (4.54)$$

De esta forma, tanto el término de masa fermiónico como el de Chern-Simons adquieren un cambio de signo ante inversión temporal.

Vemos entonces que estos dos términos tienen las mismas propiedades de transformación ante  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{T}$ . En particular, se respeta la simetría de conjugación de carga, pero se viola la simetría de paridad e inversión temporal.

#### 4.4 TÉRMINO DE CHERN-SIMONS INDUCIDO MEDIANTE CÁLCULO PERTURBATIVO

El término de Chern-Simons introducido de manera *ad hoc* puede obtenerse a partir de correcciones cuánticas de cierto tipo de teorías,

incluso si dicho término no está presente en el lagrangiano inicial del modelo. El caso más sencillo de esta manifestación ocurre en el caso de la electrodinámica cuántica en dimensión  $2 + 1$ , donde el término de Chern-Simons aparece al realizar el cálculo a un loop de la acción efectiva fermiónica. Veremos entonces el caso de QED, aunque puede generalizarse a teorías con campos no abelianos. Por otra parte, a altas temperaturas las teorías cuánticas de campos en 4 dimensiones se vuelven, de manera efectiva, teorías en 3 dimensiones. En particular, ciertas teorías de fermiones en  $d = 3 + 1$  adquieren un término de Chern-Simons en el límite de altas temperaturas. Veremos a continuación la deducción del primer caso (ver Jackiw [22] para el segundo).

Comenzamos con la función de partición fermiónica  $\mathcal{Z}[A]$  con acople a un campo abeliano externo  $A_\mu$ . En espacio euclídeo, se tiene

$$\mathcal{Z}[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]}, \quad (4.55)$$

con la acción  $S[\bar{\psi}, \psi, A]$  dada por

$$S[\bar{\psi}, \psi, A] = \int d^4x \bar{\psi} (i\partial + m + e\mathcal{A}) \psi. \quad (4.56)$$

Centrándonos en el operador  $(i\partial + m + e\mathcal{A})$ , podemos plantear el problema de autovalores y autofunciones correspondiente, de la forma

$$(i\partial + m + e\mathcal{A}) \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad (4.57)$$

con la condición de normalización

$$\int d^4x \varphi_n^\dagger(x) \varphi_m(x) = \delta_{nm}. \quad (4.58)$$

Podemos entonces expandir los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  en términos de sus autofunciones, obteniendo

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{a}_n \varphi_n^\dagger(x), \quad (4.59)$$

donde los coeficientes  $a_n$  y  $\bar{a}_n$  son variables de Grassmann que satisfacen

$$\{a_n, a_m\} = \{\bar{a}_n, \bar{a}_m\} = \{a_n, \bar{a}_m\} = 0 \quad \forall n, m. \quad (4.60)$$

Definimos entonces las medidas de integración  $\mathcal{D}\bar{\psi}$  y  $\mathcal{D}\psi$  sobre campos fermiónicos de la forma

$$\mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_n d\bar{a}_n, \quad \mathcal{D}\psi = \prod_n da_n, \quad (4.61)$$

con lo cual podemos reescribir la función de partición  $\mathcal{Z}[A]$  como

$$\mathcal{Z}[A] = \int \prod_{n,m} d\bar{a}_n da_m e^{-S[A, \varphi_n^\dagger, \varphi_j]}, \quad (4.62)$$

para la acción  $S$  dada por

$$\begin{aligned} S[\varphi_i^\dagger, \varphi_j, \mathcal{A}] &= \int d^4x \sum_i \bar{a}_i \varphi_i^\dagger (i\not{\partial} + m + e\mathcal{A}) \sum_j a_j \varphi_j \\ &= \sum_i \lambda_i \bar{a}_i a_i . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\mathcal{A}] &= \int \prod_{n,m} d\bar{a}_n da_m \exp \left\{ - \sum_i \lambda_i \bar{a}_i a_i \right\} \\ &= \mathcal{N} \prod_n \lambda_n \\ &\equiv \det (i\not{\partial} + m + e\mathcal{A}) . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Así, podemos obtener la acción fermiónica efectiva a un loop mediante

$$S_{\text{eff}}[\mathcal{A}] = \log \det (i\not{\partial} + m + e\mathcal{A}) . \quad (4.65)$$

Recordando la propiedad para estos operadores dada por

$$\log \det (i\not{\partial} + m + e\mathcal{A}) = \text{tr} \log (i\not{\partial} + m + e\mathcal{A}) \quad (4.66)$$

podemos expandir esta expresión perturbativamente en términos del acoplamiento, con lo cual

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\mathcal{A}] &= \text{tr} \log (i\not{\partial} + m) + e \text{tr} \log \left( \frac{1}{i\not{\partial} + m} \mathcal{A} \right) + \\ &\quad + e^2 \text{tr} \log \left( \frac{1}{i\not{\partial} + m} \mathcal{A} \frac{1}{i\not{\partial} + m} \mathcal{A} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

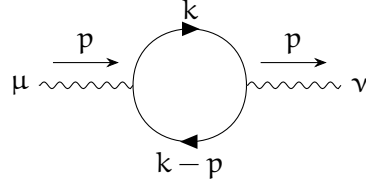
El primer término corresponde al orden 0, i. e., al caso libre con  $\mathcal{A} = 0$ . El segundo término (orden 1) es el diagrama *tadpole*. Como el término de Chern-Simons es cuadrático en el campo  $A_\mu$ , analizamos el orden cuadrático (esto sólo vale para el caso de temperatura cero, que es el que estamos analizando. Ver Dunne [15] para el caso de  $T > 0$ ). En la representación en el espacio de momentos se obtiene

$$S_{\text{eff}}^{\text{quad}}[\mathcal{A}] = \frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A^\mu(-p) \Gamma^{\mu\nu}(p) A^\nu(p) , \quad (4.68)$$

siendo  $\Gamma^{\mu\nu}(p)$  el núcleo correspondiente a la autoenergía del fotón a un loop, cuyo diagrama se muestra en la [Figura 4.1](#). Su expresión se lee

$$\Gamma^{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{tr} \left( \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{k} - m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma^\nu \frac{-\not{k} - m}{k^2 + m^2} \right) . \quad (4.69)$$

Ahora bien, en el término de Chern-Simons aparece el símbolo totalmente antisimétrico  $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ , con lo cual estamos interesados en la



**Figura 4.1** – Diagrama de Feynman de autoenergía del fotón a un loop.

parte antisimétrica del núcleo  $\Gamma^{\mu\nu}$ . Sacando de la traza el denominador, nos queda

$$\text{tr} [\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} - m) \gamma^\nu (-\not{k} - m)] . \quad (4.70)$$

Distribuyendo, obtenemos un término con la traza de dos matrices de Dirac, dos con la traza de tres de ellas, y uno con la traza de cuatro. Los términos con trazas de un número par de matrices son simétricos, con lo cual no los consideramos. En cuanto a los dos términos restantes, vimos en (4.44) que la traza de tres de estas matrices no es cero como en  $3 + 1$  dimensiones, sino que

$$\text{tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\} = -2i\varepsilon^{\mu\nu\rho} . \quad (4.71)$$

En particular, este término es antisimétrico en todos sus índices. La parte antisimétrica de la traza (4.70) queda entonces de la forma

$$-m(p_\rho + k_\rho) \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) + mk_\rho \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) . \quad (4.72)$$

Por antisimetría, los términos con  $k_\rho$  se anulan, y volviendo a la expresión para  $\Gamma^{\mu\nu}$  obtenemos que su parte antisimétrica está dada por

$$\Gamma_{\text{odd}}^{\mu\nu}(p) = \varepsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \Pi(p) , \quad (4.73)$$

donde

$$\Pi(p) = 2m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2] (k^2 + m^2)} . \quad (4.74)$$

Esta expresión se integra fácilmente, obteniendo

$$\Pi(p) = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{|p|} \arcsin \left( \frac{|p|}{\sqrt{p^2 + 4m^2}} \right) \quad (4.75)$$

Reemplazando esto en la expresión de  $\Gamma_{\text{odd}}^{\mu\nu}(p)$  y tomando el límite de bajas energías  $p/m \ll 1$ , se tiene

$$\Gamma_{\text{odd}}^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{4\pi} \frac{m}{|m|} \varepsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho + \mathcal{O}(p^2/m^2) . \quad (4.76)$$

Finalmente, insertando el término dominante de esta aproximación en la acción efectiva (4.68) y volviendo a la representación en el espacio

de coordenadas, obtenemos el término de Chern-Simons inducido, cuya acción euclídea está dada por

$$S_{\text{eff}}^{\text{CS}} = -i \frac{e^2}{8\pi} \frac{m}{|m|} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho . \quad (4.77)$$

Cabe destacar que, sin embargo, este resultado no es del todo correcto. Debido al factor  $\frac{1}{8\pi}$ , al hacer transformaciones de gauge topológicamente no triviales la teoría no es invariante de gauge. En efecto, al hacer una tal transformación caracterizada por un número de *winding*  $n$ , esta acción cambia en un factor  $n\pi$ . A fin de cuentas es la invariancia de  $\exp(iS)$  la que nos importa, pero dado que  $\exp(in\pi) = \pm 1$  (con signo positivo o negativo según sea  $n$  par o impar), vemos que para  $n$  impares esta expresión cambia de signo y rompe la invariancia de gauge.

Debe entonces aparecer un factor  $\frac{1}{4\pi}$  para compensar los efectos de estas transformaciones, de forma que la acción varíe en un término dado por  $2n\pi$  y obtengamos  $\exp(iS)$  invariante, independientemente de  $n$ . Esto se logra cuando se tiene en cuenta el hecho de que el término de masa fermiónica no es el único que viola paridad. Existe una ambigüedad de signo extra en la medida de integración de los campos fermiónicos al trabajar en  $d = 2 + 1$  ante transformaciones de paridad, que debe ser tenida en cuenta. Un cálculo preciso puede encontrarse en Gamboa Saravi, Rossini y Schaposnik [20], el cual da el resultado

$$S_{\text{eff}}^{\text{CS}} = -i \frac{e^2}{8\pi} \left( \frac{m}{|m|} \pm 1 \right) \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho . \quad (4.78)$$

Se puede apreciar que el segundo término está presente incluso en ausencia de masa para los fermiones, ya que es una consecuencia de la regularización dimensional en dimensión espacio-temporal impar. Recientemente Seiberg *et al.* [40] encontraron otra manera de obtener este resultado.

Para trabajar entonces con una teoría que viole paridad y que esta acción no se anule, tomamos el mismo signo en ambos términos de la acción (4.78), obteniendo entonces

$$S_{\text{eff}}^{\text{CS}} = \pm i \frac{e^2}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho , \quad (4.79)$$

que es efectivamente invariante de gauge.

Por último, si bien este cálculo no tiene en cuenta correcciones de segundo o mayor orden en  $p/m$ , es importante mencionar que no hay correcciones perturbativas a mayores órdenes en el desarrollo en loops. Ver Dunne [15] para un argumento de esta afirmación. En particular, un cálculo explícito de la contribución nula a dos loops puede verse encontrarse en Bernstein y Lee [9].





# 5

## MODELO PROPUESTO

### 5.1 MOTIVACIÓN

Las teorías con dos campos de gauge acoplados mediante un término de *gauge-mixing* han recibido recientemente mucha atención tanto en física de altas energías como en materia condensada. En el primer caso, la idea es construir modelos que tengan en cuenta la posible existencia de sectores de materia oscura generando a su vez ruptura de supersimetría (ver Battaglieri *et al.* [8], Jaeckel y Ringwald [24], Arias *et al.* [5]). Con respecto a materia condensada, este tipo de modelos se han utilizado para describir los llamados *órdenes entrelazados* en superconductores de alta temperatura (Kivelson *et al.* [26], Fradkin, Kivelson y Tranquada [19], Zhang [56], Arovas *et al.* [6]), y también para estudiar aisladores y superconductores topológicos (Vishwanath y Senthil [50], Seiberg *et al.* [40]).

En el ámbito de materia oscura, los campos en el sector oscuro se toman en general como campos escalares (complejos) y campos de gauge, pero también hay propuestas con campos fermiónicos que juegan el rol de *partículas masivas débilmente interactuantes*, o WIMPs por sus siglas en inglés (Weinberg [51]). Por supuesto, en los modelos supersimétricos con ruptura de supersimetría, la inclusión de fermiones es obligatoria (ver Arias *et al.* [5] y referencias en él). Otros efectos cosmológicos relevantes en los que los campos fermiónicos en el sector oscuro juegan un papel central han sido estudiados en Savchenko y Rudakovskiy [38].

En general, las constantes de acoplamiento que mezclan los campos de los dos sectores deben tomarse mucho más pequeñas que las del sector observable. Este es el caso, por ejemplo, al considerar la posible existencia de partículas con *milli-carga* eléctrica  $\epsilon e$ , con  $\epsilon$  pequeño, siendo  $e$  la carga elemental en el sector visible. De hecho, recientes estudios experimentales en el rango  $10^{-3} \leq \epsilon \leq 10^{-1}$  previamente inexplorado han aumentado la región de exclusión para partículas con *milli-carga* con masas superiores a 0,1 GeV y  $\epsilon < 10^{-1}$  (Acciarri *et al.* [2]).

Cabe destacar se presentaron ideas similares en el campo de la física de materia condensada para describir la complejidad de los diagramas de fase en ciertos materiales electrónicos altamente correlacionados. De hecho, dentro de un enfoque fenomenológico de superconductividad de Ginzburg-Landau, se estudiaron distintas fases ruptura de simetría asociadas a diferentes órdenes de competencia en modelos con varios campos escalares complejos (Kivelson *et al.* [26], Fradkin,

Kivelson y Tranquada [19]). También ha habido avances en el análisis de dualidades en  $d = 3$  dimensiones en relación a materiales en los que el orden topológico desempeña un papel central (véase, por ejemplo, Vishwanath y Senthil [50]).

A continuación proponemos un modelo en  $d = 2 + 1$  dimensiones en el que el sector *oscuro* o *escondido* incluye un campo de gauge  $U(1)$  y campos de materia (fermiones y un escalar complejo) que están acoplados a un campo de gauge externo  $U(1)$  en el sector *visible*. Como se mencionó en el [Capítulo 1](#), a altas temperaturas una teoría cuántica de campos en 4 dimensiones es, en términos efectivos, una teoría tridimensional.

## 5.2 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Como se mencionó en la sección anterior, consideramos un modelo de dimensión espacio-temporal  $d = 2 + 1$ , con métrica  $\text{diag}(1, -1, -1)$ , que contiene un sector *visible* y uno *oscuro*. En cuanto al primero, consiste de un campo de gauge abeliano  $A_\mu$ , que se lo tomará como un campo externo sin dinámica propia. Los campos del sector oscuro están dados por un campo de gauge  $C_\mu$  también abeliano, un campo escalar complejo  $\phi$  con potencial de ruptura de simetría, y dos campos fermiónicos  $\psi^1$  y  $\psi^2$  acoplados a  $A_\mu$  y  $C_\mu$ , respectivamente. Más adelante tomaremos  $|m_2| \gg |m_1|$ .

La dinámica del modelo está gobernada por la acción  $S$  dada por

$$S = \int d^3x \left( \frac{1}{2} |D_\mu[A]\phi|^2 - V[\phi] + \bar{\psi}^1 \not{D}[A]\psi^1 - m_1 \bar{\psi}^1 \psi^1 + \bar{\psi}^2 \not{D}[C]\psi^2 - m_2 \bar{\psi}^2 \psi^2 + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu C_\alpha \right). \quad (5.1)$$

El primer término acopla  $A_\mu$  con el escalar complejo  $\phi = \phi^1 + i\phi^2$ , de la forma

$$D_\mu[A]\phi = (\partial_\mu + i\varepsilon e A_\mu)\phi, \quad (5.2)$$

Por otra parte, los fermiones del sector oscuro  $\psi^1$  y  $\psi^2$  están cada uno mínimamente acoplados a los campos de gauge  $A_\mu$  y  $C_\mu$  respectivamente, de la forma

$$\not{D}[A]\psi^1 = (\not{\partial} + i\varepsilon e \not{A})\psi^1, \quad \not{D}[C]\psi^2 = (\not{\partial} + i e_h \not{C})\psi^2. \quad (5.3)$$

La carga  $e$  representa la carga elemental en el sector visible, mientras que el acoplamiento entre los campos de materia oscuros y el campo de gauge visible está dado por  $\varepsilon e$ , con  $|\varepsilon| \ll 1$ , de forma que  $\varepsilon e$  pueda ser interpretado como una milli-carga (ver Ahlers *et al.* [4]), tal como se mencionó en la introducción. En cuanto a  $e_h$ , ésta corresponde a la carga del fermión  $\psi^2$ .

En cuanto a  $\phi$ , el potencial de ruptura de simetría  $V[\phi]$  toma la forma

$$V[\phi] = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 . \quad (5.4)$$

Por último, el último término de la acción (5.1) corresponde a un acoplamiento entre los campos de gauge de cada sector. A este tipo de términos se los suele denominar “BF” en la jerga, ya que es de la forma  $\mathbf{B} d\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}$ , siendo  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos campos de gauge abelianos<sup>1</sup> (en nuestro caso, al segundo campo de gauge lo llamamos  $\mathbf{C}$  para no confundirlo con los campos magnéticos  $B_A$  y  $B_C$  que usaremos en adelante). De esta manera, el sector visible y el oscuro interactúan sólo a través del término “BF” y del acoplamiento entre  $A_\mu$  y  $\psi^1$ .

Con respecto a las dimensiones de los campos presentes, se tiene

$$[\phi] = m^{1/2} , \quad [A] = [C] = [\psi^1] = [\psi^2] = m ,$$

y para los parámetros,

$$[e] = [e_h] = [\varepsilon] = [\kappa] = m^0 , \quad [\lambda] = m .$$

Los campos eléctricos y magnéticos asociados a los campos de gauge se obtienen como

$$B_A = -F^{12}[A] , \quad E_A^i = -F^{i0}[A] , \quad (5.5)$$

y análogamente para  $C_\mu$ .

### 5.2.1 Acción efectiva

Como se mencionó en el [Capítulo 1](#), dada la acción (5.1) podemos construir la acción efectiva dada por la integral funcional de los fermiones  $\psi^1$  y  $\psi^2$ . Como se mostró en la [Sección 4.4](#), a bajas energías cada fermión contribuye con un término de Chern-Simons impar; esto es,

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}^1 \mathcal{D}\psi^1 \exp \left\{ i \int d^3x \bar{\psi}^1 (\not{D}[A] + m_1) \psi^1 \right\} \Big|_{\text{impar}} = \exp \left\{ i \frac{(\varepsilon e)^2}{8\pi} \int d^3x \left( \pm 1 + \frac{|m_1|}{m_1} \right) \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha \right\} , \quad (5.6)$$

y análogamente para  $\psi^2$  reemplazando  $\varepsilon e$  por  $e_h$  y  $A$  por  $C$ .

Por otra parte, si bien no se lo mencionó en la [Sección 4.4](#), es posible calcular la contribución de la parte par de la integración fermiónica

<sup>1</sup> Recordar que el tensor de curvatura  $\mathbf{F}$  se relaciona con la conexión  $\mathbf{A}$  de la forma  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$ , y para el caso de un grupo de gauge abeliano se tiene que  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0$ .

(ver Barci, Fosco y Oxman [7] para una deducción), que a primer orden en  $p/m$  es

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}^1 \mathcal{D}\psi^1 \exp \left\{ - \int d^3x \bar{\psi}^1 (\not{D}[A] + m_1) \psi^1 \right\} \Big|_{\text{par}} = \exp \left\{ i \frac{(\varepsilon e)^2}{48\pi|m_1|} \int d^3x F_{\mu\nu}[A] F^{\mu\nu}[A] \right\} \quad (5.7)$$

Tenemos entonces el lagrangiano efectivo resultante de la integración funcional de los fermiones dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\varepsilon^2 e^2}{48\pi|m_1|} F_{\mu\nu}[A] F^{\mu\nu}[A] + \frac{1}{2} |D_\mu[A]\phi|^2 - V[\phi] \\ & \pm \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} (\varepsilon^2 e^2 A_\mu \partial_\nu A_\alpha + e_h^2 C_\mu \partial_\nu C_\alpha + \kappa C_\mu \partial_\nu A_\alpha) , \quad (5.8) \end{aligned}$$

donde no hemos considerado el término de Maxwell resultante de la contribución par de la integración fermiónica para  $C_\mu$  asumiendo que  $|m_2| \gg |m_1|$ . De ahora en más consideraremos el signo  $+$  resultante de la integración fermiónica (la derivación correspondiente al signo  $-$  se sigue idénticamente).

Introducimos ahora un campo  $\tilde{C}_\mu$  definido como

$$\tilde{C}_\mu \equiv C_\mu + \frac{\kappa}{2e_h^2} A_\mu \quad (5.9)$$

y reemplazamos  $C_\mu$  en términos de  $\tilde{C}_\mu$  y  $A_\mu$  en el lagrangiano (5.8). Bajo condiciones apropiadas en el infinito, sabemos que

$$\int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu (A_\nu \tilde{C}_\alpha) = 0 , \quad (5.10)$$

con lo cual

$$\int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu \tilde{C}_\alpha = - \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{C}_\alpha \partial_\nu A_\mu = \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{C}_\mu \partial_\nu A_\alpha , \quad (5.11)$$

habiendo hecho uso de la antisimetría del símbolo  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$  en la última igualdad. Luego, en términos de  $\tilde{C}_\mu$  el lagrangiano (5.8) queda de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\varepsilon^2 e^2}{48\pi|m_1|} F_{\mu\nu}[A] F^{\mu\nu}[A] + \frac{1}{2} |D_\mu[A]\phi|^2 - V[\phi] \\ & + \frac{\varepsilon^2 e^2}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \left[ \left( 1 - \frac{\kappa^2}{4\varepsilon^2 e^2 e_h^2} \right) A_\mu \partial_\nu A_\alpha + e_h^2 \tilde{C}_\mu \partial_\nu \tilde{C}_\alpha \right] . \quad (5.12) \end{aligned}$$

Con este cambio de variables hemos podido desacoplar los campos  $A_\mu$  y  $\tilde{C}_\mu$ , teniendo un modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs para  $A_\mu$ , y un simple término de Chern-Simons para  $\tilde{C}_\mu$ .

### 5.2.2 Interludio

Cabe destacar que inicialmente se intentó trabajar con un único campo fermiónico  $\psi$ , acoplado a los campos de gauge  $A_\mu$  y  $C_\mu$  de la forma

$$\bar{\psi} \not{D}[A, C] \psi = \bar{\psi} (i \not{\partial} + \varepsilon e \not{A} + e_h \not{C}) \psi. \quad (5.13)$$

Luego de la integración funcional, esto daría lugar a tres términos dados por

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha} (e^2 \varepsilon^2 A_\mu \partial_\nu A_\alpha + e_h^2 C_\mu \partial_\nu C_\alpha + 2\varepsilon e e_h A_\mu \partial_\nu C_\alpha), \quad (5.14)$$

con lo cual obtendríamos naturalmente el término BF, con  $\kappa = 2\varepsilon e e_h$ , sin necesidad de introducirlo *ad-hoc* en el lagrangiano inicial. Sin embargo, esto no funciona por dos razones: en primer lugar, la suma de conexiones en una variedad no da como resultado otra conexión. Por otra parte, incluso si se confiara en el resultado, al hacer el cambio de variable (5.9), el coeficiente del término de Chern-Simons resultante para  $A_\mu$  terminaría siendo 0 (ver lagrangiano (5.12)), obteniendo una dinámica final menos interesante.

### 5.2.3 Ecuaciones resultantes

Volviendo al lagrangiano efectivo (5.12), a partir de él podemos derivar las ecuaciones de movimiento de sus campos, obteniendo

$$D_\mu[A] D^\mu[A] \phi + \frac{\delta V}{\delta \phi^*} = 0, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{12\pi m_1} \partial_\mu F^{\mu\nu}[A] + \frac{\tilde{\kappa}}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta}[A] = -j^\nu, \quad (5.16)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta}[\tilde{C}] = 0, \quad (5.17)$$

donde definimos  $\tilde{\kappa}$  como

$$\tilde{\kappa} \equiv \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{\kappa^2}{4\varepsilon^2 e^2 e_h^2} \right) \quad (5.18)$$

y la corriente  $j^\nu$  está dada por

$$j^\nu \equiv |\phi|^2 A^\nu + \frac{i}{2\varepsilon e} (\phi \partial^\nu \phi^* - \phi^* \partial^\nu \phi). \quad (5.19)$$

Como ya hemos mencionado, vemos que las primeras dos ecuaciones corresponden a un modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs con campo de gauge  $A_\mu$ , completamente desacoplado del campo  $C_\mu$ . Por otra parte, la Ecuación (5.17) nos dice que este campo  $\tilde{C}_\mu$  es puro gauge, con lo cual una vez resueltas las Ecuaciones (5.15) y (5.16) podemos hallar la solución para  $C_\mu$  a partir de la Ecuación (5.9). Luego, el campo magnético  $B_C$  y eléctrico  $E_C$  correspondientes a  $C_\mu$  son

proporcionales a aquellos de  $A_\mu$ , con constante de proporcionalidad dada por

$$B_C = -\frac{\kappa}{2e_h^2} B_A \quad , \quad E_C = -\frac{\kappa}{2e_h^2} E_A \quad . \quad (5.20)$$

Luego, los flujos magnéticos  $\Phi_A$  y  $\Phi_C$  toman la forma

$$\Phi_A = \int B_A d^2x = \frac{2\pi n}{\epsilon e} = -\frac{2e_h^2}{\kappa} \int B_C d^2x = -\frac{2e_h^2}{\kappa} \Phi_C \quad . \quad (5.21)$$

Por último, podemos escribir la [Ecuación \(5.16\)](#) de la forma

$$\frac{1}{12\pi m_1} \nabla \cdot E_A + \tilde{\kappa} B_A = j^0 = |\phi|^2 A_0 \quad . \quad (5.22)$$

Como sucede siempre que se encuentra presente un término de Chern-Simons, existe una relación entre los flujos magnéticos  $\Phi$ ,

$$\Phi_A = -\frac{2\pi n}{\epsilon e} \quad , \quad \Phi_C = -\frac{\kappa}{2e_h^2} \frac{2\pi n}{\epsilon e} \quad , \quad (5.23)$$

y las cargas eléctricas  $Q$ ,

$$Q_A = \tilde{\kappa} \Phi_A \quad , \quad Q_C = \tilde{\kappa} \Phi_C \quad . \quad (5.24)$$

Notar que cuando  $\kappa$  toma el valor crítico  $\kappa_c$  dado por

$$\kappa_c = 2\epsilon e e_h \quad (5.25)$$

ambas cargas eléctricas se anulan. Esto es debido al hecho de que, para  $\kappa = \kappa_c$ , no hay contribución del término de Chern-Simons en la [Ecuación \(5.16\)](#) y, como es bien sabido, no existen soluciones con carga eléctrica de energía finita para este caso. Sin embargo, si bien el campo  $\tilde{C}_\mu$  se desacopla y resulta en un gauge puro, la relación [\(5.9\)](#) implica que, incluso en el sector oscuro de  $C_\mu$  donde no hay potencial de ruptura de simetría, para  $\kappa = \kappa_c$  sigue existiendo un flujo  $\Phi = \Phi_C|_{\kappa_c}$  no trivial, dado por

$$\Phi_C|_{\kappa_c} = \frac{2\pi n}{e_h} \quad . \quad (5.26)$$

#### 5.2.4 Ansätze y soluciones

A modo de obtener soluciones tipo vórtice, proponemos el mismo *Ansatz* que en [\(4.27\)](#) pero ahora extendiéndolo también al campo  $C_\mu$ , es decir,

$$A_\varphi = -\frac{a(r)}{r} \quad , \quad A_0 = a_0(r) \quad , \quad (5.27a)$$

$$C_\varphi = -\frac{c(r)}{r} \quad , \quad C_0 = c_0(r) \quad , \quad (5.27b)$$

$$\phi = \phi_0 f(r) e^{in\varphi} \quad , \quad (5.27c)$$

con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} f(0) &= a(0) = c(0) = 0, \\ f(\infty) &= 1, \quad a(\infty) = \frac{n}{\varepsilon e}, \quad a_0(\infty) = c_0(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se obtienen entonces las ecuaciones diferenciales

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}(n - \varepsilon e a)^2 + \varepsilon^2 e^2 f a_0^2 - \frac{\lambda \phi_0^2}{2} f(f^2 - 1) = 0, \quad (5.29a)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} + \frac{12\pi m_1}{\varepsilon e} \phi_0^2 f^2 (n - \varepsilon e a) - 12\pi m_1 \tilde{\kappa} a_0' r = 0, \quad (5.29b)$$

$$a_0'' + \frac{a_0'}{r} - 12\pi m_1 \phi_0^2 a_0 f^2 - 12\pi m_1 \tilde{\kappa} \frac{a_0'}{r} = 0, \quad (5.29c)$$

$$c' + \frac{\kappa}{2e_h^2} a' = 0, \quad (5.29d)$$

$$c_0' + \frac{\kappa}{2e_h^2} a_0' = 0. \quad (5.29e)$$

En cuanto a los campos magnético y eléctrico para  $A_\mu$ , éstos toman la forma

$$\mathbf{E}_A = a_0' \hat{r}, \quad \mathbf{B}_A = -\frac{a'}{r}. \quad (5.30)$$

Por último, podemos hallar una expresión para la energía del sistema  $\mathcal{E}$  (recordando por lo dicho en la [Sección 4.1](#) que el término de Chern-Simons no contribuye a ella), obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2\pi \int r dr \left[ \frac{\varepsilon^2 e^2}{24\pi m_1} (B_A^2 + E_A^2) - \frac{1}{2} |D_\mu[A]\phi|^2 + V[\phi] \right] \\ &= 2\pi \int r dr \left[ \frac{\varepsilon^2 e^2}{24\pi m_1} (B_A^2 + E_A^2) + \frac{\phi_0^2}{2} \left( f'^2 + \frac{f^2}{r^2} (n - \varepsilon e a)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\varepsilon^2 e^2 \phi_0^2}{2} a_0^2 f^2 + \frac{\lambda \phi_0^4}{4} (f^2 - 1)^2 \right] \\ &\equiv \int \varepsilon(r) r dr, \end{aligned} \quad (5.31)$$

habiendo definido  $\varepsilon(r)$  como la densidad de energía. Es interesante notar que no hay contribución del campo  $C_\mu$  del sector oscuro a la energía.

## 5.3 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y TRANSICIONES DE FASE

Tal como se vio en el [Capítulo 4](#), para distancias grandes el comportamiento de los campos es de la forma

$$a(r) \rightarrow \frac{n}{\epsilon e} + \alpha_{\pm} \phi_0 \sqrt{r} e^{-\mu_{\pm} r}, \quad (5.32a)$$

$$a_0(r) \rightarrow \pm \frac{\alpha_{\pm}}{\phi_0} \frac{e^{-\mu_{\pm} r}}{\sqrt{r}}, \quad (5.32b)$$

$$f(r) \rightarrow 1 + \frac{\beta_{\pm}}{\phi_0} \frac{e^{-m_h r}}{\sqrt{r}}, \quad (5.32c)$$

con  $\alpha_{\pm}$  y  $\beta_{\pm}$  constantes adimensionales,  $m_h \equiv 1/\zeta = \phi_0 \sqrt{\lambda/2}$  la masa de Higgs (siendo  $\zeta$  la longitud de coherencia asociada), y

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 12\pi m_1 \phi_0^2} \quad (5.33)$$

las masas de los campos de gauge, con

$$\mu \equiv 6\pi m_1 \bar{\kappa} = 3m_1 \left( 1 - \frac{\kappa^2}{4e_h^2 \epsilon^2 e^2} \right). \quad (5.34)$$

Según Vega y Schaposnik [49], cuando la dinámica del campo de gauge está gobernada por un término de Maxwell o uno de Chern-Simons, el modelo puede ser supersimetrizado cuando las masas del campo de Higgs y de gauge coinciden. Sin embargo esto no es cierto cuando ambos términos están presentes, como en el caso presente. Sin embargo, en el límite de bajas energías o masa  $m_1$  grande podemos despreciar el término de Maxwell, y el modelo se puede supersimetrizar siempre que

$$\eta_{\pm} \equiv \frac{m_h}{\mu_{\pm}} = 1. \quad (5.35)$$

Por otra parte,  $\eta_{\pm} \geq 1$  corresponde, en el ámbito de la teoría de superconductividad de Landau-Ginzburg, a la región de superconductividad tipo II, que en este caso equivale a

$$1 \geq \frac{\kappa^2}{4e_h^2 \epsilon^2 e^2} \geq 1 - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \phi_0 \left( \frac{\lambda}{6m_1} - 4\pi \right) \quad (5.36)$$

para el caso  $\mu_+$ , mientras que para  $\mu_-$  tenemos

$$1 \leq \frac{\kappa^2}{4e_h^2 \epsilon^2 e^2} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \phi_0 \left( \frac{\lambda}{6m_1} - 4\pi \right). \quad (5.37)$$

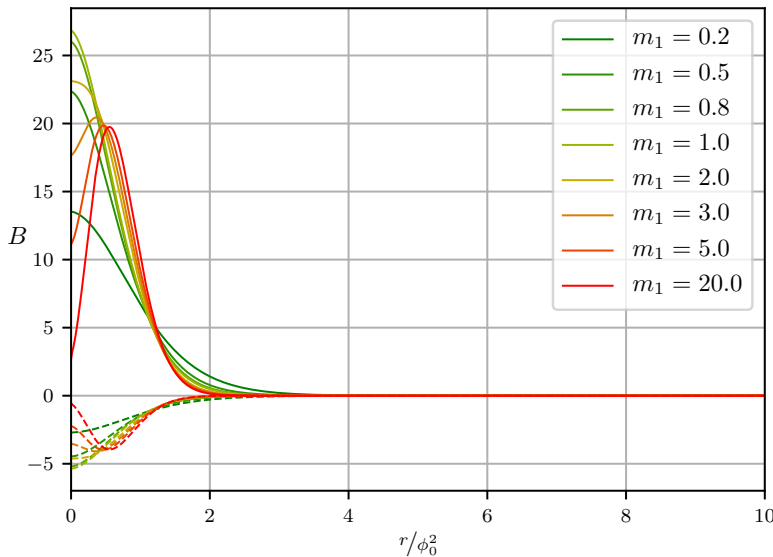
Para cada una de estas desigualdades, estas expresiones definen una hipersuperficie de transición de fase en el espacio de parámetros del modelo. Un análisis detallado de la transición entre superconductividad tipo I y tipo II, y su dependencia en la masa de Higgs  $m_h$ , puede encontrarse en Jacobs *et al.* [23].



## 5.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Dado que no se conocen soluciones analíticas a las Ecuaciones 5.29, procedimos a resolverlas numéricamente. Utilizamos el método de *shooting* para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de borde, con una precisión de  $\mathcal{O}(10^{-4})$ . Para asegurarse del correcto funcionamiento del método, se lo testeó para el caso sin acoplamiento de Chern-Simons, reproduciendo adecuadamente el resultado exacto de la energía total del sistema según la cota de Bogomol'nyi de la Ecuación (3.34).

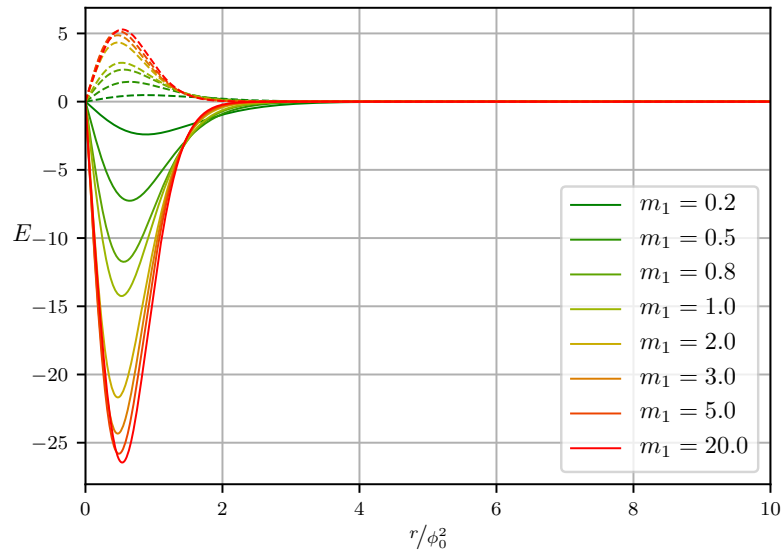
Estudiamos el comportamiento de los perfiles resultantes para los campos magnéticos, eléctricos y de Higgs, y la densidad de energía, para diferentes valores de los parámetros del modelo. En la Figura 5.1 mostramos la dependencia de los campos magnéticos  $B_A$  y  $B_C$  en  $m_1$ , la masa del fermión  $\psi^1$ , dejando los otros parámetros fijos. Análogamente, en la Figura 5.1 se muestran las componentes radiales de los campos eléctricos  $E_A$  y  $E_C$  en las mismas condiciones. Tener en cuenta que, para  $\kappa$  y  $e_h$  fijos,  $B_A$  y  $B_C$  son proporcionales y con signo opuesto, de acuerdo con la Ecuación (5.20), como se ve en las figuras, y lo mismo sucede para  $E_A$  y  $E_C$ . Observamos que el máximo de  $B_C$  aumenta junto con  $m_1$  para valores pequeños de la masa, mientras que disminuye a medida que  $m_1$  aumenta para valores más grandes del parámetro. Por otro lado, para grandes masas  $B_C$  tiende a valores cada vez más pequeños en el origen. Esto es consistente con el hecho de que el campo magnético se anula  $r = 0$  para un modelo de Chern-



**Figura 5.1** – Perfil de los campos magnéticos  $B_A$  y  $B_C$  (líneas rayadas y continuas, respectivamente) para distintos valores de  $m_1$ , en unidades de  $\phi_0^2$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,4$ .

Simons puro. En efecto, hacer  $m_1 \rightarrow \infty$  implica considerar el límite de bajas energías y por lo tanto eliminar el término de Maxwell en nuestro lagrangiano efectivo original.

El comportamiento cualitativo de  $E_C$ , por otro lado, no difiere considerablemente del modelo de Chern-Simons puro. Vemos en la [Figura 5.2](#) que, para  $m_1 \rightarrow 0$ ,  $E_C$  se anula ya que la contribución de Maxwell domina a la de Chern-Simons y, como se mencionó en el [Capítulo 3](#), no existe solución de energía finita con campo eléctrico distinto de cero para el modelo abeliano de Higgs sin término de Chern-Simons. La solución es entonces la correspondiente al vórtice de Nielsen-Olesen.

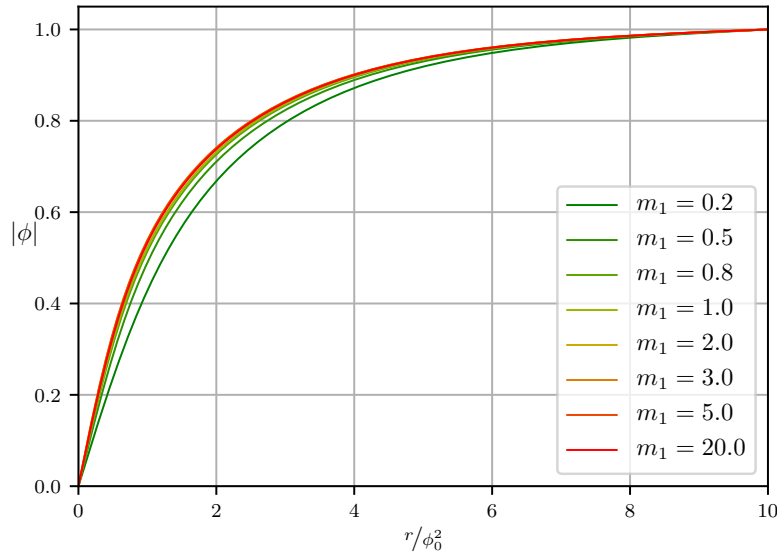


**Figura 5.2** – Perfil de los campos eléctricos radiales  $E_A$  y  $E_C$  (líneas rayadas y continuas, respectivamente) para distintos valores de  $m_1$ , en unidades de  $\phi_0^2$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,4$ .

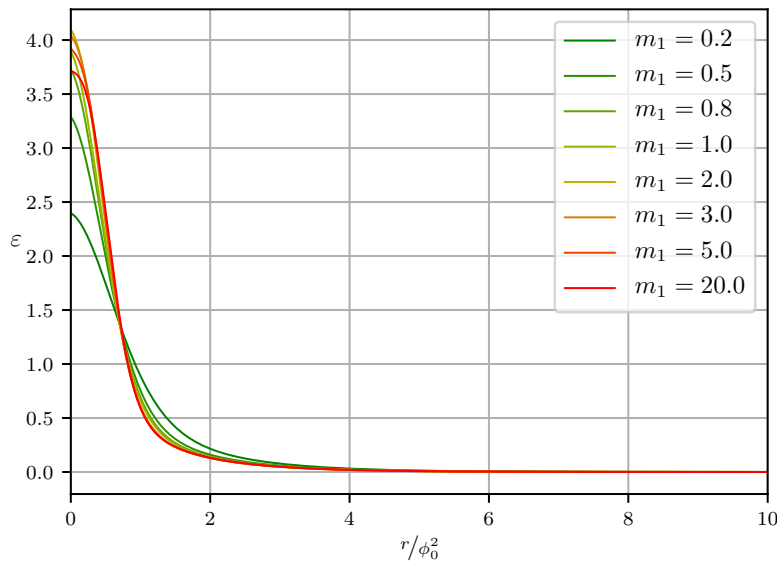
En cuanto al campo de Higgs  $\phi$ , pueden verse los perfiles resultantes de su módulo en la [Figura 5.3](#). Se observa que su perfil se ve levemente modificado al variar la masa  $m_1$ , convergiendo para el caso de masas grandes al perfil correspondiente al modelo de Chern-Simons sin dinámica de Maxwell.

Por otra parte, según se puede apreciar en la [Figura 5.4](#), la densidad de energía  $\varepsilon(r)$  definida en la [Ecuación \(5.31\)](#) tiende a concentrarse en el origen a medida que la masa  $m_1$  aumenta, en concordancia con el hecho de que los campos magnéticos, eléctricos y de Higgs también tienen este comportamiento.

Resulta interesante estudiar también el comportamiento de los campos al variar el parámetros de acople visible  $\varepsilon$ , cuyos resultados se observan en las [Figuras 5.5](#) y [5.6](#). Al contrario de lo que sucede con  $m_1$ , el máximo de  $B_C$  aumenta a medida que  $\varepsilon$  lo hace para valores



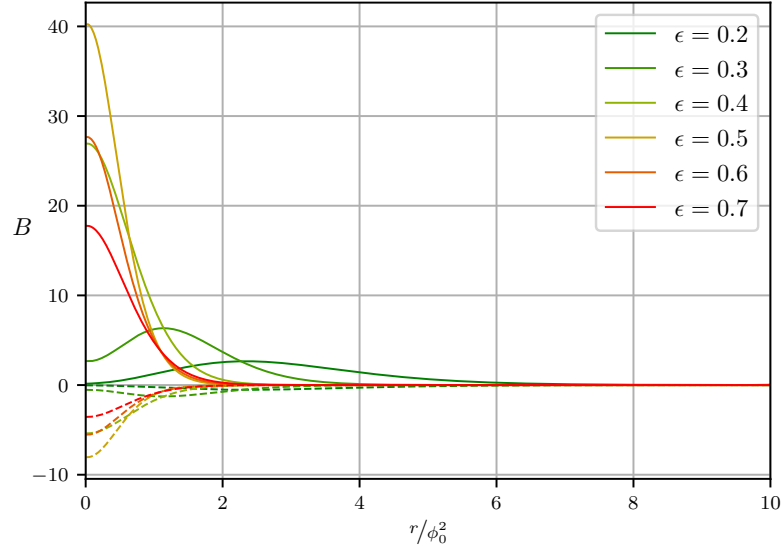
**Figura 5.3** – Perfil del módulo del campo de Higgs  $\phi$  para distintos valores de  $m_1$ , en unidades de  $\phi_0^2$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,4$ .



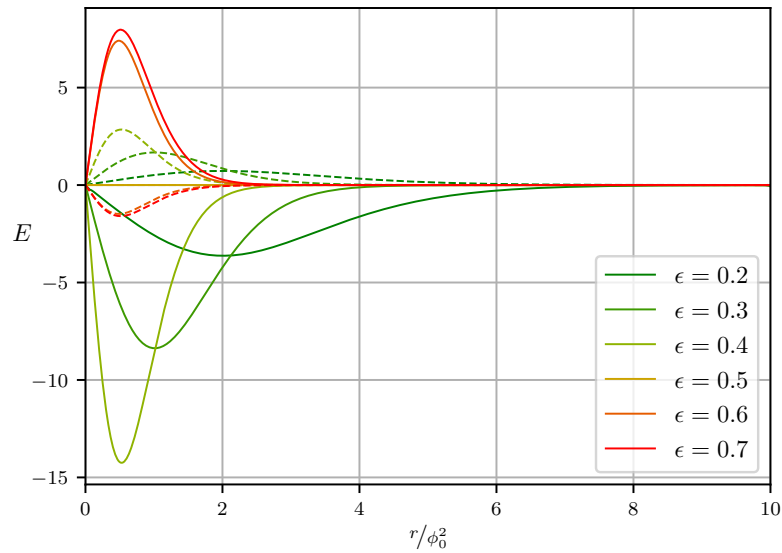
**Figura 5.4** – Perfil de la densidad de energía  $\varepsilon(r)$  para distintos valores de  $m_1$ , en unidades de  $\phi_0^2$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,4$ .

grandes de  $\varepsilon$ , mientras que disminuye a medida que  $\varepsilon$  aumenta para valores más pequeños. Sin embargo, para valores pequeños de  $\varepsilon$ , el campo se extiende radialmente y se vuelve menos localizado, mientras que para valores grandes de  $m_1$  permanece localizado alrededor de la misma región, como se vio en las figuras anteriores. Este comportamiento era de esperar ya que, para  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $A_\mu$  se desacopla de los

fermiones  $\psi^1$  y del campo de Higgs  $\phi$ , y no hay dinámica de Maxwell para  $A_\mu$ . De acuerdo con el lagrangiano (5.12), lo que queda en este límite es un término de Chern-Simons puro, tanto para  $A_\mu$  como para  $\tilde{C}_\mu$ , y por ende  $F_{\mu\nu}[A] = F_{\mu\nu}[C] = 0$ . Este fenómeno también surge para el campo eléctrico.



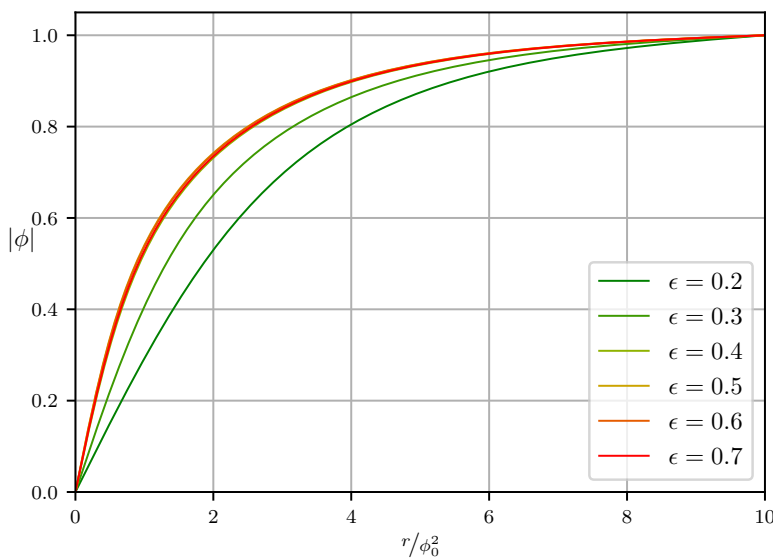
**Figura 5.5** – Perfil de los campos magnéticos  $B_A$  y  $B_C$  (líneas rayadas y continuas, respectivamente) para distintos valores de  $\epsilon$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $m_1 = 1,0$ .



**Figura 5.6** – Perfil de los campos eléctricos radiales  $E_A$  y  $E_C$  (líneas rayadas y continuas, respectivamente) para distintos valores de  $\epsilon$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $m_1 = 1,0$ .

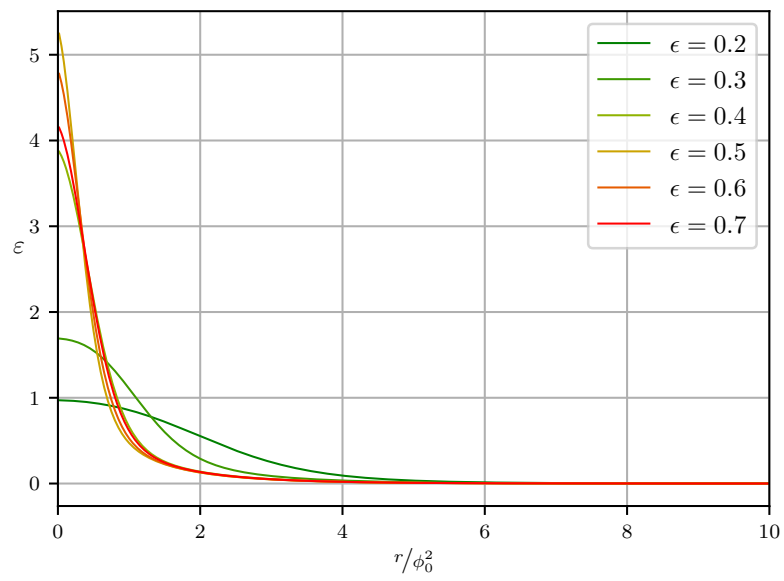
Por otra parte, se observa en la [Figura 5.6](#) que hay un cambio en el signo de los campos eléctricos al pasar de  $\epsilon < 0,5$  a  $\epsilon > 0,5$ . De acuerdo con la [Ecuación \(5.34\)](#) y los valores de los parámetros  $\kappa$  y  $e_h$ , esto implica un cambio en el signo de  $\mu$ . Para  $\mu = 0$ , el lagrangiano efectivo [\(5.12\)](#) se convierte en el lagrangiano del modelo de Higgs abeliano que, como se indicó anteriormente, su solución tiene campo eléctrico cero, como muestra la figura.

En cuanto al campo de Higgs, vemos en la [Figura 5.7](#) que nuevamente su comportamiento no depende considerablemente de los parámetros del modelo. Además, sus perfiles coinciden cualitativamente con los de los vórtices Nielsen-Olesen, anulándose en el núcleo del vórtice y alcanzando su valor de expectación de vacío para distancias más grandes del origen.



**Figura 5.7** – Perfil del módulo del campo de Higgs  $\phi$  para distintos valores de  $\epsilon$ .  
Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_h = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  
 $m_1 = 1,0$ .

Por último, con respecto a la densidad de energía, se puede ver en la [Figura 5.8](#) que para valores pequeños de  $\epsilon$  la concentración de energía se extiende más lejos del origen, nuevamente de manera consistente con el comportamiento análogo de los campos eléctricos y magnéticos.



**Figura 5.8** – Perfil de la densidad de energía  $\epsilon(r)$  para distintos valores de  $\epsilon$ . Parámetros:  $n = 1$ ,  $\phi_0 = 1,0$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $e = 1,0$ ,  $e_n = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $m_1 = 1,0$ .

# 6

## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado un modelo en  $2 + 1$  dimensiones con campos de gauge y de materia en el llamado sector oscuro, acoplados a un campo de gauge externo en el sector visible. Luego de realizar la integración sobre los campos fermiónicos considerando los términos hasta primer orden en  $p/m$  (esto es, bajas energías respecto de la masa del fermión) y realizar un conveniente cambio de variables, se obtuvo el lagrangiano efectivo (5.12), donde en lugar de los fermiones  $\psi^1$  y  $\psi^2$ , se tienen términos de Chern-Simons para ambos campos de gauge  $A_\mu$  y  $C_\mu$ , así como también un término de Maxwell para el primero.

Luego, se propuso un *ansatz* del estilo del de Nielsen-Olesen y se encontraron soluciones tipo vórtice para los dos campos de gauge presentes, los cuales son proporcionales con una constante de proporcionalidad que depende del acoplamiento  $e_h$  entre  $C_\mu$  y  $\psi^2$ , y del acoplamiento  $\kappa$  del término BF de  $A_\mu$  y  $C_\mu$  del lagrangiano inicial. Más explícitamente,

$$B_C = -\frac{\kappa}{2e_h^2} B_A \quad , \quad E_C = -\frac{\kappa}{2e_h^2} E_A \quad . \quad (6.1)$$

Es interesante notar que, si bien no hay un término de acoplamiento explícito entre el campo  $C_\mu$  y  $\phi$ , su acoplamiento de Chern-Simons efectivo y el término BF del lagrangiano inicial dan lugar a la existencia de soluciones tipo vórtice para este campo. En efecto, por la Ecuación (5.23) se tiene que

$$\Phi_A = \int B_A d^2x = \frac{2\pi n}{\epsilon e} = -\frac{2e_h^2}{\kappa} \Phi_C \quad , \quad (6.2)$$

con lo cual el flujo  $\Phi_C$ , dado por

$$\Phi_C = \frac{\pi\kappa}{\epsilon e e_h^2} n \quad , \quad (6.3)$$

también está cuantizado.

Por otra parte, según lo visto en la Subsección 5.2.3, existe un valor crítico  $\kappa_c$  para la constante  $\kappa$  para el cual el término de Chern-Simons del lagrangiano efectivo (5.12) resultante del cambio de variables (5.9) se anula. Consecuentemente, para este valor de  $\kappa$  también se anula el campo eléctrico resultante, tanto de  $A_\mu$  como de  $C_\mu$ , lo cual está en concordancia con el hecho de que no existen soluciones de energía finita con campo eléctrico no nulo en el modelo de abeliano de Higgs, sin acoplamiento de Chern-Simons.

Por último, se pudo resolver numéricamente las ecuaciones, obteniendo resultados que cualitativamente se condicen con los modelos ya conocidos en los límites adecuados de los parámetros (en particular, tomando  $m_1 \rightarrow 0$  y  $m_1 \rightarrow \infty$ , y lo mismo para  $\varepsilon$ ).

Como se mencionó en la introducción, existe una conexión entre el modelo estudiado y ciertas dualidades en  $d = 2 + 1$  relacionadas con materiales en los cuales el orden topológico juega un papel central. En particular, la teoría dual efectiva discutida en Metlitski y Vishwanath [31] puede relacionarse con la nuestra si se toma el campo de gauge externo  $A_\mu$  como un campo de prueba (*probe*), siendo los restantes campos dinámicos aquellos que describen la superficie de aisladores topológicos. Se deja esta discusión para trabajos futuros.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. A. Abrikosov. «On the Magnetic properties of superconductors of the second group». En: *Sov. Phys. JETP* 5 (1957), págs. 1174-1182.
- [2] R. Acciarri *et al.* «Improved Limits on Millicharged Particles Using the ArgoNeuT Experiment at Fermilab». En: (2019).
- [3] Ofer Aharony, Guy Gur-Ari y Ran Yacoby. « $d = 3$  bosonic vector models coupled to Chern-Simons gauge theories». En: *Journal of High Energy Physics* 2012.3 (mar. de 2012).
- [4] M. Ahlers, H. Gies, J. Jaeckel, J. Redondo y A. Ringwald. «Laser experiments explore the hidden sector.» En: *Phys. Rev. D* 77 (mayo de 2008).
- [5] P. Arias, E. Ireson, C. Núñez y F. Schaposnik. « $\mathcal{N} = 2$  SUSY Abelian Higgs model with hidden sector and BPS equations». En: *Journal of High Energy Physics* 2015.2 (2015), pág. 156.
- [6] D. P. Arovas, A. J. Berlinsky, C. Kallin y S.-C. Zhang. «Superconducting Vortex with Antiferromagnetic Core». En: *Phys. Rev. Lett.* 79 (15 oct. de 1997), págs. 2871-2874.
- [7] D. G. Barci, C. D. Fosco y L. E. Oxman. «On bosonization in 3 dimensions». En: *Physics Letters B* 375.1 (1996), págs. 267-272.
- [8] M. Battaglieri *et al.* «US Cosmic Visions: New Ideas in Dark Matter 2017: Community Report». En: *U.S. Cosmic Visions: New Ideas in Dark Matter*. 2017.
- [9] M. Bernstein y T. Lee. «Radiative corrections to the topological mass in  $(2 + 1)$ -dimensional electrodynamics». En: *Physical Review D: Particles and fields* 32 (sep. de 1985), pág. 1020.
- [10] E. B. Bogomol'nyi. «Stability of classical solutions». En: *Sov. J. Nucl. Phys.* 24 (1976), pág. 449.
- [11] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [12] C. Dasgupta y B. I. Halperin. «Phase Transition in a Lattice Model of Superconductivity». En: *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981).
- [13] G. H. Derrick. «Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles». En: *J. Math. Phys.* 5 (1964), pág. 1252.
- [14] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin y K. S. Stelle. «Semi-classical Quantization of the Supermembrane». En: *Nucl. Phys.* B297 (1988), págs. 515-538.

- [15] G. V. Dunne. «Aspects of Chern-Simons theory». En: *Topological Aspects of Low-dimensional Systems: Proceedings, Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Session 69: Les Houches, France*. Jul. de 1998.
- [16] J. Edelstein, C. Núñez y F. Schaposnik. «Supersymmetry and Bogomol'nyi equations in the Abelian Higgs model». En: *Physics Letters B* 329.1 (jun. de 1994), págs. 39-45.
- [17] V. J. Emery, S. A. Kivelson y J. M. Tranquada. «Stripe phases in high-temperature superconductors». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 96.16 (ago. de 1999), págs. 8814-8817.
- [18] E. Fradkin. 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2013.
- [19] E. Fradkin, S. A. Kivelson y J. M. Tranquada. «Colloquium: Theory of intertwined orders in high temperature superconductors». En: *Reviews of Modern Physics* 87.2 (mayo de 2015), págs. 457-482.
- [20] R. E. Gamboa Saravi, G. L. Rossini y F. A. Schaposnik. «The  $\zeta$ -function answer to parity violation in three-dimensional gauge theories». En: *Int. J. Mod. Phys. A* 11 (1996), págs. 2643-2660.
- [21] Po-Shen Hsin y Nathan Seiberg. «Level/rank duality and Chern-Simons matter theories». En: *Journal of High Energy Physics* 2016.9 (sep. de 2016).
- [22] R. W. Jackiw. *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics*. Singapore: World Scientific, 1995.
- [23] L. Jacobs, A. Khare, C. Nagaraja Kumar y S. K. Paul. «The interaction of Chern-Simons vortices». En: *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991), págs. 3441-3466.
- [24] J. Jaeckel y A. Ringwald. «The Low-Energy Frontier of Particle Physics». En: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 60.1 (nov. de 2010), págs. 405-437.
- [25] T. W. B. Kibble. «Topology of Cosmic Domains and Strings». En: *J. Phys. A* 9 (1976), págs. 1387-1398.
- [26] S. A. Kivelson, D.-H. Lee, E. Fradkin y V. Oganesyan. «Competing order in the mixed state of high-temperature superconductors». En: *Phys. Rev. B* 66 (14 oct. de 2002).
- [27] Frans R. Klinkhamer y N. S. Manton. «A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory». En: *Phys. Rev. D* 30 (1984), pág. 2212.
- [28] I. Kogan. «Axions, Monopoles and Cosmic String». En: (jun. de 1993).
- [29] J. M. Kosterlitz y D. J. Thouless. «Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems». En: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 6.7 (abr. de 1973), págs. 1181-1203.

- [30] G. Lozano, M. V. Manias y F. A. Schaposnik. «Charged-vortex solution to spontaneously broken gauge theories with Chern-Simons term». En: *Phys. Rev. D* 38 (2 jul. de 1988), págs. 601-607.
- [31] M. A. Metlitski y A. Vishwanath. «Particle-vortex duality of two-dimensional Dirac fermion from electric-magnetic duality of three-dimensional topological insulators». En: *Physical Review B* 93.24 (jun. de 2016).
- [32] H. B. Nielsen y P. Olesen. «Vortex Line Models for Dual Strings». En: *Nucl. Phys.* B61 (1973), págs. 45-61.
- [33] S. K. Paul y A. Khare. «Charged vortices in an abelian Higgs model with Chern-Simons term». En: *Physics Letters B* 174.4 (1986), págs. 420-422.
- [34] M. E. Peskin. «Mandelstam-'t Hooft duality in abelian lattice models». En: *Annals of Physics* 113.1 (1978), págs. 122-152.
- [35] M. K. Prasad y C. M. Sommerfield. «An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon». En: *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975), págs. 760-762.
- [36] Đ. Radičević, D. Tong y C. Turner. «Non-abelian 3D bosonization and quantum Hall states». En: *Journal of High Energy Physics* 2016.12 (dic. de 2016).
- [37] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland personal library. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [38] D. Savchenko y A. Rudakovskiy. «New mass bound on fermionic dark matter from a combined analysis of classical dSphs». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 487.4 (jun. de 2019), págs. 5711-5720.
- [39] T. Schäfer y E. V. Shuryak. «Instantons in QCD». En: *Reviews of Modern Physics* 70.2 (abr. de 1998), págs. 323-425.
- [40] N. Seiberg, T. Senthil, C. Wang y E. Witten. «A duality web in 2 + 1 dimensions and condensed matter physics». En: *Annals Phys.* 374 (2016), págs. 395-433.
- [41] M. Shifman. *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*. Cambridge University Press, 2012.
- [42] M. Shifman, G. Tallarita y A. Yung. «More on the Abrikosov strings with non-Abelian moduli». En: *International Journal of Modern Physics A* 29.10 (abr. de 2014).
- [43] M. Shifman y A. Yung. *Supersymmetric solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [44] T. H. R. Skyrme. «A Unified Field Theory of Mesons and Baryons». En: *Nucl. Phys.* 31 (1962), págs. 556-569.

- [45] Michael Stone. *Bosonization*. World Scientific, 1994.
- [46] G. 't Hooft. «Monopoles, instantons and confinement». En: *National Summer School for Graduate Students*. 1999.
- [47] D. Tong. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. 2016.
- [48] M. A. Vasiliev. «Holography, unfolding and higher spin theory». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46.21 (mayo de 2013).
- [49] H. J. de Vega y F. A. Schaposnik. «A Classical Vortex Solution of the Abelian Higgs Model». En: *Phys. Rev. D* 14 (1976), págs. 1100-1106.
- [50] A. Vishwanath y T. Senthil. «Physics of Three-Dimensional Bosonic Topological Insulators: Surface-Deconfined Criticality and Quantized Magnetoelectric Effect». En: *Phys. Rev. X* 3 (1 feb. de 2013).
- [51] S. Weinberg. «Goldstone Bosons as Fractional Cosmic Neutrinos». En: *Phys. Rev. Lett.* 110 (24 jun. de 2013).
- [52] E. Witten y D. I. Olive. «Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges». En: *Phys. Lett.* 78B (1978), págs. 97-101.
- [53] S. Yan, D. Iai, E. Morosan, E. Fradkin, P. Abbamonte y V. Madhavan. «Influence of Domain Walls in the Incommensurate Charge Density Wave State of Cu Intercalated 1T – TiSe<sub>2</sub>». En: *Physical Review Letters* 118.10 (mar. de 2017).
- [54] N. J. Zabusky y M. D. Kruskal. «Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states». En: *Phys. Rev. Lett.* 15 (6 ago. de 1965), págs. 240-243.
- [55] S.-C. Zhang. «The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of the fractional quantum Hall effect». En: *Int. J. Mod. Phys. B* 6 (1992), págs. 25-58.
- [56] S.-C. Zhang. «A Unified Theory Based on SO(5) Symmetry of Superconductivity and Antiferromagnetism». En: *Science* 275.5303 (feb. de 1997), págs. 1089-1096.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons **Atribución – No Comercial –  
Compartir Igual** (*by-nc-sa*) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2020