Biblioteca Digital F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR FACULTAD DE CIEN<u>CIAS EXACTAS Y NATURALES UBA</u>

Tesis de Grado

Las órbitas periódicas cortas en los mapas cuánticos abiertos de manera continua

Prado, Carlos Alberto

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Prado, Carlos Alberto. (2017). Las órbitas periódicas cortas en los mapas cuánticos abiertos de manera continua. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000065_Prado

Cita tipo Chicago:

Prado, Carlos Alberto. "Las órbitas periódicas cortas en los mapas cuánticos abiertos de manera continua". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000065_Prado

EXACTAS Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Contacto: bibliotecadigital.exactas.uba.ar Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Las órbitas periódicas cortas en los mapas cuánticos abiertos de manera continua

Prado Carlos Alberto

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires

- Diciembre de 2017 -



TEMA: Física Teórica

ALUMNO: Prado Carlos Alberto

LU Nº: 292/09

LUGAR DE TRABAJO: Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA)

DIRECTOR DEL TRABAJO: Carlo Gabriel Gustavo

FECHA DE INICIACIÓN: Febrero de 2017

FECHA DE FINALIZACIÓN: Diciembre de 2017

FECHA DEL EXAMEN: 15 de Diciembre de 2017

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

Se aplicó la teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas al mapa del panadero triádico cuántico abierto de manera continua. En este sistema las trayectorias son parcialmente reflejadas de acuerdo a distintos tipos de funciones de reflectividad continuas, definidas en un espacio de fases bidimensional. Este tipo de reflectividades son relevantes en muchas situaciones, como por ejemplo en las microcavidades ópticas y otros sistemas con condiciones de contorno complicadas. Las órbitas periódicas más cortas pertenecientes al repulsor clásico del mapa abierto, que corresponde a un conjunto de Cantor (reflectividad nula en una región del espacio de fases), son suficientes para reproducir un conjunto de resonancias de vida larga de los mapas cuánticos abiertos de manera continua. Esto se da en un régimen perturbativo en la reflectividad (con respecto al caso completamente abierto). En particular, para una función de reflectividad de tipo Fermi-Dirac, el número de órbitas periódicas cortas necesarias se ve reducido significativamente, como en el caso del sistema completamente abierto. Esto sucede a pesar de que las propiedades espectrales se vean fuertemente modificadas en comparación con el caso de reflectividad constante. [1]

Índice

1	Intr	ntroducción					
	1.1	Motiv	aciones	9			
	1.2	Conte	nido de esta tesis	13			
2	\mathbf{Sist}	bistemas dinámicos caóticos y atractores extraños					
	2.1	Sistem	nas dinámicos	15			
		2.1.1	Mapas de Poincaré	16			
	2.2	2.2 Sistemas caóticos					
		2.2.1	Alta sensibilidad a las condiciones iniciales	18			
	2.3	3 Fractales					
		2.3.1	Curva de Koch	19			
		2.3.2	Conjunto de Cantor	21			
	2.4	2.4 Atractores extraños					
		2.4.1	Mapa del panadero	22			
		2.4.2	Sistemas con disipación	24			
	2.5	 2.5 Dinámica simbólica					
	2.6						
		2.6.1	Dimensión fractal	27			
		2.6.2	Box Counting Dimension	28			
		2.6.3	Dimensión multifractal: Espectro de dimensiones de Renyi	29			

Índice

3	Mapa del panadero clásico							
	3.1	Mapa del panadero triádico (tribaker)						
		3.1.1	Órbitas periódicas y simetrías del tribaker	35				
		3.1.2	Sistemas parcialmente abiertos	38				
	3.2 Dimensión multifractal del mapa del panadero							
	3.3	3.3 Repulsores clásicos del tribaker						
		3.3.1	Repeller parcial con puntos al azar	50				
4	Mapa de baker cuántico parcialmente abierto							
4.1 Cuantización del mapa de baker				57				
		4.1.1	Operadores del mapa de baker	59				
4.2 Ánalisis del espectro del tribaker				61				
		4.2.1	Distribución de autovalores	61				
		4.2.2	Comportamiento en términos de la ley de Weyl fractal	65				
		4.2.3	Dimensión local	68				
5	Teoría de órbitas periódicas cortas aplicada a los mapas con aper-							
	tura	turas continuas						
	5.1 Funciones de cicatriz y la teoría semiclásica de órbitas periódicas con5.2 Aplicación de la teoría de órbitas periódicas cortas a los mapas abier							
		tos de	manera continua	78				
Co	Conclusiones							
Aj	Apéndice: Cálculo de la dimensión multifractal							
Ag	Agradecimientos							
Bi	Bibliografía							

8

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivaciones

El estudio de los sistemas dinámicos es de gran importancia en diversas áreas de la física. La *dinámica* es el estudio de la evolución en el tiempo de un sistema físico. El estudio de la dinámica comenzó formalmente a mediados del siglo XVII, cuando Sir Isaan Newton (1642 - 1726) inventa el cálculo diferencial, las leyes de movimiento y la teoría de la gravitación universal. En particular, Newton resolvió el problema de los dos cuerpos. Durante mucho tiempo se ha intentado resolver el problema de los tres cuerpos, el cual resulta ser mucho más complicado que el de dos cuerpos.

Jules Henri Poincaré (1854 - 1912) introdujo un nuevo punto de vista en donde se hacía preguntas cualitativas, y no cuantitativas. En vez de preguntarse por las posiciones exactas de los cuerpos para todo tiempo, se preguntó por ejemplo si el sistema solar es siempre estable, o si eventualmente algunos planetas se alejarían al infinito. Para esto Poincaré desarrolló un poderoso método geométrico, en donde se reduce la dimensionalidad del problema. Los trabajos de Poincaré hicieron surgir la posibilidad del *caos*, donde un sistema determinista presenta un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales. Esto implica que la predicción del sistema a tiempos largos sea prácticamente imposible.

A partir de un sistema dinámico de dimensión M puede obtenerse un mapa (en el cual el tiempo es discreto) de dimensión M - 1, mediante la intersección de las trayectorias sobre una superficie. Un ejemplo que será de interés en el presente trabajo es el del estudio del repulsor caótico (conjunto de puntos en el espacio de fases que nunca escapan en su evolución hacia adelante y hacia atrás en el tiempo) que aparece en el mapa del borde de una microcavidad óptica [2–6]. El mapa del borde corresponde al espacio de fases compuesto por el momento tangencial y la longitud de arco de la cavidad.

Las microcavidades ópticas, además del interés en el estudio de los fundamentos físicos de la luz y aplicaciones prácticas en fotónica, han atraído mucha atención en el campo del caos cuántico. Las aperturas o pérdidas parciales debidas a las reflexiones de los rayos de luz sobre las paredes de la cavidad han motivado estudios teóricos sobre sistemas caóticos cuánticos parcialmente abiertos.

Las microcavidades ópticas se utilizan en diversas aplicaciones como filtros dinámicos en comunicaciones ópticas, microláseres con emisión unidireccional, microláseres de baja coherencia, generación rápida de señales aleatorias, y en estudios de electrodinámica cuántica. Nos concentraremos en el caso de microcavidades ópticas bidimensionales usadas como láseres. Este tipo de cavidades permite la investigación de sistemas con pérdidas parciales. En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de una microcavidad óptica.



Figura 1.1: Imagen de una microcavidad óptica, obtenida con un microscopio de barrido electrónico. De Shinohara et. al., 2010.

La forma que tenga la microcavidad es de gran importancia. Dependiendo de la forma, el sistema puede mostrar una dinámica que puede ir de integrable (no caótica) a totalmente caótica. En una microcavidad los rayos de luz son totalmente reflejados en la superficie si el ángulo de incidencia χ (medido respecto de la normal) es mayor que el ángulo crítico de reflexión total interna $\chi_c = \arcsin(1/n)$, donde nes el índice de refracción de la cavidad. Si el ángulo de incidencia resulta menor que el ángulo crítico, $\chi < \chi_c$, entonces el rayo de luz se refractará de acuerdo a las leyes de Snell y Fresnel, escapando de la cavidad.

Un ejemplo de una microcavidad es el *microestadio* dieléctrico. La sección transversal está formada por dos semicírculos de radio R > 0 y dos líneas rectas de longitud l > 0. Para el caso en que l = 2R, el sistema es el más caótico posible. Otro ejemplo es una cavidad de forma elíptica, en cuyo caso el sistema resulta ser integrable, es decir que no presenta una dinámica caótica. En la Figura 1.2 se muestran estos dos tipos de cavidades.



Figura 1.2: (a) Cavidad con forma de estadio (caótica). (b) Cavidad elíptica (integrable). En (c) y (d) se muestran imágenes de cavidades fabricadas, donde ambas tienen un área $S = 8748 \mu m^2$. De Sunada et. al., 2016 [4].

Para polarización transverso magnética (TM), el coeficiente de reflexión se puede escribir como [4]:

$$\mathcal{R}_{TM} = \left(\frac{\sin(\chi - \chi_t)}{\sin(\chi + \chi_t)}\right)^2,\tag{1.1}$$

donde χ es el ángulo de incidencia medido respecto de la normal, χ_t es el ángulo de transmisión, y ambos se relacionan mediante la ley de Snell $nsin\chi = sin\chi_t$. Este es uno de los coeficientes de Fresnel. En este sistema, el índice de refracción n del medio desde donde incide el haz es mayor que el medio exterior (vacío por ejemplo, donde n = 1). Por lo tanto habrá un ángulo de incidencia crítico tal que $sin\chi_c = 1/n$, para el cual no hay onda transmitida, y $\chi_t = \pi/2$. En ese caso, el coeficiente de reflexión es máximo, y vale $\mathcal{R} = 1$.

1.2 Contenido de esta tesis

En el capítulo 2 se resumen los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos en general, y caóticos en particular. Se definen a partir de ellos los mapas de Poincaré. Se presentan algunas de las propiedades de los sistemas caóticos como la sensibilidad a las condiciones iniciales y los atractores extraños. Para caracterizar a los sistemas caóticos que presenten atractores extraños se define la dimensión fractal y multifractal. Se discuten las definiciones y conceptos básicos, y se presentan algunos ejemplos.

Durante el resto de la tesis se trabajará con un sistema caótico en particular que ha sido muy estudiado en las últimas décadas. El *mapa del panadero* es presentado en el capítulo 3, junto con el análisis de sus simetrías, órbitas periódicas, dimensión fractal y sus conjuntos invariantes (repulsores).

El capítulo 4 se ocupa del mapa del panadero cuántico abierto de manera continua. Allí se definen los operadores del sistema, se analiza su espectro para distintos casos y el comportamiento frente a la ley de Weyl fractal en sus distintas variantes.

En el capítulo 5 se aplica la teoría de órbitas periódicas cortas al mapa del panadero cuántico abierto de manera continua. Aquí explicamos el resultado principal de esta tesis. El mismo consiste en que es posible construir el repulsor cuántico continuo con tan solo las órbitas periódicas del repulsor clásico (del sistema completamente abierto).

Por último se presentan las conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos caóticos y atractores extraños

A un sistema dinámico en general se lo puede representar mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen su evolución en el tiempo. En muchos casos el conjunto de ecuaciones tiene solución analítica y se lo puede entender en profundidad. En muchos otros, el sistema no se puede resolver analíticamente, y se recurre a una solución numérica del mismo. Sin embargo, hay casos en donde el sistema es tan complejo que su análisis numérico no siempre ayuda a entender ciertos aspectos de la dinámica.

2.1 Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico se lo puede definir como un conjunto de M ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en donde el tiempo t es una variable continua. El sistema en forma vectorial se escribe como:

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \qquad (2.1)$$

donde \mathbf{x} es un vector de dimensión M y \mathbf{F} es el conjunto de M ecuaciones diferen-

ciales. Dada una condición inicial $\mathbf{x}(0)$ (se toma como referencia el tiempo inicial en el origen, $t_0 = 0$), en principio se puede resolver el sistema de ecuaciones (analítica o numéricamente) para obtener la evolución del sistema en el tiempo $\mathbf{x}(t)$ para t > 0.

2.1.1 Mapas de Poincaré

Una herramienta útil para estudiar sistemas dinámicos son los *mapas*, que se pueden obtener a partir del conjunto de ecuaciones diferenciales. Si en vez de estudiar la solución completa del sistema, se analiza la intersección del flujo a través de una superficie, se obtiene sobre ella una sucesión de puntos para diferentes tiempos (no necesariamente equiespaciados). De esta manera se logra reducir la dimensionalidad del problema, en donde la variable temporal continua pasa a ser una variable discreta. Así, se obtiene un mapa sobre sí mismo. En algunos casos sencillos se puede obtener una expresión analítica de la sucesión, y dicha sucesión es lo que se llama un *mapa de Poincaré* [7,8], o simplemente un mapa.

En la Figura 2.1 se muestra el proceso de construcción de un mapa de Poincaré a partir del flujo correspondiente a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.



Figura 2.1: Proceso de construcción de un mapa de Poincaré a partir del flujo correspondiente a la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales. Las intersecciones en el plano Σ forman una sucesión de puntos \mathbf{x}_n , a la que se denomina un mapa.

El sistema dinámico para el caso en que el tiempo es discreto se puede escribir como una sucesión

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{M}(\mathbf{x}_n), \tag{2.2}$$

donde $n \in \mathbf{N}_0$, \mathbf{x}_n es un vector de dimensión M y \mathcal{M} define el mapa. A partir de una condición inicial \mathbf{x}_0 , se obtiene \mathbf{x}_1 aplicando el mapa \mathcal{M} ; \mathbf{x}_2 se obtiene aplicando \mathcal{M} a \mathbf{x}_1 . De esta forma se genera una órbita \mathbf{x}_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

2.2 Sistemas caóticos

Existen sistemas dinámicos que se denominan *caóticos*. Estos sistemas en general tienen tres propiedades; una definición posible es la siguiente:

El caos es un comportamiento aperiódico en un sistema determinista que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales

- *Aperiódico* significa que existe un movimiento irregular, pero que nunca se repite exactamente.
- *Determinista* significa que el sistema no tiene parámetros aleatorios. El comportamiento irregular se debe a la no linealidad del sistema.
- La *sensibilidad a las condiciones iniciales* significa que trayectorias cercanas se separan entre sí siguiendo una ley exponencial, es decir, el sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo.

2.2.1 Alta sensibilidad a las condiciones iniciales

Una de las propiedades fundamentales que un sistema dinámico debe tener para ser caótico es la de ser altamente sensible a las condiciones iniciales. Esta propiedad consiste en que órbitas muy cercanas entre sí evolucionan de forma tal que su separación sigue una ley exponencial (en promedio). Una forma de cuantificar esto es a través del *exponente de Lyapunov* [7]. A continuación se define el exponente de Lyapunov para un mapa.

Sea \mathbf{x}_0 una condición inicial y \mathbf{x}_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ la órbita correspondiente. Si se considera un desplazamiento infinitesimal desde \mathbf{x}_0 en la dirección del vector tangente \mathbf{y}_0 , la evolución del vector tangente, dada por

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{D}\mathcal{M}(\mathbf{x}_n).\mathbf{y}_n,\tag{2.3}$$

determina la evolución del desplazamiento infinitesimal de la órbita. $\mathbf{D}\mathcal{M}(\mathbf{x})$ es la matriz Jacobiana de la matriz que define el mapa \mathcal{M} . En particular, $\mathbf{y}_n/|\mathbf{y}_n|$ es la dirección del desplazamiento infinitesimal de la órbita \mathbf{x}_n y $|\mathbf{y}_n|/|\mathbf{y}_0|$ es el factor de crecimiento $(|\mathbf{y}_n| > |\mathbf{y}_0|)$ o decrecimiento $(|\mathbf{y}_n| < |\mathbf{y}_0|)$ de dicho desplazamiento. De la ecuación 2.3, se tiene que $\mathbf{y}_n = \mathbf{D}\mathcal{M}^n(\mathbf{x}_0).\mathbf{y}_0$, donde

$$\mathbf{D}\mathcal{M}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}\mathcal{M}(\mathbf{x}_{n-1}).\cdots.\mathbf{D}\mathcal{M}(\mathbf{x}_0).$$

Se define el exponente de Lyapunov para la condición inicial \mathbf{x}_0 y la orientación del desplazamiento infinitesimal dado por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$ como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} ln(|\mathbf{y}_n|/|\mathbf{y}_0|) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} ln|\mathbf{D}\mathcal{M}^n(\mathbf{x}_0).\mathbf{u}_0|.$$
(2.4)

Para un mapa de dimensión M, habrán a lo sumo M exponentes de Lyapunov distintos para un dado \mathbf{x}_0 .

2.3 Fractales

Un *fractal* es una figura o construcción geométrica con una estructura fina a escalas arbitrariamente pequeñas. En general son estructuras auto-similares, es decir que si se magnifica una pequeña porción de un fractal, lo que se observa son partes similares del conjunto completo original.

En muchas ocasiones a las estructuras fractales se las encuentra en la naturaleza. Montañas, nubes, hojas, árboles, ríos, redes de vasos sanguíneos, copos de nieve y muchos otros casos son ejemplos de este comportamiento.

A continuación veremos dos ejemplos de fractales y su construcción: la curva de Koch, y el conjunto de Cantor.

2.3.1 Curva de Koch

La curva de Koch se construye de la siguiente manera. Se empieza con un segmento S_0 , de longitud L_0 . En el próximo paso se divide en tres partes iguales al segmento S_0 , se elimina el intervalo intermedio, y se lo reemplaza por otros dos lados de un triángulo equilátero, obteniendo S_1 . En cada paso subsiguiente se repite el proceso para cada uno de los segmentos, es decir, S_n se obtiene reemplazando el tercio del medio de cada segmento de S_{n-1} por dos lados de un triángulo equilátero. En el límite se obtiene la curva de Koch $K = S_{\infty}$.

En la Figura 2.2 se muestran los primeros pasos para la construcción de la curva de Koch.



Figura 2.2: Primeros pasos para la construcción de la curva de Koch.

Si uno se pregunta cual es la dimensión de la curva de Koch, se encuentra con un problema. Como es una curva, en principio se podría pensar que es unidimensional. Sin embargo, se puede ver que K tiene longitud infinita. Si la longitud de S_0 es L_0 , entonces la longitud de S_1 es $L_1 = \frac{4}{3}L_0$. En general, para el paso n, $L_n = (\frac{4}{3})^n L_0 \to \infty$ para $n \to \infty$. Más aún, la longitud de arco (distancia recorrida a lo largo de una curva) entre cualquier par de puntos en K es infinita. Por lo tanto los puntos de K no pueden determinarse por la longitud de arco desde un punto en particular, porque cada punto está infinitamente alejado de otro. Esto parece indicar que K tiene una dimensión mayor que 1. Sin embargo, al no tener área, tampoco es bidimensional. Por lo tanto se llega a la conclusión de que la dimensión de la curva de Koch debería ser un número entre 1 y 2. Más adelante se calculará explícitamente dicha dimensión cuando definamos la dimensión fractal.

2.3.2 Conjunto de Cantor

Se define el conjunto de Cantor de la siguiente manera. A partir del intervalo $S_0 = [0, 1]$, se elimina el conjunto abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. De esta manera queda el conjunto $S_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Luego se eliminan los conjuntos abiertos correspondientes a los tercios intermedios de los intervalos que quedaron. De esta manera se obtiene el conjunto $S_1 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Continuando con este proceso infinitas veces, se obtiene un conjunto de puntos, llamado *conjunto de Cantor* $C = S_{\infty}$. En la Figura 2.3 se muestra la construcción del conjunto de Cantor. Este conjunto tiene medida de Lebesgue nula.



Figura 2.3: Construcción de los primeros pasos del conjunto de Cantor.

Propiedades fractales del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor C presenta diferentes propiedades típicas de los fractales:

• *C tiene estructura a escalas arbitrariamente pequeñas.* Si se magnifica una porción de *C* repetidamente, se sigue observando un patrón complejo de puntos

separados por distancias de distintos tamaños. Esta estructura es infinita.

- *C es auto-similar*. Contiene copias pequeñas de sí mismo en todas las escalas. Por ejemplo, si se toma el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ y se magnifica por un factor tres, se observa nuevamente *C*. En general, la mitad izquierda del conjunto S_{n+1} se ve igual que todos los S_n aumentado en tres. Tomando el límite, la mitad izquierda de S_{∞} se ve igual que S_{∞} aumentado en tres.
- La dimensión de C no es un entero. Como se demostrará más adelante, la dimensión del conjunto de Cantor es ln(2)/ln(3) ~ 0.63. El hecho de que la dimensión no sea un entero es una generalización que resulta ser una herramienta útil para cuantificar la estructura de los fractales.

2.4 Atractores extraños

Un atractor se denomina *extraño* [8] si la estructura que forma es un fractal. Un mecanismo típico en la formación de este tipo de atractores es el de *estirar y doblar* repetidamente el espacio de fases. El proceso de estiramiento da lugar a la sensibilidad a las condiciones iniciales, y el hecho de doblar hace que el sistema se mantenga acotado en una región.

2.4.1 Mapa del panadero

Un caso particular en donde el atractor resulta ser extraño es el llamado mapa del panadero [7,8]. Se define el mapa del panadero (baker) como una transformación del espacio de fases en el cuadrado unitario con condiciones de contorno periódicas, o sea el toro unitario $(q, p) \in [0, 1) \times [0, 1)$. Dicha transformación está dada por:

$$(q',p') = B(q,p) = \begin{cases} (2q,p/2), & \text{si } 0 \le q < 1/2, \\ (2q-1,(p+1)/2), & \text{si } 1/2 \le q < 1. \end{cases}$$
(2.5)

La acción del mapa se puede visualizar en forma gráfica a partir de dos transformaciones simples. Primero, el cuadrado unitario es estirado horizontalmente y aplastado verticalmente, obteniendo un rectángulo de $2 \times \frac{1}{2}$. Luego, el rectángulo es cortado verticalmente en dos partes iguales, obteniendo dos rectángulos de $1 \times \frac{1}{2}$. Por último los dos rectángulos se apilan, de modo que el primero quede debajo del segundo. En la Figura 2.4 se muestra el proceso descripto.



Figura 2.4: Evolución del mapa de baker. El cuadrado unitario (a) es estirado y aplastado, obteniéndose un rectángulo (b). Finalmente se corta en dos partes iguales y se apila la parte derecha sobre la izquierda, obteniéndose el cuadrado (c).

En la Figura 2.5 se muestran los primeros pasos del mapa de baker.



Figura 2.5: Primeros pasos del mapa de baker.

2.4.2 Sistemas con disipación

El mapa de baker, además de aperturas parciales, puede tener disipación [8, 9]. Una forma de modelar la disipación para el mapa de baker es a través de un parámetro $\epsilon \in [0, 1]$ que en cada paso de la evolución haga que el área en el espacio de fases disminuya. En general, si un mapa o flujo contrae volúmenes en el espacio de fases, se dice que el sistema es disipativo. El mapa de baker con disipación es:

$$B(q,p) = \begin{cases} (2q, \epsilon p/2), & si & 0 \le q < 1/2, \\ (2q-1, (\epsilon p+1)/2), & si & 1/2 \le q < 1, \end{cases}$$
(2.6)

donde $\epsilon \in [0,1].$ En la Figura 2.6 se muestran los primeros pasos del mapa de baker con disipación.



Figura 2.6: Primeros pasos del mapa de baker con disipación. En este caso se usó $\epsilon = 0.8$. Se puede ver que en cada paso de la evolución el área en el espacio de fases se contrae según el valor del parámetro ϵ .

El mapa contrae el espacio de fases en la dirección de p en un factor ϵ , estira el cuadrado unitario en un factor 2 en la dirección de q, lo aplasta a la mitad en la dirección de p, y finalmente apila la mitad derecha encima de la izquierda. Una distribución inicial en el espacio de fases converge asintóticamente a un conjunto fractal, esto es un atractor extraño.

En el caso en que $\epsilon = 1$ el sistema no tiene disipación, y se dice que el mapa de baker *preserva áreas*. En este trabajo se considerarán mapas abiertos proyectivamente, lo que dará lugar a repulsores extraños.

2.5 Dinámica simbólica

La forma de calcular las órbitas periódicas para el mapa de baker es mediante el uso de la dinámica simbólica [10], basada en la teoría de corrimientos de Bernoulli (*Bernoulli Shift*). Una condición inicial x_0 se puede representar en en base 2 como:

$$x_0 = 0.a_0 a_1 a_2 \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{-(i+1)},$$
 (2.7)

donde cada uno de los dígitos a_i puede tomar los valores 0 o 1. Al aplicar el mapa una vez a esta condición inicial, el resultado es mover el punto decimal un lugar a la derecha, y poner el primer dígito a cero.

$$x_1 = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots,$$

 $x_2 = 0.a_2 a_3 a_4 \cdots,$

y así siguiendo. Para el mapa de baker, las coordenadas del espacio de fases se pueden representar como $q = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i 2^{-(i+1)}$ y $p = \sum_{i=-1}^{-\infty} \epsilon_i 2^i$. La acción del mapa de baker *B* (ecuación 2.5) se puede representar de la siguiente forma:

$$(p|q) = \cdots \epsilon_{-1} \cdot \epsilon_0 \epsilon_1 \cdots \xrightarrow{B} (p'|q') = \cdots \epsilon_{-1} \epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdots , \qquad (2.8)$$

donde en cada paso del mapa el punto se corre un lugar hacia la derecha en la representación binaria. En el caso en que el mapa se haga evolucionar hacia atrás en el tiempo, el punto se lo corre un lugar hacia la izquierda.

Se define una órbita periódica de período p como aquella que pasa sucesivamente por p puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_{p-1} . Para cada punto x_j tenemos:

$$x_j = \mathcal{M}^p(x_j)$$
 , $j = \{0, 1, \cdots, p-1\}.$ (2.9)

2.6 Dimensiones fractales de sistemas caóticos abiertos

Las dimensiones fractales son una herramienta muy útil para el estudio de las propiedades de sistemas dinámicos. En esta sección se presenta la definición de dimensión que se usará durante el resto de este trabajo.

2.6.1 Dimensión fractal

La dimensión de objetos geométricos convencionales es conocida. Líneas o curvas suaves son unidimensionales, planos y superficies suaves son bidimensionales, cuerpos sólidos son tridimensionales, etc. En general, la dimensión es la mínima cantidad de coordenadas necesarias para describir los puntos del conjunto.

El concepto de *dimensión fractal* es una extensión de la noción general de dimensión espacial. Si se toma como ejemplo una curva que resulte ser un fractal, como la curva de Koch, la misma tiene longitud infinita entre dos puntos cualesquiera. Esto indica que la dimensión debe ser mayor que uno. Por otro lado, la curva se construye a partir de segmentos infinitamente pequeños, por lo que no tiene área. Entonces su dimensión tampoco puede ser dos. La conclusión es que la dimensión de este fractal es un número no entero. Esta es una propiedad general de los fractales, y la dimensión fractal siempre es menor que la dimensión del espacio que lo contiene.

2.6.2 Box Counting Dimension

Para calcular la dimensión fractal se cubre el conjunto correspondiente con cubos de tamaño ε . Sea S un subconjunto de un espacio de dimensión M, y $N(\varepsilon)$ la cantidad mínima de cubos de tamaño ε necesarios para cubrir S. Se quiere determinar cuál es la dependencia de $N(\varepsilon)$ con ε . Para una curva unidimensional de longitud L, $N(\varepsilon) \propto L/\varepsilon$; para una superficie de área A, $N(\varepsilon) \propto A/\varepsilon^2$. En general se tiene que

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0},\tag{2.10}$$

donde D_0 es la dimensión fractal del conjunto.

Esta ley de potencia se cumple para la mayoría de los conjuntos fractales S, pero en estos casos D_0 no es un entero. Una definición equivalente es

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}.$$
(2.11)

La dimensión fractal para un mapa se define de la siguiente manera:

$$D_0 = -\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(N(\varepsilon_n))}{\ln(\varepsilon_n)},$$
(2.12)

donde ε_n es una cantidad que tiende a cero a medida que n tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0. \tag{2.13}$$

Usando esta definición, la dimensión de objetos no fractales da como resultado la dimensión del espacio correspondiente.

Dimensión de la curva de Koch

La dimensión fractal de la curva de Koch se puede calcular de la siguiente manera. En el paso n de la construcción de esta curva, la longitud de cada segmento es $\varepsilon_n = (1/3)^n$, mientras que la cantidad de segmentos es $N(\varepsilon_n) = 4^n$. La dimensión fractal en este caso es:

$$D_0 = -\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln((\frac{1}{3})^n)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1.26\cdots$$
(2.14)

Dimensión del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor está compuesto por una serie de puntos, por lo que en principio uno estaría tentado a pensar que la dimensión debería ser cero. En realidad, lo que es cero es su medida de Lebesgue. Para hablar de dimensión en este caso es necesario calcular la dimensión fractal definida en esta sección.

Una elección conveniente para ε_n en este caso es $\varepsilon_n = (\frac{1}{3})^n$. La cantidad de segmentos en el paso n es $N(\varepsilon_n) = 2^n$. Entonces se obtiene:

$$D_0 = -\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln((\frac{1}{3})^n)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0.63 \cdots$$
(2.15)

2.6.3 Dimensión multifractal: Espectro de dimensiones de Renyi

En esta sección se extiende el concepto de dimensión fractal a sistemas donde el espacio puede tener distintas medidas de probabilidad, es decir, funciones reales $\mu : S \mapsto \mathbf{R}$, donde $S = supp(\mu)$ (el soporte de la distribución es el subconjunto para el cual la medida μ es positiva) y $\mu(S) := \int_S d\mu = 1$. Este tipo de distribuciones pueden ser muy complejas, y no pueden ser resueltas por la dimensión fractal D_0 definida en la sección anterior, la cual sólo considera si la caja está ocupada o no.

Una forma de cuantificar la fractalidad en sistemas dinámicos clásicos parcialmente abiertos es a través del estudio del espectro de dimensiones de Renyi, o *dimensión multifractal.* Esto es una generalización de la dimensión fractal, o *box counting dimension*.

Se define la dimensión multifractal (o espectro de dimensiones de Renyi) [7] como:

$$D_q = \frac{1}{1 - q} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q}{\ln(1/\varepsilon)},$$
(2.16)

donde μ es una medida de probabilidad en el espacio de fases, y la suma se realiza sobre rectángulos de tamaño ε , usados para particionar el espacio de fases. El parámetro q es un índice continuo, $q \in \mathbf{R}$. Si la curva D_q depende del parámetro qde forma no trivial, decimos que estamos en presencia de un multifractal.

- Para q = 0 la definición (2.16) es consistente con la dimensión fractal D_0 discutida en la sección anterior, definida en la ecuación (2.12).
- Para q = 1 se define a D_1 como $D_1 := \lim_{q \to 1} D_q$. Haciendo uso de la regla de L'Hospital se puede demostrar que

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i \ln(\mu_i)}{\ln(\varepsilon)}.$$
(2.17)

La cantidad D_1 es de particular interés, y resulta ser la dimensión de información o entropía de Shannon. D_1 describe el crecimiento del contenido de la información a medida que la cantidad de rectángulos es incrementada.

 Para q = 2, D₂ se denomina dimensión de correlación, debido a que si μ es una medida natural, los términos en el numerador son proporcionales a la probabilidad de que dos trayectorias terminen en el mismo rectángulo, o sea, a una distancia ε.

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i \mu_i}{\ln(\varepsilon)}.$$
 (2.18)

En general, al aumentar (disminuir) el parámetro q, se le da más (menos) peso a los rectángulos que contengan una mayor medida μ . En particular, en el límite $q \to \infty$ la suma está dominada únicamente por los rectángulos b_j con $\mu_j = max(\{\mu_i\}).$

Otra propiedad es que D_q en general es una función decreciente a medida que aumenta q.

Capítulo 3

Mapa del panadero clásico

El mapa del panadero (*baker*) es un caso paradigmático muy estudiado en los últimos años [7–18]. Debido a su simplicidad, este mapa es de gran utilidad para estudiar las propiedades de sistemas caóticos. La dinámica de este mapa puede describirse en términos de corrimientos de Bernoulli.

3.1 Mapa del panadero triádico (tribaker)

El mapa del panadero triádico (*tribaker*) \mathcal{B} en el toro unitario $(q, p) \in [0, 1) \times [0, 1)$ es definido de la siguiente forma:

$$\mathcal{B}(q,p) = \begin{cases} (3q, p/3), & \text{si } 0 \le q < 1/3, \\ (3q-1, (p+1)/3), & \text{si } 1/3 \le q < 2/3, \\ (3q-2, (p+2)/3), & \text{si } 2/3 \le q < 1. \end{cases}$$
(3.1)

La acción del mapa se puede visualizar de forma gráfica a partir de dos transformaciones simples. Primero, el cuadrado unitario es estirado horizontalmente y aplastado verticalmente, obteniendo un rectángulo de $3 \times \frac{1}{3}$. Luego, este rectángulo es cortado verticalmente en tres partes iguales, obteniendo tres rectángulos de $1 \times \frac{1}{3}$. Por último los rectángulos se apilan, de modo que el primero quede debajo, el segundo en el medio, y el tercero arriba.

En la Figura 3.1 se muestran los primeros pasos de la evolución del tribaker. Los puntos en el espacio de fases se colorean para una mejor visualización de su evolución.



Figura 3.1: Primeros pasos de la evolución del tribaker.

Este mapa presenta la propiedad de ser altamente sensible a las condiciones iniciales. Esto se debe al estiramiento del espacio de fases en la dirección horizontal. El exponente de Lyapunov del tribaker es $\lambda = ln(3)$.

El mapa descripto presenta variedades estables e inestables. Una variedad inestable es aquella que corresponde a la dirección en el espacio de fases en la cual la evolución del sistema hace que trayectorias cercanas se alejen entre sí. En el caso del tribaker, la variedad inestable corresponde a la dirección de la variable q (p = cte), mientras que la variedad estable corresponde a la dirección de la variable p (q = cte). Decimos que el tribaker es un mapa *hiperbólico*.

3.1.1 Órbitas periódicas y simetrías del tribaker

El tribaker puede describirse mediante corrimientos de Bernoulli ternarios [10– 12]. Para el caso del tribaker se usan tres símbolos, 0, 1 y 2, y se representa una condición inicial en base 3 de la siguiente manera:

$$q = 0.\epsilon_0\epsilon_1\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k 3^{-k-1} \qquad ; \qquad p = 0.\epsilon_{-1}\epsilon_{-2}\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_{-k} 3^{-k}, \qquad (3.2)$$

donde los coeficientes $\epsilon_k \in \{0, 1, 2\}$. Así, un punto en el espacio de fases se puede representar como una tira infinita de bits, con un punto separando la coordenada de momento y la de posición,

$$(p,q) = \cdots \epsilon_{-2} \epsilon_{-1} \cdot \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots$$
(3.3)

La acción del mapa viene dada por el corrimiento del punto un lugar hacia la derecha en cada aplicación del mapa. En el caso en que la evolución se haga hacia atrás en el tiempo, el punto se corre hacia la izquierda.

$$(p,q) \xrightarrow{\mathcal{B}} (p',q') = \cdots \epsilon_{-2} \epsilon_{-1} \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots$$
 (3.4)

De esta forma se pueden encontrar todas las órbitas periódicas del mapa. Para esto primero se hacen todas las combinaciones de los tres símbolos $\{0, 1, 2\}$ para un
dado período L_{ν} . En total quedan $3^{L_{\nu}}$ combinaciones. Luego se descartan las órbitas de período menor a L_{ν} . Por ejemplo, si $L_{\nu} = 2$, una combinacion posible es 00, que resulta ser una órbita periódica de período 1, correspondiente a la combinación 0 (lo mismo vale para la combinación 1 y 2). Para etiquetar a las órbitas periódicas de período L_{ν} , se descartan aquellas combinaciones de bits que pertenecen a la misma órbita (*retracings*). Un ejemplo para el caso de período $L_{\nu} = 2$ es la combinacion 01, cuya órbita es la misma que aquella dada por la condición inicial 10. Asi, para $L_{\nu} = 2$, las distintas órbitas periódicas son:

> 01 02 12

Otro ejemplo a tener en cuenta son los puntos fijos del mapa (órbitas de período 1), que corresponden a una tira infinita de ceros, unos o dos. Aplicando el mapa a estas combinaciones, se vuelve a obtener el mismo punto en el espacio de fases.

Una propiedad que caracteriza a los sistemas caóticos es la del crecimiento de la cantidad de órbitas periódicas en función de su período L_{ν} . Para los sistemas caóticos dicho crecimiento es exponencial, e^{S_T} [19]. En el caso del tribaker la cantidad de puntos periódicos crece como $3^{L_{\nu}}$; entonces la cantidad de órbitas periódicas crece como $3^{L_{\nu}}/L_{\nu}$.

El tribaker presenta dos simetrías:

- Simetría de inversión temporal: esta simetría corresponde a invertir la dirección del tiempo, e intercambiar las variables del espacio de fases, $q \leftrightarrows p$.
- Simetría de paridad: esta simetría corresponde a intercambiar $q \to 1 q$ y $p \to 1 p$.

En la Figura 3.2 se muestran las órbitas periódicas de períodos 1 y 2 del tribaker, donde se puede observar la simetría. En la Figura 3.3 se muestran las órbitas periódicas de período 3.



Figura 3.2: Órbitas periódicas de períodos 1 (puntos fijos) y 2 del tribaker. Los cuadrados corresponde a las órbitas de período 1, y los círculos a las de período 2.



Figura 3.3: Órbitas periódicas de período 3 del tribaker.

3.1.2 Sistemas parcialmente abiertos

Un mapa parcialmente abierto se lo puede definir de la siguiente manera. Para el tribaker, se introduce una apertura en el intervalo $1/3 \leq q \leq 2/3$, de modo que si una órbita pasa por esa región del espacio de fases, existe una probabilidad no nula de absorberse, o dicho de otra manera, la órbita en ese caso se pierde. Otra forma de definir un mapa parcialmente abierto es asignando a cada órbita una intensidad, de modo que al pasar por la región absorbente dicha intensidad disminuya. A cada punto del espacio de fases se le asigna una intensidad inicial $I_0 = 1$, y en el paso n + 1 la intensidad será $I_{n+1} = I_n \mathcal{R}(q, p)$, donde $\mathcal{R}(q, p) \in [0, 1]$ es una función de *reflectividad* que depende de las coordenadas del espacio de fases. Si $\mathcal{R}(q, p) = 0$ se dice que el sistema es *abierto*, mientras que si $\mathcal{R}(q, p) = 1$ el sistema es *cerrado*.

En este trabajo se usarán distintos tipos de aperturas parciales, definidas a través del uso de una función de reflectividad $\mathcal{R}(q, p)$ en el espacio de fases. En particular se hará uso de funciones de reflectividad que dependan únicamente de la coordenada $q: \mathcal{R}(q, p) \equiv f(q)$. El tribaker parcialmente abierto ha sido estudiado en numerosos trabajos [10–17] haciendo uso de una función de reflectividad que es una constante $r \in [0, 1]$ en la región $1/3 \leq q \leq 2/3$, es decir, una función discontinua. En este trabajo se usarán dos funciones de reflectividad más genéricas, en el sentido que pretenden ser modelos más realistas para las microcavidades ópticas, en donde la reflectividad es una función continua.

A continuación se definen las funciones de reflectividad que serán estudiadas a lo largo de esta tesis. En todos los casos, $r \in [0, 1]$ es un parámetro que da una medida del grado de reflectividad del sistema.

<u>Reflectividad constante</u>

$$f(q) = \begin{cases} 1, & si & 0 \le q < 1/3, \\ r, & si & 1/3 \le q \le 2/3, \\ 1, & si & 2/3 < q < 1. \end{cases}$$
(3.5)

En la Figura 3.4 se muestra la función utilizada para el caso de una reflectividad constante.



Figura 3.4: Función de reflectividad constante. El valor de la constante en la región $1/3 \le q \le 2/3$ es $r \in [0, 1]$.

Reflectividad sinusoidal

$$f(q) = \begin{cases} 1, & si & 0 \le q < 1/3, \\ \frac{(1-r)}{2} \cos(6\pi x) + \frac{(1+r)}{2}, & si & 1/3 \le q \le 2/3, \\ 1, & si & 2/3 < q < 1. \end{cases}$$
(3.6)

El parámetro r en la ecuación 3.6 corresponde al valor de la función en $q = \frac{1}{2}$, es decir $f(\frac{1}{2}) = r$. En la Figura 3.5 se muestra la función utilizada para el caso de una reflectividad sinusoidal.



Figura 3.5: Función de reflectividad sinusoidal.

Reflectividad de tipo Fermi-Dirac

$$f(q) = \begin{cases} 1, & si & 0 \le q < 1/3, \\ \frac{1-r}{1+exp[-120((1-q)-0.63)]} + r, & si & 1/3 \le q \le 1/2, \\ \frac{1-r}{1+exp[-120(q-0.63)]} + r, & si & 1/2 < q \le 2/3, \\ 1, & si & 2/3 < q < 1. \end{cases}$$
(3.7)

El parámetro r en la ecuación 3.7 corresponde al valor de la función (aproximadamente) en $q = \frac{1}{2}$, es decir $f(\frac{1}{2}) = r$. En la Figura 3.6 se muestra la función utilizada para el caso de una reflectividad de tipo Fermi-Dirac.



Figura 3.6: Función de reflectividad de tipo Fermi-Dirac.

3.2 Dimensión multifractal del mapa del panadero

En el caso especial del tribaker con reflectividades constantes en cada región (ecuación 3.5), la dimensión multifractal se puede calcular analíticamente [13]. La expresión de la dimensión multifractal correspondiente a la variedad estable (q = cte) es la siguiente:

$$d_q = \frac{ln \left[\frac{R_L^q + R_M^q + R_R^q}{(R_L + R_M + R_R)^q} \right]}{(1-q)ln3},$$
(3.8)

donde R_L, R_M, R_R son los valores de la reflectividad en $q \in [0, 1/3), [1/3, 2/3], (2/3, 1)$ respectivamente. En el límite $q \to \infty$, la ecuación 3.8 tiende a

$$\lim_{q \to \infty} d_q = \frac{\ln(R_L + R_M + R_R) - \ln(R_{max})}{\ln 3},$$
(3.9)

donde $R_{max} = max\{R_L, R_M, R_R\}$. La dimensión fractal correspondiente a la variedad inestable (p = cte) es 1. Por lo tanto, la dimensión fractal en el espacio de fases será:

$$D_q = 1 + d_q. (3.10)$$

En el caso de los sistemas parcialmente abiertos, la dimensión fractal D_0 es un entero, correspondiente a la dimensión del espacio de fases en el que se está trabajando. Esto es porque el sistema, al no estar completamente abierto en una región del espacio de fases, todas las trayectorias van a tener una intensidad no nula al evolucionar. Por lo tanto, el espacio de fases siempre quedará completamente lleno de puntos, y así se pierde el fractal que se obtiene al tener el sistema completamente abierto.

En la Figura 3.7 se muestra la dimensión multifractal, donde se comparan los valores calculados numéricamente con la curva correspondiente a la solución analítica. En este caso se utilizó una reflectividad constante en el espacio de fases, dada por la expresión 3.5, y donde se usaron tres valores distintos del grado de reflectividad: r = 0, r = 0.01 y r = 0.2.



Figura 3.7: Dimensión multifractal para el caso de una reflectividad constante para distintos valores del grado de reflectividad r.

 D_q es una función decreciente con el parámetro q, lo que indica que se está en presencia de un multifractal. Además, para valores grandes del parámetro q, se observa que la curva alcanza un valor estacionario (a partir de q = 10 aproximadamente).

Para el caso en que la reflectividad es nula en la región intermedia $1/3 \le q \le 2/3$ (r = 0), es decir para el sistema completamente abierto, la dimensión es constante para todos los valores de q, y vale $D_q = D_0 = 1.63 \simeq 1 + \ln(2)/\ln(3)$. Esto es consistente con la dimensión fractal del conjunto de Cantor, correspondiente a la dirección de la variedad estable, más la dimensión en la dirección de la variedad inestable, que es 1.

En el caso en que r = 0.01 y para $q \ge 2$, los valores obtenidos de la dimensión multifractal son muy similares al caso en que r = 0. Es notable (aunque esperable por lo discutido anteriormente) que para q = 0, $D_0 = 2$, esto es, la dimensión fractal coincide con la dimensión del espacio de fases en el que se está trabajando. A medida que el parámetro q aumenta, la dimensión D_q disminuye rápidamente hasta alcanzar un valor estacionario aproximadamente igual a $1.63 \simeq 1 + \ln(2)/\ln(3)$.

A continuación se analiza la dimensión multifractal para el caso de una reflectividad que depende de la coordenada q en forma continua. Se analizan dos funciones, una sinusoidal, definida en la ecuación 3.6, y otra de tipo Fermi-Dirac, definida en la ecuación 3.7.

Reflectividad sinusoidal

Se utiliza como función de prueba la función de reflectividad definida en la ecuación 3.6. En la Figura 3.8 se muestra la dimensión multifractal para este caso,



para dos valores del grado de reflectividad: r = 0 y r = 0.2.

Figura 3.8: Dimensión multifractal para el caso de una reflectividad sinusoidal (ecuación 3.6), para distintos valores del grado de reflectividad r.

Se puede observar que, al igual que en el caso de una reflectividad constante, $D_0 = 2$ para todo valor de r. Para valores crecientes de q, la dimensión multifractal disminuye al igual que antes, pero los valores son mayores que en el caso de reflectividad constante. Esto se debe a que el espacio de fases se cierra más rápidamente, en el sentido de que la intensidad de los distintos puntos disminuye más lentamente a medida que el sistema evoluciona. Para r = 0.2 la dimensión multifractal es mayor que en el caso en que r = 0 para valores de q > 0, aunque la variación no es tan grande. Más adelante veremos como esta propiedad se refleja en distintos aspectos del sistema.

Reflectividad de tipo Fermi-Dirac

Se utiliza como función de prueba la función de reflectividad definida en la ecuación 3.7. En la Figura 3.9 se muestra la dimensión multifractal para este caso, usando r = 0 y r = 0.2.



Figura 3.9: Dimensión multifractal para el caso de una reflectividad de tipo Fermi-Dirac (ecuación 3.7) para distintos valores del grado de reflectividad r.

En este caso la dimensión multifractal sigue un comportamiento más parecido al caso en que la reflectividad es una función constante. Sin embargo, los valores de la dimensión son mayores.

Destacamos que para estos últimos dos casos en que la reflectividad es una función continua de la coordenada q del espacio de fases, se puede observar que

la dimensión multifractal tiene una variación distinta que en el caso de una reflectividad constante.

3.3 Repulsores clásicos del tribaker

Al evolucionar el tribaker abierto (para la función de reflectividad discontinua, con un grado de reflectividad r = 0) para adelante y para atrás en el tiempo, las distintas trayectorias pueden reflejarse o absorberse, dependiendo de si las mismas pasan o no por la región de apertura del espacio de fases. Aquellas trayectorias que se reflejen formarán un conjunto invariante que se denomina *repulsor*, o *repeller*. La dimensión de este conjunto resultará ser un número no entero, lo que indica que el sistema en ese caso es un fractal.

A continuación se muestran los primeros pasos para la obtención de los repellers del tribaker abierto (Figura 3.10). Inicialmente se tiene un cuadrado unitario lleno de puntos en el espacio de fases. En el primer paso se obtienen 4 cuadrados, en el segundo se tienen 16, en el tercero 64. En general, en el paso n se obtienen 4^n cuadrados. En el límite $n \to \infty$, lo que se obtiene es el producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor, uno en cada dirección de las variables del espacio de fases.



Figura 3.10: Primeros pasos para la construcción del conjunto invariante (repeller) del tribaker. A medida que aumenta la cantidad de iteraciones del mapa (para adelante y para atrás en el tiempo), el conjunto obtenido se aproxima al producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor.

3.3.1 Repeller parcial con puntos al azar

Se usaron las distintas funciones de reflectividad definidas en la sección 3.1.2 para estudiar los repellers clásicos del tribaker. Un caso ya estudiado con anterioridad [11, 14] es el de una reflectividad constante (ecuación 3.5) en el espacio de fases.

Para obtener el repeller parcial se hace evolucionar el sistema, y en cada paso se calcula la intensidad de las órbitas como se describió en la sección 3.1.2. Al evolucionar el sistema para adelante y para atrás en el tiempo, cada punto (q_i, p_i) del espacio de fases queda con una intensidad final $I(q_i, p_i) \in [0, 1]$. Si se grafican los puntos del espacio de fases asignando a cada uno de ellos un color distinto según el valor de su intensidad, se obtiene una imagen del repeller parcial.

En la Figura 3.11 se muestra el repeller parcial correspondiente a una reflectividad discontinua (ecuación 3.5), para distintos valores del grado de reflectividad $r \in [0, 1]$.



Figura 3.11: Repeller parcial clásico a tiempo t = 6 para el caso de una reflectividad discontinua en el espacio de fases para (a) r = 0, (b) r = 0.07, (c) r = 0.1 y (d) r = 0.2. La escala de colores corresponde al valor de las intensidades de cada órbita.

Para el caso en que r = 0 lo que se obtiene es una aproximación a tiempo finito del conjunto de Cantor en cada una de las variedades del sistema. A medida que el valor de r va aumentando, el espacio de fases se va llenando (o cerrando), dado que las distintas órbitas tienen intensidades mayores. Para el caso en que r = 0.2, el repeller clásico se extiende en casi todo el espacio de fases. Para estudiar el efecto de una reflectividad que varíe de forma continua en el espacio de fases, se introduce una función sinusoidal (ecuación 3.6). En la Figura 3.12 se muestra el repeller parcial correspondiente a una reflectividad que es una función sinusoidal, para distintos valores del grado de reflectividad r.



Figura 3.12: Repeller parcial clásico para el caso de una reflectividad sinusoidal. Los valores del parámetro r correspondientes son los que se usaron para el caso de reflectividad constante (Figura 3.11).

Se puede ver que en el caso en que la reflectividad varía en forma continua de esta manera particular, el conjunto invariante es mucho más cerrado que el caso anterior. Una forma de entender este comportamiento es la siguiente. En la región de apertura, la variación de la reflectividad en forma continua desde su máximo valor (1) hasta un cierto valor $r \in [0, 1]$ hace que muchas de las órbitas en esa región tengan una intensidad inicial que es mayor que en el caso de reflectividad constante. Esto hace que al evolucionar el sistema durante un cierto tiempo (t = 6 en este caso), las órbitas en el espacio de fases tengan una intensidad mayor, y por lo tanto se obtienen los repellers observados.

Por último se utilizó una función de tipo Fermi-Dirac (ecuación 3.7). Este tipo de función se asemeja más a la función constante, en el sentido de que la caída de la misma en los bordes es más rápida que en el caso de la función sinusoidal, pero sin embargo es una función continua. Es esperable entonces que el repeller clásico para este tipo de función se asemeje más al de la reflectividad constante.

En la Figura 3.13 se muestra el repeller parcial correspondiente a una reflectividad que es una función de tipo Fermi-Dirac, que depende de la coordenada q del espacio de fases, para distintos valores del grado de reflectividad r.



Figura 3.13: Repeller parcial clásico para el caso de reflectividad de tipo Fermi-Dirac. Los valores del parámetro r son los que se usaron para el caso de una reflectividad constante (Figura 3.11).

Lo que se puede observar en este último caso, en donde la función de reflectividad tiene una caída más abrupta que en el caso de la función sinusoidal, pero continua, es que el conjunto invariante se parece más al caso de reflectividad constante. Se puede decir que es un caso intermedio entre la reflectividad constante y la reflectividad sinusoidal. Esto se debe a que la función de reflectividad es similar a una constante. Sin embargo, al tener este tipo de función los bordes continuos, se puede ver que el sistema se cierra de manera más rápida, pero no tanto como en el caso de la reflectividad sinusoidal.

Capítulo 4

Mapa de baker cuántico parcialmente abierto

En este capítulo se construirá una versión cuántica del tribaker. Un mapa cuántico es una transformación unitaria que opera en un espacio de Hilbert. Cuando la dimensión del espacio de Hilbert tiende a infinito, las propiedades del sistema deben corresponderse con las del mapa clásico. Esto es el límite semiclásico, que puede interpretarse como que la constante de Planck \hbar tienda a cero.

4.1 Cuantización del mapa de baker

No existe en general un procedimiento único para cuantizar un mapa. El objetivo principal es asociar a un mapa conservativo clásico \mathcal{B} un operador unitario Uque actúe sobre un espacio de Hilbert. Este operador U será el propagador.

Primeramente cuantizamos el espacio de fases. Al ser nuestro espacio de fases un toro (el cuadrado unitario periódico en q y en p), habrá una cantidad finita M de autoestados de posición $|q_n\rangle$ y de momento $|p_m\rangle$. La relación entre los operadores de posición y momento está dada a partir de su conmutador:

$$[q, p] = i\hbar, \tag{4.1}$$

donde $\hbar = h/2\pi$, y h es la constante de Planck.

Los estados de posición y momento se relacionan entre sí a través de la función de transformación [20] de la siguiente manera:

$$\langle q|p\rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{iqp/h}.$$
(4.2)

Las condiciones de contorno antes mencionadas hacen que los estados en representación de posición y momento deban satisfacer las siguientes relaciones, con fases arbitrarias:

$$\langle q+1|\psi\rangle = e^{2\pi i\chi_q} \langle q|\psi\rangle$$
, $\langle p+1|\psi\rangle = e^{2\pi i\chi_p} \langle p|\psi\rangle$, (4.3)

con el cambio de base entre ambas funciones de onda, dado por la transformada de Fourier

$$\widetilde{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int e^{-iqp/\hbar} \psi(q) dq, \qquad (4.4)$$

donde $2\pi\chi_q$ y $2\pi\chi_p$ son los ángulos de Floquet, $0 \leq \chi_q, \chi_p < 1$. El caso en que $\chi_q = \chi_p = 0$ corresponde a condiciones de contorno periódicas, mientras que $\chi_q = \chi_p = 1/2$ corresponde a condiciones de contorno antiperiódicas.

La solución de la ecuación 4.3 existe en el caso en que el espacio de Hilbert sea de dimensión finita y entera M, y debe satisfacer

$$2\pi\hbar M = 1 \quad , \qquad M \in \mathbf{Z}. \tag{4.5}$$

Una vez dados los ángulos de Floquet, el espacio de Hilbert de dimensión M queda determinado. Los autoestados de posición y momento se pueden escribir de

la siguiente manera:

$$|q_j\rangle = \left|\frac{j+\chi_q}{M}\right\rangle , \quad j = \{0, \cdots, M-1\}, \quad (4.6)$$

$$|p_k\rangle = \left|\frac{k+\chi_p}{M}\right\rangle , \qquad k = \{0, \cdots, M-1\}.$$
 (4.7)

El cambio de base entre estados de posición y momento, que corresponde a la versión discreta, define un operador que resulta ser una matriz unitaria. Esto se puede considerar como una transformada de Fourier discreta, con los ángulos de Floquet como parámetros:

$$\langle p_k, q_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{2\pi i (j + \chi_q)(k + \chi_p)/M} \equiv (G_M^{\chi_q, \chi_p}).$$
(4.8)

La elección de los ángulos de Floquet se determina a partir de las simetrías del espacio de fases de la siguiente manera:

- Simetría de inversíon temporal T: se define a través del intercambio entre q y
 p, q ↔ p. En este caso la simetría existe solo si χ_q = χ_p.
- Simetría de paridad R: corresponde al cambio q → 1 − q, p → 1 − p. En el caso del toro, esta simetría se da si se cumple que χ_q + χ_p = 1.

4.1.1 Operadores del mapa de baker

Existen distintas formas de cuantizar el tribaker. Una de ellas es la de Balazs-Voros-Saraceno (BVS) [21], la cual se realiza tomando condiciones de contorno antiperiódicas en q y en p. Elegimos la dimensión del espacio de Hilbert como $M = 1/(2\pi\hbar)$. De esta forma, los autovectores q_n y p_m están relacionados entre sí mediante una transformada de Fourier discreta antisimétrica.

$$G_{M;j,k} \equiv \langle q_k, p_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-2\pi i (k+1/2)(j+1/2)/M}.$$
(4.9)

Se eligieron los ángulos de Floquet como $\chi_q = 1/2 = \chi_p$, es decir, condiciones de contorno antiperiódicas.

La representación matricial del propagador del tribaker cuántico es la siguiente (con M múltiplo de 3):

$$U^B = G_M^{-1} G_{M/3}, (4.10)$$

$$G_{M/3} \equiv \begin{bmatrix} G_{M/3} & 0 & 0 \\ 0 & G_{M/3} & 0 \\ 0 & 0 & G_{M/3} \end{bmatrix}.$$
 (4.11)

 G_M^{-1} es la transformada de Fourier inversa.

El tribaker cuántico parcialmente abierto de manera continua se puede obtener a partir del operador de proyección P, dado por:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{M/3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{f} \mathbb{1}_{M/3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{M/3} \end{bmatrix},$$
(4.12)

aplicado a la ecuación 4.11 de forma de preservar las simetrías originales. La función f en 4.12 corresponde a la reflectividad en el espacio de fases definida en la sección 3.1.2.

El operador del tribaker cuántico con una apertura parcial en la región intermedia se obtiene de la siguiente manera:

$$\widetilde{U^B} = G_M^{-1} P G_{M/3} P. \tag{4.13}$$

El tribaker cuántico tiene las mismas simetrías que el mapa clásico: paridad e inversión temporal.

4.2 Ánalisis del espectro del tribaker

El tribaker cuántico está caracterizado por un espectro que tiene M autoestados y autofases tales que $\widetilde{U^B}|\psi_j\rangle = e^{i\varphi_j}|\psi_j\rangle$.

4.2.1 Distribución de autovalores

En un espacio de Hilbert de dimensión M, el operador del tribaker cuántico (no unitario) tiene M autoestados, tanto a izquierda como a derecha, con autoenergías complejas $\epsilon_i = E_i - i\Gamma_i/2$ [22], y actúa como un operador de evolución temporal, de modo que sus autovalores ν_i están relacionados con las autoenergías ϵ_i según

$$\nu_i = exp\left[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_i\right] = exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_i\right]exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\Gamma_i\right].$$
(4.14)

Como $\Gamma_i \in \mathbf{R}_0^+$ y $E_i \in \mathbf{R}$, $|\nu_i| \in [0, 1]$. Por lo tanto, se pueden usar a los $|\nu_i|$ como una medida del tiempo de vida media del estado correspondiente. Por ejemplo, estados de vida larga corresponderán a aquellos que cumplan $|\nu_i| \leq 1$, o sea, $\Gamma_i \ll 1$ [13].

Se calcularon los autovalores del tribaker cuántico parcialmente abierto de manera continua para distintos valores del grado de reflectividad r. A partir del espectro de autovalores del tribaker, se puede calcular la distribución normalizada del módulo de los autovalores, $\rho(|\nu|)$.

En las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran las distribuciones normalizadas $\rho(|\nu|)$ para las tres funciones de reflectividad estudiadas (reflectividad constante, sinusoidal y Fermi-Dirac, definidas en las ecuaciones 3.5, 3.6 y 3.7 respectivamente), y distintos valores del grado de reflectividad r en cada caso. La dimensión en todos los casos es $M = 3^7$.



Figura 4.1: Distribución de autovalores $\rho(|\nu|)$ del tribaker cuántico parcialmente abierto para reflectividad constante. Los valores del grado de reflectividad usados son (a) r = 0, (b) r = 0.01, (c) r = 0.1 y (d) r = 0.2. El tamaño de la matriz usado para obtener estos gráficos es de $M = 3^7 = 2187$.

Se puede ver de la Figura 4.1 que los estados están concentrados alrededor de un valor típico $|\nu|_{typ}$, que puede ser aproximado como la mediana estadística de la distribución. A medida que se incrementa el valor del parámetro r en cada caso, la



mediana estadística también aumenta.

Figura 4.2: Distribución de autovalores $\rho(|\nu|)$ del tribaker cuántico parcialmente abierto para reflectividad sinusoidal. Los valores del grado de reflectividad usados son (a) r = 0, (b) r = 0.01, (c) r = 0.1 y (d) r = 0.2. El tamaño de la matriz usado para obtener estos gráficos es de $M = 3^7 = 2187$.



Figura 4.3: Distribución de autovalores $\rho(|\nu|)$ del tribaker cuántico parcialmente abierto para reflectividad de tipo Fermi-Dirac. Los valores del grado de reflectividad usados son (a) r = 0, (b) r = 0.01, (c) r = 0.1 y (d) r = 0.2. El tamaño de la matriz usado para obtener estos gráficos es de $M = 3^7 = 2187$.

En el caso de la función de reflectividad sinusoidal, se puede observar (Figura 4.2) que la distribución de autovalores del sistema tiene una mediana estadística mayor que para el caso de reflectividad constante (Figura 4.1) si se comparan los gráficos con iguales valores del parámetro r. Para la reflectividad de tipo Fermi-Dirac (Figura 4.3), la mediana estadística es mayor que para una reflectividad constante,

pero menor que para una reflectividad sinusoidal.

La mediana estadística en cada caso se la puede considerar como un límite de separación entre estados de vida corta $(|\nu_i| < |\nu|_{typ})$ y estados de vida larga $(|\nu_i| > |\nu|_{typ})$.

4.2.2 Comportamiento en términos de la ley de Weyl fractal

La ley de Weyl fractal se puede expresar como

$$N(|\nu_i| > |\nu|_{cutoff}) \sim M^{D_0(S)/2},$$
(4.15)

donde N es el número de autoestados por encima del valor de un corte $|\nu|_{cutoff}$ que separa estados de vida larga de estados de vida corta, con autovalores ν_i , M es la dimensión del espacio de Hilbert y $D_0^{(S)}$ es la dimensión fractal del saddle caótico. Es de interés estudiar el comportamiento de los estados de vida larga, que corresponden a valores grandes del módulo del autovalor ν_i como se vió anteriormente. Estos estados dominan el decaimiento del sistema.

Se calcula el número de autoestados correspondientes a aquellos autovalores que cumplen $|\nu| \ge |\nu|_{cutoff}$. El valor de corte $|\nu|_{cutoff}$ se elige de forma tal que sea mayor que el valor típico (la mediana), $|\nu|_{cutoff} > |\nu|_{typ}$. En la Figura 4.4 se muestra el gráfico del número de estados en función de la dimensión del espacio de Hilbert M, para el caso en que la reflectividad en el espacio de fases es una función constante en la región de apertura (ecuación 3.5). La división del número de autoestados por la dimensión M permite un mejor análisis del escaleo, que de acuerdo con la predicción de la ley de Weyl fractal debería ser $d_0 - 1$, donde $d_0 = D_0 - 1$ es la dimensión fractal parcial del conjunto atrapado en la dirección de la variedad inestable. D_0 es la dimensión fractal total del conjunto, que a su vez está relacionada con la dimensión del saddle caótico $D_0^{(S)}$ como

$$D_0^{(S)} = 2D_0 - 2 \Leftrightarrow d_0 = \frac{D_0^{(S)}}{2}.$$
 (4.16)



Figura 4.4: Número de estados para reflectividad constante. La línea punteada indica la predicción de ley de Weyl fractal, que corresponde al caso r = 0, $d_0^{(r=0)} = ln(2)/ln(3)$. Los valores de corte usados para cada valor de reflectividad son $|\nu|_{cutoff} = [0.5, 0.5, 0.52, 0.62, 0.68, 0.8].$

Para r = 0, se puede ver en la Figura 4.4 que se cumple la ley de Weyl. A medida que r aumenta, las curvas se desvían de la ley de Weyl. Incluso para valores de ry M grandes, los resultados numéricos no tienden a un valor constante como es de esperarse, ya que la dimensión clásica es $d_0 = 1$. En cambio, se observa una relación no trivial con una dimensión *efectiva* entre 0 y 1. A continuación se analizan los resultados para las aperturas continuas. En la Figura 4.5 se muestra el número de estados en el caso de una reflectividad sinusoidal, mientras que en la Figura 4.6 se muestra el número de estados en el caso de una reflectividad de tipo Fermi-Dirac.



Figura 4.5: Número de estados para reflectividad sinusoidal. La línea punteada indica la predicción de ley de Weyl fractal, que corresponde al caso r = 0, $d_0^{(r=0)} = ln(2)/ln(3)$. Los valores de corte usados para cada valor de reflectividad son $|\nu|_{cutoff} = [0.8, 0.8, 0.82, 0.84, 0.86, 0.9]$.

En el caso de una apertura cuya función de reflectividad es sinusoidal, las curvas se desvían significativamente de la ley de Weyl para todo valor del grado de reflectividad r.



Figura 4.6: Número de estados para reflectividad de tipo Fermi-Dirac. La línea punteada indica la predicción de ley de Weyl fractal, que corresponde al caso r = 0, $d_0^{(r=0)} = ln(2)/ln(3)$. Los valores de corte usados para cada valor de reflectividad son $|\nu|_{cutoff} = [0.6, 0.6, 0.63, 0.8, 0.85, 0.89]$.

En el caso de una apertura de tipo Fermi-Dirac, las curvas también se desvían de la ley de Weyl, incluso para valores chicos del grado de reflectividad r.

4.2.3 Dimensión local

Una manera muy eficaz de estudiar el comportamiento del escaleo del sistema en función de la reflectividad, es calcular la pendiente de las curvas del número de estados en función de la dimensión M. Esta pendiente se la puede calcular en función de $|\nu|_{cutoff}$, de modo de independizarse de la elección un tanto arbitraria de dicho valor. Se define la dimensión local d_{loc} como la pendiente de la curva N/M en función de M, entre dos puntos adyacentes.

$$d_{loc} = [lnN(M) - lnN(M/3)]/ln3.$$
(4.17)

Se realiza un gráfico de la dimensión local en función del valor de corte $|\nu|_{cutoff}$, entre 0 y 1. Este procedimiento se repite para los distintos tipos de reflectividades estudiadas anteriormente. En la Figura 4.7 se muestra el gráfico correspondiente a la dimensión local para una reflectividad constante.



Figura 4.7: Dimensión local para reflectividad constante. Se calculó para una dimensión $M = 3^7$. La recta horizontal punteada corresponde a la dimensión fractal del repeller, $ln(2)/ln(3) \sim 0.63$.

En la Figura 4.7 se puede observar que para valores de $|\nu|_{cutoff} < |\nu|_{typ}$, la dimensión local es aproximadamente $d_{loc} = 1$. Esto se debe a que se sigue la ley de Weyl usual $(N \propto M)$. Por otro lado, para $|\nu|_{cutoff} > |\nu|_{typ}$, se pueden observar fuertes oscilaciones, y luego d_{loc} tiende a un valor que corresponde a la dimensión fractal del sistema abierto $d_{loc} \sim d_0^{(r=0)}$. Estas oscilaciones se deben a que al ser la función de reflectividad discontinua, la medida μ tiene saltos discontinuos.

En la Figura 4.8 se muestra el gráfico correspondiente a la dimensión local para una reflectividad sinusoidal.



Figura 4.8: Dimensión local para reflectividad sinusoidal. Se calculó para una dimensión $M = 3^7$. La recta horizontal punteada corresponde a la dimensión fractal del repeller, $ln(2)/ln(3) \sim 0.63$.

Este caso presenta diferencias significativas con el correspondiente a una reflectividad constante (Figura 4.7). Por un lado, las fuertes oscilaciones observadas en el caso anterior ya no son apreciables. Por el otro, las curvas para cualquier valor de reflectividad se mantienen prácticamente constantes en $d_{loc} = 1$. Esto quiere decir que tiende al caso cerrado, donde sigue una ley de Weyl no fractal.

En la Figura 4.9 se muestra el gráfico correspondiente a la dimensión local para una reflectividad de tipo Fermi-Dirac.



Figura 4.9: Dimensión local para reflectividad de tipo Fermi-Dirac. Se calculó para una dimensión $M = 3^7$. La recta horizontal punteada corresponde a la dimensión fractal del repeller, $ln(2)/ln(3) \sim 0.63$.

El caso de una reflectividad que es una función de tipo Fermi-Dirac se puede
pensar como una situación intermedia entre el caso en que la reflectividad es una constante y el de una reflectividad sinusoidal. Nuevamente, las oscilaciones propias del caso constante (Figura 4.7) para valores pequeños de r no aparecen. Esto es un cambio fuerte.

A continuación se muestra un gráfico para el caso de reflectividad constante y de valor r = 0.01, donde se grafica la dimensión local en función de $|\nu|_{cutoff}$, para tres valores de dimensión distintos, $M = \{3^6, 3^7, 3^8\}$.



Figura 4.10: Dimensión local para reflectividad constante r = 0.01. Se calculó para tres valores de dimensión: $M = \{3^6, 3^7, 3^8\}$. La línea horizontal punteada corresponde a la dimensión fractal del repeller, $ln(2)/ln(3) \sim 0.63$.

Se puede ver de la Figura 4.10 que las oscilaciones subsisten a medida que la

dimensión M aumenta. Esto sugiere que las oscilaciones presentes en la dimensión local pueden permanecer en el límite de M grande, y representan un contraste muy fuerte con lo que pasa en el caso de reflectividad continua.

Finalmente, en la Figura 4.11 se puede ver que para una dimensión $M = 3^9$ en el caso continuo (sinusoidal y Fermi-Dirac) se mantiene la supresión de las grandes oscilaciones.



Figura 4.11: Dimensión local en función de ν_c . En a) se muestran los resultados para $M = 3^5$ y en b) para $M = 3^9$. Las líneas finas representan la apertura sinusoidal y las gruesas la apertura de tipo Fermi-Dirac. Los valores de reflectividad usados son r = 0, r = 0.001, r = 0.01 y r = 0.1 (rojo, naranja, verde y amarillo respectivamente). La línea horizontal en negro corresponde a la dimensión fractal del repeller, $ln(2)/ln(3) \sim 0.63$.

Capítulo 5

Teoría de órbitas periódicas cortas aplicada a los mapas con aperturas continuas

En este capítulo se aplica la teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas a los sistemas descriptos en el capítulo anterior. Se explicará brevemente la teoría y se expondrán los resultados.

5.1 Funciones de cicatriz y la teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas

La construcción de las funciones de cicatriz fue realizada por E. Vergini y G. Carlo [23]. Estas funciones son el pilar fundamental de esta teoría.

Las funciones de cicatriz son funciones de onda localizadas en un entorno de las órbitas periódicas del sistema clásico. Este procedimiento de construcción de funciones de cicatriz es totalmente general, y es aplicable a cualquier sistema caótico. En Capítulo 5. Teoría de OPs cortas aplicada a los mapas con aperturas continuas 76

particular, el mapa de baker es uno de los sistemas más sencillos para este propósito.

En primer lugar se definen los modos en las órbitas periódicas (MOP) como una superposición de estados coherentes centrados en los puntos de una órbita periódica. Un estado coherente en un espacio de Hilbert de dimensión $M = 1/(2\pi\hbar)$ en el toro unitario, con condiciones de contorno antiperiódicas y centrado en el punto (q, p), se puede representar en la base de posición $|j\rangle$ [10, 24, 25] de la siguiente forma:

$$\langle j|q,p\rangle = K \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{-\pi M(e_j+m-q)^2} e^{i2\pi M(e_j+m-q/2)p-i\pi m},$$
 (5.1)

donde $e_j = (j + 1/2)/M$ y K es un factor de normalización que converge a $(2/M)^{1/4}$ para $M \gg 1$. La fase se elige de forma tal que los operadores de paridad e inversión temporal actúen sobre los estados como

$$R|q,p\rangle = |1-q,1-p\rangle, \tag{5.2}$$

$$T|q,p\rangle = |p,q\rangle,\tag{5.3}$$

sin fases adicionales.

A cada punto (q_j, p_j) de una órbita periódica γ de período L se le asocia un estado coherente $|q_j, p_j\rangle$, $i = \{0, \dots, L-1\}$, centrado en ese punto. Estos estados se los puede considerar como cuasi-ortogonales, cuando su separación en el espacio de fases es mucho mayor que el ancho del paquete, el cual es proporcional a $\sqrt{\hbar}$. Esta condición se cumple de forma estricta en el límite semiclásico $(M \to \infty)$. En este límite, los estados satisfacen las siguientes condiciones aproximadas:

$$\langle q_{j+1}, p_{j+1} | q_j, p_j \rangle \simeq \delta_{j+1,j}, \tag{5.4}$$

$$\widetilde{U^B}_{j,j+1} \equiv \langle q_{j+1}, p_{j+1} | \widetilde{U^B} | q_j, p_j \rangle \simeq \frac{e^{i2\pi M S_j}}{\sqrt{\cosh\lambda}},\tag{5.5}$$

donde $q_L \equiv q_0$, $p_L \equiv p_0$, λ es el exponente de Lyapunov, que en el caso del tribaker vale $\lambda = ln(3)$, y la acción S_j es la fase adquirida por el estado coherente en un paso del mapa,

$$S_j \equiv S_{q_j, p_j} = [2q_j] \left(\frac{q_j}{2} + \frac{p_j}{2} + \frac{1}{4} \right).$$
(5.6)

A cada órbita periódica γ de período L del mapa se le asocia una cantidad L de funciones de cicatriz. Los MOP se construyen combinando los distintos estados coherentes de cada punto de la órbita γ :

$$|\phi_{\gamma}^{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=0}^{L-1} exp\left\{-2\pi i (jA_{\gamma}^{k} - M\theta_{j})\right\} |q_{j}, p_{j}\rangle.$$
(5.7)

En la expresión 5.7, k es un entero menor que $L, k \in \{0, \dots, L-1\}$ y $\theta_j = \sum_{l=0}^{j} S_l$. La acción total de la órbita es $\theta_L = S_{\gamma}$. La cantidad $A_{\gamma}^k = (MS_{\gamma} + k)/L$ es un autovalor de tipo Bohr-Sommerfeld, dado que

$$\widetilde{U^B}|\phi_{\gamma}^k\rangle \approx \frac{e^{2\pi i A_{\gamma}^k}}{\sqrt{\cosh\lambda}}|\phi_{\gamma}^k\rangle.$$
(5.8)

Ahora construiremos las funciones de cicatriz a los mapas abiertos. Tendremos funciones de cicatriz a derecha y a izquierda asociadas con cada órbita periódica, definidas a través del propagador del mapa parcialmente abierto y aplicamos este último a los MOP, hasta un tiempo corto, aproximadamente el tiempo de Ehrenfest, $\tau = \frac{1}{\lambda} ln M$. Como $M \propto \frac{1}{\hbar}$ entonces $\tau \propto ln \left(\frac{1}{\hbar}\right)$. Las funciones de cicatriz a derecha e izquierda están dadas por:

$$|\psi_{\gamma,k}^{R}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_{\gamma}^{R}} \sum_{t=0}^{\tau} \widetilde{UB}^{t} e^{-2\pi i t A_{\gamma}^{k}} cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) |\phi_{\gamma}^{k}\rangle, \tag{5.9}$$

у

Capítulo 5. Teoría de OPs cortas aplicada a los mapas con aperturas continuas 78

$$\langle \psi_{\gamma,k}^L | = \frac{1}{\mathcal{N}_{\gamma}^L} \sum_{t=0}^{\tau} \langle \phi_{\gamma}^k | \widetilde{U^B}^t e^{-2\pi i t A_{\gamma}^k} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right).$$
(5.10)

Las constantes de normalización $\mathcal{N}_{\gamma}^{R,L}$ se eligen de forma tal que se cumpla $\langle \psi_{\gamma,k}^R | \psi_{\gamma,k}^R \rangle = \langle \psi_{\gamma,k}^L | \psi_{\gamma,k}^L \rangle$ y $\langle \psi_{\gamma,k}^L | \psi_{\gamma,k}^R \rangle = 1$. La función coseno se usa para introducir un valor de corte suave. Estas funciones son adecuadas para la investigación de la morfología de los autoestados.

Se selecciona una cantidad N^{POs} del conjunto completo hasta un período L, de modo de cubrir el repeller continuo. Trabajaremos con todas las órbitas periódicas hasta un período L contenidas en el repeller del caso completamente abierto. Además, consideraremos una pequeña cantidad N_{max}^{outPOs} de ellas fuera del repeller, que tengan los mayores valores de μ , y optimizadas de forma que cubran lo más uniformemente posible el repeller continuo. Se forma una base en la cual se expresan los operadores de evolución $\langle \psi_{\alpha,i}^L | \widetilde{U^B} | \psi_{\beta,j}^R \rangle$. Teniendo en cuenta que $\langle \psi_n^L | \psi_m^R \rangle \neq \delta_{nm}$, resolvemos un problema de autovalores generalizado [10] para obtener los autoestados. Las resonancias de vida larga son las combinaciones lineales de las funciones de cicatriz de la base usando los coeficientes de los autoestados.

5.2 Aplicación de la teoría de órbitas periódicas cortas a los mapas abiertos de manera continua

A partir de la teoría semiclásica logramos construir una aproximación del tribaker cuántico parcialmente abierto de manera continua usando una dimensión de $M = 3^5$, y considerando órbitas periódicas de períodos $L \leq 7$. Una representación muy útil [16] en el espacio de fases que revela la parte de la probabilidad cuántica que está en mayor correspondencia con el repeller clásico se obtiene como sigue. Se definen los operadores simétricos \hat{h}_j relacionados con los autoestados a derecha $|\psi_j^R\rangle$ y a izquierda $\langle \psi_j^L|$ como:

$$\hat{h}_j = \frac{|\psi_j^R\rangle\langle\psi_j^L|}{\langle\psi_j^L|\psi_j^R\rangle},\tag{5.11}$$

cada uno de ellos relacionado con el autovalor ν_j . La ventaja de estos operadores es que revelan la estructura del repeller subyacente en los autoestados. Para tener una mejor visualización de como el conjunto de resonancias de vida larga se distribuye en el repeller clásico, se construyen los operadores generalizados sobre este conjunto sumando los primeros j proyectores $\hat{h}_{j'}$ [12], ordenados según el módulo de su autovalor correspondiente en forma decreciente ($|\nu_j| \ge |\nu_{j'}|$ con $j \le j'$):

$$\hat{Q}_j \equiv \sum_{j'=1}^j \hat{h}_{j'}.$$
 (5.12)

La representación en el espacio de fases de \hat{h} y \hat{Q} se puede realizar en base a los estados coherentes $|q, p\rangle$:

$$h_j(q,p) = |\langle q, p | \hat{h}_j | q, p \rangle|, \qquad (5.13)$$

$$Q_j(q,p) = |\langle q, p | \hat{Q}_j | q, p \rangle|.$$
(5.14)

Esto es el repeller cuántico continuo semiclásico $Q_{\nu_c}^{sc}$. Las distribuciones $h_j(q, p)$ y $Q_j(q, p)$ tienden a estar localizadas en una versión de tiempo discreto del repeller.

En la Figura 5.1 se muestran los repellers cuánticos $Q_{\nu_c}^{sc}$, obtenidos usando las órbitas periódicas pertenecientes al repeller del caso completamente abierto. Los gráficos superiores corresponden a la función de reflectividad de tipo Fermi-Dirac, y los inferiores a la función sinusoidal. En la columna izquierda se usó un grado de reflectividad r = 0.01, mientras que en la columna derecha se usó r = 0.1. La superposición de estas distribuciones normalizadas con aquellas obtenidas usando los autoestados exactos son mayores que O = 0.99 en todos los casos. Para calcular la superposición usamos:

$$O = \int \int Q_{\nu_c}(q, p) Q_{\nu_c}^{sc}(q, p) dq dp.$$
(5.15)

A modo comparativo, en la Figura 5.2 se muestran los repellers clásicos usando las funciones de reflectividad de Fermi-Dirac y sinusoidal, y los mismos valores del grado de reflectividad r que en el caso cuántico (Figura 5.1).



Figura 5.1: $Q_{\nu_c}^{sc}$ para las resonancias de vida larga con autovalores cuyo módulo es mayor que ν_c . Los paneles superiores corresponden a la reflectividad de Fermi-Dirac $(\nu_c = 0.81)$, y los paneles inferiores a la reflectividad sinusoidal $(\nu_c = 0.91)$. En los paneles de la izquierda se usó r = 0.01, mientras que en los de la derecha se usó r = 0.1.



Figura 5.2: Repellers clásicos para el tribaker abierto de manera continua. Los paneles superiores corresponden a la reflectividad de Fermi-Dirac, y los paneles inferiores a la reflectividad sinusoidal. En los paneles de la izquierda se usó r = 0.01, mientras que en los de la derecha se usó r = 0.1.

Una herramienta para analizar en más detalle los repellers cuánticos continuos es la eficiencia o *performance* P [12], la cual se define como la fracción de autovalores de vida larga reproducidos semiclásicamente dentro de un error dado por

$$\epsilon = \sqrt{\left[Re(\nu_i^{ex}) - Re(\nu_i^{sc})\right]^2 + \left[Im(\nu_i^{ex}) - Im(\nu_i^{sc})\right]^2}.$$
(5.16)

En la expresión 5.16, ν_i^{ex} y ν_i^{sc} son los autovalores exactos y aquellos dados por la teoría semiclásica, respectivamente. Se consideran autovalores cuyo módulo es mayor que un valor de corte ν_c . Se calcula el número de funciones de cicatriz N_{SF} como fracción de M, necesarias para obtener tantos autovalores semiclásicos tales que $\epsilon \leq 0.0001$ y $P \geq 0.8$. La fracción N_{SF}/M es una medida de la morfología del repeller; mientras más grande sea esta cantidad, más interconectadas estarán las órbitas periódicas pertenecientes al repulsor abierto. En este sentido, N_{SF}/M es una medida del apartamiento del caso completamente abierto.

En la Figura 5.3 se muestra el gráfico correspondiente a la fracción N_{SF}/M como función del parámetro $r \in [0, 0.1]$. Las líneas superiores y finas corresponden a la apertura sinusoidal, mientras que las líneas inferiores y gruesas corresponden a la apertura de tipo Fermi-Dirac. Las líneas azules con cuadrados corresponden al caso en el cual se toman las órbitas periódicas pertenecientes al repeller. Las líneas verdes con círculos corresponden a haber tomado en cuenta una cantidad máxima $N_{max}^{outPO} = 5$ de órbitas periódicas fuera del repeller.



Figura 5.3: Fracción de funciones de cicatriz N_{SF}/M necesarias para alcanzar una eficiencia P = 0.8 como función del parámetro r. Las líneas azules con cuadrados corresponden a considerar órbitas periódicas dentro del repeller. Las líneas verdes con cículos corresponden a considerar $N_{max}^{outPO} = 5$ órbitas fuera del repeller. Las líneas finas representan la apertura sinusoidal, mientras que las líneas gruesas corresponden a la apertura de tipo Fermi-Dirac.

No hay una mejora significativa en los cálculos al considerar las órbitas periódicas fuera del repeller. Esto sugiere que el rol fundamental en el cálculo de los repellers cuánticos está dado por las órbitas periódicas del repeller clásico completamente abierto. Además, se puede ver de la Figura 5.3 que la reflectividad de tipo Fermi-Dirac es capaz de mantener la reducción del número de órbitas periódicas necesarias, al igual que en el caso de las aperturas discontinuas (reflectividad constante). Por otro lado, para el caso de la función de reflectividad sinusoidal se observa que la fracción de funciones de cicatriz necesarias para alcanzar una eficiencia de P = 0.8 es mayor que en el caso de la reflectividad de tipo Fermi-Dirac.

Es de notar que no hay cambios significativos que se puedan apreciar tanto en el repeller cuántico (Figura 5.1) como clásico (Figura 5.2), entre r = 0.01 y r = 0.1, para el caso de la apertura sinusoidal. Por otro lado, los repellers correspondientes a la apertura de tipo Fermi-Dirac muestran diferencias significativas para esos valores de reflectividad.

Las órbitas periódicas más cortas pertenecientes al repeller completamente abierto resultan ser suficientes para reflectividades r < 0.1 y nuestra dimensión, $M = 3^5$. De hecho, pueden explicar completamente al repeller cuántico continuo.

Es así que la teoría de órbitas periódicas cortas nos permitió descubrir la estructura de los invariantes cuánticos. Capítulo 5. Teoría de OPs cortas aplicada a los mapas con aperturas continuas 86

Conclusiones

Se analizó un sistema dinámico, el mapa de baker, que presenta las propiedades típicas de los sistemas caóticos. En particular se estudió el tribaker, el cual es un sistema paradigmático que ha sido muy estudiado en los últimos años por su simplicidad para analizar sistemas parcialmente abiertos, es decir, aquellos en los cuales la reflectividad es no nula. Al considerar una función de reflectividad de tipo Fermi-Dirac en una región del espacio de fases, se intenta capturar los atributos esenciales para diferenciar continuidad y discontinuidad, haciendo que los bordes de la apertura en el espacio de fases sean funciones continuas. Por otro lado se usó una función de reflectividad sinusoidal que pretende modelar condiciones de contorno más genéricas. Estas funciones están caracterizadas por un parámetro $r \in [0, 1]$ que corresponde al valor mínimo de las mismas, permitiendo controlar el grado de reflectividad del sistema.

Con respecto a la dimensión multifractal, se pudo determinar que el sistema presenta un comportamiento distinto al caso en que la reflectividad es una función constante. La dimensión multifractal para los sistemas abiertos de manera continua toma valores mayores como función del parámetro q, lo que indica que el espacio de fases se llena más rápidamente que en el caso de usar una reflectividad constante (es decir, el sistema se hace más parecido al cerrado).

La forma de los repellers clásicos se ve afectada en concordancia con estos cam-

bios observados al usar una reflectividad continua. El sistema se cierra de forma más rápida para una reflectividad cuya variación es sinusoidal, y más lentamente para la función de tipo Fermi-Dirac. Para esta última, el repeller clásico se parece más al de reflectividad constante.

Se implementó el tribaker cuántico, usando la cuantización propuesta por Balazs-Voros-Saraceno, la cual considera condiciones de contorno antiperiódicas en el espacio de fases. El estudio del espectro de autovalores del operador del tribaker cuántico parcialmente abierto mostró resultados distintos usando una reflectividad continua. La mediana de la distribución de autovalores toma valores mayores para este último caso. Haciendo un gráfico del número de autoestados en función de la dimensión del espacio de Hilbert, se comparó la curva con la predicción de la ley de Weyl fractal, observando discrepancias con la misma. Por otro lado, la dimensión local presenta resultados muy distintos a los de reflectividad constante. En este último caso, la dimensión local tiene grandes oscilaciones, mientras que para reflectividades continuas estas oscilaciones son mucho más pequeñas o prácticamente nulas, sobre todo en el caso de reflectividad sinusoidal. Esto sucede incluso para valores chicos del parámetro r, sugiriendo que es necesario investigar una ley de Weyl distinta para estos casos, o al menos un régimen diferente.

Finalmente, se aplicó la teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas para mapas cuánticos abiertos de manera continua. Gracias a esto se descubrió la estructura de los conjuntos invariantes cuánticos para este tipo de aperturas. El rol de las órbitas periódicas más cortas pertenecientes al repeller completamente abierto es muy importante. Para r < 0.1 y $M = 3^5$ hemos logrado reproducir la estructura fundamental del repeller cuántico abierto de manera continua a partir de estas órbitas, de períodos $L \leq 7$. De hecho, al incluir una pequeña cantidad $N_{max}^{outPO} = 5$ de órbitas periódicas fuera del repeller, el resultado no cambia significativamente. Más aún, en el caso de la reflectividad de Fermi-Dirac se pudo usar una pequeña cantidad de óribtas periódicas dentro de una región perturbativa en r.

Creemos que estos nuevos resultados pueden ser verificados mediante experimentos con microláseres. Más aún, consideramos que pueden ser de vital importancia para el diseño de nuevas cavidades resonantes en general.

Apéndice: Cálculo de la dimensión multifractal

El algoritmo usado para calcular el espectro de dimensiones d_q es el siguiente:

- Primero se generan N puntos al azar en el toro unitario (q, p) ∈ [0, 1] × [0, 1], y a cada uno de ellos se le aplica el mapa correspondiente una cantidad n de veces. Se usaron N = 35000 puntos y se evolucionó el mapa n = 10 veces.
- 2. En cada paso y para cada punto del espacio de fases se calcula la intensidad, siendo la intensidad inicial en cada punto $I_0 = 1$. En el paso n+1, la intensidad será $I_{n+1} = \mathcal{R}(\mathbf{x_n})I_n$, donde $\mathcal{R}(\mathbf{x_n}) \in [0, 1]$ es el valor de la reflectividad en el punto $\mathbf{x_n}$ del espacio de fases.
- 3. Se cubre el espacio de fases con tres rectángulos b_i de tamaño $\varepsilon = 1 \times 1/3$, de modo que no se solapen entre sí.
- 4. En cada rectángulo b_i se calcula la medida μ_i como la intensidad promedio de las trayectorias que corresponden a condiciones iniciales de b_i :

$$\mu_{n,i} = \frac{\langle I \rangle_{n,i}}{\sum_i \langle I \rangle_{n,i}},\tag{5.17}$$

donde el valor medio de la intensidad se calcula sobre condiciones iniciales correspondientes a cada rectángulo.

- 5. Se calcula $f_q(\varepsilon, \mu) = \sum_{i,\mu_i>0} \mu_i^q$ para distintos valores del parámetro $q \in [0, 10]$. Se repiten los pasos 3, 4 y 5 achicando el tamaño de los rectángulos. Así, se obtiene una cierta cantidad de valores de f_q para cada valor de ε_n , que es el tamaño de los rectángulos ($\varepsilon_n = 1 \times (1/3)^n \text{ con } n \in \mathbf{Z}$).
- 6. Se realiza un gráfico de $f_q(\varepsilon_n, \mu)$ en función de $(q-1)ln(\varepsilon_n)$, y se hace un ajuste lineal. La pendiente de la recta es d_q .

En la Figura 5.4 se muestra un ejemplo del gráfico obtenido para el cálculo de la dimensión multifractal d_q .



Figura 5.4: Gráfico para el cálculo de la dimensión multifractal d_q para q = 2. En este caso se usó la función de reflectividad de tipo Fermi-Dirac (ecuación 3.7) con un grado de reflectividad r = 0.2. Se usó una cantidad de puntos N = 35000 y se iteró el mapa n = 10 veces. En este caso se obtuvo $d_q = 0.85$.

Agradecimientos

Principalmente a mi director Gabriel Carlo, por la paciencia y dedicación durante todo el proceso del trabajo.

A mi familia, por bancarme, ayudarme, interesarse y presionarme durante toda la carrera.

A mis amigos, por haberme acompañado siempre.

A la Universidad de Buenos Aires, por brindarme una educación de excelencia y calidad.

Bibliografía

- Carlos A. Prado, Gabriel G. Carlo, R. M. Benito, F. Borondo, arXiv:1711.03852 (2017).
- [2] Li Wang, Domenico Lippolis, Ze-Yang Li, Xue-Feng Jiang, Qihuang Gong, Yun-Feng Xiao, Phys. Rev. E 93, 040201 (2016).
- [3] Domenico Lippolis, Li Wang, Yun-Feng Xiao, Phys. Rev. E 96, 012217 (2017).
- [4] Jan Wiersig, Jörg Main, Phys. Rev. E 77, 036205 (2008).
- [5] Satoshi Sunada, Susumu Shinohara, Takehiro Fukushima, Takahisa Harayama, Phys. Rev. Lett. 116, 203903 (2016).
- [6] O'Dae Kwon, Byoungho Lee, Kyungwon An, Trends in Nano- and Micro-Cavities
- [7] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), 2nd ed.
- [8] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), 2nd ed.
- [9] Gabriel G. Carlo, Alejandro M. F. Rivas, María E. Spina, Phys. Rev. E 84, 066201 (2011).

- [10] Leonardo Ermann, Marcos Saraceno, Phys. Rev. E 78, 036221 (2008).
- [11] Leonardo Ermann, Gabriel G. Carlo, Juan M. Pedrosa, Marcos Saraceno, Phys. Rev. E 85, 066204 (2012).
- [12] Gabriel G. Carlo, D. A. Wisniacki, Leonardo Ermann, R. M. Benito, F. Borondo, Phys. Rev. E 87, 012909 (2013).
- [13] Moritz Schonwetter, Eduardo G. Altmann, Phys. Rev. E 91, 012919 (2015).
- [14] Gabriel G. Carlo, R. M. Benito, F. Borondo, Phys. Rev. E 94, 012222 (2016).
- [15] M. Novaes, J. M. Pedrosa, D. Wisniacki, G. G. Carlo, J. P. Keating, Phys. Rev. E 80, 035202 (2009).
- [16] Leonardo Ermann, G. G. Carlo, M. Saraceno, Phys. Rev. Lett. 103, 054102 (2009).
- [17] Leonardo Ermann, Gabriel G. Carlo, Marcos Saraceno, Phys. Rev. Lett. 103, 054102 (2009).
- [18] Juan M. Pedrosa, Gabriel G. Carlo, Diego A. Wisniacki, Leonardo Ermann, Phys. Rev. E 79, 016215 (2009).
- [19] F. Haake, Quantum Signatures of Chaos (Springer-Verlag, Berlin, 2000), second revised and enlarged edition.
- [20] J. J. Sakurai, San Fu Tuan, Modern Quantum Mechanics (Pearson Education, 1994), Revised Edition.
- [21] M. Saraceno, A. Voros, Physica D **79** 206 (1994).
- [22] L. D. Landau, E. M. Lifshtiz, Quantum Mechanics, non-relativistic theory (Pergamon Press, U.S.S.R., 1991), 3rd ed.

- [23] E. G. Vergini, G. G. Carlo, Journal of Physics A: Math and Gen. 34, 4525 (2001).
- [24] L. Kaplan, E. J. Heller, Annals of Physics **264**, 171(1998).
- [25] L. Kaplan, E. J. Heller, Phys. Rev. E 59, 6609 (1999).
- [26] Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann, Concepts and Results in Chaotic Dynamics: A Short Course (Springer, Berlin, 2006).
- [27] Eduardo G. Altmann, Jefferson S. E. Portela, Tamás Tél, Rev. Mod. Phys. 85, 869 (2013).
- [28] Eduardo G. Altmann, Jefferson S. E. Portela, Tamás Tél, Phys. Rev. Lett. 111, 144101 (2013).
- [29] W. T. Lu, S. Sridhar, Maciej Zworski, Phys. Rev. Lett. **91**, 154101 (2003).
- [30] F. Revuelta, R. M. Benito, F. Borondo, E. Vergini, Phys. Rev. E 87, 042921 (2013).
- [31] Lisandro A. Raviola, Gabriel G. Carlo, Alejandro M. F. Rivas, Phys. Rev. E 81, 047201 (2009).
- [32] Marcel Novaes, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 143001 (2013).
- [33] Eric J. Heller, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).