

Tesis de Grado

Agujeros negros como lentes gravitatorias en teorías alternativas

Badía, Javier

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Badía, Javier. (2017). Agujeros negros como lentes gravitatorias en teorías alternativas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000060_Badia

Cita tipo Chicago:

Badía, Javier. "Agujeros negros como lentes gravitatorias en teorías alternativas". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000060_Badia

Agujeros negros como lentes gravitatorias en teorías alternativas

Javier Badía

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Diciembre, 2017

TEMA: Lentes gravitatorias – Agujeros negros en teorías alternativas – Gravedad de Horndeski

ALUMNO: LU N° : 360/12

LUGAR DE TRABAJO: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Ernesto F. Eiroa

FECHA DE INICIACION: Marzo 2017

FECHA DE FINALIZACION: Diciembre 2017

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio teórico de agujeros negros no rotantes como lentes gravitatorias en el marco de la gravedad de Horndeski. Luego de una breve introducción a la relatividad general y las soluciones de agujeros negros, se muestra el formalismo general para calcular trayectorias de la luz alrededor de un objeto esférico. Este formalismo se puede especializar a los límites de deflexión débil y de deflexión fuerte. Es en este último donde se centra el análisis; se encuentra de manera general que en el caso de que la lente sea un agujero negro, el ángulo de deflexión de la luz diverge a medida que la misma se acerca a la esfera de fotones del mismo. Como consecuencia, se generan dos secuencias infinitas de las llamadas imágenes relativistas, una a cada lado de la lente. Ambos límites son aplicados a la solución de agujero negro proveniente de un caso particular de la gravedad de Horndeski, una clase de teorías escalar-tensoriales alternativas a la relatividad general. Se obtienen las posiciones y las magnificaciones de las imágenes. Se consideran como posibles lentes a los agujeros negros supermasivos ubicados en el centro de nuestra galaxia y de la galaxia M87, y se discuten las posibilidades de observación de estos efectos ópticos en el entorno de los mismos.

Agradecimientos

Mucha gente me acompañó durante este año, pero en especial quiero agradecer a Ernesto Eiroa por su disposición, su paciencia, y su ayuda a lo largo del año. Sin él esta tesis no hubiera sido posible.

Índice general

1. Introducción	1
2. Relatividad general y agujeros negros	5
2.1. Relatividad general	5
2.2. Ecuaciones de Einstein	8
2.3. Agujeros negros	10
3. Lentes gravitatorias	16
3.1. Ecuación de la lente	16
3.2. Ángulo de deflexión exacto	19
3.3. Límite de deflexión débil	22
3.4. Límite de deflexión fuerte	24
3.5. Observables	29
3.6. Ejemplo: Agujero negro de Schwarzschild	32
4. Agujero negro en gravedad de Horndeski	35
4.1. Teoría de Horndeski	35
4.2. Solución de agujero negro	37
4.3. Límite de deflexión fuerte	39
4.4. Observables astrofísicos	42
4.4.1. Agujero negro supermasivo galáctico	43
4.4.2. Agujero negro supermasivo en M87	44
5. Conclusiones	45
A. Unidades geométricas	49
B. Constantes astrofísicas	50
B.1. Masa y radio solares	50
B.2. Factores de conversión	50
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

Se denomina lente gravitatoria a cualquier objeto que, por la acción de su campo gravitatorio, desvía los rayos de luz que pasan por su entorno. El fenómeno de *lensing* gravitatorio obtuvo una sólida base teórica a partir del desarrollo por parte de Einstein de la relatividad general. Previamente a la formulación completa de la misma se había conjeturado que la luz debería ser afectada por la gravedad, y distintos cálculos [1] basados en la gravedad Newtoniana o en el principio de equivalencia indicaban que un rayo de luz pasando a una distancia R de un cuerpo de masa M se desviaría en un ángulo $\alpha = 2GM/(c^2R)$, bajo la hipótesis de que R sea mucho mayor a GM/c^2 , es decir, que el ángulo de deflexión sea pequeño. Sin embargo, con el desarrollo de la relatividad general, Einstein descubrió que hay efectos adicionales que hacen que la fórmula correcta sea $\alpha = 4GM/(c^2R)$, que corresponde al doble del valor mencionado arriba. La observación realizada durante el eclipse solar de 1919 [1, 2] confirmó este resultado, según el cual un rayo de luz tangente a la superficie del Sol es desviado en un ángulo de 1,66". Durante las décadas de 1960 y 1970 aumentó considerablemente tanto la cantidad de experimentos como la precisión en las mediciones, factor que contribuyó a establecer a la relatividad general en una posición dominante por sobre sus alternativas propuestas.

La deflexión de la luz produce efectos aún más interesantes que el recién mencionado. En 1936, un artículo de Einstein [3] mostró que, si el alineamiento entre la lente, la fuente y el observador es el adecuado, se pueden producir múltiples imágenes de un mismo objeto, y las mismas pueden resultar fuertemente magnificadas. La primera detección de una situación con estas características ocurrió en 1979, cuando dos quásares aparentemente distintos pero con características prácticamente idénticas fueron identificados como dos imágenes del mismo objeto [4]. Desde ese entonces se han observado múltiples ocurrencias de *lensing* gravitatorio, y se ha podido medir no sólo la posición angular de las imágenes sino también su magnificación (particularmente mediante el fenómeno de *microlensing*) y, en

el caso de una fuente variable, el desfase temporal entre las distintas imágenes. Las observaciones mencionadas entran dentro del régimen de deflexión débil, en el cual el campo gravitatorio es débil y es válida la expresión citada anteriormente para el ángulo de deflexión¹. Más cuantitativamente, dado un objeto de masa M se puede definir una distancia característica $r_M = GM/c^2$; la condición de campo débil se puede expresar entonces como $r_M/R \ll 1$, donde R es la distancia a la masa M . En términos del potencial Newtoniano ϕ esto se puede expresar como $\phi/c^2 \ll 1$; esta versión es más apropiada para distribuciones de masa extendidas. Una exposición detallada de lentes gravitatorias en el régimen de deflexión débil puede encontrarse en la Ref. [5].

Varios autores, inicialmente en 1959 [6] y varias veces después [7-10] durante las siguientes décadas, analizaron el límite opuesto, en el cual un rayo de luz atraviesa una región de campo fuerte, como puede ser en la cercanía de un agujero negro. El resultado más notable es que a medida que la luz se acerca a la esfera de fotones del agujero negro el ángulo de deflexión diverge a infinito. Esto implica que se produce un número infinito de imágenes de la misma fuente, cada una más débil y más cerca de la lente que la anterior; más precisamente, hay dos secuencias infinitas de imágenes, una a cada lado de la lente. Estas secuencias se encuentran rodeadas por las dos imágenes correspondientes al régimen de deflexión débil. De estas últimas, la que está del mismo lado de la lente que la fuente (desde el punto de vista del observador) se denomina *imagen primaria* y la opuesta se denomina *imagen secundaria*; todas las otras imágenes, que tienen un ángulo de deflexión mayor a 2π , se conocen como *imágenes relativistas*. En los primeros trabajos [6-10] el límite de deflexión fuerte fue estudiado sólo para el agujero negro de Schwarzschild; fue luego extendido al espacio-tiempo de Reissner-Nordström [11], y finalmente generalizado a una amplia familia de geometrías con simetría esférica [12]. Recientemente fue mejorado, simplificando los cálculos y permitiendo su aplicación a una clase aún más general de geometrías esféricas [13]. Hay ya muchos trabajos que involucran al límite de deflexión fuerte en la literatura, que incluyen análisis de *retrolensing*² [14-16] y agujeros de gusano [16, 17]. Se han estudiado también geometrías provenientes de la teoría de cuerdas y teorías alternativas [18-25] o de mundos brana [26-32]. El formalismo ha sido aplicado al agujero negro supermasivo ubicado en el centro de nuestra galaxia [33-38], para analizar las posibilidades de observación del *lensing* gravitatorio en el régimen fuerte. Se han hecho también estudios numéricos [39-42].

Los agujeros negros poseen por fuera del horizonte una superficie denominada *esfera de fotones*, la cual es la unión de todas las órbitas circulares inestables de

¹Estrictamente, la fórmula es válida para una masa puntual o esférica, pero es posible generalizarla para cualquier distribución de masa para el cual el campo gravitatorio sea débil.

²Es decir, el caso en que la fuente está entre la lente y el observador, o bien el observador está entre la fuente y la lente.

rayos de luz [43]; la misma tiene la propiedad de que cualquier rayo de luz que la atraviese hacia adentro inexorablemente caerá al interior del agujero negro. La esfera de fotones marca entonces el radio para el cual el ángulo de deflexión diverge: la desviación de un rayo de luz aumenta a medida que la distancia de máximo acercamiento del mismo tiende al radio de la esfera de fotones. Esto implica que para tener la secuencia infinita de imágenes es necesario un objeto suficientemente compacto para que su superficie quede dentro de su esfera de fotones. En la geometría de Schwarzschild el radio de la esfera de fotones para un objeto de masa M es $r_m = 3GM/c^2$, mientras que el radio por debajo del cual el objeto colapsa en un agujero negro es $r_S = 2GM/c^2$, por lo que hay un corto intervalo entre ambos valores para el cual un objeto distinto de un agujero negro puede mostrar deflexión fuerte. Algunos modelos [44] admiten la posibilidad de que haya estrellas de neutrones denominadas *ultracompactas* con un radio en este rango. Sin embargo, por simplicidad se usará la frase “agujero negro” para referirse a la lente, ya que los mismos parecen ser los candidatos más apropiados para observar las imágenes relativistas; la naturaleza precisa de la lente no es importante siempre y cuando posea una esfera de fotones. Como se dijo más arriba, el límite de deflexión fuerte fue inicialmente desarrollado para el espacio-tiempo de Schwarzschild, que es la solución de vacío con simetría esférica de la relatividad general, y luego generalizado a cualquier solución con simetría esférica³. En este límite, se realiza una expansión logarítmica para el ángulo de deflexión α en función de b/b_c , donde b es el parámetro de impacto del rayo de luz y b_c el llamado parámetro de impacto crítico, por debajo del cual la luz es atrapada por el agujero negro. A partir de esta aproximación se pueden hallar las posiciones de las imágenes y sus magnificaciones.

Tener un formalismo adecuado a cualquier espacio-tiempo asintóticamente plano y con simetría esférica permite extender el estudio de las lentes gravitacionales en el régimen de deflexión fuerte al caso de teorías alternativas de la gravedad. A pesar de que la relatividad general es favorecida por las observaciones en diversas situaciones [1], a escalas cosmológicas se encuentran fenómenos que carecen de una explicación totalmente satisfactoria, pues requieren la presencia de la *materia oscura* y la *energía oscura*. La materia oscura resuelve problemas en varias áreas de la cosmología [49], en todos los casos proviniendo del hecho de que la materia bariónica no es suficiente para dar cuenta de las observaciones, en particular las curvas de rotación de las galaxias; sin embargo, hasta el presente nunca ha sido observada directamente. La energía oscura, a su vez, surge del descubrimiento de la expansión acelerada del universo como una densidad de energía uniforme en el tiempo y en el espacio que provoca una suerte de efecto de repulsión [50]. Se ha

³La hipótesis de simetría esférica implica un objeto estático, es decir, no rotante [43]. El análisis del *lensing* gravitatorio para objetos rotantes es notablemente más complicado [45-48] y no se considerará en este trabajo.

propuesto que la energía oscura puede estar relacionada con la energía de vacío de campos cuánticos; sin embargo, dada la discrepancia de aproximadamente 120 órdenes de magnitud [51] entre el valor esperado y el observado, no hay todavía un consenso al respecto, recibiendo esta discrepancia el nombre de “problema de la constante cosmológica”⁴. La existencia de esta falta de acuerdo entre la teoría y las observaciones ha motivado el desarrollo de teorías alternativas de la gravedad, con la esperanza de que alguna de ellas explique naturalmente los fenómenos arriba mencionados. Una clase corresponde a las llamadas teorías *escalar-tensoriales*, que al tensor métrico de la relatividad general agregan un campo escalar, cuya dinámica e interacciones detalladas dependen de cada teoría. El principal resultado de Horndeski [52] fue encontrar la forma más general para una teoría escalar-tensorial que resulte en ecuaciones de movimiento de segundo orden. La teoría estudiada en este trabajo es un caso particular de la teoría de Horndeski.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se presenta brevemente la teoría de la relatividad general y se realiza una revisión de las soluciones de agujeros negros más conocidas. El capítulo 3 es una introducción al tema de lentes gravitatorias: se deducen las ecuaciones geométricas de la trayectoria, y se muestra como calcular el ángulo de deflexión a partir de un espacio-tiempo dado. Se consideran los dos límites usuales: el de deflexión débil, aplicable cuando el rayo de luz atraviesa siempre la región del espacio-tiempo lejana a la lente, y el de deflexión fuerte, que corresponde a un rayo de luz pasando cerca de la esfera de fotones de un agujero negro. Luego, en el capítulo 4, se presenta la teoría de Horndeski en su forma general y en el caso particular que es de interés, junto con la solución de agujero negro a estudiar. Se aplica el formalismo de *lensing* gravitatorio a esta geometría, y se toman dos ejemplos astrofísicos para ilustrar las posibilidades de observación de *lensing* en el régimen de deflexión fuerte. Por último, en el capítulo 5 se discuten algunas conclusiones sobre todo lo desarrollado a lo largo del trabajo.

⁴La constante cosmológica es una constante con un valor *a priori* no determinado que aparece en las ecuaciones de Einstein. Como produce el mismo efecto gravitatorio que la energía oscura [43], es común usar ambas frases de manera intercambiable.

Capítulo 2

Relatividad general y agujeros negros

En este capítulo se realiza una introducción a la teoría de la relatividad general y se presenta en detalle el agujero negro más simple, el espacio-tiempo de Schwarzschild. Concretamente, en la sección 2.1 se introducen los conceptos básicos de la relatividad general, y en la sección 2.2 se presenta el formalismo necesario para describir las ecuaciones de Einstein. En la sección 2.3 se describe el agujero negro de Schwarzschild junto con las propiedades de los agujeros negros en general. Todos los aspectos de la relatividad general descritos a lo largo de este capítulo pueden encontrarse en libros tales como Misner, Thorne y Wheeler [43] o Carroll [53]. Desde este punto en adelante se usan unidades tales que $G = c = 1$.

2.1. Relatividad general

La relatividad general es una teoría en la cual la gravedad queda descrita por la geometría del espacio-tiempo. Su objeto fundamental es el *tensor métrico* o *métrica* $g_{\mu\nu}$, el cual es un tensor covariante de rango 2 simétrico (es decir $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) y no degenerado (es decir que si $g_{\mu\nu}X^\nu = 0$, entonces $X^\nu = 0$) definido en una variedad diferenciable. En cada punto de la misma se puede realizar un cambio de coordenadas que diagonaliza la métrica con los elementos de la diagonal iguales a ± 1 ; la especificación de los signos de los mismos se denomina la *signatura* de la métrica. En estas coordenadas, se denomina *métrica Riemanniana* a aquella que tiene todos los elementos de la diagonal iguales a 1; en relatividad se trabaja normalmente en cuatro dimensiones y con signatura $(-, +, +, +)$, lo que implica una métrica *semi-Riemanniana* o *Lorentziana*¹.

¹Es posible usar también una signatura $(+, -, -, -)$; ambas convenciones son equivalentes.

La métrica permite calcular productos escalares entre vectores; dados dos vectores \vec{X} e \vec{Y} , su producto escalar se define como

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} \equiv g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu, \quad (2.1)$$

donde se adopta la convención de Einstein de sumar sobre los índices repetidos. En particular, $X^2 \equiv \vec{X} \cdot \vec{X} = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$ es el producto de un vector por sí mismo, y puede ser positivo, negativo o cero, en cuyo caso el vector \vec{X} se denomina *espacial*, *temporal*, o *nulo*, respectivamente. El conjunto de todos los vectores nulos tangentes a un evento se denomina el *cono de luz* en dicho evento.

Es usual describir una dada métrica dando una expresión para el intervalo ds^2 entre dos puntos x^μ y $x^\mu + dx^\mu$ separados infinitesimalmente. El mismo es

$$ds^2 \equiv \vec{dx} \cdot \vec{dx} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

usando la regla (2.1) para el producto escalar entre vectores. Cualquier expresión cuadrática en los dx^μ permite extraer los componentes de la métrica en las coordenadas correspondientes.

En un espacio (o espacio-tiempo) plano es posible comparar dos vectores situados en distintos puntos comparando sus componentes en coordenadas cartesianas; geoméricamente, los vectores se transportan de manera paralela hasta hacer coincidir sus bases. Sin embargo, en un espacio curvo general no hay una noción *a priori* de transporte paralelo, por lo que debe ser definida explícitamente. Una noción de transporte paralelo se denomina una *conexión*, y la conexión estándar en la relatividad general es la *conexión de Levi-Civita*. En una base coordenada, la misma se puede definir mediante los *símbolos de Christoffel*

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}), \quad (2.3)$$

donde una coma significa una derivada con respecto a la coordenada indicada: $g_{\rho\nu,\lambda} = \partial_\lambda g_{\rho\nu}$. Los símbolos de Christoffel no forman un tensor, pero dado un vector o tensor se puede definir su *derivada covariante*, que sí lo es. Más específicamente, dado un vector \vec{X} se define un tensor de tipo (1, 1) llamado su derivada covariante cuyas componentes son

$$\nabla_\nu X^\mu \equiv X^\mu{}_{;\nu} \equiv X^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} X^\lambda; \quad (2.4)$$

hay definiciones similares para tensores de mayor rango. Este objeto se transforma como un tensor, y tiene la interpretación geométrica de dar el transporte paralelo de \vec{X} : dada una curva con vector tangente \vec{Y} , el vector \vec{X} se dice transportado paralelamente a lo largo de la curva si se cumple que

$$Y^\nu \nabla_\nu X^\mu = 0. \quad (2.5)$$

Una de las propiedades que separan a la conexión de Levi-Civita de otras es que es compatible con la métrica; es decir, $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$.

Una curva que transporta paralelamente su vector tangente se denomina una *geodésica*². Los puntos de la curva se pueden escribir en función de un parámetro λ como $x^\mu(\lambda)$ y el vector tangente es $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$. La condición de que la curva transporte paralelamente su vector tangente es entonces

$$\frac{dU^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0. \quad (2.6)$$

La importancia de las geodésicas radica en que uno de los postulados de la relatividad general es que las partículas libres de fuerzas se mueven a lo largo de geodésicas en el espacio-tiempo³; en particular, las partículas con masa deben moverse a lo largo de geodésicas temporales, es decir, aquellas cuyo vector tangente cumple $\vec{U} \cdot \vec{U} < 0$: localmente esto implica que la partícula se mueve más lentamente que la luz. El estudio de la propagación de la luz en espacio-tiempos curvos asegura que, bajo ciertas hipótesis⁴, los rayos de luz se mueven a lo largo de geodésicas nulas (es decir, aquellas con $\vec{U} \cdot \vec{U} = 0$). Más aún, para propósitos de la propagación de la energía, es posible considerar un rayo de luz como un conjunto de partículas (fotones) moviéndose a lo largo de geodésicas nulas. Por lo tanto, a lo largo de este trabajo las frases “rayo de luz” y “fotón” se usan de manera intercambiable. Dada una curva temporal (no necesariamente una geodésica), es usual normalizar su parámetro para que su vector tangente \vec{U} sea unitario, es decir, $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$. En tal caso, el parámetro coincide con el tiempo propio τ a lo largo de la curva, y el vector tangente se denomina *cuadri-velocidad*. Sin embargo, esto no es posible de realizar para una curva nula, ya que el vector tangente tiene norma cero independientemente de la normalización del parámetro λ . La convención usual es llamar $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ al vector tangente con λ definido a menos de una transformación afín $\lambda \rightarrow a\lambda + b$. Se puede fijar la normalización del parámetro pidiendo que \vec{p} sea el cuadri-impulso físico del fotón, aunque la ambigüedad en λ no es un problema para las aplicaciones clásicas. Para una partícula con masa se puede definir simplemente $\vec{p} = m\vec{U}$ como su cuadri-impulso físico.

²El nombre viene de que las geodésicas son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos o, en el espacio-tiempo, las que extremizan el intervalo.

³Estrictamente esto se aplica a *partículas de prueba*, es decir, aquellas cuya influencia gravitatoria es suficientemente chica como para despreciar su efecto sobre el campo gravitatorio de fondo; esto es análogo a la condición de partícula de prueba en el electromagnetismo. Además, las partículas deben tener un tamaño mucho menor que la escala de variación típica del campo gravitatorio; si no es así, se deben tener en cuenta efectos debidos a los gradientes de gravedad.

⁴Al igual que en la óptica geométrica clásica, se pide que la longitud de onda de la luz sea mucho menor que la escala en la que cambian las propiedades tales como amplitud, polarización y la misma longitud de onda. Adicionalmente, debe ser mucho menor que el radio de curvatura típico del espacio-tiempo.

Por último es necesaria la extensión de las leyes de conservación a espacio-tiempos curvos. Para el presente trabajo no se necesitará la formulación más general de la misma sino una más simple: si la métrica es independiente de una coordenada x^α , la correspondiente componente covariante del impulso p_α es constante a lo largo de una geodésica. Por ejemplo, un espacio-tiempo se denomina *estacionario* si se pueden elegir coordenadas en las cuales la métrica es independiente del tiempo. En tal caso, sobre cualquier geodésica (ya sea correspondiente a una partícula con masa o a un fotón) se conservará $p_t = g_{t\mu}p^\mu$; esta cantidad se identifica con la energía, al ser la magnitud conservada como resultado de invariancia ante traslaciones temporales.

2.2. Ecuaciones de Einstein

Los aspectos descritos hasta ahora son, en la mayoría de los casos, comunes a distintas teorías de la gravedad, ya sean la relatividad general o una de sus alternativas. Con lo ya dicho es posible, dada una métrica $g_{\mu\nu}$, calcular las trayectorias de partículas puntuales libres. El elemento que falta es una ley que permita obtener la métrica generada por una dada distribución de materia, que sea análoga a la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$ en la gravedad Newtoniana. Para esto se utiliza el *tensor de Riemann* o *tensor de curvatura* $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$. El mismo expresa el cambio que hay en un vector transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada infinitesimal; en un espacio plano el transporte paralelo es independiente del camino, por lo que el tensor de Riemann es cero. Equivalentemente está dado por un conmutador de derivadas covariantes, nuevamente expresando el hecho de que el transporte paralelo depende del camino:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}V^\nu \equiv \nabla_\lambda\nabla_\rho V^\mu - \nabla_\rho\nabla_\lambda V^\mu. \quad (2.7)$$

Expandiendo las derivadas covariantes segun la expresión (2.4) se obtiene que

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \Gamma^\mu{}_{\nu\rho,\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda,\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\rho}. \quad (2.8)$$

El tensor de Riemann obedece ciertas propiedades de simetría que reducen la cantidad de componentes independientes a 20 en un espacio-tiempo de 4 dimensiones. Estas simetrías son

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.9)$$

y

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (2.10)$$

Por otro lado, se satisfacen también las *identidades de Bianchi*

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho;\sigma} + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda;\rho} = 0. \quad (2.11)$$

A partir del tensor de Riemann se pueden definir el *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad (2.12)$$

y el *escalar de curvatura*

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Al proponer una ecuación de movimiento para la métrica, se toma como principio básico que la densidad de masa es la fuente del campo gravitatorio; en una teoría relativista, ésta se generaliza al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, y la conservación del mismo es expresada por $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, es razonable proponer que $T_{\mu\nu}$ esté igualado a algún tensor relacionado con la métrica que satisfaga esta identidad; de esta manera, las ecuaciones de movimiento implican automáticamente la conservación de energía-momento. Usando las identidades de Bianchi (2.11) se puede ver que el *tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.14)$$

satisface la identidad $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$. Se tienen entonces las *ecuaciones de Einstein*

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

donde Λ es llamada la *constante cosmológica* y el factor 8π se puede deducir pidiendo que las ecuaciones de Einstein se reduzcan a la gravedad Newtoniana en el límite correspondiente, es decir, cuando el campo gravitatorio es estático, débil, y los objetos se mueven con velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. El actual modelo estándar cosmológico, llamado el modelo Λ -CDM por *cold dark matter*, es decir, materia oscura fría, determina un valor del orden de $\Lambda \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. Este valor es mucho menor a las curvaturas típicas a escalas locales⁵, por lo que para propósitos de este trabajo puede ser ignorado; en lo que sigue se tomará $\Lambda = 0$.

En particular, es relevante la forma de las ecuaciones de Einstein en vacío, con $T_{\mu\nu} = 0$. Contrayendo índices en Ec. (2.15) para $\Lambda = 0$ se obtiene que

$$-R = 8\pi T^{\mu}{}_{\mu}, \quad (2.16)$$

por lo que si $T_{\mu\nu} = 0$ entonces $R = 0$ y las ecuaciones de Einstein en vacío son simplemente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

⁵Pasando el término de constante cosmológica al lado derecho de las ecuaciones de Einstein, la misma puede considerarse como una contribución al tensor energía-momento de $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = -\Lambda/(8\pi)g_{\mu\nu}$, lo que implica una densidad de energía $\rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi \sim 10^{-26} \text{ kg/m}^{-3}$, mucho menor que las densidades relevantes para objetos astrofísicos.

La solución más simple a estas ecuaciones es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, llamada la *métrica de Minkowski*. Su tensor de curvatura se anula, por lo que es la métrica de un espacio-tiempo plano.

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener también a partir de la acción

$$S = \underbrace{\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R}_{S_{EH}} + S_M, \quad (2.18)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y S_{EH} se denomina la acción de Einstein-Hilbert; el factor de $\sqrt{-g}$ es necesario para que la acción sea un escalar. S_M es la parte de la acción correspondiente a la materia; se tiene la relación $T_{\mu\nu} = -2/\sqrt{-g} \delta S_M / \delta g^{\mu\nu}$. La modificación de la acción de Einstein-Hilbert es el punto de partida más común para proponer teorías alternativas a la relatividad general.

2.3. Agujeros negros

Una de las primeras soluciones encontradas a las ecuaciones de Einstein es la solución de Schwarzschild, correspondiente a la métrica de vacío exterior a un objeto esférico. Para empezar, cualquier métrica con simetría esférica se puede llevar a la forma

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.19)$$

donde (t, r, θ, φ) se comportan como las coordenadas esféricas usuales. Reemplazando el *ansatz* (2.19) en las ecuaciones de Einstein en vacío (2.17) se obtiene

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.20)$$

con M una constante de integración. De esta manera se tiene la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

usando la abreviación usual $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Ésta es la solución de vacío con simetría esférica en la relatividad general: corresponde al exterior de un objeto esférico, tal como un planeta o una estrella. En este caso, el parámetro M es interpretado como la masa del objeto, lo que se puede justificar analizando órbitas lejanas y comparando con la gravedad Newtoniana.

Se puede ver por análisis dimensional que $r_S = 2M$ es una distancia, denominada el *radio de Schwarzschild*; cuando $r \rightarrow r_S$ la métrica se vuelve singular,

ya que se tiene que $g_{tt} \rightarrow 0$ y $g_{rr} \rightarrow \infty$. Para la gran mayoría de los objetos astrofísicos el radio de Schwarzschild asociado con su masa es mucho menor que su radio; por ejemplo, para el Sol se tiene $r_{S\odot} \approx 3$ km. Esto quiere decir que la solución de vacío deja de ser válida a partir de un radio mucho mayor que r_S , y debe ser reemplazada por una que incluya algún modelo de la materia que compone al objeto. Por lo tanto, la singularidad de la métrica de Schwarzschild no es un problema para un objeto con un radio $R > r_S$. Vale preguntarse igualmente qué pasa si un objeto tiene un radio menor a su radio de Schwarzschild. La métrica tiene singularidades en $r = 0$ y $r = r_S$, y se puede ver que estas singularidades tienen distintas características. El punto $r = 0$ es una verdadera singularidad física, en el sentido de que la curvatura diverge; en particular, se puede calcular el escalar de Kretschmann $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 48M^2/r^6$, el cual diverge a medida que $r \rightarrow 0$. Al ser un escalar, es independiente del sistema coordenadas usado, y es cuadrático en la curvatura (es decir, en el tensor de Riemann); por lo tanto, se lo puede tomar como un indicador de que las magnitudes físicas divergen en $r = 0$. Sin embargo, la singularidad en $r = r_S$ no es física, sino que corresponde a una “mala” elección de coordenadas. El hecho de que las componentes de $g_{\mu\nu}$ diverjan o sean cero no necesariamente tiene consecuencias físicas, ya que dependen del sistema de coordenadas. Como ejemplo se puede tomar al plano \mathbb{R}^2 en coordenadas polares, en las cuales la métrica toma la forma $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Cuando $r \rightarrow 0$ se tiene que $g_{\varphi\varphi} \rightarrow 0$ y $g^{\varphi\varphi} \rightarrow \infty$, y sin embargo el espacio es perfectamente regular en $r = 0$; esto se puede demostrar mediante el cambio a coordenadas cartesianas, en las que no hay ninguna singularidad. Para la métrica de Schwarzschild el cambio de coordenadas es menos obvio pero existe; una posible elección son las coordenadas de Kruskal-Szekeres, en las cuales las coordenadas de Schwarzschild (t, r) se intercambian por otro par (T, R) dado por

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ R &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned} \right\} \text{ si } r > 2M, \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ R &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned} \right\} \text{ si } r < 2M. \quad (2.23)$$

En estas coordenadas la métrica resulta ser

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.24)$$

con r definido implícitamente en función de T y R a través de

$$-T^2 + R^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M}. \quad (2.25)$$

Se puede observar que la superficie $r = r_S$ corresponde a $|T| = |R|$, y que en estas coordenadas la métrica es regular no sólo sobre dicha superficie sino en todo el espacio-tiempo, salvo en $r = 0$.

La superficie definida por $r = r_S$ se denomina el horizonte de eventos, y es de importancia fundamental, ya que define una zona del espacio-tiempo de la cual ninguna partícula que siga una trayectoria temporal o nula puede escapar. La presencia de esta superficie es lo que define a los objetos denominados agujeros negros. Una forma rápida de ver esto es notar que en la métrica expresada en coordenadas de Schwarzschild, Ec. (2.21), los coeficientes junto a dt^2 y dr^2 cambian de signo cuando $r < 2M$. Esto implica que dentro del agujero negro la coordenada t es espacial y r es temporal; más precisamente, se cumple que $\partial/\partial t \cdot \partial/\partial t > 0$ y $\partial/\partial r \cdot \partial/\partial r < 0$, lo que implica que los correspondientes vectores tangentes son espacial y temporal respectivamente. Por lo tanto, para cualquier trayectoria que no se mueva más rápido que la luz r debe ser siempre decreciente⁶, ya que hace las veces de “tiempo” para la trayectoria: cualquier objeto que entre a un agujero negro necesariamente debe moverse hacia $r = 0$.

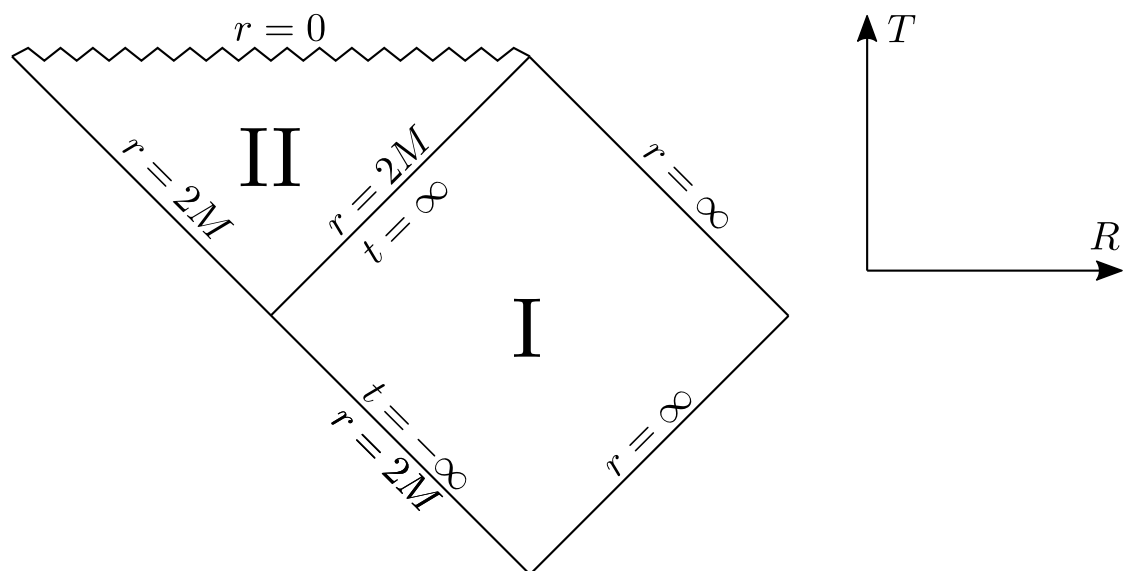


Figura 2.1: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild. Las coordenadas (θ, φ) no se muestran, por lo que cada punto representa una 2-esfera. Los rayos de luz corresponden a rectas a 45° . El horizonte de eventos es la recta marcada $r = 2M$ que divide las regiones I y II, que son el interior y el exterior del agujero negro respectivamente. La línea en zig-zag es la singularidad.

⁶Es posible hablar de un “agujero blanco”, para el cual r debe ser siempre creciente. No hay evidencia observacional de la existencia de dichos objetos, por lo que no serán considerados en este trabajo.

A partir de las coordenadas de Kruskal-Szekeres (T, R) , se puede realizar un cambio de coordenadas que las lleva a un dominio finito. De esta manera, se puede realizar un diagrama de espacio-tiempo acotado para visualizar la estructura de la geometría considerada. Se puede ver de la métrica (2.24) que los rayos de luz radiales (es decir, con $ds^2 = 0$ y $d\Omega^2 = 0$) tienen $|dR/dT| = 1$, por lo que son representados por rectas a 45° . El cambio de coordenadas mencionado preserva esta propiedad, y el diagrama resultante, mostrado en la Figura 2.1, es conocido como un *diagrama de Penrose*. En este diagrama, los bordes no son parte del espacio-tiempo propiamente dicho sino que son el infinito, traído a una distancia finita por el cambio de coordenadas. Se puede ver claramente que el horizonte de eventos está a 45° , por lo que ninguna trayectoria temporal o nula (es decir, con inclinación mayor o igual a 45°) puede salir una vez cruzado el horizonte. El diagrama también muestra que, para los objetos que caen dentro del agujero negro, la inevitabilidad de llegar a la singularidad se debe a que la misma está en el futuro de todas las trayectorias. En otras palabras, la singularidad es espacial y no temporal; es más similar a un instante en el tiempo que a un punto en el espacio.

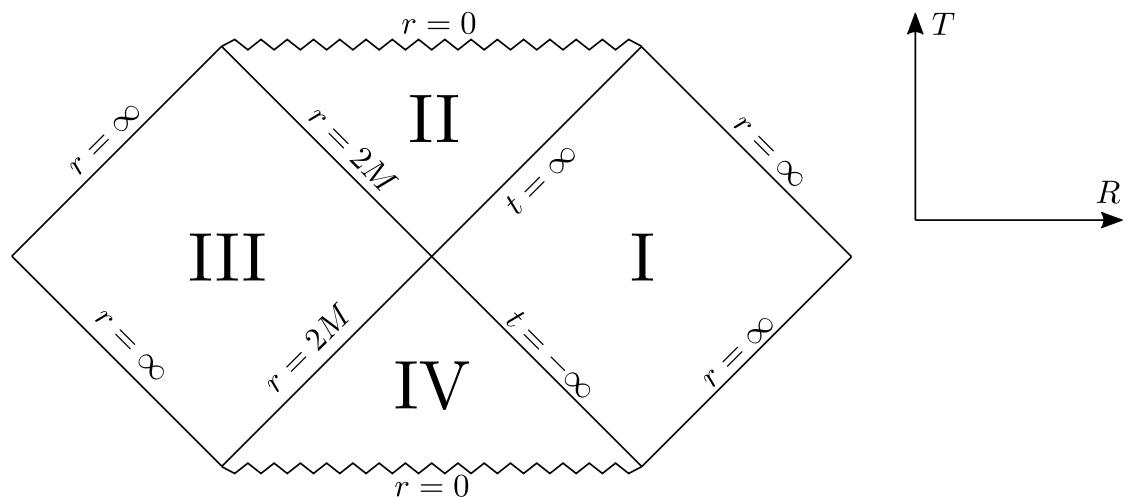


Figura 2.2: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild extendido. Las regiones I y III son dos regiones asintóticamente planas que no se pueden comunicar entre sí.

El espacio-tiempo de la Figura 2.1 tiene la particularidad de ser *incompleto hacia el pasado*; es decir, hay trayectorias que continuadas hacia el pasado llegan al “borde” del espacio-tiempo en tiempo propio finito, y en este borde, correspondiente a $r = 2M$ y $t = -\infty$, no hay ninguna singularidad. Esta situación puede resolverse de dos maneras. Matemáticamente, la métrica en la forma de Kruskal-Szekeres (2.24) describe un espacio-tiempo más grande que el cubierto por las

coordenadas (t, r) ; el diagrama de Penrose de dicho espacio-tiempo, a veces llamado *Schwarzschild extendido*, se muestra en la Figura 2.2. Su principal característica es que describe dos regiones separadas del espacio-tiempo, unidas a través de un agujero negro y un agujero blanco. La estructura causal de la geometría implica que las dos regiones no pueden comunicarse entre sí. Este espacio-tiempo, sin embargo, corresponde a un agujero negro estático y eterno. Las soluciones realistas en las que el agujero negro se forma a partir de un colapso de materia modifican el pasado del mismo, de manera que se evita la incompletitud de las trayectorias, y el espacio-tiempo se aproxima al espacio-tiempo de Minkowski para $t \rightarrow -\infty$. En cualquier caso, para este trabajo sólo es relevante la región exterior al horizonte de eventos mostrado en el diagrama incompleto (Figura 2.1), así que estas modificaciones no son necesarias.

La solución de Schwarzschild es la que corresponde a un agujero negro no rotante en el vacío. Se puede obtener también una solución esféricamente simétrica de agujero negro con carga eléctrica, llamada la solución de Reissner-Nordström. Para esto hay que resolver las ecuaciones de Maxwell en conjunto con las de Einstein, ya no en vacío sino con el tensor de energía-momento correspondiente a un campo electrostático. Esta solución tiene la forma

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (2.26)$$

con Q la carga del agujero negro. Posee un horizonte de eventos siempre y cuando $|Q| \leq M$; para $|Q| > M$ el horizonte desaparece dando lugar a una singularidad desnuda, lo que normalmente no es considerado una solución física⁷. Al igual que la solución de Schwarzschild, esta geometría tiene una singularidad en $r = 0$. También es posible considerar un agujero negro rotante; la métrica resultante, conocida como la solución de Kerr, se vuelve significativamente más complicada, ya que la rotación rompe la simetría esférica, dejando sólo una simetría axial. En este caso, el momento angular J debe cumplir $J < M^2$ para que exista el horizonte de eventos. Finalmente, la solución más general, involucrando tanto carga eléctrica como momento angular, es conocida como la solución de Kerr-Newman. Ambos casos de agujeros negros rotantes presentan una singularidad en forma de anillo, en lugar de la versión puntual de las geometrías con simetría esférica. Por fuera del horizonte de eventos, las geometrías de Kerr y de Kerr-Newman presentan una zona llamada ergoesfera. En esta región, un cuerpo no puede permanecer en reposo y debe rotar en la dirección que lo hace el agujero negro.

Para el presente trabajo, el aspecto más importante de los agujeros negros es que tienen una superficie denominada *esfera de fotones*. Un rayo de luz puede orbitar el agujero negro únicamente sobre una órbita circular, cuyo radio es $r_m = 3M$

⁷Ver el final de la sección 4.4 para una discusión similar en el contexto de la teoría de Horndeski.

para el agujero negro de Schwarzschild, y dicha órbita es inestable: cualquier fotón que esté en un radio ligeramente mayor a r_m y moviéndose hacia afuera escapará al infinito, mientras que si cruza la esfera de fotones hacia adentro inevitablemente caerá al agujero negro. Como se mencionó en la introducción, la presencia de la esfera de fotones reviste especial interés en el caso de las lentes gravitatorias.

Capítulo 3

Lentes gravitatorias

En este capítulo se analizan las posibles trayectorias de los fotones en la región cercana a un agujero negro, con el objetivo de encontrar expresiones para el ángulo de deflexión en los límites de deflexión débil y deflexión fuerte. Sin embargo, para hacer conexión con las observaciones es necesario tener una ecuación que relacione el ángulo de deflexión proveniente de la teoría de gravedad elegida con los observables astronómicos. En la sección 3.1 se realiza un resumen de las ecuaciones de lentes conocidas, con especial énfasis en la que se usará en el resto del trabajo. Luego en la sección 3.2 se obtiene una fórmula para encontrar el ángulo de deflexión en cualquier espacio-tiempo esféricamente simétrico y asintóticamente plano, y en las secciones 3.3 y 3.4 se toman límites de esta fórmula en los casos de deflexión débil y deflexión fuerte. En la sección 3.5 se obtienen las posiciones y magnificaciones de las imágenes y se definen dos cantidades que permiten hacer conexión con observaciones. Por último, en la sección 3.6 se aplica todo el formalismo a la métrica de Schwarzschild como ejemplo.

3.1. Ecuación de la lente

La geometría de una lente gravitatoria puede verse en la Figura 3.1. Se define al eje óptico como la recta entre la lente y el observador. D_{OL} es la distancia entre los mismos, D_{LS} la distancia entre la lente y el plano de la fuente, y $D_{OS} = D_{OL} + D_{LS}$ la distancia del observador al plano de la fuente. Se denomina β al ángulo que forma la fuente con el eje óptico, y θ al ángulo en que se observa la imagen. Por último, α es el ángulo de deflexión de la luz, que puede ser mayor a 2π en el caso de que la misma dé una o más vueltas completas alrededor de la lente. En la figura se ilustra una situación donde la imagen y la fuente están, desde el punto de vista del observador, del mismo lado de la lente. Al final de esta sección se tratará el caso de una imagen que esté del lado opuesto. El espacio-tiempo es

tomado como asintóticamente plano, y en el presente trabajo (así como en gran parte de la literatura) se considera que tanto el observador como la fuente están situados en el infinito¹, es decir, suficientemente lejos de la lente como para que el efecto de su campo gravitatorio sea despreciable. Concretamente, si r_g da la escala de distancia de la métrica en cuestión (por ejemplo, si la métrica es la de Schwarzschild entonces $r_g = 2M$), se pide que $r_g/D_{OL} \ll 1$ y $r_g/D_{LS} \ll 1$. La ventaja de esta aproximación es que se puede usar la geometría Euclidea para las relaciones geométricas.

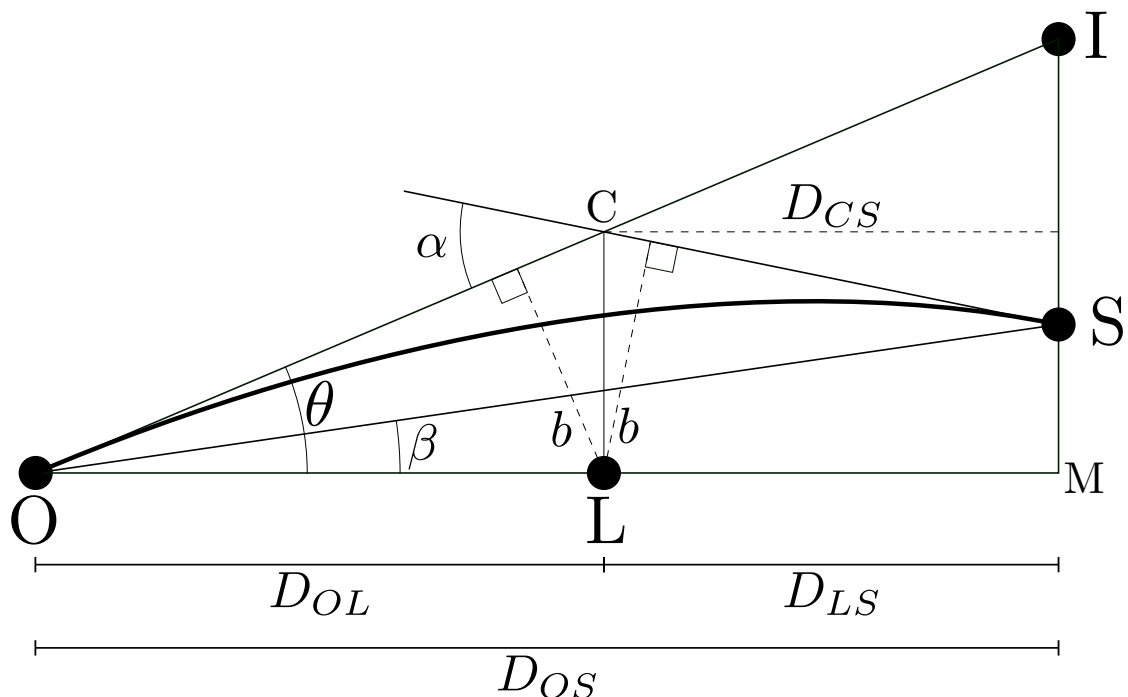


Figura 3.1: Geometría de una lente gravitatoria en la aproximación de lente delgada. S, L, I y O son la fuente, la lente, la imagen y el observador respectivamente. β es el ángulo de la fuente con respecto a la lente, θ el ángulo de la imagen, y α el ángulo de deflexión. Se ilustra la primera imagen, para la cual $0 < \alpha < 2\pi$.

De acuerdo con las aproximaciones que se hagan, es posible escribir distintas expresiones para la denominada ecuación de la lente; los artículos de Frittelli *et al.* [54] y Bozza [55] tratan el tema en detalle. Una de las ecuaciones de la lente más populares y una de las primeras en ser propuestas es la de Virbhadra y Ellis [56]. En ella se realiza la aproximación denominada de lente delgada: se considera que el punto C de la Figura 3.1, donde se cortan las tangentes a los rayos de luz, está ubicado sobre el plano de la lente. En otras palabras, se aproxima a la trayectoria de

¹Ver, por ejemplo, Ref. [47] para un análisis con distancias arbitrarias.

la luz con dos líneas rectas que se encuentran en el plano de la lente. La deducción de la ecuación de lente es simple. Se ve de la Figura 3.1 que $\overline{MS} = D_{OS} \tan \beta$, $\overline{MI} = D_{OS} \tan \theta$ y $\overline{SI} = D_{CS} [\tan \theta + \tan(\alpha - \theta)]$. La aproximación de lente delgada consiste entonces en decir que $D_{CS} \approx D_{LS}$, y la ecuación resulta

$$D_{OS} \tan \beta = D_{OS} \tan \theta - D_{LS} [\tan \theta + \tan(\alpha - \theta)]. \quad (3.1)$$

La siguiente aproximación que se puede hacer es la de ángulos pequeños o, más precisamente, de alto alineamiento. Los efectos debidos a la deflexión de la luz son más pronunciados cuando fuente, lente y observador están alineados entre sí; por lo tanto, es razonable considerar el caso en que los ángulos β y θ son pequeños [5]. En esta situación, el ángulo de deflexión α no es necesariamente pequeño, pero debe estar cerca de un múltiplo de 2π , por el alto alineamiento. Si se define $\alpha = 2\pi n + \Delta\alpha$ con $|\Delta\alpha| \ll 1$, entonces al hacer una aproximación de primer orden de las funciones trigonométricas en Ec. (3.1) se tiene que

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \Delta\alpha. \quad (3.2)$$

Esta es la ecuación que se usará en el resto del trabajo. En su derivación se ha supuesto que la fuente y las imágenes están del mismo lado de la lente, tomando todos los ángulos como positivos. De estas imágenes, la que tiene $0 < \alpha < 2\pi$ se denomina imagen primaria. La misma fórmula se puede usar para imágenes que aparezcan del lado opuesto de la lente [12], de las cuales la primera se denomina imagen secundaria. En la Figura 3.2 se muestra que tener imágenes del lado de abajo es equivalente a tener un β negativo. O, dicho de otra manera, si en la ecuación (3.2) se reemplaza β por $-\beta$, se obtienen las imágenes del lado opuesto de la lente, con θ y α positivos.

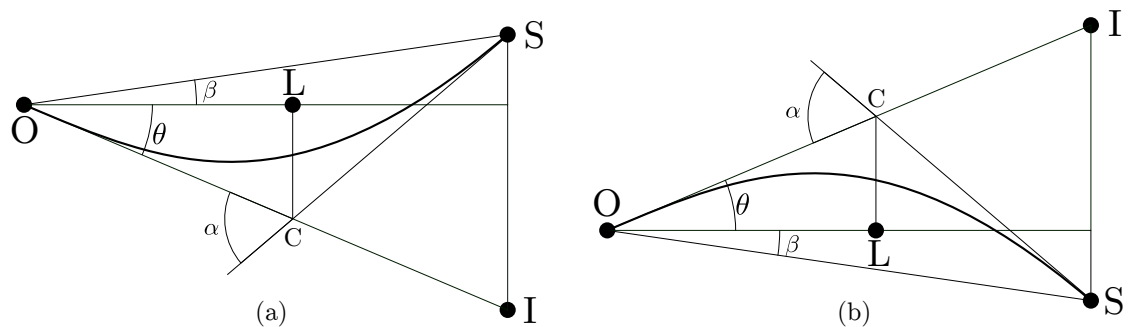


Figura 3.2: (a) Imagen secundaria, con θ y α medidos del lado opuesto que β . En (b) se ilustra cómo esto es equivalente a tener θ y α positivos, igual que en la imagen primaria, pero con β negativo.

3.2. Ángulo de deflexión exacto

En esta sección se estudia el comportamiento de un rayo de luz que se deflece en el campo gravitatorio de un objeto esférico y estático. El desarrollo tiene dos partes principales: primero se introduce la métrica, se deduce la ecuación de la órbita, se encuentra el radio de la esfera de fotones y se escribe la integral a resolver para encontrar el ángulo de deflexión. Dicha integral es en general imposible de hallar analíticamente, por lo que en las siguientes dos secciones se tomarán los límites en los que el rayo de luz pasa cerca o lejos respectivamente de la esfera de fotones.

Se comienza entonces con la ya mencionada forma general de una métrica con simetría esférica [43]:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.3)$$

Siempre es posible realizar un cambio de coordenadas para tener $C(r) = r^2$, pero no siempre es conveniente, por lo que es común dejar que la función $C(r)$ sea arbitraria. Dada esta forma general, la condición de que la métrica sea asintóticamente plana cuando $r \rightarrow \infty$ se expresa como

$$\begin{aligned} A(r) &\rightarrow 1, \\ B(r) &\rightarrow 1, \\ C(r) &\rightarrow r^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ya que el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas tiene la forma descrita arriba con $A(r) = B(r) = 1$, $C(r) = r^2$. La simetría esférica del problema permite tomar $\theta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad [43].

El primer paso es identificar las conservaciones correspondientes en este caso. El cuadri-impulso de un fotón se puede escribir de manera general como

$$p^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, 0, \dot{\varphi}), \quad (3.5)$$

donde el punto representa la derivada con respecto al parámetro afín. Al ser la métrica independiente de t y de φ , se obtienen las cantidades conservadas

$$E \equiv -p_t = A(r)\dot{t} \quad (3.6)$$

$$L \equiv p_\varphi = C(r)\dot{\varphi}. \quad (3.7)$$

Estas constantes pueden ser interpretadas como la energía y el momento angular del fotón, al resultar de la invariancia de la métrica ante traslaciones temporales y rotaciones respectivamente. Se asume aquí que ninguna de las dos es cero. Reemplazando ambas cantidades conservadas en la expresión (3.5) para p^μ y usando

que el mismo satisface $p_\mu p^\mu = 0$, se obtiene que

$$-\frac{E^2}{A(r)} + B(r)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{C(r)} = 0. \quad (3.8)$$

Resulta conveniente definir el parámetro de impacto $b = L/E$. Su nombre se justificará a continuación calculando el ángulo θ en la posición del observador, suponiendo que el mismo se encuentra en la región asintóticamente plana del espacio-tiempo, como muestra la Figura 4.3. En el límite $r \rightarrow \infty$ (ver Ec. (3.4)) y usando las leyes de conservación se tiene que $p^\varphi = L/r^2$. Ésta es la componente en la base coordenada, en la cual la métrica toma la forma (3.3); la componente en la base ortonormal asociada, mostrada en la figura, es $p^{\hat{\varphi}} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}p^\varphi = L/r$. Usando Ec. (3.8), se ve que la hipotenusa al cuadrado del triángulo determinado por la cantidad de movimiento es $\dot{r}^2 + L^2/r^2 = E^2$, por lo que

$$\sin \theta = \frac{L/r}{E} = \frac{b}{r}, \quad (3.9)$$

lo que le da a b su interpretación geométrica como el parámetro de impacto (ver Figura 3.1, donde se muestra que $b = r \sin \theta = D_{OL} \sin \theta$).

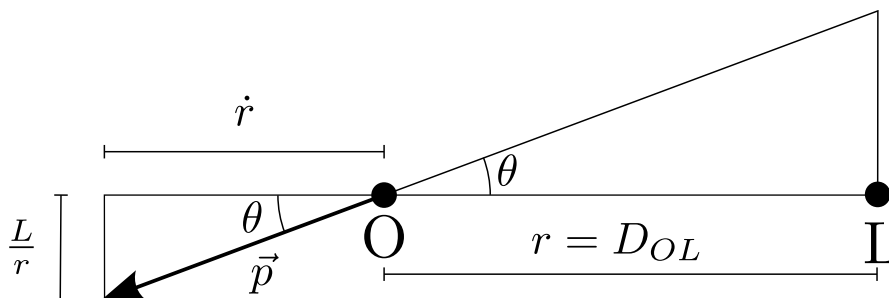


Figura 3.3: Cantidad de movimiento (o vector de onda) \vec{p} en la posición del observador, suponiendo que el mismo está muy alejado de la lente. Estrictamente se muestra la proyección espacial de la cantidad de movimiento y no el cuadrivector completo.

Volviendo a la ecuación (3.8), la misma se puede reescribir como

$$\dot{r}^2 + V(r) = 0, \quad (3.10)$$

con

$$V(r) = -\frac{L^2}{B(r)C(r)} \left(\frac{C(r)}{A(r)b^2} - 1 \right) \equiv -\frac{L^2}{B(r)C(r)} R(r), \quad (3.11)$$

donde se ha definido

$$R(r) = \frac{C(r)}{A(r)b^2} - 1. \quad (3.12)$$

De la ecuación (3.10) se ve que $V(r)$ funciona de potencial efectivo para una partícula moviéndose con energía igual a 0. Usando que la métrica es asintóticamente plana, es decir, las condiciones (3.4) sobre las funciones A , B y C , surge inmediatamente que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = -E^2 < 0$, lo que implica que la región $r \rightarrow \infty$ es accesible al fotón. Asumiendo que el mismo se acerca desde el infinito hacia la lente, el punto de retorno será en r_0 , la solución más grande de $V(r) = 0$. Si se asume que las funciones $B(r)$ y $C(r)$ no divergen fuera del horizonte de eventos, dicho radio será también la solución más grande de $R(r) = 0$, de donde surge que

$$b = \sqrt{\frac{C(r_0)}{A(r_0)}}. \quad (3.13)$$

Para seguir hace falta identificar la esfera de fotones, aquí definida como la última órbita circular nula (Hase y Perlick [57] comparan otras definiciones y demuestran su equivalencia). Una órbita circular tiene $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$; se demostró arriba que $\dot{r} = 0$ implica $R(r) = 0$. Derivando la ecuación (3.10) con respecto al parámetro afín se ve que $\ddot{r} = 0$ cuando $V'(r) = 0$, y usando que $R(r) = 0$ esta condición se reduce a $R'(r) = 0$. Despejando se obtiene que el radio de la esfera de fotones r_m es tal que [13]

$$D(r_m) = 0, \quad (3.14)$$

con

$$D(r) = \frac{C'(r)}{C(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)}. \quad (3.15)$$

El último paso es escribir una expresión para el ángulo de deflexión. Para esto se puede reemplazar

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{C(r)} \quad (3.16)$$

en la ecuaciones de la trayectoria (3.10) y (3.11) para obtener

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{C(r)R(r)}{B(r)}, \quad (3.17)$$

de forma que

$$\Delta\varphi(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \sqrt{\frac{B(r)}{C(r)R(r)}} dr \equiv I(r_0) \quad (3.18)$$

es el cambio total en el ángulo azimutal para un fotón que viene desde el infinito hasta un radio mínimo r_0 y vuelve a salir hacia el infinito [58]. Es importante notar que $R(r)$ depende implícitamente de r_0 a través de b . En ausencia de gravedad, se tiene que $A(r) = B(r) = 1$ y $C(r) = r^2$ y se puede verificar que $\Delta\varphi(r_0) = \pi$, y,

como es de esperar, el rayo de luz no se desvía. Por lo tanto, se define el ángulo de deflexión α como la diferencia entre $\Delta\varphi$ y π :

$$\alpha(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \sqrt{\frac{B(r)}{C(r)R(r)}} dr - \pi = I(r_0) - \pi. \quad (3.19)$$

En las siguientes dos secciones se tomarán los límites $r_0 \gg r_m$ y $r_0 \rightarrow r_m$ respectivamente.

3.3. Límite de deflexión débil

El caso en el que la luz solamente atraviesa una región de campo débil es históricamente el más relevante y el único que ha podido ser estudiado observacionalmente hasta el presente. Para analizarlo se parte de la integral $I(r_0)$ definida en Ec. (3.18) y se realiza una expansión [58] de las funciones $A(r)$, $B(r)$ y $C(r)$ para $r \rightarrow \infty$. Las funciones $A(r)$ y $B(r)$ se pueden desarrollar a primer orden en $1/r$:

$$A(r) \approx 1 - \frac{2M}{r}, \quad (3.20)$$

$$B(r) \approx 1 + \frac{2\gamma_0 M}{r}, \quad (3.21)$$

donde M es la masa del objeto que produce el campo gravitatorio y γ_0 un parámetro que depende de la métrica considerada. La razón por la que no se incluye ningún parámetro en la expansión de $A(r)$ es que la ecuación (3.20) es en la práctica la definición de la masa del cuerpo, ya que es a través de $A(r)$ que la misma afecta las órbitas de objetos lejanos [58]. Por último, se toma $C(r) = r^2$; tal elección siempre es posible mediante un cambio de coordenadas. La predicción de la relatividad general es $\gamma_0 = 1$.

Para reemplazar estas expansiones en $I(r_0)$ y aproximar, es conveniente volver a escribir el integrando usando r_0 en lugar de b mediante la ecuación (3.13), según la cual $1/b^2 = A(r_0)/r_0^2$. Haciendo esta sustitución se obtiene que

$$I(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B(r)}}{r} \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{A(r_0)}{A(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (3.22)$$

Tomando aparte el último factor y reemplazando la expansión de A se tiene que

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{A(r_0)}{A(r)} - 1 \approx \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right) \left(1 + \frac{2M}{r} \right) - 1; \quad (3.23)$$

desarrollando los paréntesis a primer orden en $1/r$ y $1/r_0$ esto es

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{A(r_0)}{A(r)} - 1 \approx \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(1 + 2M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right) - 1.$$

Distribuyendo y luego sacando un factor común de $(r/r_0)^2 - 1$ eventualmente se obtiene que

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{A(r_0)}{A(r)} - 1 \approx \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] \left(1 - \frac{2Mr}{r_0(r+r_0)}\right).$$

Reemplazando esto en la integral y expandiendo $\sqrt{B(r)}$ queda entonces

$$I(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \left(1 + \frac{M\gamma_0}{r} + \frac{Mr}{r_0(r+r_0)}\right) dr. \quad (3.24)$$

El primer término de esta integral se puede calcular usando la sustitución $u = \sqrt{(r/r_0)^2 - 1}$ y los otros dos con la sustitución $r = r_0 \sec u$. El resultado es [58]

$$I(r_0) = \pi + \frac{2M(1 + \gamma_0)}{r_0}, \quad (3.25)$$

de modo que finalmente el ángulo de deflexión en el límite de deflexión débil viene dado por

$$\alpha(r_0) = I(r_0) - \pi = \frac{2M(1 + \gamma_0)}{r_0}. \quad (3.26)$$

Como se mencionó más arriba, la predicción de la relatividad general es $\gamma_0 = 1$, dando el conocido resultado $\alpha = 4M/r_0$. Se puede notar que a este nivel de aproximación r_0 y b son equivalentes, ya que de la ecuación (3.13) se ve que para $r_0 \rightarrow \infty$, $b \approx r_0 + M$, con $r_0 \gg M$.

En el límite de deflexión débil es bien conocido que hay dos imágenes cuyas posiciones, para la geometría de Schwarzschild (es decir $\gamma_0 = 1$), vienen dadas por [5]

$$\theta_{p,s} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \quad (3.27)$$

donde $\theta_E = \sqrt{4MD_{LS}/(D_{OL}D_{OS})}$ es el radio de Einstein, y los signos (+) y (-) corresponden a la imagen primaria y secundaria respectivamente. Las magnificaciones son [5]

$$\mu_{p,s} = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \right) \pm \frac{1}{2}. \quad (3.28)$$

Para alineación perfecta ($\beta = 0$), en lugar de dos imágenes puntuales se obtiene el llamado anillo de Einstein, con $\theta = \theta_E$.

3.4. Límite de deflexión fuerte

En esta sección se aproxima a la integral (3.19) para r_0 cercano a r_m , el radio de la esfera de fotones, siguiendo el procedimiento introducido recientemente por Tsukamoto [13]. El primer paso es hacer un cambio de variables²

$$z = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad r = \frac{r_0}{1-z}, \quad dr = \frac{r_0}{(1-z)^2} dz, \quad (3.29)$$

mediante el cual la integral se convierte en

$$I(r_0) = \int_0^1 f(z, r_0) dz, \quad (3.30)$$

con

$$f(z, r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{G(z, r_0)}}, \quad (3.31)$$

donde

$$G(z, r_0) = \frac{R(r(z))C(r(z))}{B(r(z))}(1-z)^4. \quad (3.32)$$

El objetivo es expandir $G(z)$ hasta segundo orden en potencias de z ; se puede ver inmediatamente que $G(z=0) = 0$, de manera que su desarrollo comienza con el término de orden uno. Usando la notación de que una prima representa una derivada con respecto a r , se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = G' \frac{r_0}{(1-z)^2} \quad (3.33)$$

y

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = G'' \frac{r_0^2}{(1-z)^4} + G' \frac{2r_0}{(1-z)^3}. \quad (3.34)$$

El punto $z = 0$ corresponde a $r = r_0$, por lo que la expansión de G alrededor de dicho punto es

$$G(z, r_0) = r_0 G'_0 z + \left(\frac{1}{2} r_0^2 G''_0 + r_0 G'_0 \right) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.35)$$

donde un subíndice cero indica la función evaluada en $r = r_0$. En lo que sigue se calculan las derivadas; es importante recordar que $R_0 = 0$ por definición de r_0 . De la definición (3.15) de $D(r)$ se tiene que

$$D' = \frac{C'''}{C} - \frac{A''}{A} - \left(\frac{C'}{C} \right)^2 + \left(\frac{A'}{A} \right)^2 = \frac{C'''}{C} - \frac{A''}{A} - D \left(D + 2 \frac{A'}{A} \right), \quad (3.36)$$

²Bozza [12] propuso usar $z = (A(r) - A(r_0))/(1 - A(r_0))$, pero esta sustitución no funciona para una métrica ultraestática, es decir, una en la que $A(r)$ es constante.

mientras que las derivadas de R son

$$R' = \frac{C'}{Ab^2} - \frac{CA'}{A^2b^2} = (R+1)D \quad (3.37)$$

y

$$R'' = R'D + (R+1)D' = (R+1)(D^2 + D'); \quad (3.38)$$

evaluando en $r = r_0$ se tiene que

$$R'_0 = D_0 \quad (3.39)$$

y

$$R''_0 = D_0^2 + D'_0. \quad (3.40)$$

Entonces, recordando que $R_0 = 0$, la derivada de G es

$$G'_0 = \frac{R'_0 C_0}{B_0} = \frac{C_0 D_0}{B_0}. \quad (3.41)$$

La derivada segunda tiene varios términos; la estrategia general es intentar escribir todo en función de D ya que esto luego simplificará las fórmulas. Si se escribe la expansión de G como

$$G(z, r_0) = g_1(r_0)z + g_2(r_0)z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.42)$$

entonces

$$g_1(r_0) = \frac{C_0 D_0 r_0}{B_0} \quad (3.43)$$

y

$$g_2(r_0) = \frac{C_0 r_0}{B_0} \left\{ D_0 \left[\left(D_0 - \frac{B'_0}{B_0} \right) r_0 - 3 \right] + \frac{r_0}{2} \left(\frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) \right\}. \quad (3.44)$$

Recordando que el radio de la esfera de fotones r_m es donde D se anula, se ve inmediatamente que

$$g_1(r_m) = 0 \quad (3.45)$$

y

$$g_2(r_m) = \frac{C_m r_m^2}{2B_m} D'_m, \quad (3.46)$$

donde $C_m = C(r_m)$ e igualmente para las otras funciones. Este resultado implica que, para $r_0 = r_m$, G empieza a segundo orden en z y por lo tanto $I(r_m)$ diverge, ya que su integrando, que va como $G^{-1/2}$, es de orden $1/z$ cerca de $z = 0$. Esto es finalmente la demostración de que a medida que la distancia de máximo acercamiento de un rayo de luz se acerca a la esfera de fotones, el ángulo de deflexión diverge: el rayo puede dar una o más vueltas alrededor de la lente antes de volver a

escapar al infinito. Como ya se dijo en la sección 3.1, las dos imágenes con $\alpha < 2\pi$ que se ven a ambos lados de la lente se denominan imagen primaria y secundaria según estén del mismo lado de la lente o del otro lado, mientras que todas las otras se denominan *imágenes relativistas*. En la Figura 3.4 se muestra la primera imagen relativista, con $2\pi < \alpha < 4\pi$. El siguiente paso es separar de la integral $I(r_0)$ su

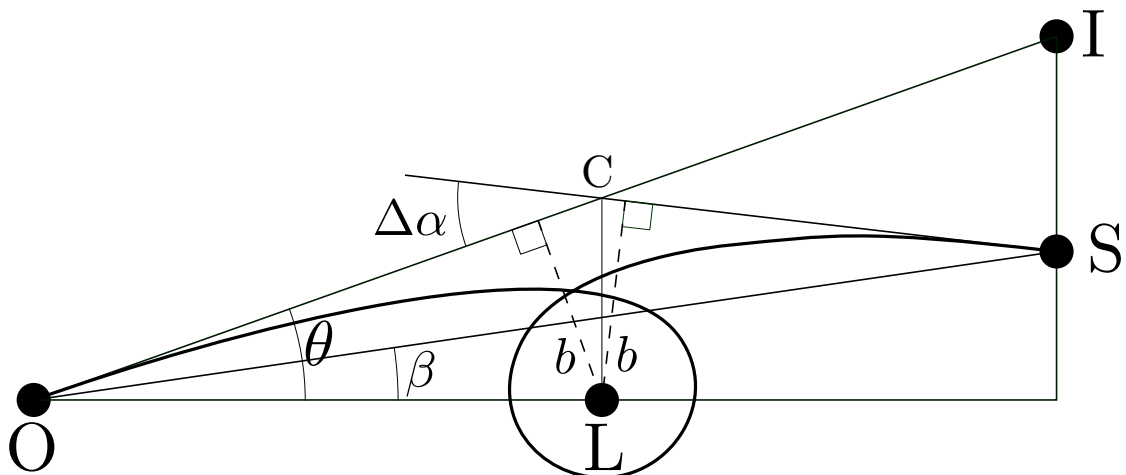


Figura 3.4: Primera imagen relativista, con $2\pi < \alpha < 4\pi$.

parte divergente. Para eso se define una función f_D usando sólo la expansión a segundo orden de G ,

$$f_D(z, r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{g_1(r_0)z + g_2(r_0)z^2}}, \quad (3.47)$$

y la integral divergente asociada

$$I_D(r_0) = \int_0^1 f_D(z, r_0) dz. \quad (3.48)$$

Dicha integral se puede calcular explícitamente. Realizando una sustitución $z = (g_1/2g_2)(x - 1)$ la misma se convierte en

$$I_D(r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{g_2}} \int_1^{1+2\frac{g_2}{g_1}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (3.49)$$

Usando la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (3.50)$$

se obtiene que

$$I_D(r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{g_2}} \log\left(\frac{g_1 + 2g_2}{g_1} + \frac{2}{g_1} \sqrt{g_2^2 + g_1 g_2}\right) \quad (3.51)$$

y finalmente se llega a que

$$I_D(r_0) = \frac{4r_0}{\sqrt{g_2}} \log \frac{\sqrt{g_2} + \sqrt{g_1 + g_2}}{\sqrt{g_1}}. \quad (3.52)$$

Ya se mostró que esta integral diverge cuando $r_0 \rightarrow r_m$; se puede comprobar que esto es cierto recordando que $g_1(r_m) = 0$. El objetivo es entonces escribir una forma aproximada de Ec. (3.52) para $r_0 \approx r_m$.

Para conectar con las cantidades observables resulta más conveniente usar como variable a b , el parámetro de impacto. Como se vio en la Ec. (3.13), $b(r_0) = \sqrt{C_0/A_0}$, por lo que se puede definir un parámetro de impacto crítico

$$b_c = b(r_m) = \sqrt{\frac{C_m}{A_m}}. \quad (3.53)$$

Es simple verificar que la expansión de segundo orden de $b(r_0)$ en $r_0 = r_m$ está dada por

$$b(r_0) = b_c + \frac{1}{4} b_c D'_m (r_0 - r_m)^2 + \mathcal{O}((r_0 - r_m)^3), \quad (3.54)$$

o, despejando r_0 ,

$$r_0 - r_m = 2 \sqrt{\frac{1}{D'_m} \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right)}. \quad (3.55)$$

Para expandir la integral es necesario tener formas aproximadas de los coeficientes g_1 y g_2 al primer orden no nulo cuando $r_0 \rightarrow r_m$. Como $g_2(r_m) \neq 0$, es suficiente su valor a orden cero dado en Ec. (3.46). Para g_1 hay que ir a primer orden:

$$\frac{dg_1}{dr_0} = \frac{C_0 r_0 D'_0}{B_0} + D_0 \frac{d}{dr_0} \left(\frac{C_0 r_0}{B_0} \right); \quad (3.56)$$

como $D_m = 0$, la expansión de g_1 es

$$g_1 \approx \frac{C_m r_m D'_m}{B_m} (r_0 - r_m) \approx \frac{2C_m r_m \sqrt{D'_m}}{B_m} \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.57)$$

Al hacer un desarrollo de la integral divergente (3.52) sólo son relevantes el término que diverge de manera logarítmica cuando $b \rightarrow b_c$ y el término constante; términos de orden más alto no son incluidos. Esto implica que el g_1 en el denominador de la Ec. (3.52) es el único lugar donde la dependencia con r_0 (o con b) es importante; en cualquier otra instancia de una función de r_0 se puede reemplazar $r_0 = r_m$. Comenzando con la integral divergente

$$I_D(r_0) = \frac{4r_0}{\sqrt{g_2(r_0)}} \log \frac{\sqrt{g_2(r_0)} + \sqrt{g_1(r_0) + g_2(r_0)}}{\sqrt{g_1(r_0)}}, \quad (3.58)$$

separando el logaritmo en dos términos usando las propiedades y reemplazando $r_0 \approx r_m$ se obtiene que

$$I_D(r_0) \approx -\frac{r_m}{\sqrt{g_2(r_m)}} \log\left(\frac{b}{b_c} - 1\right) + \frac{r_m}{\sqrt{g_2(r_m)}} \log(r_m^2 D'_m). \quad (3.59)$$

Reemplazando la definición de $g_2(r_m)$, resulta que

$$\frac{r_m}{\sqrt{g_2(r_m)}} = \sqrt{\frac{2A_m B_m}{C_m'' A_m - C_m A_m''}}. \quad (3.60)$$

Por último, se define la integral regular

$$I_R(r_0) = \int_0^1 f_R(z, r_0) dz, \quad (3.61)$$

con

$$f_R(z, r_0) = f(z, r_0) - f_D(z, r_0), \quad (3.62)$$

de manera que

$$I(r_0) = I_D(r_0) + I_R(r_0). \quad (3.63)$$

El objetivo de esta separación es que el comportamiento divergente está incluido en I_D . Como ya se estableció que sólo son de interés el término divergente y el término constante, cualquier término de orden superior en $r_0 - r_m$ puede ser descartado. Esto es equivalente a simplemente reemplazar r_0 por r_m dentro de I_R ; cualquier diferencia será de orden más alto en $r_0 - r_m$. Reemplazando las definiciones de f y f_D queda entonces

$$I_R(r_m) = 2r_m \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{B(r(z))}{R(r(z))C(r(z))}} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{\sqrt{g_2(r_m)}z} \right) dz, \quad (3.64)$$

con $r = r_m/(1-z)$. Esta integral no se puede calcular de manera general ya que depende de la métrica usada en el problema. Sin embargo, el resultado es una constante sin dependencia con r_0 y el integrando es regular en su dominio, por lo que de ser necesario la integral se puede calcular de manera numérica.

Sólo queda juntar todo lo obtenido hasta ahora. La definición del ángulo de deflexión α está dada en Ec. (3.19), y la integral I fue separada como $I = I_D + I_R$; I_D fue aproximada para $b \rightarrow b_c$ en Ec. (3.59). La expresión final para el ángulo de deflexión es

$$\alpha(b) \approx -c_1 \log\left(\frac{b}{b_c} - 1\right) + c_2, \quad (3.65)$$

o, usando la relación geométrica $b = D_{OL}\theta$,

$$\alpha(\theta) \approx -c_1 \log \left(\frac{\theta D_{OL}}{b_c} - 1 \right) + c_2, \quad (3.66)$$

donde los coeficientes son

$$c_1 = \sqrt{\frac{2A_m B_m}{C_m'' A_m - C_m A_m''}} \quad (3.67)$$

y

$$c_2 = c_1 \log \left[r_m^2 \left(\frac{C_m''}{C_m} - \frac{A_m''}{A_m} \right) \right] + I_R(r_m) - \pi. \quad (3.68)$$

La integral $I_R(r_m)$ también se puede escribir como

$$I_R(r_m) = 2r_m \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{B(r(z))}{R(r(z))C(r(z))} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{c_1}{r_m} \frac{1}{z}} \right) dz. \quad (3.69)$$

Para calcular los coeficientes, $I_R(r_m)$ es la única integral a realizar. En muchos casos se puede encontrar el resultado analíticamente, y de no ser posible se puede calcular numéricamente, ya que el integrando no tiene singularidades.

3.5. Observables

Una vez que se tiene una expresión para α en función de b , se busca resolver la ecuación de la lente para obtener θ en función de β . Con esta información se pueden obtener las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas, y a partir de ellas definir dos observables astronómicos [12], llamados r y s . El conocimiento de los mismos permite determinar los coeficientes c_1 y c_2 y por lo tanto distinguir entre soluciones de agujeros negros provenientes de distintas teorías de la gravedad.

Para empezar, se toma la ecuación de lente en la aproximación de alta alineación dada por la Ec. (3.2). Fijado n , $\Delta\alpha_n = \alpha - 2\pi n$ se puede conocer en función de θ a partir de la ecuación (3.66), obteniendo entonces β en función de θ ; sin embargo, se busca conocer θ en función de β , y la ecuación resultante no admite una solución exacta, por lo que se buscará hacer una expansión del término con el logaritmo alrededor de los θ tales que $\alpha(\theta) = 2\pi n$. Planteando esta última condición en Ec. (3.66) se obtiene como solución

$$\theta_n^0 = \frac{b_c}{D_{OL}}(1 + e_n), \quad (3.70)$$

donde

$$e_n = e^{(c_2 - 2\pi n)/c_1}. \quad (3.71)$$

Definiendo $\Delta\theta_n = \theta_n - \theta_n^0$ y expandiendo α a primer orden se tiene que

$$\Delta\alpha_n \equiv \alpha - 2\pi n = \left. \frac{d\alpha}{d\theta} \right|_{\theta_n^0} \Delta\theta_n, \quad (3.72)$$

es decir,

$$\Delta\alpha_n = -\frac{c_1}{\theta_n^0 - b_c/D_{OL}} \Delta\theta_n = -\frac{c_1 D_{OL}}{b_c e_n} \Delta\theta_n; \quad (3.73)$$

reemplazando en la ecuación de la lente, se obtiene

$$\beta = \theta_n^0 + \left(1 + \frac{c_1 D_{OL}}{b_c e_n} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \Delta\theta_n. \quad (3.74)$$

En esta última ecuación, el segundo término entre paréntesis es mucho mayor que el primero, debido a que $D_{OL}/b_c \gg 1$ en las aplicaciones astrofísicas de interés y a que los otros factores no compensan a este último. Despejando θ se obtiene entonces que

$$\theta_n = \theta_n^0 + \underbrace{\frac{b_c e_n D_{OS}}{c_1 D_{LS} D_{OL}}}_{\varepsilon_n} (\beta - \theta_n^0), \quad (3.75)$$

donde $\varepsilon_n \ll 1$ en los casos de interés. Esta fórmula es la que da, a primer orden en los ángulos, la posición de las imágenes. Como se dijo al final de la sección 3.1, para obtener el otro conjunto de imágenes relativistas hay que reemplazar β por $-\beta$. En lo que sigue se trabajará a primer orden en ε_n ; dicho de otro modo, normalmente se tomará la aproximación $\theta_n \approx \theta_n^0$ ya que no hacerlo introduciría términos de orden ε_n^2 .

Además de las posiciones de las imágenes es posible calcular sus magnificaciones μ_n con respecto a la fuente. Para esto se invoca el teorema de Liouville [5, 43]: el mismo dice que si un grupo de partículas se mueve a lo largo de geodésicas cercanas, el volumen ocupado por las mismas en el espacio de fases (producto del volumen en el espacio real y en el espacio de momentos) es constante. Aplicado a los fotones que viajan desde la fuente al observador, esto tiene la consecuencia de que el flujo de energía por unidad de área y ángulo sólido, también llamado brillo superficial o intensidad específica en el caso de que se considere a una frecuencia fija, es igual en la fuente y en el observador, dado que los mismos están en regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo y por lo tanto no hay corrimiento al rojo entre ambos. Como consecuencia, la magnificación está dada simplemente por el cociente de los ángulos sólidos de la imagen y la fuente [5, 12]:

$$\mu_n = \left. \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \beta d\beta} \right|_{\theta=\theta_n}; \quad (3.76)$$

la amplitud angular en la dirección transversal al plano lente-fuente-observador no es modificada gracias a la simetría esférica. Haciendo la aproximación de ángulos pequeños y tomando $\theta_n \approx \theta_n^0$, esto resulta

$$\mu_n = \left(\frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} \right)^{-1} \Big|_{\theta_n^0}. \quad (3.77)$$

Se tiene que

$$\frac{d\beta}{d\theta} \Big|_{\theta_n^0} = 1 + \frac{c_1 D_{OL} D_{LS}}{b_c e_n D_{OS}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_n}; \quad (3.78)$$

sin embargo, como ya se justificó, el primer término es despreciable frente al segundo. Reemplazando esto y la ecuación (3.70) en la Ec. (3.77), se obtiene

$$\mu_n = \frac{b_c^2 D_{OS} e_n (1 + e_n)}{\beta c_1 D_{OL}^2 D_{LS}}. \quad (3.79)$$

Se puede ver que la magnificación decrece exponencialmente con n . La aproximación $\theta_n \approx \theta_n^0$ se justifica porque el resultado ya está a primer orden en ε_n .

Habiendo encontrado expresiones para las cantidades observables en función de los coeficientes del límite de deflexión fuerte, se busca una manera de resolver el problema inverso, es decir, encontrar los coeficientes a partir de datos fácilmente observables. Para esto, primero se define $\theta_\infty \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ como el ángulo donde se acumulan las imágenes; de Ec. (3.75) se ve que el mismo es $\theta_\infty = b_c / D_{OL}$. Las imágenes se encuentran todas muy cerca entre sí, y la magnificación decrece rápidamente con n , lo cual dificulta la detección de las imágenes relativistas. Sin embargo, si las imágenes no se pueden distinguir entre sí, no hay suficiente información para encontrar los coeficientes c_1 y c_2 . Por lo tanto, en lo que sigue se asume que una hipotética observación es capaz de distinguir la primera imagen del resto [12]; es decir, las imágenes con $n \geq 2$ se ven como una sola, ubicada en θ_∞ . Se define entonces el primer observable s como la distancia angular entre la primera imagen del resto:

$$s = \theta_1 - \theta_\infty. \quad (3.80)$$

Como las imágenes provienen todas del mismo objeto, las intensidades medidas son proporcionales a sus magnificaciones. Esto permite definir el segundo observable r como el cociente de magnificaciones (y por lo tanto el cociente de intensidades) entre la primera imagen y todas las otras:

$$r = \frac{\mu_1}{\sum_{n=2}^{\infty} \mu_n}. \quad (3.81)$$

Sólo queda convertir estas expresiones en formas más útiles para despejar los coeficientes. Para s se puede tomar la aproximación $\theta_1 \approx \theta_1^0$ y obtener $s = \theta_\infty e_1 - \theta_\infty$

o bien

$$s = \theta_\infty e^{\frac{c_2 - 2\pi}{c_1}}. \quad (3.82)$$

El cálculo de r es simple, ya que la suma en Ec. (3.81) es geométrica. Para empezar, se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mu_n = \frac{b_c^2 D_{OS} e^{\frac{c_2}{c_1}}}{c_1 \beta D_{OL}^2 D_{LS}} \frac{1 + e^{\frac{-2\pi}{c_1}} + e^{\frac{c_2}{c_1}} e^{\frac{-4\pi}{c_1}}}{e^{\frac{4\pi}{c_1}} - 1}. \quad (3.83)$$

Al calcular r , se pueden realizar varias aproximaciones. Como se podrá verificar en los ejemplos, c_2/c_1 es de orden 1 y $e^{2\pi/c_1} \gg 1$. Esto permite, en la segunda fracción en Ec. (3.83), desprestigiar todos los términos salvo el primero, tanto en el numerador como en el denominador. Realizando la misma aproximación en μ_1 se obtiene que

$$r = e^{\frac{2\pi}{c_1}}. \quad (3.84)$$

Finalmente, de Ec. (3.82) y Ec. (3.84) se pueden despejar c_1 y c_2 en función de s y r como

$$c_1 = \frac{2\pi}{\log r} \quad (3.85)$$

$$c_2 = c_1 \log\left(\frac{s}{\theta_\infty}\right) - 2\pi. \quad (3.86)$$

Con estas ecuaciones se pueden encontrar los coeficientes c_1 y c_2 a partir de una hipotética observación que provea los observables r y s . Conocer los coeficientes permite a su vez distinguir entre los agujeros negros de distintas teorías de la gravedad. En la siguiente sección se usará como ejemplo el agujero negro de Schwarzschild, y en el siguiente capítulo se estudiará el caso de un agujero negro en la teoría de Horndeski.

3.6. Ejemplo: Agujero negro de Schwarzschild

Como ejemplo del método recién descrito se puede tomar el espacio-tiempo de Schwarzschild, cuya métrica está dada por la Ec. (2.21), es decir, con las funciones $A(r)$ y $B(r)$ de la Ec. (2.20) y $C(r) = r^2$. Como se mencionó en la Introducción, este caso fue estudiado varias veces por distintos autores a lo largo de los años [6-10]. Es conveniente usar el radio de Schwarzschild $r_S = 2M$ para adimensionalizar, definiendo

$$\tilde{t} = \frac{t}{2M}, \quad x = \frac{r}{2M} \quad (3.87)$$

de manera que la métrica queda

$$\frac{ds^2}{(2M)^2} = -\left(1 - \frac{1}{x}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{dx^2}{1 - 1/x} + x^2 d\Omega^2 \quad (3.88)$$

o, en términos de las funciones,

$$A(x) = \frac{1}{B(x)} = 1 - \frac{1}{x} \quad (3.89)$$

$$C(x) = x^2. \quad (3.90)$$

De esta manera, todas las distancias, incluyendo variables como b y r_0 , se miden en unidades de r_S .

El primer paso es encontrar el radio x_m de la esfera de fotones; el mismo es la solución de $D(x) = 0$:

$$D(x) = \frac{C''}{C} - \frac{A''}{A} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2x-3}{x(x-1)}, \quad (3.91)$$

por lo que

$$x_m = \frac{3}{2}. \quad (3.92)$$

El correspondiente parámetro de impacto crítico, calculado según Ec. (3.53), es $b_c = 3\sqrt{3}/2$. Hallar el coeficiente c_1 es simplemente cuestión de reemplazar en Ec. (3.67) las funciones y sus derivadas evaluadas en $x = 3/2$; el resultado es $c_1 = 1$. El primer término de Ec. (3.68) también es simple; la única parte no trivial es la integral I_R . Como paso preliminar se tiene que, usando la ecuación (3.12),

$$\frac{R(x)C(x)}{B(x)} = \left(\frac{x^2}{b^2(1-1/x)} - 1 \right) x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{x^4}{b^2} - x^2 - x, \quad (3.93)$$

en lo que luego corresponde reemplazar $b = b_c$ y $x = x_m/(1-z)$ para ser insertado en la integral (3.64), junto con $g_2(x_m) = 9/24$. La misma entonces queda

$$I_R(x_m) = \int_0^1 \left(\frac{2\sqrt{3}}{z\sqrt{3}-2z} - \frac{2}{z} \right) dz = 2 \log[6(2-\sqrt{3})] \quad (3.94)$$

y, reemplazando todas las cantidades conocidas en Ec. (3.68), el segundo coeficiente de la aproximación resulta ser

$$c_2 = \log[216(7-4\sqrt{3})] - \pi. \quad (3.95)$$

A partir de los valores de c_1 y c_2 , se obtienen las posiciones y las magnificaciones de las imágenes mediante las Ecs. (3.75) y (3.79) respectivamente. Calcular el observable r es simple; usando la ecuación (3.84) se obtiene que

$$r = e^{2\pi} \approx 535, \quad (3.96)$$

lo que implica una diferencia en magnitudes de $\Delta m \approx 6,82$. Luego, para s se usa Ec. (3.82) y que $\theta_\infty = b_c/D_{OL}$; se obtiene

$$s = \frac{3\sqrt{3}}{2D_{OL}} 216(7 - 4\sqrt{3})e^{-3\pi} \approx \frac{3,25 \times 10^{-3}}{D_{OL}}, \quad (3.97)$$

donde D_{OL} debe medirse en unidades del radio de Schwarzschild, al igual que todas las distancias en este ejemplo. Concretamente, se puede proponer a Sagitario A*, el agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia, como lente gravitatoria. Mediciones recientes [59] arrojan como datos $M = 4,28 \times 10^6 M_\odot$ y $D_{OL} = 8,32$ kpc, por lo que $D_{OL}/r_S = 2,04 \times 10^{10}$ y finalmente se obtiene

$$s \approx 1,6 \times 10^{-13} = 0,033 \mu\text{as}. \quad (3.98)$$

Los dos resultados obtenidos muestran claramente la dificultad de observar el fenómeno de lente gravitatoria en el límite de deflexión fuerte. No sólo se tiene que la primera imagen es del orden de 500 veces más intensa que las otras, sino que la distancia angular a ser medida, del orden de la fracción de microarcoregundos, está todavía fuera del alcance de los instrumentos existentes.

Capítulo 4

Agujero negro en gravedad de Horndeski

En este capítulo se aplica el formalismo presentado en el capítulo anterior a un caso particular de interés, proveniente de la teoría de Horndeski. En la sección 4.1 se realiza una presentación de la misma, dando una motivación al estudio de teorías alternativas de la gravedad y finalmente presentando la acción de la teoría. En la sección 4.2 se presenta la solución de agujero negro no rotante de esta teoría, y en la sección 4.3 se estudia el *lensing* gravitatorio en el límite de deflexión fuerte alrededor de dicho agujero negro. Por último, en la sección 4.4 se calculan algunas cantidades observables y se analizan los casos correspondientes al agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la Vía Láctea y al ubicado en el centro de la galaxia M87.

4.1. Teoría de Horndeski

La formulación métrica de la gravedad, descrita en la sección 2.1, es un modelo ampliamente comprobado por las observaciones [1]. Sin embargo, la forma precisa de las ecuaciones de Einstein (2.15) (o, equivalentemente, la acción de Einstein-Hilbert (2.18)) no ha sido testada tan a fondo. Esto se debe principalmente a que gran parte de los experimentos que apoyan a la relatividad general fueron realizados dentro del Sistema Solar, donde es válido el límite de campo débil de las ecuaciones de Einstein; el mismo no revela la no linealidad de las ecuaciones, que se manifiesta en condiciones de campo fuerte como las presentes en las cercanías de un agujero negro. La detección de ondas gravitacionales provenientes de choques entre agujeros negros [60] da resultados consistentes con la relatividad general en un régimen de campo fuerte; sin embargo, no elimina por completo la posibilidad de que las ecuaciones de Einstein no sean las correctas.

Las escalas más grandes también dan indicios de que la relatividad general es susceptible de ser modificada. Varias observaciones relacionadas con las propiedades de grandes estructuras (que entre sus ejemplos más conocidos incluyen las curvas de rotación de galaxias, inhomogeneidades en el fondo de radiación cósmica, o *lensing* gravitatorio débil) son incompatibles con las predicciones [49, 61] a menos que se postule la existencia de *materia oscura*, una clase de materia que interactúa gravitacionalmente pero no con el campo electromagnético; sin embargo, la hipotética partícula correspondiente a la materia oscura no ha sido observada directamente. El descubrimiento de la expansión acelerada del universo, por su parte, requiere la existencia de *energía oscura*, una densidad de energía que se mantiene constante a medida que el universo se expande [50], cuyo origen no tiene aún explicación aceptada. La falta de una detección directa de la materia oscura, así como de una teoría que explique la naturaleza de la energía oscura, motivan la introducción de modificaciones a la relatividad general, con el objetivo de poder explicar los fenómenos arriba mencionados sin la necesidad de introducir componentes del universo aún no observados.

Entre las teorías alternativas a la relatividad general, una importante categoría corresponde a las teorías escalar-tensoriales, en las que se agrega a los campos fundamentales un campo escalar ϕ . El que posiblemente sea el ejemplo más conocido es la teoría Brans-Dicke [62], que puede interpretarse como una modificación en la que se permite que la constante gravitatoria G varíe en el espacio-tiempo, jugando el papel del campo ϕ ; la teoría se reduce a la relatividad general cuando el campo ϕ toma un valor constante de G . En 1974, Horndeski [52] dedujo la forma más general para una acción que dependa de la métrica, el campo escalar, y sus derivadas, y que resulte en ecuaciones de movimiento de segundo orden. Esta condición se pide porque un resultado de Ostrogradsky dice que una dependencia en derivadas de más alto orden da lugar a inestabilidades [63]. La *teoría de Horndeski* es entonces en realidad una clase general de teorías; en el presente trabajo se aplicará el formalismo de deflexión fuerte en el caso de una de ellas.

Definiendo $X = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi/2$, la acción de la teoría de Horndeski se puede escribir en términos de cuatro funciones arbitrarias $G_i = G_i(\phi, X)$, $i = 2, 3, 4, 5$, en la forma [63]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (4.1)$$

con

$$\mathcal{L}_2 = G_2, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3\Box\phi, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4R + G_{4X} [(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2], \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3], \quad (4.5)$$

donde un subíndice X es una derivada con respecto a X , $(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2$ es notación abreviada para $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \nabla^\mu \phi$, y de la misma manera $(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3$ es una abreviación de $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \nabla^\mu \phi$. En particular, si se toma $G_4 = 1/16\pi$ y el resto de las G_i iguales a cero, se obtiene la acción de Einstein-Hilbert de la relatividad general. Recientemente la teoría de Horndeski ha vuelto a atraer interés [64, 65] y se ha propuesto una extensión de la misma [66, 67], llamada la teoría *más allá de Horndeski* (en inglés, *beyond Horndeski*); ambas teorías han dado lugar a varios estudios de agujeros negros [63, 68-74] y otros temas relacionados [75, 76]. Las ecuaciones de movimiento de la teoría más allá de Horndeski son de orden mayor a dos, pero están construidas para evitar la inestabilidad de Ostrogradsky. A la acción (4.1) se agregan dos términos más, dependientes de otras dos funciones arbitrarias F_1 y F_2 . En particular, es posible tomar el caso especial de teorías con simetría ante $\phi \rightarrow \phi + cte.$, para las cuales las funciones G_i y F_i sólo dependen de X . Como consecuencia de esta simetría, se tiene una corriente conservada J^μ .

4.2. Solución de agujero negro

Al igual que para los agujeros negros de la relatividad general, en la teoría de Horndeski hay un teorema de *no-pelo* [77]. Esencialmente, dichos teoremas dicen que una solución estática de agujero negro tiene como únicos parámetros libres a la masa, la carga y el momento angular; es decir, los agujeros negros “no tienen pelo”. En términos más técnicos, en el marco de la teoría de Horndeski con simetría ante cambios en el origen de ϕ , cualquier solución de agujero negro con simetría esférica tiene campo escalar constante y es isométrica a (es decir, físicamente indistinguible de) la solución de Schwarzschild. Sin embargo, el teorema tiene dos hipótesis (ver [63, 77] para más detalles):

1. Las derivadas con respecto a X de G_i y F_i no tienen potencias negativas de X cuando $X \rightarrow 0$.
2. La acción contiene el término cinético usual, X .

Una elección de las funciones G_i y F_i que viola sólo la primera hipótesis y que produce un campo escalar no trivial es

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \eta X, \\
 G_4 &= \zeta + \beta \sqrt{-X}, \\
 G_3 &= G_5 = F_1 = F_2 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

con $\zeta = 1/16\pi$ y η y β dos parámetros adimensionales. Reemplazando en la acción de Horndeski (4.1) se obtiene

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[\zeta + \beta \sqrt{(\partial\phi)^2/2} \right] R - \frac{\eta}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\beta}{\sqrt{2(\partial\phi)^2}} \left[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 \right] \right\}; \quad (4.7)$$

se puede ver que con $\eta = \beta = 0$ se recupera la relatividad general. Al violar una de las hipótesis del teorema se puede obtener una solución esféricamente simétrica con un campo escalar no trivial, es decir, con “pelo”. La misma tiene la forma de la Ec. (3.3) con

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\beta^2}{2\zeta\eta r^2}, \quad C(r) = r^2, \quad (4.8)$$

donde μ es una constante de integración. Se puede demostrar, pidiendo que la norma $J_\mu J^\mu$ de la corriente sea finita, que η y β deben tener el mismo signo. A pesar de no ser necesario para el cálculo de deflexión de la luz, se puede dar una expresión para el campo escalar. La misma tiene dos casos, dependiendo de los signos de β y η :

$$\phi(r) = \pm \sqrt{\frac{\zeta}{\eta}} \left\{ \arctan \left(\frac{\beta^2 + \zeta\eta\mu r}{\beta\sqrt{2\zeta\eta r(r-\mu) - \beta^2}} \right) - \arctan \left(\frac{\mu}{\beta} \sqrt{\frac{\zeta\eta}{2}} \right) \right\} \quad (4.9)$$

si $\beta > 0$ y $\eta > 0$,

$$\phi(r) = \pm \sqrt{\frac{\zeta}{-\eta}} \left\{ \operatorname{arcth} \left(\frac{\beta^2 + \zeta\eta\mu r}{\beta\sqrt{\beta^2 - 2\zeta\eta r(r-\mu)}} \right) + \operatorname{arcth} \left(\frac{\mu}{\beta} \sqrt{\frac{-\zeta\eta}{2}} \right) \right\} \quad (4.10)$$

si $\beta < 0$ y $\eta < 0$.

El parámetro μ de la métrica tiene la interpretación física de ser dos veces la masa del agujero negro¹ [43], $\mu = 2M$. Para simplificar las fórmulas se puede definir $\gamma \equiv \beta^2/(2\zeta\eta)$, de forma que se tiene $A(r) = 1 - \mu/r - \gamma/r^2$. Si $\gamma < 0$ esta métrica tiene la misma forma que la métrica de Reissner-Nordström [43], la solución correspondiente al exterior de un objeto esférico con carga eléctrica Q en la relatividad general; más precisamente, las métricas coinciden si se identifica $\gamma = -Q^2$. Es importante notar que, a pesar de que la forma de ambas métricas es la misma, la interpretación de la constante que aparece es distinta, ya que la

¹En general, $2M$ es el coeficiente de $-1/r$ en la expansión de $A(r)$ para $r \rightarrow \infty$, como se mencionó en la sección 3.3.

carga Q está asociada a la intensidad del campo electromagnético. Por supuesto, para $\gamma > 0$ la métrica no es equivalente a la de un agujero negro cargado, ya que la relación $\gamma = -Q^2$ implicaría una carga imaginaria.

Para la métrica escrita en la forma (2.19), el radio del horizonte de eventos r_h es la mayor solución² de $A(r) = 0$, que en el caso considerado aquí resulta

$$r_h = \frac{\mu}{2} \left(1 + \sqrt{4\gamma/\mu^2 + 1} \right), \quad (4.11)$$

de donde se ve que para que la solución exista es necesario tener $\gamma/\mu^2 \geq -1/4$. Si esto no ocurre, la singularidad en $r = 0$ no tiene ningún horizonte que la cubra y resulta una singularidad desnuda. Como se busca estudiar el agujero negro, en este trabajo se tomará $\gamma/\mu^2 \in [-1/4, \infty)$.

En lo que sigue se aplicarán los formalismos del capítulo anterior para analizar el *lensing* gravitatorio en el espacio-tiempo descrito en esta sección. Calcular el ángulo de deflexión en el límite de campo débil es sencillo: comparando la métrica con su forma asintótica (3.21) se ve que $\gamma_0 = 1$, por lo que la expresión del ángulo de deflexión resulta el mismo $\alpha \approx 4M/r_0$ que para la solución de Schwarzschild. Se puede ver entonces que en el límite de deflexión débil las diferencias con esta última geometría aparecen a segundo orden en M/r_0 . Por lo tanto, se apela al límite de deflexión fuerte, en el cual se encontrará que la teoría de Horndeski aquí considerada es distinguible de la relatividad general al primer orden no nulo.

4.3. Límite de deflexión fuerte

Como se vio en la sección 3.4, el ángulo de deflexión en el límite de deflexión fuerte viene dado por la Ec. (3.65) en función del parámetro de impacto b , el parámetro de impacto crítico b_c correspondiente a una trayectoria tangente a la esfera de fotones, y los coeficientes c_1 y c_2 calculados según las expresiones (3.67) y (3.68), con $I_R(r_m)$ definida en la ecuación (3.69). Al igual que para la métrica de Schwarzschild (sección 3.6), es conveniente adimensionalizar con el doble de la masa, definiendo $x = r/\mu$, $\tilde{t} = t/\mu$ y $\tilde{\gamma} = \gamma/\mu^2$, de manera que la métrica toma la forma

$$\frac{ds^2}{\mu^2} = - \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\tilde{\gamma}}{x^2} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{dx^2}{1 - 1/x - \tilde{\gamma}/x^2} + x^2 d\Omega^2, \quad (4.12)$$

con

$$A(x) = \frac{1}{B(x)} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\tilde{\gamma}}{x^2}, \quad C(x) = x^2. \quad (4.13)$$

²El horizonte de eventos ocurre donde el vector $\partial/\partial t$ se vuelve espacial; como $\partial/\partial t \cdot \partial/\partial t = -A(r)$, esto ocurre donde $A(r)$ cambia de signo.

El radio de la esfera de fotones x_m es la mayor de las soluciones de la ecuación $D(x) = C''(x)/C(x) - A''(x)/A(x) = 0$. Se tiene en nuestro caso que

$$D(x) = 2 - \frac{x + 2\tilde{\gamma}}{x^2 - x - \tilde{\gamma}}, \quad (4.14)$$

por lo que x_m cumple la ecuación

$$2x_m^2 = 3x_m + 4\tilde{\gamma}, \quad (4.15)$$

con solución

$$x_m = \frac{3 + \sqrt{9 + 32\tilde{\gamma}}}{4}. \quad (4.16)$$

Las expresiones de las cantidades a calcular suelen ser complicadas; muchas veces resultará más conveniente simplificar usando la Ec. (4.15) en lugar de la Ec. (4.16) para x_m .

Para los cálculos que siguen es conveniente tener expresiones para las funciones A y C y sus derivadas evaluadas en $x = x_m$; se tiene que

$$A_m = \frac{x_m + 2\tilde{\gamma}}{3x_m + 4\tilde{\gamma}}, \quad A_m'' = -8 \frac{x_m + 3\tilde{\gamma}}{(3x_m + 4\tilde{\gamma})^2}, \quad (4.17)$$

$$C_m = \frac{3x_m + 4\tilde{\gamma}}{2}, \quad C_m'' = 2. \quad (4.18)$$

Con estas expresiones se puede calcular entonces el parámetro de impacto asociado a x_m :

$$b_c = \sqrt{\frac{C_m}{A_m}} = \frac{\sqrt{2}x_m^2}{\sqrt{x_m + 2\tilde{\gamma}}}. \quad (4.19)$$

El cálculo del coeficiente c_1 es directo; sólo hay que reemplazar en Ec. (3.67) los valores conocidos y simplificar. El resultado es

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}x_m}{\sqrt{3x_m + 8\tilde{\gamma}}}. \quad (4.20)$$

Para calcular c_2 es necesaria la integral

$$I_R(x_m) = 2x_m \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{B(x(z))}{R(x(z))C(x(z))} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{c_1}{x_m} \frac{1}{z}} \right) dz, \quad (4.21)$$

con

$$R(x) = \frac{C(x)}{A(x)b^2} - 1 \quad (4.22)$$

y la sustitución $x(z) = x_m/(1-z)$. Como primer paso, reemplazando se puede ver que en función de x se tiene

$$\left(\frac{B}{CR}\right)^{-1} = \frac{x_m + 2\tilde{\gamma}}{2} \left(\frac{x}{x_m}\right)^4 - x^2 + x + \tilde{\gamma}; \quad (4.23)$$

pasando a la variable z queda

$$\left(\frac{B}{CR}\right)^{-1} = \frac{x_m + 2\tilde{\gamma}}{2} \frac{1}{(1-z)^4} - \frac{x_m^2}{(1-z)^2} + \frac{x_m}{1-z} + \tilde{\gamma}. \quad (4.24)$$

Luego hay que reemplazar esto último en la integral junto con la expresión de c_1 ya encontrada. Simplificando el integrando resultante, se obtiene

$$I_R(x_m) = 2\sqrt{2}x_m \int_0^1 \left[\frac{1}{z\sqrt{2\tilde{\gamma}z^2 - 2(x_m + 4\tilde{\gamma})z + 3x_m + 8\tilde{\gamma}}} - \frac{1}{\sqrt{3x_m + 8\tilde{\gamma}}z} \right] dz. \quad (4.25)$$

La integral indefinida del primer término es

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z\sqrt{\lambda_2 z^2 + \lambda_1 z + \lambda_0}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\log z - \log \left(2\lambda_0 + \lambda_1 z + 2\sqrt{\lambda_0} \sqrt{\lambda_2 z^2 + \lambda_1 z + \lambda_0} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

con lo que luego de algo de álgebra se obtiene

$$I_R(x_m) = c_1 \log \left[\frac{4(3x_m + 8\tilde{\gamma})^2}{x_m^2(x_m + 2\tilde{\gamma})} \left(2\sqrt{x_m + 2\tilde{\gamma}} - \sqrt{3x_m + 8\tilde{\gamma}} \right)^2 \right]. \quad (4.27)$$

Por último, reemplazando todo lo ya calculado en la fórmula de c_2 , finalmente queda

$$c_2 = c_1 \log \left[\frac{8(3x_m + 8\tilde{\gamma})^3}{x_m^2(x_m + 2\tilde{\gamma})^2} \left(2\sqrt{x_m + 2\tilde{\gamma}} - \sqrt{3x_m + 8\tilde{\gamma}} \right)^2 \right] - \pi. \quad (4.28)$$

Las expresiones obtenidas para c_1 y c_2 no son fáciles de interpretar. Tomando $\gamma = 0$ se obtienen los valores correspondientes a la solución de Schwarzschild (sección 3.6), como era de esperarse. Para ilustrar, en la Figura 4.1 se grafican los coeficientes en función de $\tilde{\gamma} = \gamma/\mu^2$, tomando como dominio el intervalo $[-1/4, 1/4]$. Ya se explicó que el límite inferior de $-1/4$ es para evitar la desaparición del horizonte de eventos; el límite superior se eligió ya que el comportamiento de los coeficientes cambia más lentamente más allá del mismo.

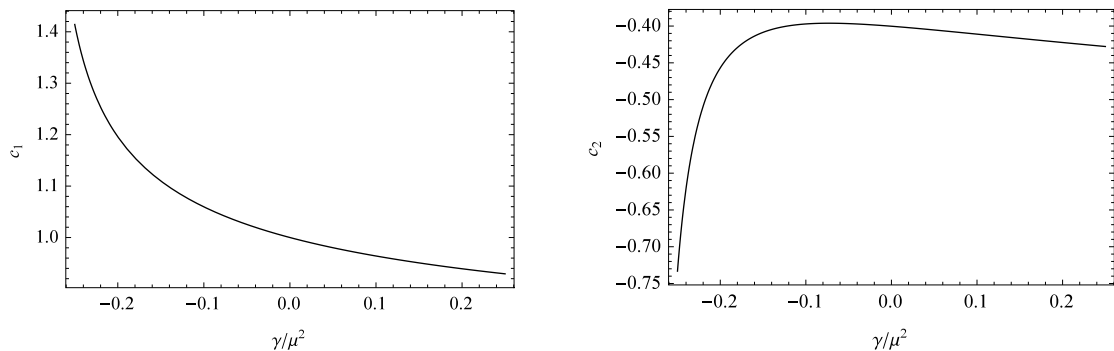


Figura 4.1: Se muestran los coeficientes c_1 (izquierda) y c_2 (derecha) como función de γ/μ^2 para el agujero negro de Horndeski.

4.4. Observables astrofísicos

Teniendo expresiones para los coeficientes c_1 y c_2 , se pueden calcular las posiciones y magnificaciones de las imágenes relativistas en el límite de deflexión fuerte, dadas por las ecuaciones (3.75) y (3.79) respectivamente. A partir de las mismas se obtienen los observables r y s definidos en la sección 3.5. Como ya se mencionó, que la secuencia infinita de imágenes se acumula en un ángulo $\theta_\infty = b_c/D_{OL}$, con D_{OL} la distancia entre el observador y la lente. El factor r se definió como el cociente de magnificaciones (y por lo tanto de intensidades) entre la primera imagen y la suma del resto, y está dado por la Ec. (3.84). El observable s , Ec. (3.82), por su parte, es la diferencia entre la posición angular de la primer imagen y θ_∞ . Calcular r es más directo ya que sólo depende de la métrica considerada y no de la distancia al agujero negro. Haciendo un simple reemplazo se obtiene que

$$r = e^{\sqrt{2}\pi\sqrt{3x_m+8\tilde{\gamma}}/x_m^2}. \quad (4.29)$$

Esta expresión se muestra graficada en la Figura 4.2.

El valor de s depende de la distancia al agujero negro elegido y de su masa, ya que depende de $\theta_\infty = b_c/D_{OL}$. Para tener las mejores posibilidades de observación lo ideal es encontrar lentes que maximicen esta cantidad, ya sea por tener un b_c grande (es decir, un agujero negro grande) o por estar cerca del observador. El mejor candidato para la observación es el agujero negro supermasivo ubicado en Sagitario A*, en el centro de la Vía Láctea. Otro caso de interés es el agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87. Ambos casos se consideran a continuación.

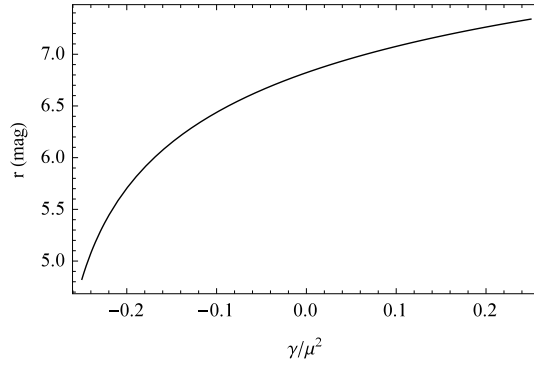


Figura 4.2: El cociente de magnificaciones r en función de γ/μ^2 para la teoría de Horndeski.

4.4.1. Agujero negro supermasivo galáctico

El agujero negro supermasivo asociado con la fuente de radio en el centro de la Vía Láctea parece ser, como se dijo arriba, el candidato más prometedor para la observación de la deflexión fuerte de la luz; no sólo por su cercanía y su masa, sino porque su entorno ha sido estudiado en detalle [59]. Los valores más recientes para su masa y su distancia son los dados en Ref. [59] de $M = 4,28 \times 10^6 M_{\odot}$ y $D_{OL} = 8,32$ kpc; se obtiene que $\mu = 11,9 \times 10^6$ km y $D_{OL}/\mu = 2,04 \times 10^{10}$. La Figura 4.3 muestra a las cantidades θ_{∞} y s en función de γ/μ^2 . Se puede ver que θ_{∞} es del orden de los $25 \mu\text{as}$ y s es del orden de algunas centésimas de μas .

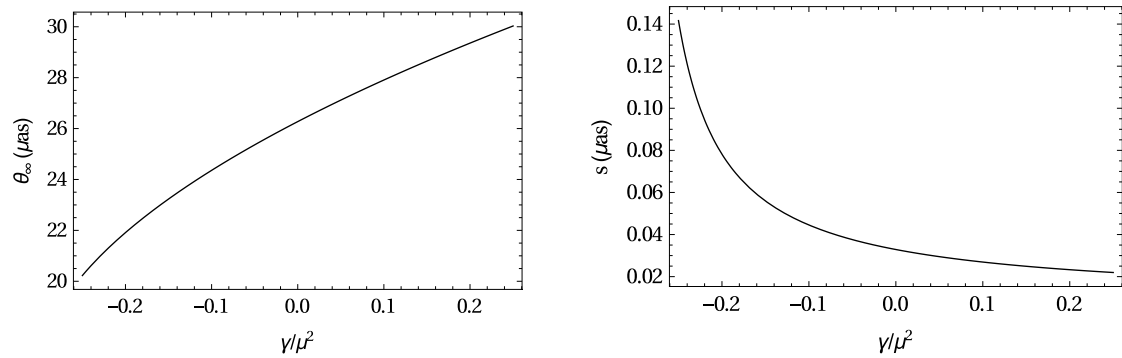


Figura 4.3: Posición angular límite θ_{∞} de las imágenes (izquierda) y separación angular s entre la primera imagen y el resto (derecha) como función de γ/μ^2 para el agujero negro supermasivo del centro galáctico.

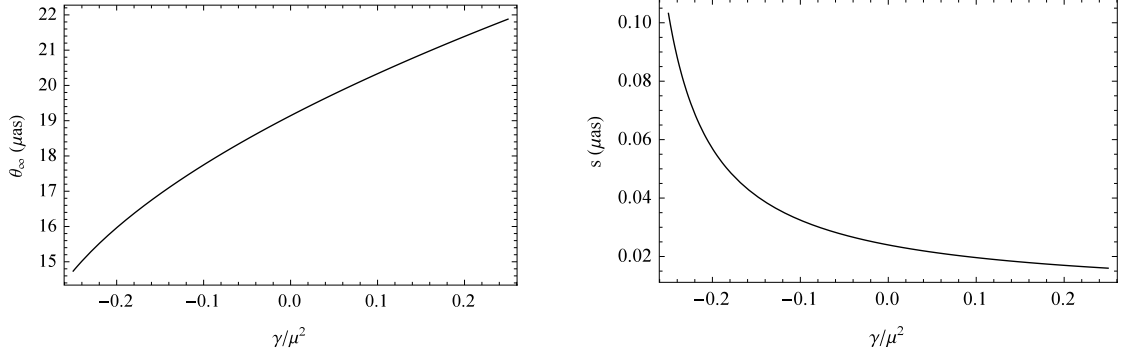


Figura 4.4: Posición angular límite θ_∞ de las imágenes (izquierda) y separación angular s entre la primera imagen y el resto (derecha) como función de γ/μ^2 para el agujero negro supermasivo de la galaxia M87.

4.4.2. Agujero negro supermasivo en M87

El agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia M87 tiene, según observaciones recientes [78], una masa $M = 6,16 \times 10^9 M_\odot$ y está a una distancia $D_{OL} = 16,5$ Mpc. Siguiendo los mismos argumentos que en la sección anterior, esto implica un valor de $\mu = 1,82 \times 10^{10}$ km y por lo tanto se tiene $D_{OL}/\mu = 2,80 \times 10^{10}$, que es un valor similar al correspondiente para el agujero negro galáctico; esto implica que los observables serán del mismo orden para ambos agujeros negros. Esto se puede ver explícitamente en la Figura 4.4. En este caso θ_∞ tiene un valor del orden de los $18 \mu\text{as}$ y s de algunas centésimas de μas , ambos un poco menores que para el agujero negro galáctico. Esto se debe a que, a pesar de que el agujero negro en M87 está unas mil veces más lejos que el del centro de la Vía Láctea, también tiene una masa unas mil veces más grande.

Capítulo 5

Conclusiones

El *lensing* gravitatorio puede ser una herramienta útil para estudiar el entorno cercano de los agujeros negros, donde los efectos de la gravedad son importantes. Desde los inicios de la relatividad general, éste ha sido el terreno menos explorado observacionalmente; las llamadas pruebas clásicas de la relatividad general (la precesión del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz por el Sol, y el corrimiento al rojo gravitatorio) pueden ser adecuadamente descritas por la aproximación de campo débil [1, 43]. En este trabajo se analizó la deflexión de la luz por un agujero negro en la teoría de gravedad de Horndeski. Más concretamente, se tomó un caso particular de la teoría de Horndeski que involucra a un campo escalar ϕ que depende de tres parámetros: ζ , β y η . La métrica de agujero negro depende de la masa M del mismo a través de $\mu = 2M$, y de los parámetros de la teoría a través de la combinación $\gamma = \beta^2/(2\zeta\eta)$. Posee una configuración de campo ϕ no trivial, siendo así un ejemplo de un espacio-tiempo al cual no se aplica el teorema de no-pelo [63, 77]. Para valores negativos de γ esta solución resulta tener la misma forma que la solución de Reissner-Nordström correspondiente a un agujero negro con carga Q , identificando $\gamma = -Q^2$.

Se consideró este agujero negro como lente gravitatoria y se aplicaron los límites de deflexión débil y de deflexión fuerte. El primero da una expresión a primer orden para el ángulo de deflexión idéntica a la de la relatividad general. En el límite de deflexión fuerte, se calcularon los coeficientes c_1 y c_2 como función de γ/μ^2 , a partir de los cuales se obtuvieron las posiciones y las magnificaciones de las imágenes relativistas, y se calcularon los observables θ_∞ , s y r . A partir de una hipotética observación que pueda distinguir la primer imagen relativista de todo el resto, conocer los observables permitiría, invirtiendo las ecuaciones, obtener los coeficientes c_1 y c_2 y así distinguir entre distintos modelos. Finalmente, se tomaron como casos particulares a los agujeros negros supermasivos ubicados en el centro de la Vía Láctea y de la galaxia M87. En ambos escenarios se espera una separación entre la primer imagen y el resto del orden de $0,03 \mu\text{as}$ y una diferencia

de intensidad de aproximadamente 7 magnitudes.

A partir de observaciones existentes es posible estimar una cota para γ ; para esto es necesario usar la expansión *post-Newtoniana parametrizada* [1, 43, 58] (PPN por sus siglas en inglés) de la métrica. Ésta es una expansión que provee una manera consistente de comparar distintas métricas con los experimentos. Una métrica con simetría esférica escrita en la forma de la Ec. (3.3) con $C(r) = r^2$ tiene una expansión [58]

$$A(r) = 1 - 2\alpha_0 \frac{M}{r} + 2(\beta_0 - \alpha_0\gamma_0) \frac{M^2}{r^2} + \dots, \quad (5.1)$$

$$B(r) = 1 + 2\gamma_0 \frac{M}{r} + \dots; \quad (5.2)$$

En la relatividad general se tiene que en vacío $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1$ (ver métrica de Schwarzschild, sección 2.3); comparando con la forma (4.8) de la métrica del agujero negro de Horndeski y recordando que $\mu = 2M$, se puede ver que en la teoría aquí considerada, $\alpha_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, y entonces $\beta_0 - 1 = -2\gamma/\mu^2 = -2\tilde{\gamma}$. Esto se puede comparar con mediciones en el sistema solar [1]; en particular, el parámetro β_0 afecta al avance del perihelio de Mercurio. Del mismo se puede deducir una cota de $|\beta_0 - 1| < 8 \times 10^{-5}$, de manera que $|\gamma|/\mu^2 < 4 \times 10^{-5}$, donde $\mu = 2M_\odot$ corresponde al Sol. Sin embargo, aunque esta cota limita los posibles efectos en el sistema solar, no es inmediato que la misma se pueda extrapolar a otras regiones del universo. Por lo tanto, se tomó un rango mucho más amplio a lo largo de este trabajo.

Un detalle que ha sido ignorado aquí es que los agujeros negros suelen estar rodeados por plasma. El mismo produce varios efectos ópticos [79] tales como absorción o refracción y puede modificar las posiciones y magnificaciones de las imágenes dependiendo de la frecuencia de la luz, introduciendo efectos de cromaticidad. Un análisis de estos efectos excede al presente trabajo, por lo que a lo largo del mismo se ha considerado que la lente gravitatoria está en vacío.

Otro aspecto interesante que no ha sido considerado aquí es que el campo gravitatorio afecta no sólo la trayectoria de los rayos de luz sino también el tiempo que tardan en llegar al observador, como consecuencia no sólo del cambio en la longitud del camino recorrido sino también de la dilatación temporal gravitatoria. Esto es relevante para fuentes variables; en algunos casos, múltiples imágenes de un mismo objeto han sido identificadas como tales ya que sus variaciones temporales eran idénticas pero desfasadas [80]. La diferencia en tiempos de llegada también puede ser usada para determinar la distancia a la lente [81].

Se espera que en el futuro cercano se pueda estudiar con mayor detalle la región cercana al horizonte de eventos del agujero negro supermasivo en Sgr A*. Entre los proyectos que planean estas observaciones están el instrumento GRAVITY [38, 82], que estudiará la región infrarroja cercana del espectro con el objetivo

de monitorear el movimiento de las estrellas, y el Telescopio del Horizonte de Eventos [82], el cual se vale de interferometría de muy larga base (VLBI en inglés) para estudiar la zona cercana a agujeros negros supermasivos y núcleos galácticos activos; en particular, los agujeros negros supermasivos ubicados en el centro de Vía Láctea y de la galaxia M87. En particular, se busca observar la forma de la llamada “sombra” del horizonte de eventos, ya que la misma puede ser otro camino para verificar las predicciones de la relatividad general o contrastarla con otras teorías [83-85]. También se planea usar en un futuro instrumentos en rayos X [82, 83, 86]. Los instrumentos mencionados están diseñados principalmente para estudiar al agujero negro supermasivo galáctico, el cual tiene un diámetro angular aparente de aproximadamente $50 \mu\text{as}$ [82], así como aquellos de galaxias cercanas, especialmente el caso de M87. Parece poco probable que las imágenes relativistas puedan ser observadas en el futuro cercano. Como se ha visto, es necesario resolver ángulos medidos en fracciones de microsegundos de arco. Es claro entonces que se debe esperar a nuevas generaciones de instrumentos para poder estudiar las imágenes relativistas.

Apéndice A

Unidades geométricas

Velocidad de la luz en el vacío $c = 2,998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Constante de gravitación universal $G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Las unidades geométricas se definen tomando $c = 1$ y $G = 1$. Entonces:

$$1 \text{ s} = 2,998 \times 10^8 \text{ m}$$

$$1 \text{ kg} = 7,425 \times 10^{-28} \text{ m}$$

Apéndice B

Constantes astrofísicas

B.1. Masa y radio solares

Entre paréntesis se muestran los valores en unidades geométricas.

Masa solar $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ($1,477 \times 10^3 \text{ m}$)

Radio solar $R_{\odot} = 6,960 \times 10^8 \text{ m}$

B.2. Factores de conversión

Factores de conversión para algunas unidades muy usadas en astrofísica:

Año luz $1 \text{ ly} = 9,461 \times 10^{15} \text{ m}$

Pársec $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$

Segundo (de arco) $1 \text{ as} = 4,8481 \times 10^{-6} \text{ rad}$

Bibliografía

- [1] C. M. Will, *Living Rev. Relativ.* **17**, 4 (2014).
- [2] F. W. Dyson, A. S. Eddington y C. Davidson, *Philos. Trans. Royal Soc.* **220**, 291 (1920).
- [3] A. Einstein, *Science* **84**, 506 (1936).
- [4] D. Walsh, R. F. Carswell y R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979).
- [5] P. Schneider, J. Ehlers y E. E. Falco, *Gravitational lenses* (Springer, V, 1992).
- [6] C. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London* **249**, 180 (1959).
- [7] J. P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **75**, 228 (1979).
- [8] H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **55**, 428 (1987).
- [9] R. J. Nemiroff, *Am. J. Phys.* **61**, 619 (1993).
- [10] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane y G. Scarpetta, *Gen. Relativ. Gravit.* **33**, 1535 (2001).
- [11] E. F. Eiroa, G. E. Romero y D. F. Torres, *Phys. Rev. D* **66**, 024010 (2002).
- [12] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002).
- [13] N. Tsukamoto, *Phys. Rev. D* **95**, 064035 (2017).
- [14] E. F. Eiroa y D. F. Torres, *Phys. Rev. D* **69**, 063004 (2004).
- [15] N. Tsukamoto e Y. Gong, *Phys. Rev. D* **95**, 064034 (2017).
- [16] N. Tsukamoto, *Phys. Rev. D* **95**, 084021 (2017).
- [17] N. Tsukamoto, *Phys. Rev. D* **94**, 124001 (2016).
- [18] A. Bhadra, *Phys. Rev. D* **67**, 103009 (2003).
- [19] E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **73**, 043002 (2006).
- [20] N. Mukherjee y A. S. Majumdar, *Gen. Relativ. Gravit.* **39**, 583 (2007).
- [21] G. N. Gyulchev y S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. D* **75**, 023006 (2007).
- [22] S. Chen y J. Jing, *Phys. Rev. D* **80**, 024036 (2009).

- [23] Y. Liu, S. Chen y J. Jing, Phys. Rev. D **81**, 124017 (2010).
- [24] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, Class. Quantum Grav. **28**, 085008 (2011).
- [25] S. Chakraborty y S. SenGupta, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2017**, 045 (2017).
- [26] E. F. Eiroa, Phys. Rev. D **71**, 083010 (2005).
- [27] R. Whisker, Phys. Rev. D **71**, 064004 (2005).
- [28] A. S. Majumdar y N. Mukherjee, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 1095 (2005).
- [29] C. R. Keeton y A. O. Petters, Phys. Rev. D **73**, 104032 (2006).
- [30] S. Pal y S. Kar, Class. Quantum Grav. **25**, 045003 (2008).
- [31] A. Y. Bin-Nun, Phys. Rev. D **81**, 123011 (2010).
- [32] E. F. Eiroa y C. M. Sendra, Phys. Rev. D **86**, 083009 (2012).
- [33] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **611**, 1045 (2004).
- [34] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **627**, 790 (2005).
- [35] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **696**, 701 (2009).
- [36] A. Y. Bin-Nun, Phys. Rev. D **82**, 064009 (2010).
- [37] A. Y. Bin-Nun, Class. Quantum Grav. **28**, 114003 (2011).
- [38] V. Bozza y L. Mancini, Astrophys. J. **753**, 56 (2012).
- [39] K. S. Virbhadra, D. Narasimha y S. M. Chitre, Astron. Astrophys. **337**, 1 (1998).
- [40] K. S. Virbhadra y G. F. Ellis, Phys. Rev. D **65**, 103004 (2002).
- [41] K. S. Virbhadra y C. R. Keeton, Phys. Rev. D **77**, 124014 (2008).
- [42] K. S. Virbhadra, Phys. Rev. D **79**, 083004 (2009).
- [43] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [44] R. J. Nemiroff, P. A. Becker y K. S. Wood, Astrophys. J. **406**, 590 (1993).
- [45] S. E. Vázquez y E. P. Esteban, Nuovo Cim. **119**, 489 (2004).
- [46] V. Bozza, F. D. Luca y G. Scarpetta, Phys. Rev. D **74**, 063001 (2006).
- [47] V. Bozza y G. Scarpetta, Phys. Rev. D **76**, 083008 (2007).
- [48] G. V. Kraniotis, Class. Quantum Grav. **28**, 085021 (2011).
- [49] K. Garrett y G. Duda, Adv. Astron. **2011**, 968283 (2011).
- [50] P. J. E. Peebles y B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [51] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

- [52] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
- [53] S. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [54] S. Frittelli, T. P. Kling y E. T. Newman, *Phys. Rev. D* **61**, 064021 (2000).
- [55] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **78**, 103005 (2008).
- [56] K. S. Virbhadra y G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [57] W. Hasse y V. Perlick, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 415 (2002).
- [58] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (John Wiley & Sons Inc., New York, 2013).
- [59] S. Gillessen et al., *Astrophys. J.* **837**, 30 (2017).
- [60] B. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [61] B.-L. Young, *Front. Phys.* **12**, 121201 (2017).
- [62] C. Brans y R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [63] E. Babichev, C. Charmousis y A. Lehébel, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2017**, 027 (2017).
- [64] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer y G. Zahariade, *Phys. Rev. D* **84**, 064039 (2011).
- [65] C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla y P. M. Saffin, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 051101 (2012).
- [66] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza y F. Vernizzi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015**, 018 (2015).
- [67] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza y F. Vernizzi, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 211101 (2015).
- [68] M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012).
- [69] A. Cisterna y C. Erices, *Phys. Rev. D* **89**, 084038 (2014).
- [70] A. Anabalon, A. Cisterna y J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 084050 (2014).
- [71] T. Kobayashi y N. Tanahashi, *Progr. Theor. Exp. Phys.* **2014**, 073E02 (2014).
- [72] C. Charmousis, T. Kolyvaris, E. Papantonopoulos y M. Tsoukalas, *J. High Energ. Phys.* **2014**, 85 (2014).
- [73] M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **89**, 064017 (2014).
- [74] E. Babichev, C. Charmousis y A. Lehébel, *Class. Quantum Grav.* **33**, 154002 (2016).

- [75] X.-H. Feng, H.-S. Liu, H. Lü y C. N. Pope, *J. High Energ. Phys.* **2015**, 176 (2015).
- [76] M. Cvetič, G. Gibbons y C. Pope, *Phys. Rev. D* **94**, 106005 (2016).
- [77] L. Hui y A. Nicolis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 241104 (2013).
- [78] A. E. Broderick et al., *Astrophys. J.* **805**, 179 (2015).
- [79] G. Bisnovatyi-Kogan y O. Tsupko, *Universe* **3**, 57 (2017).
- [80] J. Wambsganss, *Living Rev. Relativ.* **1**, 12 (1998).
- [81] V. Bozza y L. Mancini, *Gen. Relativ. Gravit.* **36**, 435 (2004).
- [82] T. Johannsen, *Class. Quantum Grav.* **33**, 113001 (2016).
- [83] H. Falcke y S. B. Markoff, *Class. Quantum Grav.* **30**, 244003 (2013).
- [84] L. Amarilla y E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **85**, 064019 (2012).
- [85] L. Amarilla y E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **87**, 044057 (2013).
- [86] C. Bambi, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 025001 (2017).