



# Testeando teorías alternativas de gravedad utilizando datos cosmológicos

Matías Leizerovich

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Diciembre de 2020



TEMA: Testeando teorías alternativas de gravedad utilizando datos cosmológicos .

ALUMNO: Matías Leizerovich

L.U. N°: 485/15

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dra. Susanna Judith Landau

CODIRECTOR: Dra. Lucila Kraiselburd

FECHA DE INICIACION: Septiembre de 2019

FECHA DE FINALIZACION: Diciembre de 2020

FECHA DE EXAMEN: Diciembre de 2020

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesor(a) de Tesis de Licenciatura

---

Jurado



*Dedicado a mi mamá*



## Resumen

Desde el descubrimiento de la expansión acelerada actual del universo, uno de los objetivos principales de la investigación en cosmología es explicar el mecanismo físico de dicha expansión. Si bien el modelo cosmológico estándar puede explicar este fenómeno con la inclusión de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein, dicha propuesta presenta algunos problemas que no han sido resueltos. Una alternativa al modelo cosmológico estándar es asumir una teoría alternativa a la Relatividad General para describir los fenómenos gravitatorios.

En este trabajo se estudiaron modelos de gravedad modificada denominados  $f(R)$ , que corresponden a introducir una función del escalar de Ricci  $R$  en la acción de Einstein. Se integraron las ecuaciones dinámicas de Friedmann modificadas con un novedoso cambio de variables y se encontraron los parámetros óptimos para la función de integración. A su vez, se realizó un análisis estadístico a partir de los datos observacionales de Supernovas tipo Ia, Cronómetros Cósmicos y Oscilaciones Acústicas de Bariones para contrastar las predicciones del modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ . Los intervalos de confianza y los contornos de la distribución de probabilidad *a posteriori* obtenidos para los parámetros libres fueron comparados con aquellos publicados por otros autores. De aquí se pudo observar una consistencia a  $2\sigma$  entre los distintas estimaciones de los parámetros estudiados. Los análisis presentados en esta tesis indican que la “tensión  $H_0$ ” podría ser aliviada asumiendo un modelo cosmológico basado en una teoría alternativa de gravedad. Sin embargo, trabajos recientes que incluyen datos del Fondo Cósmico de Radiación indican que la tensión no puede ser aliviada.





## **Agradecimientos**

Este trabajo no hubiese sido posible sin un montón de personas que estuvieron conmigo a lo largo de este camino que significó mi paso por la facultad.

Primero, quiero agradecerles a mis directoras Susana y Lucila, por la oportunidad que me dieron de adentrarme en esta área del conocimiento tan apasionante. Gracias por su dedicación, paciencia y buena predisposición siempre, imprescindibles para poder realizar este trabajo.

Quiero agradecer a mis viejxs, por apoyarme en cada uno de mis proyectos, hasta los más inentendibles. A Mile, por ser una compañera de vida y por dejarme compartir noches interminables de estudios, cansancio y conversaciones delirantes con un té de por medio.

Gracias a los amigxs que me dió esta carrera. Por los laboratorios, los viajes, los congresos, las discusiones únicas y las birras. No puede faltar un agradecimiento especial a Noe, Juli, Tomi y Fede, por conformar desde el primer momento un grupo hermoso donde aprendimos a aprender juntos, y donde nunca faltan las risas y la empatía.

Finalmente, le dedico este trabajo a Lara. Gracias por todo el amor, los mates, la compañía y el apoyo incondicional a lo largo de todos estos años.



<b>1. Motivación y objetivos</b>	1
<b>2. Marco teórico</b>	7
2.1. Modelo Cosmológico Estándar . . . . .	7
2.2. Modelos $f(R)$ . . . . .	9
2.2.1. Condiciones necesarias para los modelos $f(R)$ . . . . .	10
2.2.2. Evolución cosmológica de los modelos de Hu-Sawicki y de Starobinsky . . . . .	10
2.2.3. Formulación alternativa y cambio de variables . . . . .	11
2.2.4. Equivalencia entre los modelos de Hu-Sawicki $n = 2$ y de Starobinsky $n = 1$ . . . . .	13
<b>3. Integración Numérica</b>	15
3.1. Resolución de ecuaciones . . . . .	15
3.1.1. Expresión para la función $\Gamma$ en los distintos modelos. . . . .	18
3.1.2. Condiciones iniciales . . . . .	19
3.1.3. Aproximación para $b \rightarrow 0$ . . . . .	21
3.2. Verificaciones numéricas . . . . .	23
<b>4. Datos observacionales</b>	27
4.1. Magnitudes derivadas de la teoría . . . . .	27
4.2. Supernovas tipo Ia . . . . .	28
4.2.1. Compilación <i>Pantheon</i> : . . . . .	29
4.3. BAO . . . . .	31
4.4. Cronómetros Cósmicos . . . . .	33
<b>5. Análisis Estadístico</b>	37
5.1. MCMC . . . . .	39
5.1.1. Criterio de convergencia . . . . .	40
5.1.2. Intervalos de confianza . . . . .	42

<b>6. Resultados</b>	<b>45</b>
6.1. Datos de CC + $H_0^{\text{Riess}}$ . . . . .	45
6.2. Datos de Supernovas tipo Ia . . . . .	46
6.3. Datos de CC + Supernovas tipo Ia . . . . .	49
6.4. Datos de CC + SnIa + BAO . . . . .	50
<b>7. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Ecuaciones dinámicas de las nuevas variables</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

---

## Índice de figuras

---

1.1. Algunas de las mediciones de la constante de Hubble presentes en la literatura. Figura publicada de [1]. . . . .	3
1.2. Diagrama de flujo del programa realizado en el lenguaje <i>Python</i> . . . . .	5
3.1. Error relativo para el parámetro $b$ para los modelos de Hu-Sawicki (izquierda) y Starobinsky (derecha), fijando el parámetro $\Omega_m = 0,24$ . . . . .	23
3.2. Diagrama de flujo que muestra el significado del parámetro $b_{crit}$ . . . . .	24
3.3. Error absoluto del parámetro de Hubble en función del paso de integración, fijando el parámetro $\Omega_m = 0,24$ y $b = 0,1$ para el modelo de Hu-Sawicki. . . . .	25
3.4. Error cometido al variar la cantidad de puntos que se evalúan en la integración numérica al calcular $\int_0^3 \frac{dz'}{H(z')}$ , fijando el parámetro $\Omega_m = 0,24$ y $b = 0,1$ para el modelo de Hu-Sawicki. . . . .	26
3.5. Parámetro de Hubble en función de $z$ variando el parámetro $b$ para los modelos de Hu-Sawicki (izquierda) y Starobinsky (derecha), fijando el parámetro $\Omega_m = 0,24$ y la constante de Hubble $H_0 = 73,48 \frac{km/s}{Mpc}$ . . . . .	26
4.1. Curvas de luz de Supernovas tipo Ia. En el panel superior están graficados los datos de luminosidad de las supernovas tal como se observan, mientras que en el panel inferior se ve un ajuste de acuerdo a la evolución del brillo después del máximo. El brillo de las supernovas que alcanzan una luminosidad máxima mayor, decae más lento luego del máximo; <a href="http://supernova.lbl.gov/">http://supernova.lbl.gov/</a> . . . . .	29
4.2. Función de correlación de galaxias obtenida por la colaboración <i>Sloan Digital Sky Survey</i> . Se observa el 'pico de BAO' a $480Mly \sim 150Mpc$ . También se muestra la dependencia de la altura del pico con la densidad de materia $\Omega_m$ . Figura publicada de [2]. . . . .	32
5.1. Cadenas de Markov generadas para el cálculo de la distribución <i>a posteriori</i> de los parámetros libres ( $\Omega_m, b, H_0$ ) para el modelo de Hu-Sawicki con $n = 1$ , utilizando los datos de Cronómetros Cósmicos y el dato de la constante de Hubble de reportado por Riess et al. [3]. . . . .	40

5.2. Ejemplo de la estimación del tiempo de correlación integrado $\tau$ en función del número de muestras, para los parámetros $(\Omega_m, b, H_0)$ en el modelo de Hu-Sawicki con $n = 1$ . Para asegurar la convergencia de las cadenas es condición necesaria y suficiente que las curvas de los 3 parámetros que se muestran se encuentren por debajo de la recta $\tau = N/100$ , además de permanecer relativamente constantes en los pasos finales de la cadena. . . . .	43
5.3. Distribución de probabilidad asimétrica. Se observa que los intervalos de 95% CL resultan diferentes. Figura obtenida de [4]. . . . .	43
6.1. Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósmicos y el dato de la constante de Hubble de Riess et al. $H_0^{\text{Riess}}$ . En la diagonal se muestra la probabilidad <i>a posteriori</i> de $\Omega_m$ , $b$ y $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a $1\sigma$ y $2\sigma$ . . . . .	47
6.2. Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Supernovas tipo Ia utilizando los parámetros <i>nuisance</i> $(\alpha, \beta, \gamma)$ , habiendo fijado el valor de $H_0 = 73,48 \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$ . En la diagonal se muestra la densidad de probabilidad <i>a posteriori</i> de $M_{\text{abs}}$ , $\Omega_m$ , $b$ , $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a $1\sigma$ y $2\sigma$ . . . . .	48
6.3. Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Supernovas tipo Ia fijando el valor de los parámetros de <i>nuisance</i> al valor reportado en [5] asumiendo el modelo $\Lambda$ CDM, habiendo fijado el valor de $H_0 = 73,48 \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$ . En la diagonal se muestra la densidad de probabilidad <i>a posteriori</i> de $M_{\text{abs}}$ , $\Omega_m$ y $b$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a $1\sigma$ y $2\sigma$ . . . . .	49
6.4. Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósmicos y Supernovas tipo Ia. En la diagonal se muestra la probabilidad <i>a posteriori</i> de $M_{\text{abs}}$ , $\Omega_m$ , $b$ y $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a $1\sigma$ y $2\sigma$ . . . . .	50
6.5. Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósmicos, Supernovas tipo Ia y Oscilaciones Acústicas de Bariones. En la diagonal se muestra la probabilidad <i>a posteriori</i> de $M_{\text{abs}}$ , $\Omega_m$ , $b$ y $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a $1\sigma$ y $2\sigma$ . . . . .	51

4.1. Catálogo de Supernovas tipo Ia que conforman la compilación <i>Pantheon</i> [5].	
Se detalla el número de supernovas y el promedio del <i>redshift</i> de cada muestra.	30
4.2. Distancias vinculadas a las mediciones de BAO a partir de diferentes ob-	
servaciones. La tabla muestra los <i>redshifts</i> de las mediciones, el valor medio	
y la desviación estándar de los observables y la correspondiente referen-	
cia. También se muestran los valores para el valor fiducial de la distancia	
al horizonte de sonido $r_d^{\text{fid}}$ de cada medición, reportados por las distintas	
colaboraciones. . . . .	34
4.3. Datos observacionales del parámetro de Hubble a partir de la técnica de	
Cronómetros Cósmicos. La tabla muestra el <i>redshift</i> de la medición, el valor	
medio y la desviación estándar de $H(z)$ y la correspondiente referencia. .	36
6.1. Resultado del análisis estadístico realizado con las distintas combinaciones	
de datos. La primera columna muestra los datos utilizados y las subsiguientes	
los intervalos de confianza de los parámetros libres a un 68 % (95 %) de	
confianza. La última columna muestra el $\bar{\chi}^2$ de cada uno de los análisis rea-	
lizados. Además, se reportan los valores obtenidos en los trabajos [6] y [7]	
de Cronómetros Cósmicos + $H_0^{\text{Riess}}$ y Cronómetros Cósmicos + Supernovas	
tipo Ia, respectivamente. . . . .	45
6.2. Resultados del análisis estadístico realizado con los datos de supernovas tipo	
Ia asumiendo como parámetros libres a los parámetros de nuisance ( $\alpha, \beta, \gamma$ ).	
En la tabla se muestran los intervalos de confianza correspondientes al 68 %	
(95 %). Además, se muestran los valores de la densidad de materia y de los	
parámetros <i>nuisance</i> reportados en [5] asumiendo el Modelo Cosmológico	
Estándar. Se fijó el valor de $H_0$ en el reportado por Riess et al. (2018). . .	48
6.3. Resultados del análisis estadístico realizado con datos de supernovas tipo	
Ia con los parámetros de <i>nuisance</i> igual a los valores reportados en [5]	
asumiendo un modelo $\Lambda$ CDM. Se fijó el valor de $H_0$ en el reportado por Riess	
et al. (2018) [3]. La tabla muestra los intervalos de confianza correspondiente	
al 68 % (95 %). . . . .	48





---

Motivación y objetivos

---

La teoría de la Relatividad General es capaz de explicar una gran variedad de fenómenos gravitatorios; desde los experimentos de Eddington en 1919 [8], hasta la existencia de agujeros negros (el centro de la galaxia M87 fue fotografiado por el *Event Horizon Telescope* en 2019 [9]) y las ondas gravitacionales (recientemente detectadas por los experimentos LIGO y VIRGO en eventos de colisión de objetos muy masivos como agujeros negros y estrellas de neutrones [10]).

Las observaciones del brillo de Supernovas tipo Ia realizadas por Riess et al. [11] mostraron que el universo actual se expande de manera acelerada. En consecuencia, uno de los principales objetivos de la cosmología teórica es explicar el mecanismo físico responsable de dicha expansión. La propuesta del Modelo Cosmológico Estándar ( $\Lambda$ CDM) consiste en incluir el término de la constante cosmológica  $\Lambda$  propuesto por Einstein en las ecuaciones que rigen la Relatividad General

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  el escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento. Este modelo es consistente con datos observacionales recientes como el Fondo Cósmico de Radiación (CMB por sus siglas en inglés), cartografiados de galaxias, explosiones de Supernovas tipo Ia, entre otros.

Sin embargo, esta propuesta presenta algunos problemas que han sido discutidos en la literatura. El primero es que el valor inferido observacionalmente de la constante cosmológica  $\Lambda$  no puede ser explicado utilizando las teorías físicas actuales. El modelo  $\Lambda$ CDM es consistente con las observaciones cosmológicas modernas [12, 13] con un valor de  $\Lambda_{\text{obs}} \sim (10^{-3}\text{eV})^4 \sim 10^{-120} \text{M}_{\text{pl}}^4$ . A su vez, si se calcula la energía del vacío asumiendo una teoría cuántica de campos, el valor de  $\Lambda$  difiere de  $\Lambda_{\text{obs}}$  entre 60 y 120 órdenes de magnitud (por ejemplo, tomando la escala de corte o de *cut off* igual a la escala de Planck  $\Lambda_{\text{teo}} \sim 1 \text{M}_{\text{pl}}^4$ , mientras que asumiéndola igual a la de ruptura de Supersimetría

$\Lambda_{\text{teo}} \sim 10^{-64} \text{ M}_{\text{pl}}^4$ ) [14, 15, 16, 17]. Dicha discrepancia aún no se encuentra resuelta. Una posible solución a este problema es plantear que la contribución de la constante cosmológica se cancele casi exactamente por un mecanismo desconocido, dejando solo un residuo extremadamente pequeño que resulta necesario para explicar la expansión acelerada del universo. La precisión que esto requiere es lo que se conoce como un problema de *fine-tuning*.

En segundo lugar, existe el interrogante de la llamada “coincidencia cosmológica”: analizando la evolución del Modelo Estándar a partir de las ecuaciones de Friedmann, se observa que la energía oscura comienza a gobernar la dinámica del universo a un *redshift* (corrimiento al rojo) de  $z \sim 1$ . Este fenómeno no podría ocurrir en el momento de nucleosíntesis primordial (ya que de ser así las abundancias en los elementos se verían afectadas) o en la etapa de dominación de la materia (de lo contrario no se observarían los crecimientos de las perturbaciones en la densidad). Entonces, cabe preguntarse por qué dos cantidades que escalan de manera tan distinta en el tiempo como la densidad de materia y la densidad de energía oscura se vuelven del mismo orden en el presente.

A su vez, hay una discrepancia que surge en torno a la determinación de la constante de Hubble y que ha sido denominada la “tensión  $H_0$ ”. Poder estimar el valor de la constante de Hubble  $H_0$ <sup>1</sup> con una baja incerteza resulta crucial, ya que juega un rol fundamental en las diferentes teorías cosmológicas (incluyendo el modelo más aceptado  $\Lambda$ CDM), además de ser de suma importancia en otras áreas del conocimiento como testeos de Relatividad General, física de Supernovas, etc. Por varias décadas, las incertezas en la medición de la constante de Hubble fueron demasiado grandes. Los valores derivados para esta magnitud se encontraban en un rango entre  $50 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$  y  $100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ . Los recientes avances tecnológicos permitieron una mayor precisión y exactitud en las mediciones, logrando reducir significativamente dichos errores y obtener nuevas calibraciones para los distintos “indicadores de distancia”. Las principales discrepancias se dan entre las llamadas mediciones directas (independientes del modelo cosmológico) e indirectas (dependientes del modelo cosmológico). Las estimaciones directas, como las que utilizan datos observacionales de Supernovas tipo Ia, arrojan valores de  $H_0$  más altos. En los resultados más recientes de Riess et al. [3], se utilizaron datos de Supernovas tipo Ia y Cefeidas para obtener un valor de  $H_0^{\text{Riess}} = 73,48 \pm 1,66 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ . En contraposición, mediciones indirectas como las obtenidas a partir de datos del Fondo Cósmico de Radiación, Cronómetros Cósmicos o las Oscilaciones Acústicas de Bariones arrojan los valores del parámetro de Hubble más bajos disponibles en la literatura. Por ejemplo, en los resultados más recientes utilizando datos del Fondo Cósmico de Radiación publicados por la colaboración *Planck* (2018) [18], se reporta un valor de  $H_0^{\text{Planck}} = 67,4 \pm 0,5 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ <sup>2</sup>. Otras mediciones indirectas como las realizadas por la colaboración H0LiCOW [19] a partir del tiempo de retraso de imágenes múltiples en cuásares reportan un valor mas cercano al obtenido por Riess et al. En la figura 1.1 se muestran distintos resultados para el valor de la constante de Hubble, en donde se observa que las

<sup>1</sup>Un parámetro que representa la tasa de expansión del universo hoy ( $z = 0$ ).

<sup>2</sup>Además de los mencionados, otros indicadores de distancia incluyen el uso de Máseres, Púlsares binarios, etc.

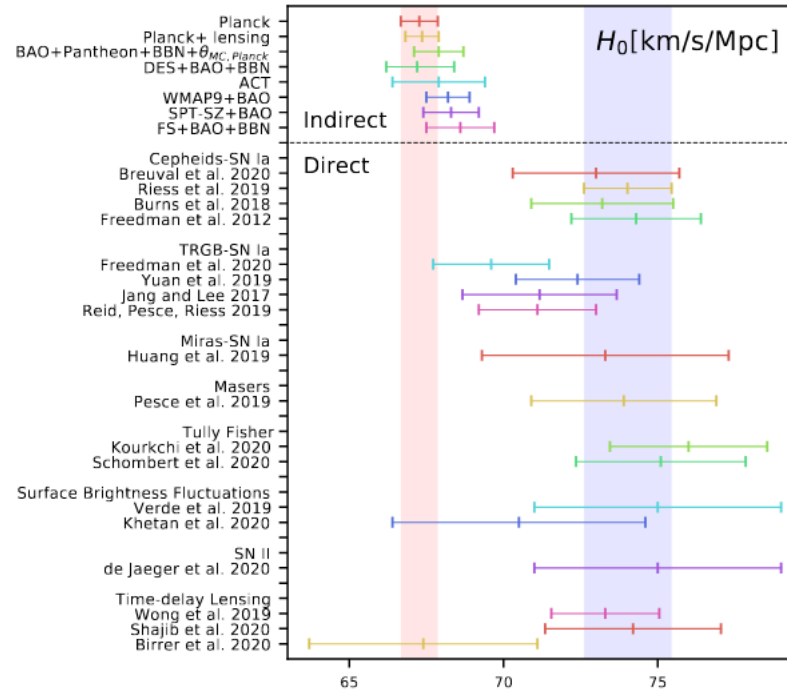


Figura 1.1: Algunas de las mediciones de la constante de Hubble presentes en la literatura. Figura publicada de [1].

discrepancias entre los métodos de medición directos e indirectos son considerablemente grandes.

Motivados por las dificultades antes descritas, se han propuesto modelos alternativos que proveen una explicación para la expansión acelerada del universo sin la necesidad de incluir formas desconocidas de la energía oscura. El requisito básico que cualquier modelo cosmológico debe cumplir para ser considerado como alternativa al Modelo Cosmológico Estándar es poder explicar todos los datos observacionales disponibles actualmente. Estas teorías pueden clasificarse en dos familias:

1. Campos escalares con acoplamiento mínimo a la gravedad y la materia. Aquí se engloban las teorías de *quinta-esencia* y las de *k-esencia* [20, 21].
2. Las denominadas teorías de gravedad modificada, en donde se propone una teoría alternativa de gravitación a la Relatividad General. Algunos ejemplos son las teorías de Gauss-Bonnet, teorías tipo Horndeski,  $f(R)$ , gravedad teleparalela o  $f(T)$  [22].

En este trabajo se analizaron en particular las teorías de gravedad modificada llamadas teorías  $f(R)$ , donde la acción del campo gravitatorio se escribe de una manera generalizada como una función del escalar de Ricci  $R$ . Si bien este tipo de teorías se postularon inicialmente en la década de 1970, cobraron relevancia recientemente con el objetivo de explicar la expansión acelerada del universo. Aunque en principio existen tantas teorías como funciones  $f(R)$  pueden proponerse, se ha demostrado que solo algunas satisfacen los límites impuestos por los experimentos del Sistema Solar [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Por lo tanto, en esta tesis se estudiaron únicamente teorías que satisfacen dichos requisitos. En

particular, es necesario que las predicciones teóricas para el parámetro post-newtoniano (PPN)  $\gamma$  se encuentren en acuerdo con los límites experimentales dados por las mediciones del efecto Shapiro obtenidas mediante la sonda Cassini [30]. Además, las predicciones para las aceleraciones deben ser consistentes con las cotas establecidas a partir de experimentos de balanzas de torsión y de tipo Eötvös [31, 32, 33, 34].

El objetivo principal de esta tesis fue estudiar las predicciones teóricas de modelos cosmológicos alternativos de interés e inferir el valor de sus parámetros libres utilizando los datos observacionales más recientes de Supernovas tipo Ia (SnIa), Cronómetros Cós-micos (CC) y Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO por sus siglas en inglés)<sup>3</sup>. Análisis similares se han realizado en otros trabajos [6, 7].

Con esta finalidad, se desarrolló una rutina en el lenguaje *Python*<sup>4</sup> en la cual, a partir de un conjunto de parámetros físicos de interés y mediante un cambio de variables, se obtuvieron los parámetros libres de los modelos a estudiar. Para obtener la forma funcional del parámetro de Hubble  $H(z)$  en el modelo alternativo, se realizó la integración numérica del sistema dinámico dado por las ecuaciones de Friedmann modificadas. Sin embargo, para valores de los parámetros libres que implican soluciones similares a las obtenidas por el modelo  $\Lambda$ CDM, la integración numérica presentó problemas que se discuten con detalle en el capítulo 3. Por este motivo, en esta región del espacio de parámetros se siguió el trabajo [35] y se utilizó una expresión analítica para  $H(z)$  correspondiente a una expansión en serie alrededor de la solución del Modelo Cosmológico Estándar. La magnitud  $H(z)$  permitió vincular la predicción teórica del modelo con los datos observacionales estudiados en esta tesis. Para ello, se realizó un análisis estadístico Bayesiano a partir del cálculo del estadístico  $\chi^2$ . En la figura 1.2 se muestra el diagrama de flujo de este proceso.

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente forma. En el capítulo 2 se describen los aspectos teóricos más relevantes de los modelos  $f(R)$  analizados. En el capítulo 3 se detalla el método de integración numérica, en particular las variables y las condiciones iniciales utilizadas y la reformulación de los parámetros de las teorías para facilitar la interpretación de los resultados. En el capítulo 4 se describen los datos observacionales utilizados y el procedimiento para relacionarlos con las predicciones de la teoría. En el capítulo 5 se detalla el análisis estadístico realizado para esta tesis, los métodos implementados y el criterio de convergencia de los análisis. Finalmente, en el capítulo 6 se muestran los resultados y una discusión de los mismos, mientras que en el capítulo 7 se desarrollan las conclusiones del trabajo y la perspectiva a futuro.

<sup>3</sup>Se excluyeron los datos provenientes del CMB ya que éstos requieren de un análisis más complejo que excede a los propósitos de este trabajo.

<sup>4</sup>Los códigos desarrollados se encuentran en: [https://github.com/matiasleize/tesis\\_licenciatura](https://github.com/matiasleize/tesis_licenciatura).

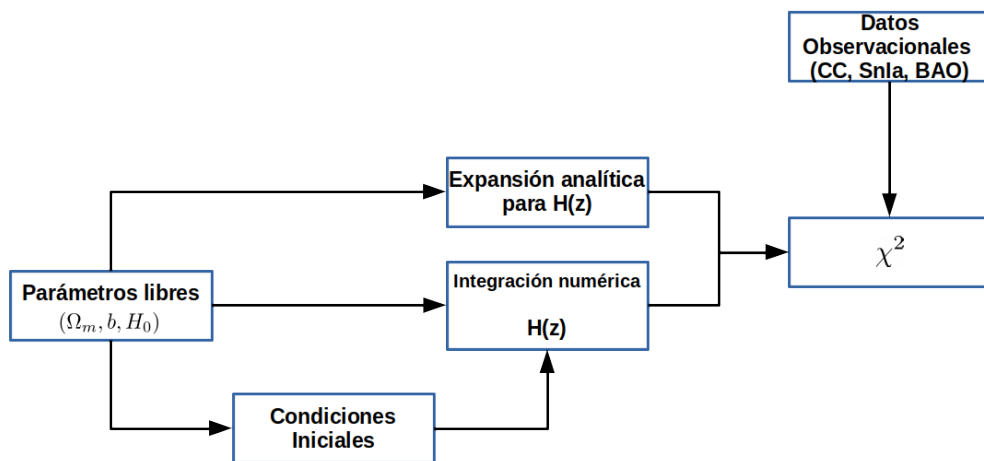


Figura 1.2: Diagrama de flujo del programa realizado en el lenguaje *Python*.



## 2.1. Modelo Cosmológico Estándar

Para describir un universo en expansión isótropo y homogéneo (en acuerdo con el principio cosmológico) se utiliza la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right),$$

donde  $a(t)$  es un factor de escala adimensional y el parámetro de curvatura  $k$  caracteriza el tipo de geometría espacial (en lo que sigue se asumirá un universo espacialmente plano donde  $k = 0$ , consistente con los últimos datos de la colaboración *Planck* [18]). A su vez, se define el corrimiento al rojo o *redshift*  $z$  tal que

$$(1 + z) \equiv \frac{a_0}{a}.$$

Se elige el valor del factor de escala en el presente  $a_0 = a(t_0) = 1$ . En este marco teórico, la tasa de expansión cosmológica (también llamada parámetro de Hubble) se define como

$$H(a) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

y utilizando la definición de corrimiento al rojo

$$H(z) = \frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}.$$

En el Modelo Cosmológico Estándar, la dinámica que rige la expansión del universo está dada por las ecuaciones de Friedmann

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) \tag{2.1}$$

$$-2\dot{H} = 8\pi G \left( \rho_m + \frac{P_m}{c^2} + \rho_r + \frac{P_r}{c^2} + \rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2} \right), \quad (2.2)$$

donde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$  denota la derivada temporal. Los parámetros  $\rho_m$ ,  $\rho_r$  y  $\rho_\Lambda$  son las densidades de materia, radiación y energía oscura respectivamente. Las presiones  $P_m$ ,  $P_r$  y  $P_\Lambda$  se vinculan con las densidades a partir de la ecuación de estado

$$P_i = w_i c^2 \rho_i, \quad (2.3)$$

donde cada  $w_i$  representa un parámetro constante adimensional. La primer ecuación de Friedmann se puede escribir en función de los valores actuales de las densidades de las componentes del universo y la constante de Hubble  $H_0$  de la forma

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ (\Omega_{b,0} + \Omega_{CDM,0})(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (2.4)$$

siendo  $\Omega_{b,0} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ ,  $\Omega_{CDM,0} = \frac{\rho_{CDM}}{\rho_c}$ ,  $\Omega_{r,0} = \frac{\rho_r}{\rho_c}$  y  $\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$  las densidades de materia bariónica, materia oscura fría, radiación y energía oscura respectivamente en unidades de la densidad crítica actual  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ .

Finalmente, se muestran dos relaciones que serán útiles a lo largo del trabajo y valen de manera general tanto para el Modelo Estándar como para cualquier modelo alternativo  $f(R)$ . La derivada del tiempo respecto al *redshift* se obtiene utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dz} &= \frac{dt}{da} \cdot \frac{da}{dz} \\ &= \frac{1}{\dot{a}} \cdot \frac{d(1+z)^{-1}}{dz} \\ &= -\frac{(1+z)^{-2}}{\dot{a}} \\ &= -\frac{a}{\dot{a}} \cdot \frac{1}{(z+1)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde en el último paso se utilizó la definición del parámetro de Hubble.

En segundo lugar, se puede obtener una expresión para la derivada del parámetro de Hubble respecto al *redshift*  $z$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dz} &= \frac{dt}{dz} \dot{H} \\ \frac{dH}{dz} &= -\frac{\dot{H}}{H(1+z)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$



## 2.2. Modelos $f(R)$

Las teorías  $f(R)$  refieren a un conjunto de teorías cuyo lagrangiano está dado por una función del escalar de Ricci  $R$ , donde cada  $f(R)$  define un modelo distinto. La acción para estas teorías resulta

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m + S_r ,$$

siendo  $S_m$  y  $S_r$  las acciones de materia y radiación, respectivamente. Al variar  $S$  respecto de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , se obtiene una generalización de las ecuaciones de Einstein para un dado modelo  $f(R)$

$$R_{\mu\nu} f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

donde  $f_R = \frac{df}{dR}$ . En este trabajo se estudiaron cosmologías de Robertson-Walker espacialmente planas, por ende la métrica puede expresarse en coordenadas comóviles como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) .$$

De esta forma, la fórmula del escalar de curvatura resulta

$$R = \frac{6}{c^2} (2H^2 + \dot{H}) . \quad (2.8)$$

A partir de la expresión [2.7](#), se obtienen las ecuaciones de Friedmann modificadas:

$$-3H^2 = -\frac{1}{f_R} \left[ 8\pi G (\rho_m + \rho_r) + c^2 \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right] \quad (2.9)$$

$$-2\dot{H} = \frac{1}{f_R} \left[ 8\pi G \left( \rho_m + \frac{P_m}{c^2} + \rho_r + \frac{P_r}{c^2} \right) + f_{RRR}\dot{R}^2 + (\ddot{R} - H\dot{R}) f_{RR} \right] . \quad (2.10)$$

Además, se tienen las ecuaciones de continuidad para la materia y la radiación

$$\dot{\rho}_m + 3H \left( \rho_m + \frac{P_m}{c^2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H \left( \rho_r + \frac{P_r}{c^2} \right) = 0. \quad (2.12)$$

En el caso de la materia, si se asume que está compuesta por un gas de polvo, la presión es  $P_m = 0$  ya que  $w_m = 0$ . Además, en esta tesis se despreciaron los términos vinculados a la radiación ya que su contribución no es relevante en las ecuaciones de Friedmann para los valores del *redshift* en donde se encuentran los datos observacionales utilizados ( $z \leq 2,4$ ). En este régimen, al sumar las ecuaciones [2.9](#) y [2.10](#) se obtiene la ecuación de Raychandhuri para las  $f(R)$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = \frac{1}{f_R} \left[ \dot{R}^2 f_{RRR} + (2H\dot{R} + \ddot{R}) f_{RR} + c^2 \frac{f - Rf_R}{2} \right] . \quad (2.13)$$

### 2.2.1. Condiciones necesarias para los modelos $f(R)$

En este apartado se presenta un breve resumen de las condiciones que deben satisfacer los modelos  $f(R)$ . En primer lugar se describen las condiciones teóricas estudiadas en [23], entre otros; y luego se enumeran las condiciones que se deben cumplir para explicar la expansión acelerada del universo, las cuales son descritas en [6].

Desde el punto de vista teórico, es necesario que los modelos posean una constante cosmológica efectiva, que sus soluciones sean estables y evitar estados fantasmas (*ghost states*). Para cumplir estos requisitos, se requiere que

$$f_R > 0 \text{ para } R \geq R_0$$

donde  $R_0$  es el valor actual del escalar de Ricci. Además, se debe cumplir la condición

$$f_{RR} > 0 \text{ para } R \geq R_0$$

para evitar inestabilidades cuando la curvatura se vuelve muy grande a densidades altas<sup>1</sup>.

En segundo lugar, para explicar la expansión acelerada del cosmos, reproducir correctamente la era dominada por la materia, obtener una teoría consistente con el principio de equivalencia y satisfacer las condiciones de gravedad local, resulta necesario que  $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$  cuando  $R \geq R_0$ . Finalmente, se debe garantizar la estabilidad de una solución de Sitter. Para ello, se debe cumplir que

$$0 < \frac{Rf_{RR}}{f_R}(r) < 1$$

en  $r = -\frac{Rf_R}{f} = -2$  [36].

Teniendo en cuenta todas estas restricciones, se puede mostrar que cualquier modelo  $f(R)$  puede escribirse de la forma

$$f(R) = R - 2\Lambda y(R, b), \quad (2.14)$$

siendo  $y(R, b)$  la forma funcional de la desviación respecto de la gravedad de Einstein. El llamado *parámetro de distorsión*  $b$  cuantifica el efecto de dicha desviación. En la subsección siguiente se especifica la expresión [2.14] para los modelos que se estudiarán.

### 2.2.2. Evolución cosmológica de los modelos de Hu-Sawicki y de Starobinsky

Este trabajo se enfocó en dos modelos  $f(R)$  en particular: el modelo de Hu-Sawicki [23] y el modelo de Starobinsky [24]. Para el modelo de Hu-Sawicki, la función  $f(R)$  se escribe como

<sup>1</sup>Otras requerimientos que suelen pedirse para asegurar la estabilidad en escenarios de grandes curvaturas son que  $\lim_{R \rightarrow 0} f(R) - R = 0$  y  $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) - R = cte$ , aunque no son condiciones necesarias para la construcción de los modelos estudiados en esta tesis.

$$f(R) = R + f^{HS}(R) = R - R_{HS} \frac{c_1 (R/R_{HS})}{c_2 (R/R_{HS})^n + 1} \quad (2.15)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $R_{HS}$  y  $n (> 0)$  son parámetros libres del modelo.

Para el modelo de Starobinsky. se tiene que

$$f(R) = R + f^{ST}(R) = R - \lambda R_{ST} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{R_{ST}^2} \right)^{-n} \right] \quad (2.16)$$

siendo  $\lambda > 0$ ,  $R_{ST}$  y  $n > 0$  los parámetros libres del modelo.

### 2.2.3. Formulación alternativa y cambio de variables

Los parámetros de los modelos  $f(R)$  presentados en la sección anterior no tienen una interpretación cosmológica inmediata. Esto dificulta encontrar una región en el espacio de parámetros que resulte de interés para obtener interpretaciones relevantes desde el punto de vista físico. Por este motivo, se utilizó el cambio de variables sugerido en [35] y [6] para reescribir las funciones 2.15 y 2.16.

Para el modelo de Hu-Sawicki, la ecuación 2.15 se puede reescribir como

$$f(R) = R - 2\Lambda \left[ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\Lambda b}\right)^n} \right], \quad (2.17)$$

donde los nuevos parámetros se escriben en función de los anteriores como  $\Lambda = \frac{c_1 R_{HS}}{2c_2}$  y  $b = \frac{2c_2}{c_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Notar que en el caso límite  $b \rightarrow 0$ , el modelo de Hu-Sawicki se reduce al modelo  $\Lambda$ CDM:  $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$ . De esta manera, identificando a  $\Lambda$  como una constante cosmológica efectiva, se puede interpretar a  $b$  como el parámetro que cuantifica la desviación del modelo alternativo respecto al Modelo Estándar.

El modelo de Starobinsky puede escribirse de la siguiente forma

$$f(R) = R - 2\Lambda \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + \left(\frac{R}{\Lambda b}\right)^2 \right]^n} \right\}, \quad (2.18)$$

siendo ahora  $\Lambda = \frac{\lambda R_{ST}}{2}$  y  $b = \frac{2}{\lambda}$ . Tomando el límite  $b \rightarrow 0$ , se observa que la interpretación de los nuevos parámetros es análoga a la del caso anterior. De esta manera, la constante cosmológica efectiva en un universo dominado por la materia posee la misma expresión que en el Modelo Estándar

$$\Lambda = \Lambda(\Omega_m, H_0) = 3 \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 (1 - \Omega_m),$$

donde  $\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2}$  es el parámetro de masa total (bariónica y oscura) en el presente.

Para poder implementar este cambio de variables en el *software* desarrollado, fue necesario invertir las relaciones entre parámetros presentadas en esta sección. A continuación se detalla como se realizó este procedimiento.

### Modelo de Hu-Sawicki

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \frac{c_1 R_{HS}}{2c_2} \\ b = \frac{2c_2^{(1-\frac{1}{n})}}{c_1} \\ \Lambda = 3 \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 (1 - \Omega_m) \\ R_{HS} = \frac{1}{(8315 \text{Mpc})^2} \left( \Omega_m \cdot \frac{h^2}{0,13} \right), \end{array} \right.$$

siendo  $h = \frac{H_0}{100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}$  la constante de Hubble reducida. La última igualdad es la relación constitutiva propuesta por Hu y Sawicki en [23]. Igualando la primera y la tercera ecuación, y luego reemplazando  $R_{HS}$  por la cuarta ecuación, se obtuvo que

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{7800 \cdot (8315 \frac{\text{km}}{\text{s}})^2 (1 - \Omega_m)}{c^2 \Omega_m}.$$

Por otro lado, de la segunda relación

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2c_2^{-\frac{1}{n}}}{b}.$$

Al juntar ambas relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2\gamma}{b} \right)^n \\ c_2 = \left( \frac{2\gamma}{b} \right)^n, \end{array} \right.$$

con  $\gamma = \gamma(\Omega_m) = \frac{c^2 \Omega_m}{7800 \cdot (8315 \frac{\text{km}}{\text{s}})^2 (1 - \Omega_m)}$ . En el caso particular  $n = 1$ , las relaciones se simplifican

### Modelo de Starobinsky

En este caso, los parámetros se relacionan de la siguiente forma

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\lambda R_{ST}}{2} \\ b = \frac{2}{\lambda} \\ \Lambda = 3 \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 (1 - \Omega_m). \end{cases}$$

En este caso, el despeje resultó más simple y se obtuvo que

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{b} \\ R_{ST} = 3 \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 (1 - \Omega_m) b \end{cases}$$

Notar que para el modelo de Starobinsky el cambio de variables no depende del parámetro positivo  $n$ .

#### 2.2.4. Equivalencia entre los modelos de Hu-Sawicki $n = 2$ y de Starobinsky $n = 1$ .

Dado que las expresiones [2.17](#) para  $n = 2$  y [2.18](#) para  $n = 1$  tienen la misma forma funcional, se puede mostrar que existe una equivalencia entre las predicciones de los modelos para Hu-Sawicki con  $n = 2$  y Starobinsky con  $n = 1$ . En la sección [2.2.3](#) se mostró que es posible escribir la constante cosmológica efectiva  $\Lambda$  y el parámetro de distorsión  $b$  en términos de los parámetros de Hu-Sawicki  $n = 2$  como

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{c_1 R_{HS}}{2c_2} \\ b &= \frac{2\sqrt{c_2}}{c_1} \end{aligned}$$

y en el caso del modelo de Starobinsky  $n = 1$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\lambda R_{ST}}{2} \\ b &= \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Igualando las expresiones de  $\Lambda$  y  $b$  de ambos modelos se obtuvo una relación unívoca entre los parámetros originales de cada uno

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c_1}{\sqrt{c_2}} \\ R_{ST} &= \frac{R_{HS}}{\sqrt{c_2}}. \end{aligned}$$

Este resultado permite referirse de ahora en más indistintamente al modelo de Hu-

Sawicki con  $n = 2$  y al de Starobinsky con  $n = 1$ .

### 3.1. Resolución de ecuaciones

Los análisis previos donde se estudió la expansión del universo para teorías  $f(R)$  mostraron que resulta numéricamente más estable transformar el sistema de ecuaciones de segundo orden dado por [2.9](#) y [2.10](#) en un conjunto de cuatro ecuaciones de primer orden. Con este propósito, en el trabajo [37](#) se propuso el siguiente cambio de variables

$$x = \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R}$$

$$y = \frac{c^2 f}{6H^2 f_R}$$

$$v = \frac{c^2 R}{6H^2}$$

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 f_R}.$$

De esta manera, la primera ecuación de Friedmann modificada [2.9](#) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 H^2 &= \frac{1}{3f_R} \left( 8\pi G\rho_m + c^2 \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right) \\
 1 &= \frac{16\pi G\rho_m + c^2 Rf_R - c^2 f - 6H\dot{R}f_{RR}}{6H^2 f_R} \\
 1 &= \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 f_R} + \frac{c^2 R}{6H^2} - \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} - \frac{c^2 f}{6H^2 f_R}.
 \end{aligned}$$

Se puede identificar cada uno de estos términos con alguna de las nuevas variables, obteniendo una ecuación constitutiva

$$1 = \Omega + v - x - y. \quad (3.1)$$

Por otro lado, la expresión del escalar de curvatura [2.8](#) da lugar a una ecuación diferencial para el parámetro de Hubble en función de la variable  $v$

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{6}{c^2} (2H^2 + \dot{H}) \\
 -\frac{\dot{H}}{H^2} &= 2 - \frac{c^2 R}{6H^2} \\
 -\frac{\dot{H}}{H^2} &= 2 - v
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dz} = \frac{H}{z+1} (2-v)} \quad (3.2)$$

donde en el último paso se utilizó la ecuación [2.6](#)

Para encontrar el sistema de ecuaciones que rige la dinámica de las nuevas variables, se calcula la derivada en función del *redshift* de cada una y se obtiene un conjunto de cuatro ecuaciones de primer orden (En el apéndice [A](#) se muestra con detalle la deducción de las expresiones del sistema de ecuaciones).

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dx}{dz} &= \frac{1}{z+1} [-\Omega - 2v + x + 4y + xv + x^2] \\
 \frac{dy}{dz} &= \frac{-1}{z+1} [vx\Gamma - xy + 4y - 2yv] \\
 \frac{dv}{dz} &= \frac{-v}{z+1} (x\Gamma + 4 - 2v) \\
 \frac{d\Omega}{dz} &= \frac{\Omega}{z+1} (-1 + 2v + x).
 \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

Especificar el modelo  $f(R)$  que se estudia es análogo a especificar la forma funcional del parámetro  $\Gamma = \frac{f_R}{Rf_{RR}}$  que aparece en el sistema de ecuaciones diferenciales [3.3](#). Una vez resuelto el sistema y habiendo obtenido las funciones  $x(z), y(z), v(z), \Omega(z)$ , en el



trabajo citado se obtiene el parámetro de Hubble  $H(z)$  resolviendo la ecuación [3.2](#)

$$\begin{aligned} \int_{H_0}^{H(z)} \frac{dH'}{H'} &= \int_0^z \frac{dz'}{z'+1} (2-v) \\ \ln \left| \frac{H(z)}{H_0} \right| &= 2 \ln |z+1| - \int_0^z \frac{v}{z'+1} dz' \\ &= \ln (z+1)^2 - F(z) \\ \frac{H(z)}{H_0} &= (z+1)^2 e^{-F(z)} \end{aligned}$$

$$\boxed{H(z) = H_0 (z+1)^2 e^{-F(z)}}, \quad (3.4)$$

donde  $F(z) = \int_0^z \frac{v(z')}{z'+1} dz'$ .

En esta tesis se substituyó la ecuación para el parámetro de Hubble [3.2](#) por una ecuación diferencial adicional en el sistema [3.3](#). Se define el escalar de Ricci reducido  $r$  de la siguiente forma

$$r = R/R^*,$$

donde  $R^*$  es una constante con las mismas unidades que el escalar de Ricci  $R$ . En el caso del modelo de Hu-Sawicki  $R^* = R_{HS}$ , mientras que para el modelo de Starobinsky  $R^* = R_{ST}$ . La ecuación diferencial para la variable  $r$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{1}{R^*} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dz} \\ &= \frac{-1}{(1+z)} \frac{\dot{R}}{R^* H} \\ &= \frac{-1}{(1+z)} \frac{\dot{R} f_{RR}}{H f_R} \frac{f_R}{f_{RR} R} \frac{R}{R^*} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dz} = -\frac{x\Gamma r}{(1+z)}}. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, se obtuvo un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dz} = \frac{1}{z+1} [-\Omega - 2v + x + 4y + xv + x^2] \\ \frac{dy}{dz} = \frac{-1}{z+1} [vx\Gamma - xy + 4y - 2yv] \\ \frac{dv}{dz} = \frac{-v}{z+1} (x\Gamma + 4 - 2v) \\ \frac{d\Omega}{dz} = \frac{\Omega}{z+1} (-1 + 2v + x) \\ \frac{dr}{dz} = -\frac{x\Gamma r}{z+1}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Una vez integrado el sistema [3.6](#) y habiendo obtenido las funciones  $x(z)$ ,  $y(z)$ ,  $v(z)$ ,  $\Omega(z)$ ,  $r(z)$ , el parámetro de Hubble  $H(z)$  se obtiene de manera inmediata a partir de la definición de  $v$ :

$$v = \frac{c^2 R}{6H^2}$$

$$H(z) = \eta \sqrt{\frac{r(z)}{v(z)}}$$

donde  $\eta = c\sqrt{\frac{R^*}{6}}$  es una constante independiente de  $z$ .

La introducción de la variable  $r$  y su correspondiente ecuación diferencial proveen una mayor robustez al modelo ya que no es necesario realizar una integración numérica adicional para obtener  $H(z)$ .

### 3.1.1. Expresión para la función $\Gamma$ en los distintos modelos.

A continuación se muestran explícitamente las formas funcionales de  $\Gamma$  para los modelos estudiados. El parámetro  $n$  en ambos casos suele fijarse en valores enteros; de manera tal de facilitar la resolución de ecuaciones diferenciales y obtener cotas para el resto de los parámetros a partir de la comparación con datos observacionales y experimentales. Para el modelo de Hu-Sawicki en el caso donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  se pudo escribir de la siguiente forma

$$\Gamma(r) = \frac{(1 + c_2 r^n) [-c_1 \cdot n \cdot r^n + (1 + c_2 r^n) \cdot r]}{r^n \cdot c_1 \cdot n [(1 - n) + c_2 (1 + n) r^n]}. \quad (3.7)$$

Se puede observar que existe una dependencia explícita únicamente con el escalar de Ricci reducido  $r = \frac{R}{R_{HS}}$ . Para el caso particular  $n = 1$ , la función  $\Gamma(r)$  se reduce a

$$\Gamma(r) = \frac{(1 + c_2 r) [-c_1 + (1 + c_2 r)^2]}{2c_1 c_2 r}.$$

Por otro lado, para el modelo de Starobinsky en el caso  $n \in \mathbb{N}$  se obtuvo

$$\Gamma(r) = \frac{(r^2 + 1) [(r^2 + 1)^n (r^2 + 1) - n\lambda 2r]}{n\lambda 2r (2nr^2 + r^2 - 1)}. \quad (3.8)$$

Nuevamente se observa una única dependencia con la variable  $r$ . En el caso  $n = 1$ :

$$\Gamma(r) = \frac{(r^2 + 1) [(r^2 + 1)^2 - \lambda 2r]}{\lambda 2r (3r^2 - 1)}.$$

Resulta importante notar que la función  $\Gamma(r)$  escala como  $r^2$  en el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ , mientras que para el modelo de Starobinsky con  $n = 1$  la dependencia con  $r$  resulta de orden superior. En términos de computacionales, esto implica que para un mismo valor de  $n$ , la integración numérica para el modelo de Starobinsky resulta más costosa que para el modelo de Hu-Sawicki.

### 3.1.2. Condiciones iniciales

Para resolver el sistema de ecuaciones es necesario establecer condiciones iniciales para las variables  $(x, y, v, \Omega, r)$ . Como se describió en el capítulo 1, las teorías  $f(R)$  tomaron protagonismo para intentar explicar la expansión acelerada actual del cosmos. Por lo tanto, se asume que en las etapas tempranas del universo, la dinámica del mismo es igual a la respectiva del Modelo Estándar. Entonces, los modelos  $f(R)$  cumplen que

$$\lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f(R) = R - 2\Lambda. \quad (3.9)$$

Por ello, el criterio que se estableció para la condición inicial es que reproduzca el modelo  $\Lambda$ CDM para  $R/R_0 \rightarrow \infty$ , lo que corresponde a  $z \rightarrow \infty$ . A partir del límite 3.9, automáticamente se cumple que

$$\lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f'(R) = 1$$

$$\lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f''(R) = 0$$

En este trabajo se utilizó el supraíndice <sup>(0)</sup> para denominar una variable evaluada en la condición inicial. Una de las hipótesis más importantes que se asume (al igual que en 6, 33, 7) es que la evolución del universo desde las etapas tempranas hasta la etapa dominada por la materia es igual a la del Modelo Cosmológico Estándar. Por lo tanto, el parámetro de Hubble en la condición inicial es igual al del Modelo Estándar definido en 2.4, que a continuación se designa como  $H_\Lambda$ :

$$H^{(0)}(z^{(0)}) = H_\Lambda(z^{(0)}). \quad (3.10)$$

Finalmente, se dedujo el valor del escalar de Ricci para la condición inicial. Utilizando la ecuación 2.8

$$R = \frac{6}{c^2} \left( 2H^2 + \dot{H} \right) = \frac{6H}{c^2} [2H - (1+z)H'],$$

siendo  $H' = \frac{dH}{dz}$ , se obtuvo

$$R^{(0)} = \frac{6H_\Lambda(z^{(0)})}{c^2} \left[ 2H_\Lambda(z^{(0)}) - (1+z^{(0)})H'_\Lambda(z^{(0)}) \right]. \quad (3.11)$$

Al combinar las expresiones [3.10](#) y [3.11](#), se pudieron escribir las condiciones iniciales de las nuevas variables del sistema dinámico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\dot{R}f_{RR}(R^{(0)})}{H_\Lambda(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} = \frac{-(z^{(0)}+1)R'^{(0)}H_\Lambda(z^{(0)})f_{RR}(R^{(0)})}{H_\Lambda(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} \\ y_0 &= \frac{c^2 f(R^{(0)})}{6H_\Lambda^2(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} \\ v_0 &= \frac{c^2 R^{(0)}}{6H_\Lambda^2(z^{(0)})} \\ \Omega_0 &= 1 - v_0 + x_0 + y_0 \\ r_0 &= R^{(0)}/R^*, \end{aligned}$$

con  $R' = \frac{dR}{dz}$ . Se puede demostrar que las condiciones iniciales no dependen del valor de  $H_0$ . Para ello, se realizó un reescalo de la forma

$$H(z) = H_0 \hat{H}(z)$$

donde  $\hat{H}(z) = \frac{H(z)}{H_0}$  es el parámetro de Hubble adimensional. Para no recargar la notación, en el resto de esta tesis se utilizó el símbolo  $\hat{\cdot}$  para denotar una variable que no depende de  $H_0$ . De manera análoga, se reescaló el escalar de Ricci,

$$R = \frac{6}{c^2} \left( 2H^2 + \dot{H} \right) = \frac{6}{c^2} \left( 2H^2 - (1+z)H \frac{dH}{dz} \right) = H_0^2 \hat{R}.$$

La derivada temporal del escalar de Ricci  $R$  resultó

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = -(1+z)H \frac{dR}{dz} = H_0^3 \hat{R}.$$

Tanto el modelo de Hu-Sawicki como el de Starobinsky cumplen que

$$f(R) = H_0 \hat{f}(R)$$

$$f_R(R) = \frac{df}{dR} = \frac{H_0 d\hat{f}}{H_0^3 d\hat{R}} = \frac{\hat{f}_R}{H_0}$$

$$f_{RR}(R) = \frac{df_R}{dR} = \frac{1}{H_0^3} \frac{d\hat{f}_R}{d\hat{R}} = \frac{\hat{f}_{RR}}{H_0^3}$$

Por lo tanto, las condiciones iniciales resultaron

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\dot{R}f_{RR}}{H_\Lambda f_R} = \frac{\hat{R}\hat{f}_{RR}}{\hat{H}_\Lambda \hat{f}_R} \\ y_0 &= \frac{c^2 f}{6H_\Lambda^2 f_R} = \frac{c^2 \hat{f}}{6\hat{H}_\Lambda^2 \hat{f}_R} \\ v_0 &= \frac{c^2 R}{6H_\Lambda^2} = \frac{c^2 \hat{R}}{6\hat{H}_\Lambda^2} \\ \Omega_0 &= 1 - v_0 + x_0 + y_0 \\ r_0 &= R/R^* = \hat{R}/\hat{R}^*, \end{aligned}$$

donde se omitió el supraíndice <sup>(0)</sup> para evitar recargar la notación. En conclusión, el proceso de integración numérica en su conjunto no depende la constante de Hubble (solo aparece al final como una constante multiplicativa como se puede apreciar en la definición del parámetro  $\eta$ ), reduciendo significativamente el costo computacional.

Siguiendo el trabajo de [35], se fijó el *redshift* de la condición inicial en  $z^{(0)} = 30$ . Igualmente, se estudió cómo cambia la solución al tomar distintas condiciones iniciales. Se encontró que, si bien es posible tomar una condición inicial más cercana a la región donde se encuentran los datos observacionales ( $z^{(0)} = 10$ ), esto no reduce significativamente el tiempo de cómputo. Finalmente, se comprobó que una condición demasiado cerca en el tiempo ( $z^{(0)} = 5$ ) no permite una correcta convergencia de la integración numérica.

### 3.1.3. Aproximación para $b \rightarrow 0$

En el artículo publicado por Basilakos et al. [35] se realizó un análisis sobre el costo computacional para distintos valores del parámetro de distorsión  $b$  y se observó que para valores de  $b$  cercanos a cero la integración se vuelve particularmente costosa computacionalmente, volviéndose inestable para ciertas combinaciones de los parámetros  $b$  y  $\Omega_m$ . Esto puede entenderse fácilmente observando la forma funcional alternativa de los modelos presentada en [2.2.3]. Cuando  $b \rightarrow 0$ , los modelos  $f(R)$  se asemejan al Modelo Cosmológico Estándar, donde  $f_{RR} = 0$ . En términos de las nuevas variables, esto equivale a  $\Gamma = \frac{f_R}{Rf_{RR}} \rightarrow \infty$ , lo cual resulta en que el costo computacional de resolver el sistema [3.6] aumente significativamente. En el trabajo citado se propone aproximar analíticamente la forma funcional de  $H(z)$ , realizando un desarrollo en serie alrededor de la solución cosmológica del modelo  $\Lambda$ CDM ( $b = 0$ ). De esta manera, se evita realizar la integración numérica en dicha región del espacio de parámetros que resulta conflictiva. Esta aproximación también fue utilizada en los trabajos de Nunes et al. [6] y D'agostino et al. [38, 7], como se discutirá con mayor detalle en el capítulo [6].

La idea general de este procedimiento es la siguiente. Si se define el número de *e-foldings* del *redshift* como  $N = -\log(1+z)$ , se puede escribir el parámetro de Hubble del

modelo  $\Lambda$ CDM en función de  $N$

$$H_{\Lambda}^2(N) = H_0^2 [\Omega_m e^{-3N} + (1 - \Omega_m)].$$

Una expansión alrededor del mismo estará dada por

$$H^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + \sum_{i=1}^M b^i \delta H_i^2(N), \quad (3.12)$$

donde  $M$  es la cantidad de términos que se utilizaron para la expansión. Para los modelos de Hu-Sawicki  $n = 1$  y Starobinsky  $n = 1$  es posible obtener un error menor en  $H(z)$  a 0,001 % en todos los *redshift* con  $b \in [0,001, 0,5]$  solo conservando los primeros dos términos no nulos de la expansión:

$$H_{HS}^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + b\delta H_1^2(N) + b^3\delta H_3^2(N) + O(\text{sup})$$

$$H_{ST}^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + b^2\delta H_2^2(N) + b^4\delta H_4^2(N) + O(\text{sup}).$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo  $\delta H_i^2$  se procede de la siguiente manera. En primer lugar se reescribe la primer ecuación de Friedmann modificada [2.9](#) en función de la variable  $N$

$$-f_R H^2(N) + H_0^2 \Omega_m e^{-3N} + \frac{c^2}{6} (f_R R - f) - f_{RR} H^2(N) R'(N) = 0, \quad (3.13)$$

donde  $R'(N) = \frac{dR}{dN}$ . Luego, se reemplaza la solución general [3.12](#) en [3.13](#) y se agrupan los términos que se encuentran al mismo orden en  $b$ . De esta manera, al igualarlos independientemente a cero se pueden despejar los coeficientes  $\delta H_j^2(N)$  para cada  $b^j$ . Los valores de los coeficientes para el modelo de Hu-Sawicki y el de Starobinsky con  $n=1$  se encuentran en el apéndice de [35](#).

### Error cometido en el desarrollo en serie

Para cuantificar el error cometido por la aproximación analítica alrededor de  $b = 0$ , se calculó el error en función de  $b$  de la siguiente forma

$$\langle \text{error}(b) \rangle = \left\langle 100 \cdot \left( 1 - \frac{H_{\text{aprox}}(z, b)}{H_{\text{ODE}}} \right) \right\rangle,$$

siendo  $H_{\text{ODE}}$  la función  $H(z)$  obtenida mediante la integración numérica y  $H_{\text{aprox}}(z, b)$  es la fórmula analítica aproximada. En otras palabras, se realizó el cálculo del error porcentual cometido por la función aproximada  $H_{\text{aprox}}$  y se lo promedió en el rango de  $z$  donde se realizó la integración numérica ( $z \in [0, 30]$ ). Al observar la forma explícita de  $H_{\text{aprox}}$  tanto para el caso de Hu-Sawicki como Starobinsky con  $n = 1$ , se notó una dependencia lineal con  $H_0$ . Si además se considera que  $H_{\text{ODE}}$  de la sección anterior tiene el mismo comportamiento, se deduce que  $\langle \text{error}(b) \rangle$  solo depende de  $b$  y de  $\Omega_m$ .

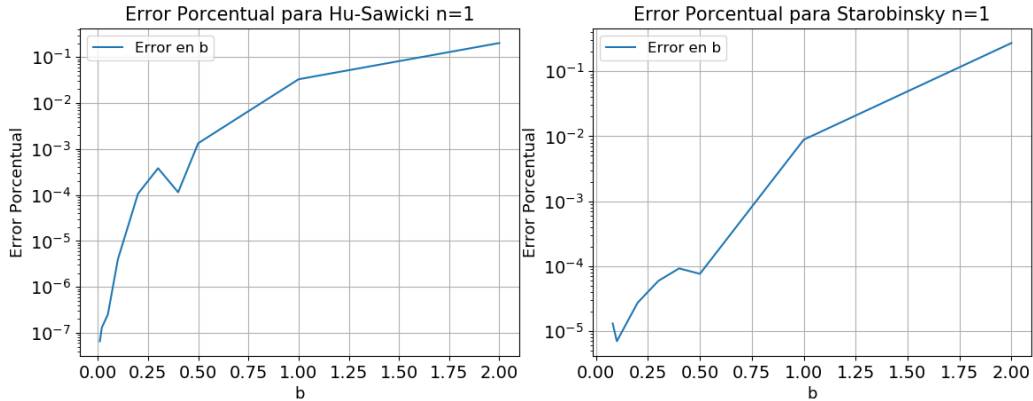


Figura 3.1: Error relativo para el parámetro  $b$  para los modelos de Hu-Sawicki (izquierda) y Starobinsky (derecha), fijando el parámetro  $\Omega_m = 0,24$ .

En la figura 3.1 se muestran los resultados de  $\langle \text{error}(b) \rangle$  para el modelo de Hu-Sawicki  $n = 1$  y Starobinsky  $n = 1$  fijando  $\Omega_m = 0,24$  [1]. Si bien el desarrollo en serie permite evaluar  $H(z)$  en valores negativos del parámetro  $b$ , la integración numérica para valores de  $b$  negativos no converge, además de no representar un escenario físico posible. Esto último puede verse en las expresiones de la sección 2.2.3. En el caso del modelo de Hu-Sawicki  $n = 1$ ,

$$b \sim \frac{c_2}{c_1} \sim R_{\text{HS}}$$

como el parámetro  $R_{\text{HS}}$  resulta positivo por construcción,  $b$  también lo será. En el caso de Starobinsky,

$$b = 2\lambda.$$

Como  $\lambda > 0$ ,  $b$  también lo es.

En la figura 3.1 se observa que el error porcentual es menor a  $10^{-4}$  para valores de  $b < 0,2$  en los modelos de Hu-Sawicki  $n = 1$  y Starobinsky  $n = 1$ . Por este motivo, se decidió reemplazar la integración numérica por la expresión de  $H(z)$  aproximada para valores de  $0 \leq b < 0,2$ . Se denominó  $b$  crítico ( $b_{\text{crit}}$ ), al valor de  $b$  en el que se decide pasar del régimen de la integración al régimen de la expansión de Taylor. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 3.2.

### 3.2. Verificaciones numéricas

Para asegurar el correcto funcionamiento del código implementado, se realizaron una serie de tests y análisis para establecer los parámetros de la integración numérica. Los parámetros principales a la hora de integrar el sistema 3.6 son el paso de integración y la cantidad de puntos en la que se va a evaluar la integración numérica.

<sup>1</sup>Se realizó el análisis para distintos  $\Omega_m$  en el intervalo  $[0,2; 0,4]$  y se observó que los resultados no diferían significativamente.

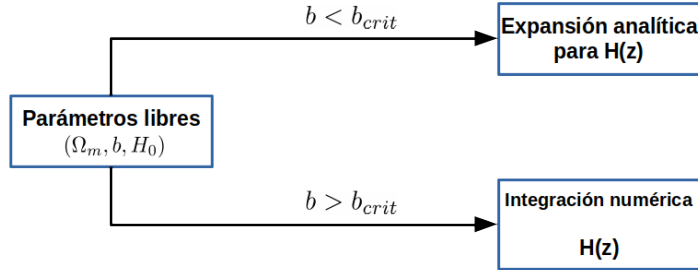


Figura 3.2: Diagrama de flujo que muestra el significado del parámetro  $b_{crit}$ .

### Paso de integración

La elección del paso de integración es de suma importancia a la hora de realizar una integración numérica: éste debe ser lo suficientemente pequeño como para asegurar la correcta resolución del sistema de ecuaciones, pero se debe evitar incurrir en un costo computacional innecesario. Para encontrar el paso de integración óptimo, se realizó secuencialmente el cálculo de  $H(z)$  para distintos pasos de integración en orden decreciente. Se define  $H(z)]_j$  como el cálculo de  $H(z)$  realizado con un cierto paso de integración al que se lo denomina  $j$ -ésimo. El error de la integración numérica para dicho paso de integración se estimó como

$$\Delta H(j) = \langle H(z)]_j - H(z)]_{j-1} \rangle,$$

donde  $\langle \rangle$  representa el promedio sobre el *redshift*  $z$ . Se decidió tomar el paso de integración óptimo correspondiente a  $\Delta H < \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es un valor de *tolerancia*. En esta tesis se fijó  $\epsilon = 10^{-10}$ . Como es de esperar, para valores de  $b$  más pequeños es necesario un paso de integración también más pequeño. Para el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ , al fijar  $b = 0,1$  es preciso tomar un paso de integración de 0,003, mientras que para  $b = 0,01$ , es necesario tomarlo igual a 0,001. Notar que al usar la aproximación de Taylor hasta  $b = 0,2$ , es suficiente con fijar el paso de integración en 0,003. Realizando un análisis similar para el modelo de Starobinsky con  $n = 1$ , se obtuvo un paso de integración óptimo de 0,0001. En la figura 3.3 se muestra la disminución del error en el cálculo de  $H(z)$  al disminuir el paso integración.



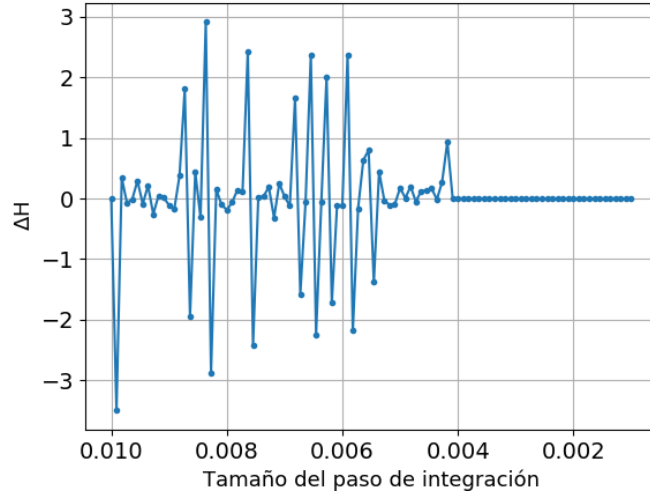


Figura 3.3: Error absoluto del parámetro de Hubble en función del paso de integración, fijando el parámetro  $\Omega_m = 0,24$  y  $b = 0,1$  para el modelo de Hu-Sawicki.

### Cantidad de puntos a evaluar

Otro parámetro que fue necesario elegir con antelación fue la cantidad de puntos a evaluar a la hora de realizar la integración del sistema [3.6](#). Como en el caso anterior, fue necesario hacer una elección de compromiso. El criterio elegido tuvo en cuenta el error vinculado a la integral  $\int_0^3 \frac{dz'}{H(z')}$ <sup>23</sup>. De manera análoga al análisis del paso de integración, se resolvió el sistema [3.6](#) reiteradas veces, aumentando en cada corrida la cantidad de puntos a evaluar. Se llamó  $H(z)]_i$  al cálculo de  $H(z)$  realizado con la elección  $i$ -ésima del número de puntos a evaluar. El error correspondiente se calculó como

$$\Delta I(i) = \left\langle \int_0^3 \frac{dz'}{H(z)]_i} - \int_0^3 \frac{dz'}{H(z)]_{i-1}} \right\rangle.$$

Al evaluar la integración numérica en  $10^5$  puntos, se obtuvo que  $\Delta I \sim 10^{-4}$ . Al corroborar que los valores obtenidos para el error son robustos ante distintos valores de los parámetros ( $\Omega_m, b, H_0$ ), se tomó esta cantidad de puntos como la óptima tanto para el modelo de Hu-Sawicki como en el de Starobinsky con  $n = 1$ . En la figura [3.4](#) se muestra la disminución del error en el cálculo de la magnitud  $\int_0^3 \frac{dz'}{H(z')}$  a medida que se aumentan los puntos en los que se evalúa la integración.

Finalmente, en la figura [3.5](#) se muestran algunos resultados para la integración numérica del parámetro de Hubble para distintos valores del parámetro de distorsión  $b$ .

<sup>23</sup>Se utilizó dicha integral como medida de la cantidad de puntos a evaluar ya que se observó que allí ocurre la mayor restricción en cuanto a la *performance* del programa.

<sup>3</sup>Para realizar esta integral se utilizó el método de los trapecios. Se verificó que este método tiene un error despreciable en comparación con el método de integración de Simpson para las funciones que fueron consideradas en este trabajo.

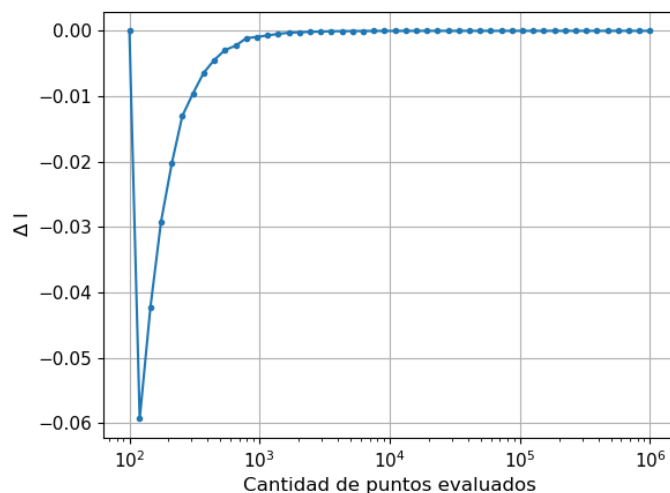


Figura 3.4: Error cometido al variar la cantidad de puntos que se evalúan en la integración numérica al calcular  $\int_0^3 \frac{dz'}{H(z')}$ , fijando el parámetro  $\Omega_m = 0,24$  y  $b = 0,1$  para el modelo de Hu-Sawicki.

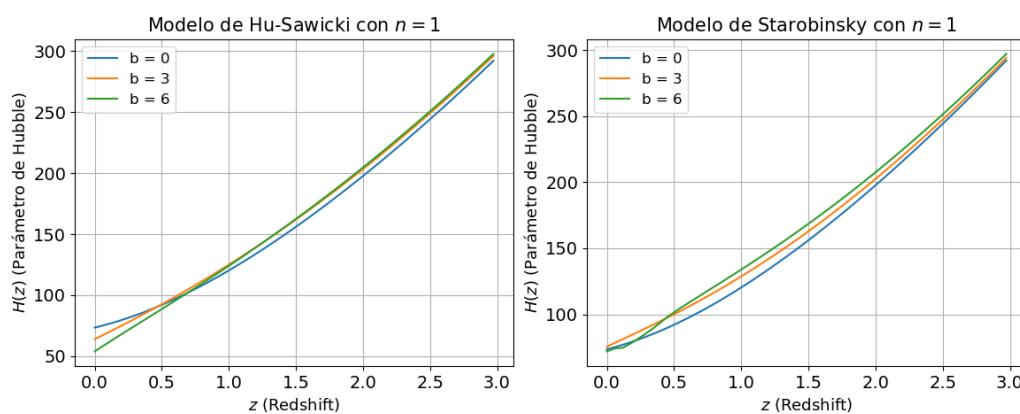


Figura 3.5: Parámetro de Hubble en función de  $z$  variando el parámetro  $b$  para los modelos de Hu-Sawicki (izquierda) y Starobinsky (derecha), fijando el parámetro  $\Omega_m = 0,24$  y la constante de Hubble  $H_0 = 73,48 \frac{km/s}{Mpc}$ .

Actualmente se encuentran disponibles una gran cantidad de datos observacionales con los cuales se pueden testear los modelos cosmológicos. En esta tesis se trabajaron con datos de Supernovas tipo Ia (SnIa), Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) y Cronómetros Cósmicos (CC).

#### 4.1. Magnitudes derivadas de la teoría

En esta sección se introducen distintos indicadores de distancia que están relacionados con cantidades observables de los diferentes grupos de datos que se utilizan en este trabajo. Actualmente se dispone de diversos conjuntos de datos observacionales que permiten verificar la validez tanto del Modelo Cosmológico Estándar así como también de los modelos alternativos. Por ejemplo, las observaciones de Supernovas tipo Ia pueden ser vinculadas con la distancia luminosa  $d_L(z)$ . Ésta se la puede definir como

$$d_L(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}$$

donde  $L$  es la luminosidad intrínseca del objeto en cuestión y  $S$  el flujo asociado. A su vez, asumiendo un universo FLRW espacialmente plano ( $k = 0$ ) la distancia luminosa se relaciona con el parámetro de Hubble de la siguiente forma

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{c}{H(z')} dz'.$$

Recientemente se obtuvieron datos muy precisos de la estructura del universo a gran escala, lo que permitió estudiar el pico de BAO en el espectro de potencias de la materia a partir de la distribución de galaxias en el cosmos. En la literatura se utilizan trazadores del campo de densidad de materia que permiten determinar distintos indicadores de distancias

en función del corrimientos al rojo.

Los que fueron utilizados en este trabajo<sup>1</sup> son la distancia de Hubble

$$D_H(z) = \frac{c}{H(z)}$$

y la distancia angular

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

A partir de esta última se pueden escribir la distancia angular comóvil  $D_M(z)$  y la llamada *comovil volume average angular diameter distance*  $D_V(z)$ ;

$$D_M(z) = (1+z)D_A(z)$$

y

$$D_V(z) = \left[ (1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}.$$

En general,  $D_V(z)$  se reporta junto con el parámetro de Alcock & Paczyński (AP), que está definido como

$$AP(z) = D_M(z) \frac{H(z)}{c}.$$

Estas dos magnitudes por separado brindan información sobre la isotropía y la anisotropía del cosmos, respectivamente. La covarianza entre ambas es muy pequeña, por ende resultan buenos estimadores al utilizarlos en conjunto.

Es importante notar que todas estas magnitudes dependen directamente de la forma funcional de  $H(z)$ , que a su vez se deduce del modelo cosmológico. Por lo tanto, resultan convenientes para evaluar la viabilidad de los distintos modelos.

## 4.2. Supernovas tipo Ia

Una supernova es una explosión estelar extremadamente luminosa. Éstas se pueden clasificar a partir de las líneas de absorción del espectro electromagnético, diferenciándolas entre tipo Ia, Ib, Ic y II. Las Supernovas tipo Ia (SnIa) carecen de líneas de hidrógeno y helio en sus espectros ópticos y presentan, en cambio, una línea de absorción de silicio. Son el tipo de supernovas más luminoso, de tal manera que en su pico de luminosidad pueden ser más brillantes que la galaxia en la que se localizan. Además, se encuentran en todo tipo de galaxias y no presentan una preferencia por regiones específicas de formación estelar.

Diversos modelos describen a este tipo de supernovas como el resultado de la detonación termoneuclear de un sistema binario, conformado por una enana blanca de carbono-oxígeno [39] que ha acreetado suficiente materia de una estrella compañera, generalmente una gigante roja, hasta acercarse a la masa de Chandrasekhar. Se asume también que ambas estrellas poseen edades y masas similares. Estos modelos explican satisfactoriamente

<sup>1</sup>En todos los casos se asumió un universo especialmente plano.

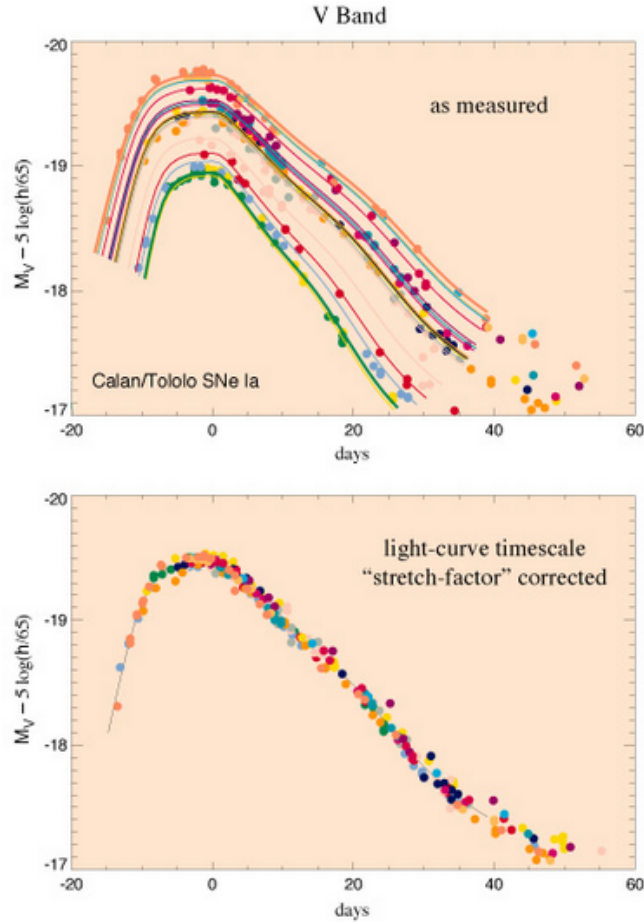


Figura 4.1: Curvas de luz de Supernovas tipo Ia. En el panel superior están graficados los datos de luminosidad de las supernovas tal como se observan, mientras que en el panel inferior se ve un ajuste de acuerdo a la evolución del brillo después del máximo. El brillo de las supernovas que alcanzan una luminosidad máxima mayor, decae más lento luego del máximo; <http://supernova.lbl.gov/>.

la uniformidad que presentan las curvas de luz, magnitudes absolutas y espectros de las SnIa. Por otra parte, se encontró que existe una relación entre la tasa de decrecimiento del brillo de la supernova y el máximo de luminosidad. Esto último permite utilizar un parámetro de ajuste para estandarizar las distintas mediciones de supernovas y calibrar sus curvas de luminosidad [40], como se observa en la figura 4.1.

Debido a todas estas características las SnIa se utilizan como candelas estándar para determinar distancias y poder así, entre otras cosas, restringir parámetros cosmológicos [11, 40].

#### 4.2.1. Compilación *Pantheon*:

Se utilizaron los datos de 1048 Supernovas tipo Ia de la compilación *Pantheon* [41, 5], que presenta el catálogo más grande y reciente de Supernovas tipo Ia hasta la fecha. Éstas se encuentran en el intervalo de redshift  $0,01 < z < 2,3$ . La cantidad de SnIa

Muestra	Número de SnIa	z (media)
CSP	26	0.024
CfA3	78	0.031
CfA4	41	0.031
CfA1	9	0.024
CfA2	18	0.021
SDSS	335	0.202
PS1	279	0.292
SNLS	236	0.640
SCP	3	1.092
GOODS	15	1.120
CANDELS	6	1.732
CLASH	2	1.555

Cuadro 4.1: Catálogo de Supernovas tipo Ia que conforman la compilación *Pantheon* [5]. Se detalla el número de supernovas y el promedio del *redshift* de cada muestra.

tomadas de cada muestra<sup>2</sup> se presentan en la tabla 4.1. Con el objetivo de reducir los errores sistemáticos, esta compilación contiene muestras de supernovas disponibles en la literatura recalibradas. A partir del ajuste de la curva de luz se obtienen los tres valores necesarios para calcular la distancia a cada supernova: el color  $c$ , la forma de la curva  $x_1$  y el logaritmo de la normalización del flujo  $m_B$ . En este catálogo se utiliza el paquete SALT2 para modelar la curva de luz [42] en su versión más actual presentada en [43] e implementada en SNANA [44] junto con dos posibles modelos [42, 45] para la dispersión intrínseca de las SnIa. A partir de los valores obtenidos del ajuste, se calcula el módulo de distancia  $\mu$  utilizando una versión modificada de la fórmula de Tripp [46].

$$\mu = m_B - M_{\text{abs}} + \alpha x_1 + \beta c + \Delta M + \Delta B \quad (4.1)$$

con  $\Delta M$  la corrección debido a la masa de la galaxia en la que se encuentra la supernova, y  $\Delta B$ , la corrección basada en sesgos predichos por las simulaciones de 500000 SnIa.  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros *nuisance* que representan la relación entre la luminosidad de la SnIa  $x_1$  y la forma de la curva; y la relación entre la luminosidad y el color  $c$ , respectivamente. Por último,  $M_{\text{abs}}$  es la magnitud absoluta de la SnIa de referencia con  $x_1 = 0$  y  $c = 0$ .

Se ha mostrado que existe una correlación entre la luminosidad de la supernova y la masa, edad, metalicidad y tasa de formación estelar de la galaxia en la que se encuentra. Sin embargo, los estudios más recientes muestran que la correlación con la masa de la galaxia es la más importante y es la única que se tiene en cuenta en esta compilación. Esta corrección dada por el término  $\Delta M$  se comporta como una función escalón,

$$\Delta M = \begin{cases} \gamma & M_{\text{gal}} \geq M_0 \\ 0 & M_{\text{gal}} < M_0 \end{cases}$$

donde  $M_{\text{gal}}$  es el logaritmo en base 10 de la masa de la galaxia en la que se encuentra la SnIa,  $M_0 = 10,13$  está dado por la compilación y  $\gamma$  es un parámetro *nuisance*.

<sup>2</sup>En este caso llamamos muestra a cada conjunto de datos incluidos en la compilación *Pantheon*.

Con el objetivo de facilitar el análisis estadístico, se estudió la viabilidad de fijar los parámetros *nuisance* en los valores reportados por [5], en donde se asume el Modelo Cosmológico Estándar. Dado que no es necesariamente cierto que en los modelos alternativos de interés los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tienen el mismo valor en el modelo  $\Lambda$ CDM, se realizó un estudio que se encuentra en la sección [6.2] para mostrar la validez de esta hipótesis. De esta forma, la ecuación [4.1] se simplifica considerablemente resultando

$$\mu = \tilde{m}_b - \tilde{M}_{\text{abs}}, \quad (4.2)$$

siendo  $\tilde{m}_B$  y  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  las magnitudes aparente y absoluta efectivas de la luminosidad respectivamente. Dentro de estas cantidades  $\tilde{m}_B$  y  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  se encuentra incluida la información de las correcciones  $x_1$ ,  $c$ ,  $\Delta M$  y  $\Delta B$ . Mientras que  $\tilde{m}_B$  es uno de los datos observacionales que provee la colaboración,  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  es una propiedad intrínseca de las Supernovas tipo Ia.

Por otro lado, la forma de relacionar el módulo de la distancia con el parámetro de Hubble es mediante la fórmula de la distancia luminosa  $d_L(z)$  que se definió en la sección anterior.

$$\mu = 25 + \log_{10}(d_L(z)). \quad (4.3)$$

De las ecuaciones [4.2] y [4.3], se obtiene que

$$\tilde{m}_b - \tilde{M}_{\text{abs}} = 25 + \log_{10} \left( (1+z) \int_0^z \frac{c}{H(z')} dz' \right).$$

La ecuación [2.4] muestra que la expresión para  $H(z)$  depende linealmente de  $H_0$ . Por lo tanto, existe una degeneración entre los valores que pueden tomar los parámetros  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  y  $H_0$ . Dicho efecto se lo denomina *residuo de Hubble*. Para evitar esta degeneración, resulta necesario fijar alguno de los parámetros para poder estimar el otro, o bien complementar las observaciones de Supernovas con otro observable, como Cronómetros Cósmicos. En este trabajo se optó por la segunda opción.

### 4.3. BAO

En el período anterior a la etapa de recombinación, los fotones, electrones y protones se encontraban acoplados formando un fluido efectivo. Los efectos de la presión de radiación debida a la presencia de fotones sobre las distintas subdensidades y sobredensidades del fluido dieron lugar a la formación de ondas acústicas. Luego de la formación del hidrógeno neutro, la materia y la radiación se desacoplaron. En el universo neutro dominado por bariones, la interacción gravitatoria, que hasta ese momento había resultado despreciable, comenzó a jugar un rol fundamental al dar lugar a las inestabilidades de las perturbaciones que antes formaban parte del fluido primordial. El contraste entre regiones con sobredensidad y subdensidad fue cada vez mayor, dando lugar con el tiempo a cúmulos y supercúmulos de galaxias y grandes espacios de baja densidad (*voids*) en el presente. La distancia máxima que puede viajar una onda acústica desde el principio del universo

hasta el momento del desacople de la materia bariónica con los fotones define una escala característica  $r_d(z_{\text{drag}})$ . Esta escala está impresa en la distribución de la materia en el universo y puede ser utilizada como una 'regla estándar' para medir distancias cosmológicas. Bajo estas hipótesis, se espera encontrar un pico en las funciones de correlación espacial<sup>3</sup> de las galaxias, como los que se muestran en la figura 4.2.

Distintos trazadores del campo de densidad de materia permiten determinar diferentes indicadores de distancias a diferentes corrimientos al rojo, como los definidos en la sección 4.1. Las BAO se han medido con gran precisión utilizando diferentes métodos y pueden ser utilizadas para determinar parámetros cosmológicos y testear modelos cosmológicos alternativos.

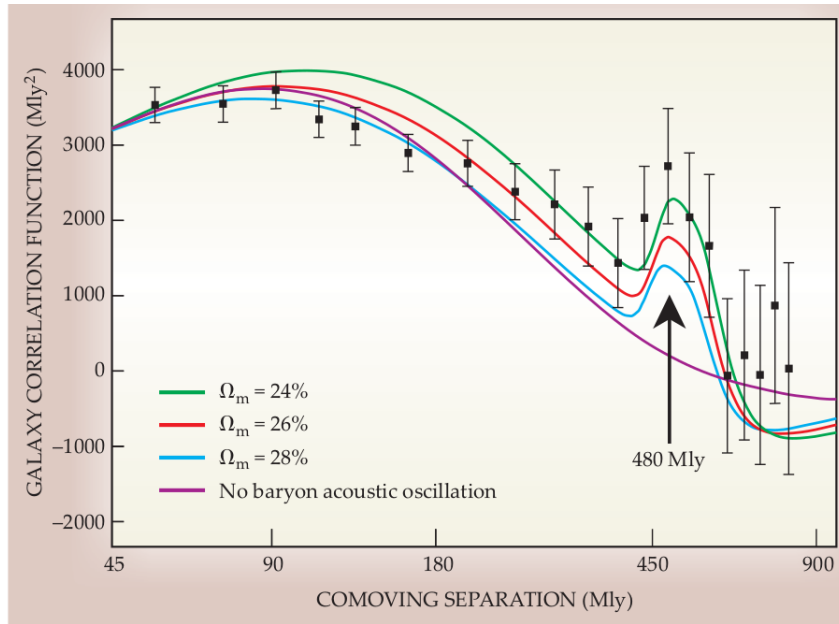


Figura 4.2: Función de correlación de galaxias obtenida por la colaboración *Sloan Digital Sky Survey*. Se observa el 'pico de BAO' a 480Mly  $\sim$  150Mpc. También se muestra la dependencia de la altura del pico con la densidad de materia  $\Omega_m$ . Figura publicada de [2].

La distancia al horizonte de sonido  $r_d$  está dada en [47] y [48] por

$$r_d = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c_s(z')}{H(z')} dz', \quad (4.4)$$

donde  $z_{\text{drag}}$  es el *redshift* correspondiente al desacople de la materia bariónica de los fotones<sup>4</sup> y la velocidad del sonido en ese período se define como

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_r}\right)}}.$$

Para modelos que se comportan como  $\Lambda$ CDM en el momento del desacople de los bariones (como los estudiados en esta tesis)<sup>5</sup> se tiene que

<sup>3</sup>Probabilidad de encontrar una galaxia a una distancia  $r$  de otra galaxia.

<sup>4</sup>Equivalente al momento en que la profundidad óptica de los bariones se vuelve igual a uno.

<sup>5</sup>En los artículos [49] y [50] se analiza la "Viabilidad Cosmológica" de distintos modelos de  $f(R)$ .



$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left[ 1 + \bar{R}_b (1+z)^{-1} \right]}},$$

siendo  $\bar{R}_b = 31500 \times \Omega_b h^2 \left( \frac{T_{\text{CMB}}}{2,7\text{K}} \right)^{-4}$  y  $T_{\text{CMB}} = 2,726\text{K}$ .

El parámetro de Hubble  $H(z)$  que se encuentra en el denominador de la expresión [4.4](#) corresponde al del modelo cosmológico que se está estudiando, y en principio depende del conjunto de parámetros  $(\Omega_m, b, H_0)$ . Sin embargo, como se describió en la sección [2.2.1](#), se asume que los modelos  $f(R)$  tienen la misma solución que el Modelo Estándar cuando  $z \rightarrow \infty$ . Se asumió que esto es válido dentro de los límites de la integral, siendo entonces posible reemplazar la expresión  $H(z)$  en [4.4](#) por el parámetro de Hubble del modelo  $\Lambda\text{CDM}$   $H_\Lambda$  definido en [2.4](#). De esta forma, se elimina dependencia con el parámetro  $b$  y se evita resolver el sistema [3.6](#) para hallar  $r_d$ . Entonces, la expresión resulta

$$r_d = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c}{H_\Lambda(z') \sqrt{3 \left[ 1 + \bar{R}_b (1+z')^{-1} \right]}} dz'.$$

Hu & Eisenstein [51](#) desarrollaron la siguiente *fitting formula* para  $z_{\text{drag}}$

$$z_{\text{drag}} = \frac{1291 (\Omega_m h^2)^{0,251}}{1 + 0,659 (\Omega_m h^2)^{0,828}} \left[ 1 + b_1 (\Omega_b h^2)^{b_2} \right], \quad (4.5)$$

siendo  $b_1 = (\Omega_m h^2)^{-0,419} \left[ 1 + 0,607 (\Omega_m h^2)^{0,6748} \right]$  y  $b_2 = 0,238 (\Omega_m h^2)^{0,223}$ . Si bien en el trabajo original la expresión [4.5](#) fue desarrollada para el Modelo Cosmológico Estándar, es posible utilizarla para estudiar modelos  $f(R)$  por lo motivos esbozados anteriormente.

En esta tesis se utilizaron distintas cartografías de galaxias, como por ejemplo el *Sloan Digital Sky Survey* que mide las funciones de correlación entre las mismas. De esta forma, es posible calcular las cantidades observacionales que se definieron en la sección [4.1](#). Los datos observacionales utilizados en este trabajo se reportan en la tabla [4.2](#). El valor de la distancia al horizonte fiducial  $r_d^{\text{fid}}$  es un valor reportado por cada colaboración. Para calcularlo, se utiliza la expresión [4.4](#) asumiendo el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  y fijando los parámetros cosmológicos en valores particulares.

## 4.4. Cronómetros Cósmicos

Jimenez et al. [60](#) proponen un método para obtener mediciones directas de la tasa de expansión  $H(z)$  utilizando la edad relativa de las galaxias con *redshift* similar (entre  $z$  y  $z + \Delta z$ ) para estimar  $\frac{dz}{dt}$ , recordando que

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \simeq \frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

Como  $\Delta z$  se puede obtener con gran precisión a partir del análisis espectroscópico, la única cantidad que queda por determinar es la evolución diferencial de la edad  $\Delta t$  para un dado  $\Delta z$ .

$z_{ef}$	Valor medido	Observable	$r_d^{\text{fid}}$ [Mpc]	Referencia
0,106	$457 \pm 27$ Mpc	$D_V$	–	[52]
0,15	$(664 \pm 25) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_V$	148,69	[53]
0,81	$(1649,5 \pm 66) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_A$	148,6	[54]
0,38	$(1512 \pm 33) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_M$	148,6	[55]
0,38	$(81,2 \pm 3,2) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right) \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$	$H$	148,6	
0,51	$(1975 \pm 41) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_M$	147,78	
0,51	$(90,9 \pm 3,3) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right) \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$	$H$	147,78	
0,61	$(2307 \pm 50) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_M$	147,78	
0,61	$(99 \pm 3,4) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right) \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$	$H$	147,78	
0,44	$(1716 \pm 83) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_V$	147,33	
0,6	$(2221 \pm 101) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_V$	147,33	
0,73	$(2516 \pm 86) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_V$	147,33	
1,52	$(3843 \pm 147) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_V$	147,33	[57]
2,3	$(1336 \pm 45,7) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_H$	153,44	[58]
2,3	$(5566 \pm 317,2) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_M$	147,78	
2,4	$(1327,4 \pm 53) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_H$	147,78	[59]
2,4	$(5259,7 \pm 250,5) \left( r_d/r_d^{\text{fid}} \right)$ Mpc	$D_M$	147,78	

Cuadro 4.2: Distancias vinculadas a las mediciones de BAO a partir de diferentes observaciones. La tabla muestra los *redshifts* de las mediciones, el valor medio y la desviación estándar de los observables y la correspondiente referencia. También se muestran los valores para el valor fiducial de la distancia al horizonte de sonido  $r_d^{\text{fid}}$  de cada medición, reportados por las distintas colaboraciones.

Actualmente, se considera que los mejores Cronómetros Cósmicos son aquellas galaxias que han evolucionado pasivamente durante una escala temporal mucho mayor que la diferencia de edad entre ellas. En base a estudios observacionales, hay un acuerdo general de que estas galaxias son masivas y que formaron la mayor parte ( $> 90\%$ ) de su masa estelar rápidamente ( $0,1 - 0,3\text{Gyr}$ ), a *redshift* típicamente ( $z > 2 - 3$ ) y principalmente no han experimentado ningún gran episodio de formación estelar desde entonces. Debido a estas características, al observarlas a tiempos cósmicos considerablemente posteriores a su etapa de formación, la evolución de sus estrellas sirve como un reloj que está sincronizado con la evolución del tiempo cósmico. Para determinar la edad de una galaxia, se observan propiedades características de galaxias elípticas y masivas. Asumiendo que las galaxias del mismo tipo a *redshift* cercano se formaron aproximadamente al mismo tiempo cosmológico, la diferencia entre sus edades es igual a la diferencia que se percibe en la edad del universo entre estos dos *redshift* cercanos:  $\Delta t(z) = t(z + \Delta z) - t(z)$ . La ecuación 4.6 muestra como el parámetro de Hubble se encuentra relacionado con estas magnitudes.

La principal ventaja de este método reside en el enfoque diferencial. Al utilizar edades relativas  $dt$  se eliminan los efectos sistemáticos inherentes a la determinación de edades absolutas. Al no incluirse ninguna distancia integrada sobre el redshift, el resultado es una medición que es independiente del modelo cosmológico o de cualquier suposición sobre la métrica.

Los estimaciones más recientes de  $H(z)$  a través del método de Cronómetros Cósmicos fueron presentadas en [61, 62]. Como se utilizan pequeñas variaciones en el redshift  $\Delta z = 0,1$ , se eliminan ciertas parcialidades observacionales que pueden cambiar la relación edad - redshift.

Los datos observacionales utilizados en esta tesis se encuentran en la tabla 4.3

$z$	$H(z)$	$\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$	Referencia
0,09	$69 \pm 12$		[62]
0,17	$83 \pm 8$		
0,27	$77 \pm 14$		
0,4	$95 \pm 17$		
0,9	$117 \pm 23$		
1,3	$168 \pm 17$		
1,43	$177 \pm 18$		
1,53	$140 \pm 14$		
1,75	$202 \pm 40$		
0,48	$97 \pm 62$		[63]
0,88	$90 \pm 40$		
0,1791	$75 \pm 4$		[64]
0,1993	$75 \pm 5$		
0,3519	$83 \pm 14$		
0,5929	$104 \pm 13$		
0,6797	$92 \pm 8$		
0,7812	$105 \pm 12$		
0,8754	$125 \pm 17$		
1,037	$154 \pm 20$		
0,07	$69 \pm 19,6$		[65]
0,12	$68,6 \pm 26,2$		
0,2	$72,9 \pm 29,6$		
0,28	$88,8 \pm 36,6$		
1,363	$160 \pm 33,6$		[66]
1,965	$186,5 \pm 50,4$		
0,3802	$83 \pm 13,5$		[67]
0,4004	$77 \pm 10,2$		
0,4247	$87,1 \pm 11,2$		
0,4497	$92,8 \pm 12,9$		
0,4783	$80,9 \pm 9$		
0,35	$82,1 \pm 4,85$		[68]

Cuadro 4.3: Datos observacionales del parámetro de Hubble a partir de la técnica de Cronómetros Cósmicos. La tabla muestra el *redshift* de la medición, el valor medio y la desviación estándar de  $H(z)$  y la correspondiente referencia.

Con el objetivo de contrastar las predicciones teóricas de los modelos con los datos observacionales descritos en el capítulo 4, se realizaron diversos análisis estadísticos. Para poder abordarlos, existen dos enfoques posibles: el frecuentista y el bayesiano.

En el enfoque frecuentista la probabilidad se interpreta como la frecuencia de aparición de un determinado resultado a partir de un experimento que se repite. Este método permite informar objetivamente acerca del resultado del experimento sin incorporar conocimientos previos acerca del mismo. En este enfoque, el intervalo de confianza que se reporta se construye de forma tal que resulta unívoco, aunque no siempre refleja un resultado físicamente posible. El conjunto de  $j$  parámetros libres  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j\}$  óptimos del modelo  $f$  puede encontrarse al maximizar la densidad de probabilidad denominada *likelihood*  $\mathcal{L}$ . Para una distribución Gaussiana de los errores, la función  $\mathcal{L}$  para  $M$  datos se escribe como

$$\mathcal{L} = \mathbb{P}(y_i|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M |\Sigma|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \bar{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \right],$$

donde  $\boldsymbol{\mu}$  es un vector  $\mu_i = (y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta}))$ ,  $(x_i, y_i)$  es el conjunto de los datos y  $\bar{\Sigma}$  es la matriz de covarianza asociada. La función  $\mathcal{L}$  expresa, una vez conocido el resultado de un experimento, la probabilidad de haber obtenido dicho resultado. Maximizar  $\mathcal{L}$  es equivalente a minimizar el estadístico chi cuadrado  $\chi^2$ , que se define como

$$\chi^2 = \boldsymbol{\mu}^T \bar{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (5.1)$$

El  $\chi^2$  se utiliza para analizar la bondad del ajuste realizado. Las medidas de bondad en general resumen la discrepancia entre los valores observados y los valores esperados en el modelo teórico bajo estudio. Se considera un buen ajuste cuando el valor del chi cuadrado es del orden del número de observaciones. En el caso en que los errores sean

independientes, la inversa de la matriz de covarianza se escribe como

$$\bar{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{bmatrix}$$

por lo que se tiene que

$$\chi^2 = \sum_i^M \left[ \frac{(y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \right]. \quad (5.2)$$

Se define el chi cuadrado reducido  $\tilde{\chi}^2$  de la forma

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{M - j}.$$

Si  $\tilde{\chi}^2 \sim 1$  la bondad del análisis estadístico es buena. Por otro lado, si  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  indica un mal ajuste ya que resulta de una gran desviación de la distribución asumida, y esto puede indicar que las mediciones u observaciones son deficientes (con una subestimación de la varianza del error), o que la elección de la función de probabilidad es incorrecta. Finalmente, si  $\tilde{\chi}^2 \ll 1$  tampoco es bueno ya que indica una sobreestimación de la varianza del error [69].

Como se describió en el capítulo 4, se considerarán tres conjuntos de datos: Cronómetros Cósmicos, BAO y SnIa. En el caso de los dos primeros, los datos disponibles son independientes por lo cual se puede utilizar la expresión 5.2, mientras que para el caso de las supernovas es necesario aplicar la expresión 5.1, utilizando la matriz de covarianza dada por la colaboración *Pantheon*, que contiene las incertezas sistemáticas y las correlaciones entre los datos.

En el enfoque bayesiano se ofrece una interpretación diferente de la probabilidad. A diferencia del enfoque frecuentista, en este caso se busca la distribución de probabilidad de los parámetros a partir de los datos y el grado de conocimiento previo del problema. De esta manera, se incorporan fácilmente las restricciones físicas conocidas y la información proveniente de otros datos a partir de una distribución de probabilidad *a priori*. Si  $y_i$  son los datos observados y llamamos  $\theta$  al conjunto de los parámetros libres del modelo, el llamado Teorema de Bayes nos permite construir una distribución de probabilidad condicional para los parámetros desconocidos dados los datos  $\mathbb{P}(\theta|y_i)$ , llamada distribución de probabilidad *a posteriori* o simplemente *posterior*

$$\mathbb{P}(\theta|y_i) = \frac{\mathbb{P}(\theta) \mathbb{P}(y_i|\theta)}{\int \mathbb{P}(\theta) \mathbb{P}(y_i|\theta) d\theta}, \quad (5.3)$$

donde  $\mathbb{P}(y_i|\theta)$  es la función *likelihood* y  $\mathbb{P}(\theta)$  representa una distribución de probabilidad *a priori* (también llamada *prior*) en donde se encuentra la información que se conoce

con anterioridad sobre los parámetros  $\theta$ <sup>1</sup>. La integral que se encuentra en el denominador solo depende de los datos y es una constante de normalización.

La expresión 5.3 permite calcular los valores *a posteriori* de cualquier función  $f(\theta)$  de forma directa, de la forma

$$E[f(\theta) | y_i] = \frac{\int f(\theta) \mathbb{P}(\theta) \mathbb{P}(y_i | \theta) d\theta}{\int \mathbb{P}(\theta) \mathbb{P}(y_i | \theta) d\theta}. \quad (5.4)$$

Sin embargo, la expresión 5.4 presenta una gran dificultad, ya que la integración sobre las probabilidades en un amplio espacio de parámetros y con un gran número de datos disponibles resulta ser computacionalmente inviable. Por este motivo, se propone llevar adelante la evaluación de la expresión 5.4 a partir del método de cadenas de Markov - Monte Carlo (MCMC por sus siglas en inglés).

## 5.1. MCMC

Los métodos de Cadenas de Markov - Monte Carlo comprenden una serie de algoritmos para elaborar el muestreo de una distribución de probabilidad. Estas constan de dos partes: la integración mediante el método de Monte Carlo y las cadenas de Markov:

- El método de integración de Monte Carlo es un método no determinista utilizado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. En él se evalúa el valor de  $E[f(X)]$  tomando muestras  $\{X_i; i = 1, \dots, N\}$  de la función *posterior*  $\mathbb{P}(\theta | y_i)$ . Luego, se realiza la aproximación:

$$E[f(X)] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i). \quad (5.5)$$

De esta forma, la media de la población se estima con la media de la muestra. Si las muestras  $\{X_i\}$  son independientes, la ley de los grandes números establece que la aproximación se hace cada vez más precisa al aumentar el valor el tamaño de la muestra  $N$ . En algunos casos no es posible controlar el tamaño de la muestra durante el análisis, debido a que esta función puede no ser común. Sin embargo, puede generarse por cualquier proceso que tome muestras dentro de su soporte en las proporciones correctas. Una manera de tomar muestras  $\{X_i\}$  a partir de  $\mathbb{P}(\theta | y_i)$  es a través de una cadena de Markov que tenga a  $\mathbb{P}(\theta | y_i)$  como distribución estacionaria.

- La cadena de Markov es un tipo especial de proceso estocástico discreto, en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende únicamente del evento inmediatamente anterior. A medida que la cadena avanza, esta pierde progresivamente información del estado inicial y la distribución de la cual se muestrean los valores tenderá a una distribución estacionaria  $\varphi(\cdot)$ . Luego de un número de pasos lo suficientemente grande (denominados de *burn-in*), la cadena logra estabilizarse. Para asegurar que la

<sup>1</sup>En esta tesis se tomaron *priors* uniformes a partir de consideraciones teóricas (como en el caso de  $\Omega_m \in [0, 1]$ ), o bien a partir de trabajos anteriores (como en el caso del parámetro de Hubble  $H_0 \in [60, 80]$  y el parámetro de distorsión  $b \in [0, 10]$ ).

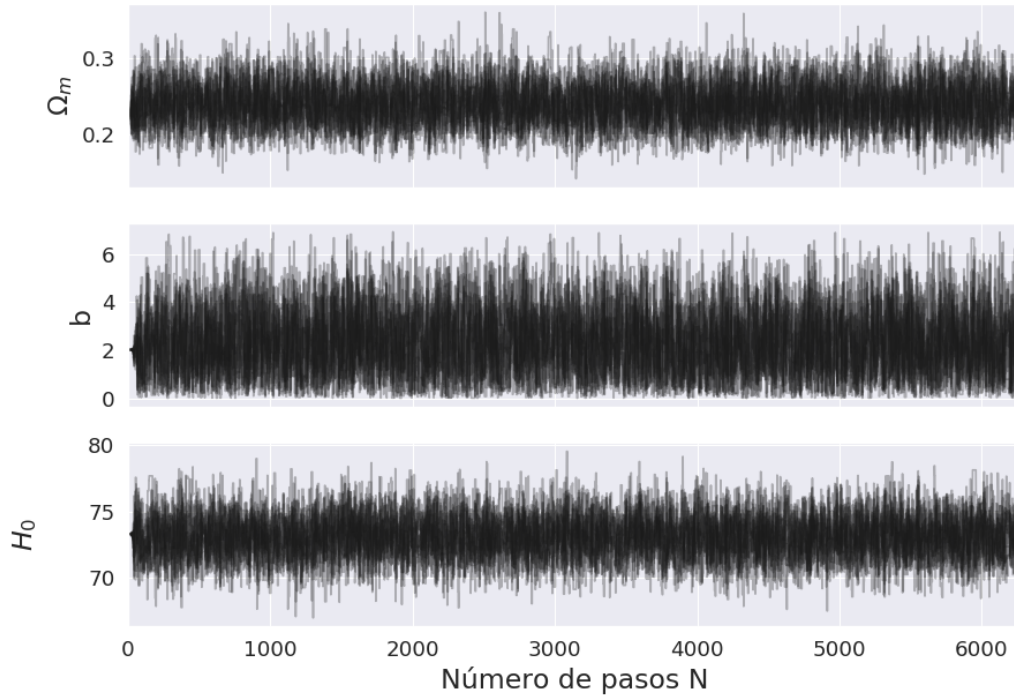


Figura 5.1: Cadenas de Markov generadas para el cálculo de la distribución *a posteriori* de los parámetros libres  $(\Omega_m, b, H_0)$  para el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ , utilizando los datos de Cronómetros Cósmicos y el dato de la constante de Hubble de reportado por Riess et al. [3].

cadena construida es tal que su distribución estacionaria  $\varphi(\cdot)$  coincide con la distribución *a posteriori*  $\mathbb{P}(\theta|y_i)$ , es posible utilizar el algoritmo de *Metropolis-Hastings*. Una vez descartadas las primeras  $k$  muestras de *burn-in*, el estimador de  $E[f(\theta)]$  se calcula como utilizando el promedio ergódico, de la forma

$$\bar{f} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N f(X_i). \quad (5.6)$$

La convergencia al valor de expectación requerido se asegura mediante el teorema ergódico. En la figura 5.1 se muestra un ejemplo de cadenas de Markov que recorren de manera uniforme los valores de cada uno de los parámetros libres  $(\Omega_m, b, H_0)$ .

### 5.1.1. Criterio de convergencia

Esta subsección se encuentra basada en el trabajo de Goodman & Weare [70]. Debido a que cada paso de la cadena de Markov depende del paso anterior, es necesario tomar algún criterio de parada o de convergencia para asegurarnos obtener un número efectivo de muestras independientes. Si bien existen distintos diagnósticos de convergencia (como el estadístico de Gelman-Rubin), en esta tesis se decidió utilizar el denominado tiempo de autocorrelación integrado  $\tau$ , que cuantifica directamente el error de la integración Monte Carlo.



Si las muestras son independientes, el estimador de la varianza tiene la forma

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \frac{1}{N} \text{Var} [f(\theta_i)],$$

donde  $f(\theta_i)$  es la función probabilidad del parámetro  $\theta_i$  obtenido a partir de las cadenas de Markov. En este caso, el error decae con el número de muestras como  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . En el caso de MCMC, las muestras no son independientes y el error está dado por

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \frac{\tau_f}{N} \text{Var} [f(\theta_i)],$$

donde  $\tau_f$  es el tiempo de autocorrelación integrado para la cadena  $f(\theta_i)$ . Se puede pensar a  $\frac{N}{\tau_f}$  como el número de pasos independientes efectivos. De esta forma, estimar  $\tau_f$  implica poder controlar el error relativo que se comete al calcular la integral de interés, a partir del número de muestras que se toman.

El tiempo de autocorrelación integrado para una dada función  $f$  se define como

$$\tau_f = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_f(\tau), \quad (5.7)$$

donde  $\rho_f(\tau)$  es la función de autocorrelación normalizada del proceso estocástico que genera las cadenas para  $f$ . El valor de  $\rho_f(\tau)$  puede estimarse utilizando una cadena finita  $\{f_n\}_{n=1}^N$  a partir de la expresión

$$\hat{\rho}_f(\tau) = \hat{c}_f(\tau) / \hat{c}_f(0),$$

siendo  $\hat{c}_f(\tau)$  el estimador de la función de autocorrelación

$$\hat{c}_f(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} (f_n - \mu_f)(f_{n+\tau} - \mu_f),$$

y el promedio de la función  $f$

$$\mu_f = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n.$$

A partir de la expresión [5.7](#) es posible estimar el valor de  $\tau_f$  de la forma

$$\hat{\tau}_f = \sum_{\tau=-N}^N \hat{\rho}_f(\tau) = 1 + 2 \sum_{\tau=1}^N \hat{\rho}_f(\tau).$$

Sin embargo, esta expresión presenta algunos problemas. Para cadenas de gran tamaño, el ruido en la estimación de  $\hat{\rho}_f(\tau)$  comienza a ser apreciablemente grande, generando una estimación muy ruidosa de  $\hat{\tau}_f$  para un número de pasos de la cadena  $N$  elevado. Por lo

tanto, se suele estimar  $\hat{\tau}_f$  como

$$\hat{\tau}_f = 1 + 2 \sum_{\tau=1}^{N^*} \hat{\rho}_f(\tau),$$

para algún  $N^* \ll N$ . Al introducir el número  $N^*$  se reduce la varianza del estimador con el costo de algún sesgo adicional. En la bibliografía se sugiere tomar el menor valor posible de  $N^*$  con  $N^* \geq C\hat{\tau}_f(N^*)$ , para un valor de  $C \sim 5$ . Si bien se argumenta que este proceso funciona bien para cadenas más largas que  $1000 \times \tau_f$ , la situación mejora con la librería *emcee* de *Python* ya que en ella se pueden utilizar cadenas paralelas para reducir la varianza. Con este método, se encontró que cadenas más largas que  $50 \times \tau_f$  son en general suficientes.

En esta tesis se consideró que una cadena converge si la misma es más larga que  $100 \times \tau_f$  y si el error porcentual entre el pasos  $N$  y el  $N - 1$  en la estimación de  $\tau_f$  resultó menor al 0,1 %. Esto debe cumplirse por separado para cada uno de los parámetros que se estudiaron como condición necesaria y suficiente para determinar la convergencia. En la figura 5.2 se muestra de manera gráfica la estimación del tiempo de correlación integrado  $\hat{\tau}$  en función del número de muestras  $N$ . Para asegurar la convergencia de las cadenas, es condición necesaria que las curvas de todos los parámetros que se están estimando se encuentren por debajo de la recta  $\tau = N/100$ . Además, es requisito que la estimación de  $\tau$  se mantenga con una diferencia porcentual baja para los pasos finales de la cadena.

### 5.1.2. Intervalos de confianza

A diferencia de lo que ocurre en la estadística frecuentista, en el enfoque bayesiano el intervalo de confianza no se encuentra definido de manera unívoca. Es por ello que es necesario realizar una elección al momento de calcularlo, dependiendo de la forma de la distribución *a posteriori* y la interpretación de los resultados. Dos de los intervalos bayesianos que suelen reportarse en la literatura son el *equal-tailed interval* (ETI) y el *Highest density interval* (HDI). El intervalo ETI se define de forma tal que 2.5% de la probabilidad se encuentre a ambos lados del mismo (o sea, se encuentra limitado por el percentil 2.5 y el percentil 97.5). En contraposición, el intervalo HDI se construye de forma tal que los puntos en su interior corresponden a los valores más altos de la densidad de probabilidad. Ambos intervalos coinciden cuando las distribuciones de probabilidad son simétricas, pero esto no ocurre en general. En la figura 5.3 se muestra un ejemplo de los intervalos mencionados en una distribución asimétrica. Si bien la construcción del intervalo ETI resulta más sencilla, no siempre resulta significativo ya que no asegura que los valores más probables de la densidad de probabilidad se encuentren dentro del mismo. Por construcción esto no ocurre en el intervalo HDI, lo cual facilita su interpretación y lo hace el más utilizado en la literatura. Por este motivo, en esta tesis se utilizó el intervalo HDI al realizar el análisis de resultados reportado en el capítulo 6.

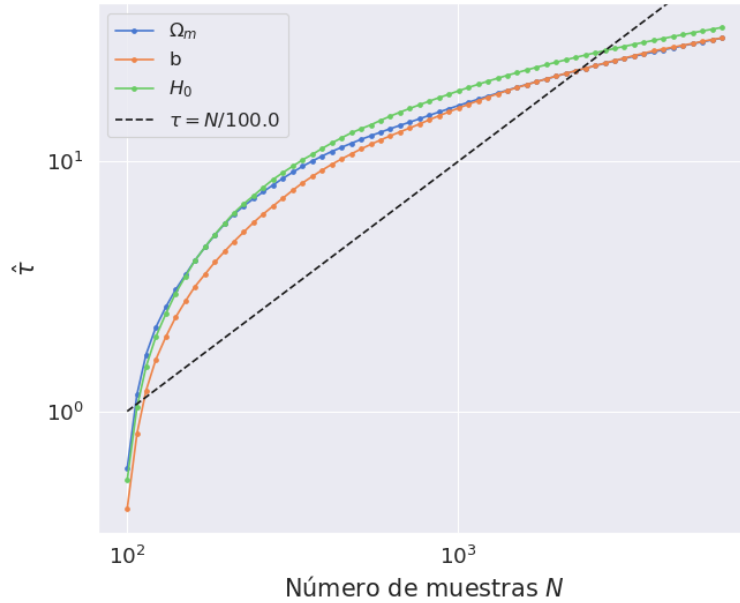


Figura 5.2: Ejemplo de la estimación del tiempo de correlación integrado  $\tau$  en función del número de muestras, para los parámetros  $(\Omega_m, b, H_0)$  en el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ . Para asegurar la convergencia de las cadenas es condición necesaria y suficiente que las curvas de los 3 parámetros que se muestran se encuentren por debajo de la recta  $\tau = N/100$ , además de permanecer relativamente constantes en los pasos finales de la cadena.

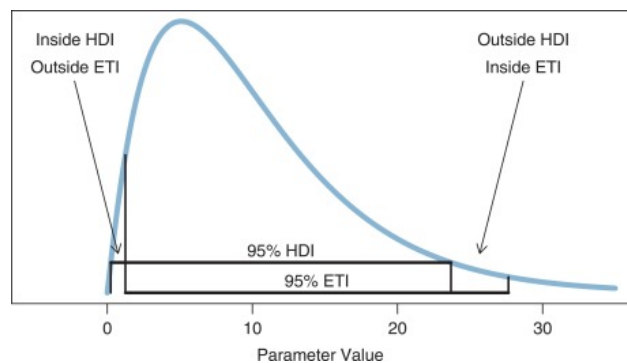


Figura 5.3: Distribución de probabilidad asimétrica. Se observa que los intervalos de 95 % CL resultan diferentes. Figura obtenida de [4].



En esta sección se presentan los resultados de este trabajo para el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$ . En cada subsección se analizan los intervalos de confianza y los contornos de la distribución de probabilidad *a posteriori* para los distintos parámetros cosmológicos que fueron descritos en el capítulo 4. Debido al costo computacional que conlleva el análisis de los datos para el modelo de Starobinsky con  $n = 1$ , se decidió realizarlo en un trabajo futuro.

### 6.1. Datos de CC + $H_0^{\text{Riess}}$

En primer lugar se muestran los resultados correspondientes a las distribuciones *a posteriori* mediante el uso de los datos de Cronómetros Cósmicos. Debido a que los errores porcentuales observacionales de este conjunto de datos son grandes y con el objetivo de obtener límites más estrictos sobre los parámetros libres, se propuso añadir como dato adicional la estimación más reciente de  $H_0$  publicada por Riess et al:  $H_0^{\text{Riess}} = 73,48 \pm 1,66 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$  [3]. A su vez, es de esperar que la inclusión de este dato genere un sesgo a la hora

	$\Omega_m$	$b$	$H_0$	$\tilde{M}_{\text{abs}}$	$\tilde{\chi}^2$
CC+H0	$0,228^{+0,039(0,069)}_{-0,017(0,039)}$	$2,019^{+1,371(2,745)}_{-1,435(2,013)}$	$73,294^{+1,468(2,972)}_{-1,735(3,250)}$	-	0,52
CC+SnIa	$0,27^{+0,029(0,056)}_{-0,057(0,113)}$	$0,200^{+0,452(1,243)}_{-0,200(0,200)}$	$70,448^{+3,592(8,583)}_{-2,300(4,425)}$	$-19,373^{+0,048(0,096)}_{-0,054(0,104)}$	0,971
CC+SnIa+BAO	$0,262^{+0,035(0,055)}_{-0,012(0,036)}$	$0,122^{+0,336(0,817)}_{-0,122(0,122)}$	$69,076^{+1,399(3,402)}_{-1,140(1,854)}$	$-19,414^{+0,022(0,043)}_{-0,020(0,041)}$	0,973
Nunes (2017)	$0,264^{+0,069(+0,102)}_{-0,058(-0,083)}$	$0,107^{+0,316(+0,393)}_{-0,158(-0,221)}$	$72,9^{+3,4(+4,7)}_{-3,4(-4,9)}$	-	-
D'agostino (2019)	$0,289^{+0,025(0,053)}_{-0,028(0,048)}$	$0,32^{+0,17(0,45)}_{-0,25(0,32)}$	$69,5 \pm 2,0(3,9)$	-	-

Cuadro 6.1: Resultado del análisis estadístico realizado con las distintas combinaciones de datos. La primera columna muestra los datos utilizados y las subsiguientes los intervalos de confianza de los parámetros libres a un 68 % (95 %) de confianza. La última columna muestra el  $\tilde{\chi}^2$  de cada uno de los análisis realizados. Además, se reportan los valores obtenidos en los trabajos [6] y [7] de Cronómetros Cósmicos +  $H_0^{\text{Riess}}$  y Cronómetros Cósmicos + Supernovas tipo Ia, respectivamente.

de calcular el intervalo para  $H_0$ , teniendo una preferencia por un valor cercano a  $H_0^{\text{Riess}}$ .

Como se observa en la tabla 6.1, el intervalo para  $H_0$  obtenido es consistente con el reportado por Riess et al. [3] a  $1\sigma$  e inconsistente a  $2\sigma$  con el intervalo obtenido por la colaboración *Planck* (2018) [18]. El intervalo para  $\Omega_m$  se encuentra en acuerdo a  $1\sigma$  con el intervalo reportado por la colaboración *Pantheon* (2018) [5] asumiendo un modelo  $\Lambda$ CDM, pero en desacuerdo a  $2\sigma$  con el reportado por *Planck* (2018). Por otro lado, el intervalo para  $b$  no es consistente a  $2\sigma$  con el valor  $b = 0$ , que corresponde con el modelo  $\Lambda$ CDM. Finalmente, se puede apreciar que el valor del chi cuadrado reducido  $\tilde{\chi}^2$  es mucho menor que 1. Esto resulta esperable ya que, como se muestra en [71], los datos de Cronómetros C3smicos +  $H_0^{\text{Riess}}$  tampoco ajustan de manera 3ptima al Modelo Cosmol3gico Est3ndar.

Los contornos de confianza de la distribuci3n de probabilidad *a posteriori* se muestran en la figura 6.1. Se observa que existe una correlaci3n negativa entre  $\Omega_m$  y  $H_0$ . Por el contrario, no existe una correlaci3n apreciable entre el par3metro  $b$  y  $\Omega_m$ ; y entre  $b$  y  $H_0$ . Adem3s, la distribuci3n *a posteriori* para el par3metro  $b$  resulta asim3trica<sup>1</sup>.

Para verificar los resultados obtenidos en este an3lisis, se compararon los intervalos de confianza y los contornos *a posteriori* de los par3metros libres obtenidos utilizando los datos de Cronómetros C3smicos y el valor de la constante de Hubble reportada en [3] ( $CC + H_0^{\text{Riess}}$ ) con los obtenidos en el trabajo de Nunes et al. (2017) [6]<sup>2</sup>. En cuanto a los contornos, se observ3 que en el trabajo de Nunes et al. tambi3n se observa una correlaci3n negativa entre los par3metros  $\Omega_m$  y  $H_0$ . Por otro lado, si bien existe una coincidencia a  $1\sigma$  entre los intervalos de los par3metros  $\Omega_m$  y  $H_0$  del art3culo citado y el an3lisis de esta tesis, no ocurre lo mismo con el par3metro  $b$ , ya que dicha consistencia s3lo se da a  $2\sigma$ . Tambi3n fue notable que el intervalo de confianza reportado por Nunes et al. toma valores de  $b < 0$ . Como se discuti3 en la secci3n 3.1.3, la integraci3n num3rica es impracticable en dicha zona del espacio de par3metros, adem3s de carecer de sentido f3sico. Una posible explicaci3n es que en dicho trabajo los autores utilizaron la expansi3n en serie para  $b \rightarrow 0$  presentada en la secci3n 3.1.3 en un entorno cercano a cero para valores de  $b$  positivos y negativos. Para verificar que esto fue efectivamente as3, se recalcularon los contornos y los intervalos de confianza para los par3metros libres del modelo, modificando el valor de  $b_{\text{crit}}$  introducido en la subsecci3n 3.1.3. Se comprob3 que a medida que  $b_{\text{crit}}$  aumenta, el contorno de confianza para  $b$  tiende a aproximarse a valores de  $b$  m3s peque1os. Finalmente, a partir de una comunicaci3n privada con los autores del trabajo [6] se verific3 que en dicho an3lisis s3lo se us3 la expansi3n de Taylor para calcular  $H(z)$ .

## 6.2. Datos de Supernovas tipo Ia

En esta secci3n se muestran los resultados obtenidos utilizando los datos provenientes de la luminosidad de las SnIa. A la hora de analizar estos datos es necesario determinar no s3lo los par3metros del modelo sino adem3s los par3metros *nuisance* definidos en [4.2].

<sup>1</sup>Por este motivo y como se explic3 en la secci3n 5.1.2, los intervalos HDI y ETI para el par3metro  $b$  no son equivalentes, por lo que se eligi3 el primero de ellos.

<sup>2</sup>En dicho trabajo no se reporta el valor del chi cuadrado reducido  $\tilde{\chi}^2$ .

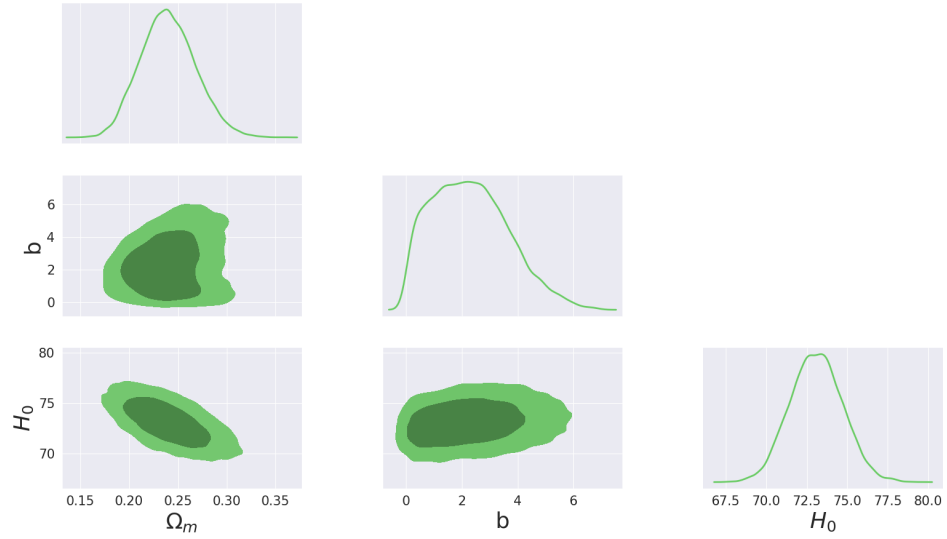


Figura 6.1: Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósicos y el dato de la constante de Hubble de Riess et al.  $H_0^{\text{Riess}}$ . En la diagonal se muestra la probabilidad *a posteriori* de  $\Omega_m$ ,  $b$  y  $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

Debido al anteriormente mencionado “residuo de Hubble” (ver 4.2.1), cuando se utilizan únicamente datos de Supernovas es necesario fijar el valor de  $H_0$  para obtener contornos de confianza razonables para el resto de los parámetros del modelo. En este análisis, se eligió por fijar  $H_0 = H_0^{\text{Riess}}$ .

Para verificar que es posible utilizar los parámetros *nuisance* reportados por la colaboración *Pantheon* [5], que fueron calculados asumiendo un modelo  $\Lambda$ CDM, se realizó un primer estudio dejando variar los parámetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  además del parámetro  $b$  del modelo de Hu-Sawicki, la magnitud absoluta y el parámetro de densidad de materia  $\Omega_m$  ( $\Omega_m, b, \tilde{M}_{\text{abs}}$ ). Como se observa en la tabla 6.2, los intervalos de los parámetros *nuisance* y el del parámetro  $\Omega_m$  se encuentran en acuerdo a  $1\sigma$  con los de *Pantheon* [5]. Por lo tanto, para el resto del trabajo se decidió fijar los parámetros *nuisance* en los valores dados por dicha colaboración y utilizar la expresión 4.2. De esta manera, se obtuvieron los valores para los parámetros que se observan en la tabla 6.3. El valor obtenido para  $\Omega_m$  se encuentra a  $1\sigma$  del valor reportado por *Planck* (2018) [18] para el modelo  $\Lambda$ CDM. El intervalo de confianza del parámetro  $b$  es consistente con el valor  $b = 0$  a  $1\sigma$ . En la figura 6.3, se observa una distribución asimétrica para  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  y para  $b$ . También se puede apreciar una correlación negativa entre los parámetros  $b$  y  $\Omega_m$ ; y entre  $b$  y  $\tilde{M}_{\text{abs}}$ . Por otro lado existe una correlación positiva entre  $\Omega_m$  y  $\tilde{M}_{\text{abs}}$ . Finalmente, en todos los casos los parámetros libres se encuentran en acuerdo a  $1\sigma$  con los obtenidos en el análisis con los parámetros *nuisance* libres. Esto muestra que la elección de fijar los parámetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en los valores reportados en [5] es robusta.

	Este trabajo	<i>Pantheon</i> (2018)
$\Omega_m$	$0,281^{+0,004(0,0041)}_{-0,119(0,173)}$	$0,298 \pm 0,022$
$b$	$0,444^{+0,738(1,528)}_{-0,444(0,444)}$	—
$\tilde{M}_{\text{abs}}$	$-19,289^{+0,051(0,067)}_{-0,156(0,384)}$	—
$\alpha$	$0,150^{+0,012(0,017)}_{-0,003(0,001)}$	$0,154 \pm 0,006$
$\beta$	$3,027^{+0,052(0,100)}_{-0,049(0,099)}$	$3,02 \pm 0,06$
$\gamma$	$0,047^{+0,013(0,021)}_{-0,005(0,013)}$	$0,053 \pm 0,009$
$\tilde{\chi}^2$	0,998	—

Cuadro 6.2: Resultados del análisis estadístico realizado con los datos de supernovas tipo Ia asumiendo como parámetros libres a los parámetros de nuisance ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). En la tabla se muestran los intervalos de confianza correspondientes al 68 % (95 %). Además, se muestran los valores de la densidad de materia y de los parámetros *nuisance* reportados en [5] asumiendo el Modelo Cosmológico Estándar. Se fijó el valor de  $H_0$  en el reportado por Riess et al. (2018).

$\Omega_m$	$b$	$\tilde{M}_{\text{abs}}$	$\tilde{\chi}^2$
$0,295^{+0,009(0,017)}_{-0,138(0,212)}$	$0,097^{+1,055(1,947)}_{-0,097(0,097)}$	$-19,258^{+0,017(0,031)}_{-0,199(0,509)}$	0,983

Cuadro 6.3: Resultados del análisis estadístico realizado con datos de supernovas tipo Ia con los parámetros de *nuisance* igual a los valores reportados en [5] asumiendo un modelo  $\Lambda$ CDM. Se fijó el valor de  $H_0$  en el reportado por Riess et al. (2018) [3]. La tabla muestra los intervalos de confianza correspondiente al 68 % (95 %).

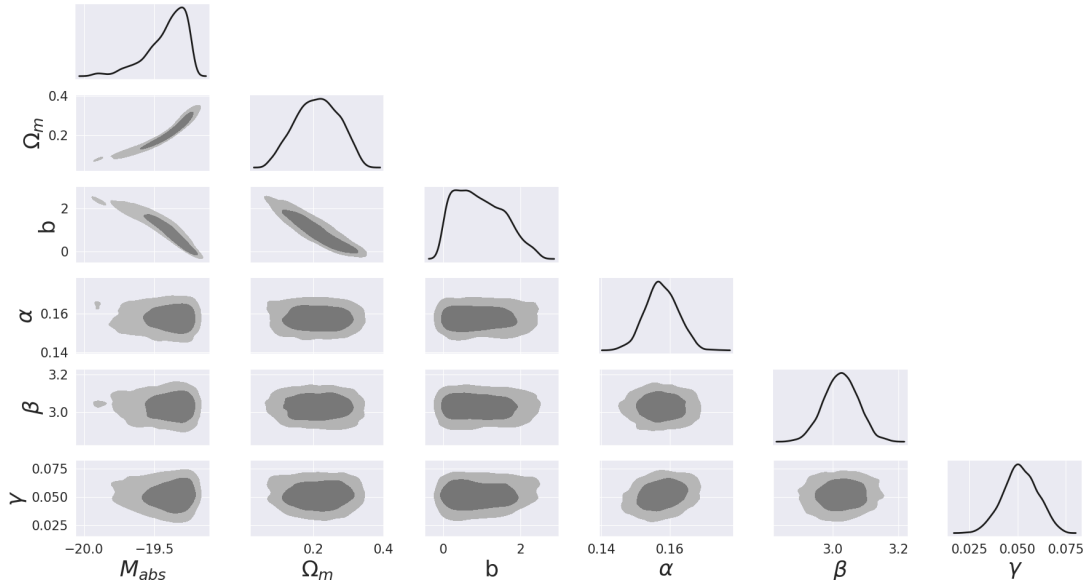


Figura 6.2: Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Supernovas tipo Ia utilizando los parámetros *nuisance* ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), habiendo fijado el valor de  $H_0 = 73,48 \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$ . En la diagonal se muestra la densidad de probabilidad *a posteriori* de  $\tilde{M}_{\text{abs}}, \Omega_m, b, \alpha, \beta, \gamma$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .



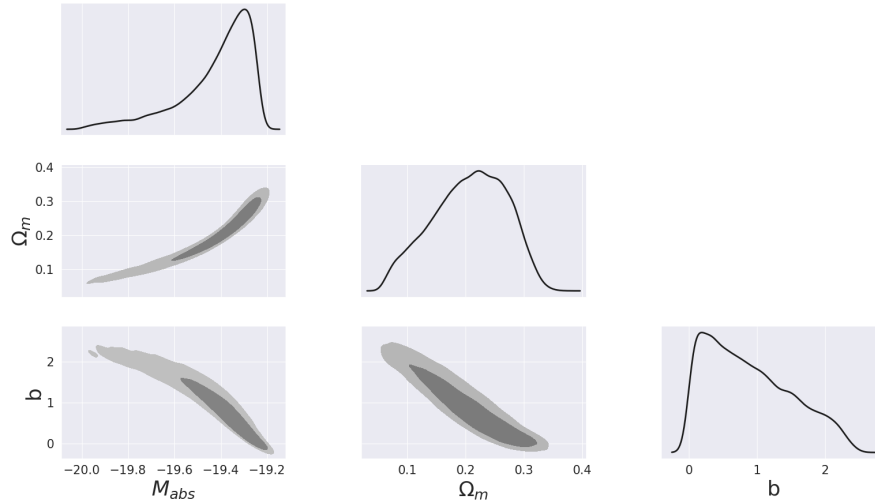


Figura 6.3: Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Supernovas tipo Ia fijando el valor de los parámetros de *nuisance* al valor reportado en [5] asumiendo el modelo  $\Lambda$ CDM, habiendo fijado el valor de  $H_0 = 73,48 \frac{\text{km/seg}}{\text{Mpc}}$ . En la diagonal se muestra la densidad de probabilidad *a posteriori* de  $\tilde{M}_{\text{abs}}$ ,  $\Omega_m$  y  $b$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

### 6.3. Datos de CC + Supernovas tipo Ia

Habiendo verificado que los valores de los parámetros *nuisance* publicados por la colaboración *Pantheon* son robustos, se calcularon las distribuciones *a posteriori* utilizando los datos de Cronómetros Cósmicos y Supernovas tipo Ia, a partir del cálculo de  $\chi^2 = \chi_{\text{CC}}^2 + \chi_{\text{SN}}^2$ . En los siguientes análisis estadísticos no se tuvo en cuenta el dato de la estimación  $H_0^{\text{Riess}}$  para evitar el sesgo que este puede ocasionar a la hora de determinar el intervalo de confianza de  $H_0$ . Los intervalos de confianza y los contornos se observan en la tabla [6.1] y en la figura [6.4] respectivamente.

La densidad de materia  $\Omega_m$  obtenida es consistente a  $1\sigma$  con el intervalo reportado para  $\Lambda$ CDM utilizando los datos de *Pantheon* (2018) [5], y a  $2\sigma$  por el reportado por *Planck* (2018) [18]. En este caso además, el intervalo de confianza para el parámetro de distorsión  $b$  se encuentra más próximo a cero que el obtenido en el análisis de Cronómetros Cósmicos y  $H_0^{\text{Riess}}$ , en acuerdo con  $b = 0$  a  $1\sigma$ . Finalmente, el intervalo de  $H_0$  que se reporta es consistente a  $1\sigma$  con el intervalo publicado por Riess et al. (2018) [3] y a  $2\sigma$  con el reportado por *Planck* (2018) [18]. En este caso el chi cuadrado reducido  $\tilde{\chi}^2$  es muy cercano a 1, mejorando sustancialmente respecto al obtenido para el caso de  $CC + H_0^{\text{Riess}}$ . En la figura [6.4] se observa una correlación positiva entre  $H_0$  y  $b$ , y entre  $H_0$  y  $\tilde{M}_{\text{abs}}$ . Por otro lado, existe una correlación negativa entre  $\Omega_m$  y  $H_0$ , y entre  $\Omega_m$  y  $b$ .

Se compararon los resultados obtenidos en esta sección con los resultados de Cronómetros Cósmicos y SnIa reportados en [7]. En la tabla [6.1] se muestran los intervalos de confianza del trabajo citado. Se observa que existe un acuerdo entre los intervalos a  $1\sigma$  para los parámetros  $\Omega_m$ ,  $b$  y  $H_0$ . En dicho trabajo, la magnitud absoluta  $\tilde{M}_{\text{abs}}$  se toma

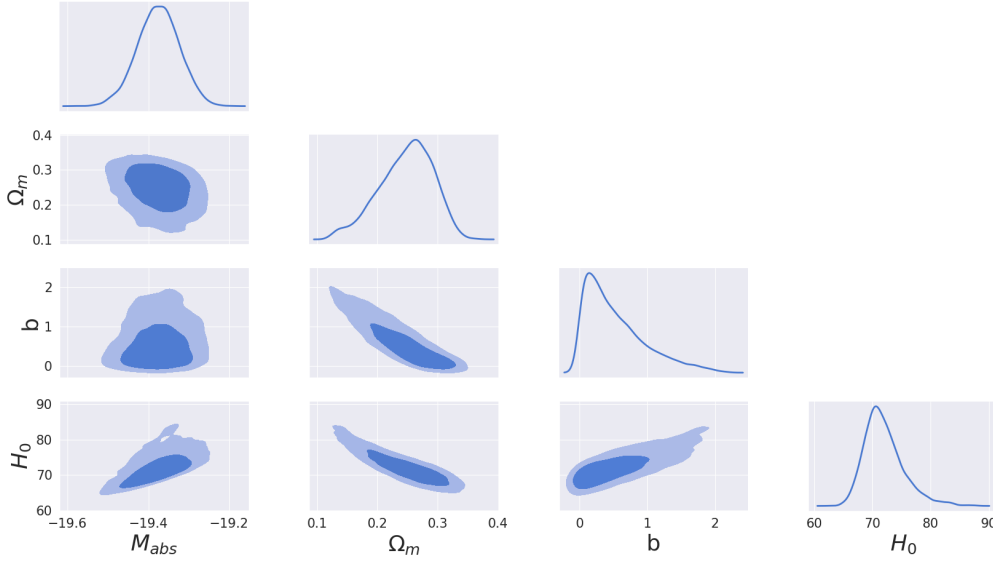


Figura 6.4: Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósmicos y Supernovas tipo Ia. En la diagonal se muestra la probabilidad *a posteriori* de  $\tilde{M}_{\text{abs}}$ ,  $\Omega_m$ ,  $b$  y  $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

como un parámetro *nuisance* pero no se reporta su valor.

Cabe destacar que el cálculo de la probabilidad (*likelihood*) en dicho trabajo se realiza siguiendo [72], donde se asume un universo espacialmente plano para transformar los datos de luminosidades de Supernovas descriptas en las secciones anteriores a un conjunto de seis mediciones de la inversa del parámetro de Hubble adimensional  $E^{-1}(z) = \left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^{-1}$  independientes del modelo. De esta forma, la *likelihood* se escribe como

$$\mathcal{L}_{SN} \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} A^T C_{SN}^{-1} A \right],$$

donde  $A = E_{\text{obs},i}^{-1} - E_{\text{th}}^{-1}(z_i)$  cuantifica la diferencia los valores observados y medidos de  $E^{-1}(z)$  y  $C_{SN}$  es la matriz de covarianza resultante a partir del trabajo citado.

## 6.4. Datos de CC + SnIa + BAO

Finalmente, se realizó un análisis utilizando conjuntamente los datos de Cronómetros Cósmicos, Supernovas tipo Ia y BAO para el cálculo de las distribuciones de probabilidad *a posteriori*  $\chi^2 = \chi_{CC}^2 + \chi_{SN}^2 + \chi_{BAO}^2$ . Se observa que la inclusión de los datos de BAO genera que las varianzas resultantes para cada parámetro sean más pequeñas que las obtenidas en los análisis anteriores. Existe una consistencia a  $1\sigma$  entre el intervalo de confianza de  $\Omega_m$  obtenido y el reportado para  $\Lambda$ CDM con *Pantheon* (2018) [5], y a  $2\sigma$  con *Planck* (2018). El intervalo de confianza obtenido para el parámetro de distorsión  $b$  es más estrecho que el obtenido en el análisis de  $CC + H_0^{\text{Riess}}$  y consistente con  $b = 0$  a  $1\sigma$ . Finalmente, el intervalo de  $H_0$  que se reporta se encuentra en un punto medio entre los intervalos dados por *Riess et al.* y *Planck* (2018) [3, 18], en acuerdo a  $2\sigma$  con ambos. Nuevamente, el valor

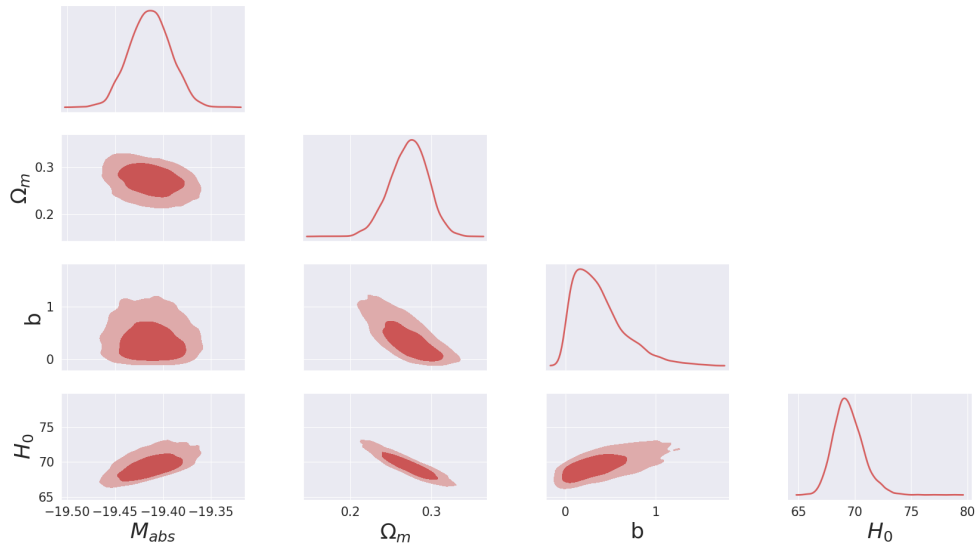


Figura 6.5: Resultados del análisis estadístico del modelo de Hu-Sawicki con datos de Cronómetros Cósmicos, Supernovas tipo Ia y Oscilaciones Acústicas de Bariones. En la diagonal se muestra la probabilidad *a posteriori* de  $M_{abs}$ ,  $\Omega_m$ ,  $b$  y  $H_0$ . Fuera de la diagonal los contornos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

del  $\tilde{\chi}^2$  es muy cercano a 1. En la figura [6.5](#) se observan las mismas correlaciones descritas en los resultados de Cronómetros Cósmicos y Supernovas tipo Ia.



Este trabajo estuvo enfocado en dos modelos particulares de teorías alternativas  $f(R)$ : El modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$  y el modelo de Starobinsky con  $n = 1$ . Para poder obtener conclusiones sobre las consecuencias teóricas del modelo, se integraron las ecuaciones de Friedmann modificadas utilizando un innovador cambio de variables que resultó más robusto que el originalmente planteado en [37]. Para ambos modelos, se realizó un estudio exhaustivo con el fin de encontrar los parámetros óptimos del integrador numérico. En la región del espacio de parámetros más inestable para la integración numérica, se utilizó la expansión en serie del parámetro de Hubble propuesta en [35]. A partir del análisis del error que se comete al utilizar la expansión en serie, se decidió que el valor crítico del parámetro  $b$  hasta el cual se utiliza dicha aproximación sea  $b_{\text{crit}} = 0,2$ .

Luego, se realizó un análisis estadístico para poder estudiar las restricciones a los parámetros libres del modelo  $f(R)$  de Hu-Sawicki con  $n = 1$ . Se utilizaron los datos observacionales más recientes de Supernovas tipo Ia, Cronómetros Cósmicos y Oscilaciones Acústicas de Bariones. Debido a que el tiempo de cómputo se volvió demasiado grande, no fue posible realizar un análisis similar para el modelo de Starobinsky con  $n = 1$ , que se realizará en el futuro.

Se obtuvieron los contornos de confianza y los intervalos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros libres para distintos conjuntos de datos observacionales. En todos los casos se obtuvo una densidad de probabilidad asimétrica para el parámetro  $b$ , mientras que los intervalos de confianza se encuentran en acuerdo con el valor de  $b = 0$  a  $1\sigma$ , excepto en el análisis de los datos de Cronómetros Cósmicos junto con el dato del parámetro de Hubble de Riess et al. (2018) [3] ( $CC + H_0^{\text{Riess}}$ ). Igualmente, el chi cuadrado reducido  $\tilde{\chi}^2$  de ese estudio en particular no resultó bueno.

Se realizó un análisis preliminar para los datos de SnIa, en el cual se mostró que para los modelos alternativos estudiados resulta razonable utilizar los parámetros *nuisance* reportados en [5], que habían sido estimados originalmente asumiendo el Modelo Cosmológico Estándar.

Los resultados de  $CC + H_0^{\text{Riess}}$  pudieron ser comparados a su vez con los resultados reportados en [6], en donde se utilizaron los mismos datos que en esta tesis. Si bien se encontró un acuerdo a  $1\sigma$  para los parámetros  $\Omega_m$  y  $H_0$ , solo se observó un acuerdo a  $2\sigma$  en el parámetro  $b$ , lo que derivó en el descubrimiento de una falla en el análisis del trabajo de los autores citados. De manera análoga se compararon los resultados obtenidos al utilizar en conjunción los datos de Cronómetros Cósmicos y SnIa con los reportados en [38], obteniendo un acuerdo a  $1\sigma$  en todos los parámetros.

Los intervalos de confianza más estrictos que se encontraron corresponden al análisis de  $CC + \text{SnIa} + \text{BAO}$ . Es decir, incluir los datos de BAO en el análisis produce límites más estrictos para los parámetros libres del modelo. Esto se debe a la gran precisión de los datos de BAO que ya había sido descrito en un análisis previo realizado para la teoría MOG [71].

En un trabajo futuro se enriquecerá el análisis con datos de cuásares de luminosidad intermedia dentro del rango de corrimiento al rojo  $0,46 < z < 2,76$  [73], además de realizar un análisis del tipo  $AIC$  o  $BIC$  para determinar cuál es el modelo con mayor preferencia para los datos.

Los resultados obtenidos para  $\Omega_m$  y  $H_0$  en los análisis estadísticos para el modelo Hu Sawicki con  $n = 1$  se encuentran en acuerdo con los publicados en distintos artículos que fueron citados a lo largo del análisis de resultados.

En cuanto a la “tensión  $H_0$ ”, los resultados de este trabajo mostraron que esta se puede aliviar si se asume el modelo  $f(R)$  de Hu-Sawicki con  $n = 1$ , pero a costa de encontrar intervalos de confianza menos estrictos para la constante de Hubble que los obtenidos en mediciones directas y otras indirectas como con CMB, entre otras. Por el contrario, en el trabajo de Wang (2020) [74] se concluyó que el modelo  $f(R)$  de Hu-Sawicki no puede aliviar la tensión  $H_0$ . En este estudio además de utilizar los datos de CC, SnIa y BAO analizados en esta tesis se utilizan datos de *redshift space distortion* y CMB. La inclusión de este último dato puede explicar que se obtenga un intervalo muy pequeño para  $H_0$  en acuerdo a  $1\sigma$  con los resultados de *Planck* (2018). Por otro lado, en Odintsov et al. (2020) [75] se analizaron otros modelos de  $f(R)$  con datos de SnIa, Cronómetros Cósmicos, BAO y CMB. Los resultados publicados son consistentes con los obtenidos en esta tesis para  $CC+\text{SnIa}+\text{BAO}$  a  $1\sigma$ . En dicho artículo se analizan distintos grupos de datos y las conclusiones con respecto a la tensión  $H_0$  dependen de que datos se consideren en el análisis. A su vez, en D’agostino (2020) [7] se comparan las predicciones teóricas del modelo de Hu-Sawicki con  $n = 1$  con datos de H0LiCOW, CC y Supernovas tipo Ia reportando un valor de  $H_0$  consistente con las mediciones directas de supernovas.

---

Ecuaciones dinámicas de las nuevas variables

---

En esta sección se muestra el proceso para obtener las ecuaciones dinámicas de las variables  $(x, y, v, \Omega)$  que se describen en el capítulo 3. Como se había establecido, las nuevas variables se escriben en función de las originales como

$$x = \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R}$$

$$y = \frac{c^2 f}{6H^2 f_R}$$

$$v = \frac{c^2 R}{6H^2}$$

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 f_R},$$

mientras que el parámetro  $\Gamma$  se define como

$$\Gamma = \frac{f_R}{Rf_{RR}}.$$

**Dinámica de  $x$ :** Si se utiliza la regla de la cadena

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dt}{dz} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} \right) \right].$$

Al desarrollar esta expresión se tiene que

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dt}{dz} \left[ \frac{\left( \ddot{R}f_{RR} + \dot{R}^2 f_{RRR} \right) Hf_R - \dot{R}f_{RR} \left( \dot{H}f_R + Hf_{RR}\dot{R} \right)}{H^2 f_R^2} \right].$$

Utilizando la ecuación de Raychandhuri [2.13](#) en el primer término se llega a

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dt}{dz} \left[ \frac{\left[ f_R \left( -3H^2 - 2\dot{H} \right) - 2H\dot{R}f_{RR} - c^2 \frac{f-Rf_R}{2} \right] Hf_R - \dot{R}f_{RR} \left( \dot{H}f_R + Hf_{RR}\dot{R} \right)}{H^2 f_R^2} \right].$$

Reorganizando la expresión y reemplazando los términos  $\frac{dt}{dz}$  y  $\dot{H}$  con las expresiones [2.5](#) y [3.2](#) respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{-1}{z+1} \left\{ \frac{\left[ (f_R H^2) (-3 - 2(v-2)) - 2H\dot{R}f_{RR} - \frac{c^2}{2} (f - Rf_R) \right] Hf_R}{H^3 f_R^2} \right\} \\ &+ \left( \frac{-1}{z+1} \right) \left\{ \frac{\dot{R}f_{RR} \left[ H^2 (v-2) + Hf_{RR}\dot{R} \right]}{H^3 f_R^2} \right\} \\ &= \frac{-1}{z+1} \left[ -3 - 2(v-2) - \frac{2\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} - \frac{c^2 f}{2H^2 f_R} + \frac{c^2 R}{2H^2} - \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} (v-2) - \left( \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} \right)^2 \right] \\ &= \frac{-1}{z+1} [-3 - (v-2) - 2x - 3y + 3v - x(v-2) - x^2] \\ &= \frac{1}{z+1} [-1 - v + 3y + xv + x^2]. \end{aligned}$$

Finalmente, se utilizó la ecuación constitutiva [3.1](#) para obtener la expresión definitiva

$$\boxed{\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z+1} [-\Omega - 2v + x + 4y + xv + x^2]}. \quad (\text{A.1})$$

**Dinámica de  $y$ :**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{dt}{dz} \dot{y} \\ &= \frac{dt}{dz} c^2 \left[ \frac{f_R^2 \dot{R} 6H^2 - 12f f_R H \dot{H} - 6f f_{RR} \dot{R} H^2}{36H^4 f_R^2} \right]. \end{aligned}$$

Distribuyendo el denominador y reemplazando utilizando la expresión [2.5](#) se tiene que

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-c^2}{(1+z)} \left[ \frac{\dot{R}}{6H^3} - \frac{f\dot{H}}{3H^4 f_R} - \frac{f f_{RR} \dot{R}}{6H^3 f_R^2} \right].$$

Nuevamente se utiliza la ecuación [3.2](#) y se obtiene la expresión final



$$\frac{dy}{dz} = \frac{-1}{(1+z)} \left[ vx\Gamma - \frac{2y}{H^2} H^2 (2-v) - xy \right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dz} = \frac{-1}{(1+z)} [vx\Gamma - xy + 4y - 2yv]} \quad (\text{A.2})$$

**Dinámica de  $v$ :** Primero se utiliza la regla de la cadena y se reemplaza la derivada  $\frac{dt}{dz}$  por la expresión [2.5](#)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \frac{dt}{dz} \dot{v} \\ &= \frac{dt}{dz} c^2 \left[ \frac{\dot{R}6H^2 - R12H\dot{H}}{36H^4} \right] \\ &= \frac{-c^2}{(z+1)} \left[ \frac{\dot{R}H^2 - 2RH\dot{H}}{6H^5} \right] \\ &= \frac{-c^2}{(z+1)} \left[ \frac{\dot{R}}{6H^3} - \frac{R\dot{H}}{3H^4} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión [3.2](#) y la definición para la variable  $v$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \frac{-v}{(z+1)} \left[ \frac{\dot{R}}{HR} + 2(2-v) \right] \\ &= \frac{-v}{(z+1)} [x\Gamma + 2(2-v)], \end{aligned}$$

donde en el último paso se utilizaron las definiciones de  $\Gamma$  y  $x$ . De esta forma se obtiene la expresión final

$$\boxed{\frac{dv}{dz} = \frac{-v}{(z+1)} (x\Gamma + 4 - 2v)} \quad (\text{A.3})$$

**Dinámica de  $\Omega$ :**

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dz} &= \frac{dt}{dz} \dot{\Omega} \\ &= \frac{dt}{dz} \frac{8\pi G\rho_m 3H^2 f_R - 8\pi G6\rho_m H\dot{H} f_R - 38\pi G\rho_m H^2 f_{RR}\dot{R}}{9H^4 f_R^2} \\ &= \frac{1}{(z+1)} \frac{8\pi G\rho_m}{2H^2 f_R} \frac{1}{H^2 f_R} \left( 3H^2 f_R + 2\dot{H} f_R + H\dot{R} f_{RR} \right), \end{aligned}$$

donde en el último paso se reemplazo la derivada  $\frac{dt}{dz}$  por la expresión [2.5](#). Utilizando la definicion de  $\Omega$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{dz} &= \frac{\Omega}{(z+1)} \frac{1}{H^2 f_R} \left( 3H^2 f_R + 2\dot{H} f_R + H\dot{R} f_{RR} \right) \\
 &= \frac{\Omega}{(z+1)} \left( 3 + \frac{2\dot{H}}{H^2} + \frac{\dot{R} f_{RR}}{H f_R} \right) \\
 &= \frac{\Omega}{(z+1)} (3 + 2(v-2) + x),
 \end{aligned}$$

donde en este último paso se usó la expresión [3.2](#) y la definición de la variable  $x$ . De esta forma, llegamos a la expresión final para  $\frac{d\Omega}{dz}$ .

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\Omega}{(z+1)} (-1 + 2v + x)} \tag{A.4}$$

- [1] Eleonora Di Valentino. *arXiv e-prints*, page arXiv:2011.00246, October 2020.
- [2] Daniel J. Eisenstein et al. *Physics Today*, 61(4):44–50, April 2008.
- [3] Adam G. Riess et al. *The Astrophysical Journal*, 855(2):136, mar 2018.
- [4] John K. Kruschke. Chapter 12 - bayesian approaches to testing a point (“null”) hypothesis. In John K. Kruschke, editor, *Doing Bayesian Data Analysis (Second Edition)*, pages 335 – 358. Academic Press, Boston, second edition edition, 2015.
- [5] D. M. et al. Scolnic. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, 2018.
- [6] Rafael C. Nunes et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(01):005–005, jan 2017.
- [7] Rocco D’Agostino et al. *Physical Review D*, 101(10), May 2020.
- [8] Dyson et al. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, jan 1920.
- [9] M. Wielgus et al. . *Astrophys. J.*, 901(1):67, 2020.
- [10] B.P. Abbott et al. *Physical Review Letters*, 116(24), June 2016.
- [11] Adam G. Riess et al. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, September 1998.
- [12] N. A. Bahcall. *Science*, 284(5419):1481–1488, May 1999.
- [13] J.P. et al. Ostriker. *arXiv e-prints*, pages astro-ph/9505066, May 1995.
- [14] Steven Weinberg. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, January 1989.
- [15] Raphael Bousso. *General Relativity and Gravitation*, 40(2-3):607–637, December 2007.
- [16] Sean M. Carroll. *Living Reviews in Relativity*, 4(1), February 2001.

- [17] Varun Sahni et al. *International Journal of Modern Physics D*, 09(04):373–443, August 2000.
- [18] Planck Collaboration. *A&A*, 641:A6, 2020.
- [19] S. H. Suyu et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468(3):2590–2604, February 2017.
- [20] Austin Joyce et al. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 66(1):95–122, October 2016.
- [21] Tsujikawa et al. *Classical and Quantum Gravity*, 30(21):214003, November 2013.
- [22] T. Clifton et al. . *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012.
- [23] W. Hu et al. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 76(6):1–13, 2007.
- [24] A. A. Starobinsky. *Physics Letters B*, 91(1):99–102, 1980.
- [25] Thomas P. Sotiriou et al. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451–497, March 2010.
- [26] Thomas Faulkner et al. *Physical Review D*, 76(6), September 2007.
- [27] Salvatore Capozziello et al. *Physical Review D*, 77(10), May 2008.
- [28] Jun-Qi Guo. *International Journal of Modern Physics D*, 23(04):1450036, March 2014.
- [29] Takeshi Chiba, Tristan L. Smith, and Adrienne L. Erickcek. *Physical Review D*, 75(12), June 2007.
- [30] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. *Nature*, 425(6956):374–376, September 2003.
- [31] S. Schlamminger et al. *Physical Review Letters*, 100(4), January 2008.
- [32] T A Wagner et al. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18):184002, August 2012.
- [33] J P Blaser. *Classical and Quantum Gravity*, 18(13):2393–2395, June 2001.
- [34] S. Baekler et al. *Physical Review Letters*, 83(18):3585–3588, November 1999.
- [35] Spyros Basilakos, Savvas Nesseris, and Leandros Perivolaropoulos. *Physical Review D*, 87(12), June 2013.
- [36] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. *Living Reviews in Relativity*, 13(1), June 2010.
- [37] Álvaro De La Cruz-Dombriz et al. *Physical Review D*, 93(8):1–12, 2016.
- [38] Rocco D’Agostino et al. *Physical Review D*, 100(4), August 2019.
- [39] F. Hoyle et al. *The Astrophysical Journal*, 132:565, November 1960.

- [40] S. et al. Perlmutter. *Journal of Physics A-mathematical and Theoretical*, 40, 12 1998.
- [41] D. Scolnic et al. *The Astrophysical Journal*, 822(2):L35, may 2016.
- [42] J. Guy et al. *Astronomy & Astrophysics*, 523:A7, November 2010.
- [43] M. et al. Betoule. *Astron. Astrophys.*, 568:A22, 2014.
- [44] Kessler et al. *PASP*, 121(883):1028, September 2009.
- [45] N. et al. Chotard. *A&A*, 529:L4, May 2011.
- [46] R. D. Tripp. *Astronomy and Astrophysics*, 331:815–820, 1998.
- [47] Ruth Lazkoz et al. *The European Physical Journal C*, 78(3), March 2018.
- [48] Jamali et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(01):048–048, January 2018.
- [49] Amendola et al. *International Journal of Modern Physics D*, 16(10):1555–1561, October 2007.
- [50] Amendola et al. *Physical Review D*, 75(8), April 2007.
- [51] Eisenstein et al. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605–614, April 1998.
- [52] Beutler et al. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 416:3017–3032, 2011.
- [53] Ashley J. et al. Ross. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1):835–847, Mar 2015.
- [54] T.M.C. et al. Abbott. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 483(4):4866–4883, 2019.
- [55] Shadab et al. Alam. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 470(3):2617–2652, 2017.
- [56] Eyal A. et al. Kazin. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 441(4):3524–3542, 2014.
- [57] Metin et al. Ata. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 473(4):4773–4794, 2018.
- [58] Bautista et al. *Astron. Astrophys.*, 603:A12, 2017.
- [59] Hélión et al. du Mas des Bourboux. *Astron. Astrophys.*, 608:A130, 2017.
- [60] Raul Jimenez and Abraham Loeb. *The Astrophysical Journal*, 573(1):37–42, 2002.
- [61] T. Treu et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 326(1):237–254, 2001.
- [62] Simon et al. *Phys. Rev. D*, 71:123001, 2005.
- [63] Stern et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(02):008–008, February 2010.

- 
- [64] M Moresco et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(08):006–006, aug 2012.
- [65] Zhang et al. *Res. Astron. Astrophys.*, 14(10):1221–1233, 2014.
- [66] Michele Moresco. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 450(1):L16–L20, 2015.
- [67] Moresco et al. *JCAP*, 05:014, 2016.
- [68] Chuang et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(1):226–236, 10 2012.
- [69] Philip Bevington et al. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. 1969.
- [70] Jonathan Goodman et al. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1):65–80, January 2010.
- [71] C. Negrelli et al. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(07):015–015, July 2020.
- [72] Adam G. Riess et al. *The Astrophysical Journal*, 853(2):126, January 2018.
- [73] Cao et al. *Astronomy & Astrophysics*, 606:A15, September 2017.
- [74] Deng Wang. *arXiv e-prints*, page arXiv:2008.03966, 8 2020.
- [75] S. Odintsov et al. *arXiv e-prints*, page arXiv:2011.03957.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual  
(by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2020