

Tesis de Grado

Creación de partículas y generación de entropía en escenarios cosmológicos

de Olazábal, Ramiro

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

de Olazábal, Ramiro. (2017). Creación de partículas y generación de entropía en escenarios cosmológicos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000027_DeOlazabal

Cita tipo Chicago:

de Olazábal, Ramiro. "Creación de partículas y generación de entropía en escenarios cosmológicos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000027_DeOlazabal

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Creación de partículas y
generación de entropía en
escenarios cosmológicos

Ramiro de Olazábal

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Director: Fernando C. Lombardo

8 de Septiembre 2017

En primer lugar quiero dedicarle esta tesis a mi padre, fue él más que nadie quién me enseñó el amor por la ciencia y la cultura, y junto con mi madre se que siempre voy a poder contar con ellos.

También quiero expresarle mi más profundo agradecimiento a Fernando Lombardo, quién me acompañó desde el primer momento. Sin su ayuda y su apoyo no hubiese podido hacer este trabajo, y no es solo en lo académico en lo que más me siento agradecido, sinó sobre todo en lo personal, ya que es un gran colega de trabajo siempre dispuesto a dar tanto una ayuda como un consejo. A él quiero agradecerle por creer en mí y no solo hacer posible este trabajo, sinó también porque mediante él puedo terminar una etapa y comenzar otra nueva.

Quiero agradecerles también a todos mis amigos y compañeros de la facu: a Joan, David, Feli, Nacho, Juan, y a tantos otros con los que compartí esta gran etapa de mi vida. Quiero agradecerles porque también es gracias a ustedes que pude llegar a este momento, sin su ayuda en los ratos de estudio todo se habría hecho cuesta arriba, y obviamente, mucho más tedioso...

*“Gracias quiero dar al divino laberinto de los efectos y las causas
por la diversidad de criaturas que pueblan este nuestro singular universo,
por la razón, que no cesará de soñar con un plano del laberinto...”*

“Otro Poema de los Dones”, J. L. Borges

Resumen

En este trabajo investigamos las propiedades termodinámicas de un campo escalar libre presente en un espacio tiempo curvo, cuando este último sufre una dinámica entre dos estados asintóticos IN y OUT. Para ello consideramos al campo como sufriendo una transformación fuera del equilibrio termodinámico debido a la variación de la métrica. Las características de este proceso son estudiadas mediante los llamados teoremas de fluctuación-disipación, los mismos han sido desarrollados para estudiar procesos en los que el sistema de estudio se encuentra arbitrariamente lejos del estado de equilibrio. Aplicamos estas ideas a tres escenarios cosmológicos, y explicamos las consecuencias que tiene en cada uno de ellos. El resultado principal de este trabajo es encontrar una expresión general que vincula la variación de entropía del campo con el número de partículas creadas. En particular, en el caso en que el estado inicial del campo es un estado térmico, dicha variación es monótona creciente respecto del número de partículas creadas. Finalmente, la importancia de este trabajo radica en la generalización de trabajos anteriores, ya que aquí trabajamos en el caso general en que los infinitos modos de un campo escalar masivo y con constante de acoplamiento ξ general están presentes en un universo de FRW de dimensión $3 + 1$.

Índice general

Resumen	III
1. Introducción	1
2. Conceptos de termodinámica y teoremas de fluctuación	7
3. Conceptos de teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos	13
3.1. Espacio-tiempos curvos y universos de FRW	14
3.2. Teoría cuántica de campos	15
3.2.1. Teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos	18
3.2.2. Expresión del hamiltoniano de un campo escalar . . .	19
3.2.3. Coeficientes de Bogoliubov	20
4. Desarrollos previos	22
4.1. Modelo cosmológico	22
4.1.1. Trabajo hecho por el espacio-tiempo	24
4.1.2. Producción de entropía	26
5. Cálculo del trabajo de fricción para un universo de dimensión 3 + 1 y acoplamiento ξ general	28
5.1. Hamiltonianos IN y OUT	29
5.2. Cálculo del trabajo de fricción	31
6. Producción de entropía, trabajo efectuado por la variación de la métrica y creación de partículas	34
6.1. Producción de entropía	34
6.2. Trabajo efectuado sobre el campo	41
7. Cálculo de coeficientes de Bogoliubov para tres casos particulares	43
7.1. Teoría de perturbaciones para pequeños apartamientos de la simetría conforme: espacio anisótropo, $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$. . .	44
7.2. Teoría de perturbaciones para un espacio isótropo, plano y $\xi \approx 1/6$ y $m \approx 0$	54

7.3. Espacio-tiempo plano, acoplamiento conforme $\xi = 1/6$ y factor conforme $C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta)$	59
8. Conclusiones	74
Bibliografía	76

Capítulo 1

Introducción

La termodinámica es una de las ramas de la física más generalizables al estudio de cualquier sistema. Este área nacida a mediados del siglo XIX, surgió de la necesidad de comprender la relación existente entre calor, energía y trabajo efectuado por un dado sistema físico, con el objetivo de optimizar el funcionamiento de las máquinas a vapor recientemente desarrolladas. En la carrera por obtener máquinas cada vez más potentes y eficientes un ingeniero, Sadi Carnot, dió los primeros pasos en el área que hoy lleva el nombre termodinámica.

En esta línea y en un intento de mejorar el funcionamiento de motores a vapor, se comenzó por estudiar las propiedades de sistemas gaseosos. En aquel entonces la física estaba regida por las leyes de Newton, por lo que si se quería tener un conocimiento cabal de cualquier sistema, el mismo debería ser descrito en términos de las leyes de movimiento que rigen sus componentes últimos. Es decir, bastaba con poder describir tiempo a tiempo la posición y velocidad de cada partícula que lo integra. Siendo que en ese momento estaba ganando adeptos la teoría atómica, esto implicaba describir dichas magnitudes para cada uno de los átomos que integran el sistema en cuestión: en este caso vapor de agua. Pero pese a lo prometedor que esto puede resultar en la teoría, en la práctica implica trabajar con una ecuación de movimiento por cada átomo de gas, debiendo a su vez considerar las interacciones y colisiones entre ambos, un trabajo no solamente engorroso, sino que además imposible.

Había que encontrar otra forma de encarar el problema, y el primero en dar con una solución viable fue Carnot. Su idea fue buscar el modelo más simple ignorando la mayor cantidad de variables posible, pero teniendo cuidado que aquellas que no se ignoran deben ser lo suficientemente generales de manera de no perder poder descriptivo, y sobre todo: deben ser directamente observables. De esta forma sería posible realizar *en ciertos contextos* predicciones sobre el proceso en términos de unas pocas variables, que hoy llamamos adecuadamente variables termodinámicas. Estas dependen del sistema en cuestión, y en el caso de un gas las más comúnmente utilizadas suelen ser la presión, temperatura, volumen y la cantidad de partículas. Hay que aclarar que con "ciertos contextos" me refiero a condiciones muy específicas que sean válidas en el contexto en el que está planteado el problema. En particular me refiero a los llamados casos de *equilibrio termodinámico*, el cual indica aquellos estados en los que las variables del sistema son constantes y no dependen (al menos durante una determinada ventana temporal) del tiempo.

Los pasos de Carnot fueron continuados por otros, y el rango de aplicación de la termodinámica pronto trascendió el área de las aplicaciones técnicas para aplicarse al estudio de cualquier sistema físico capaz de realizar trabajo. El gran logro de esta nueva rama de la física fué poder expresar en leyes generales los comportamientos de un sistema del cual algunas de sus variables son desconocidas. Pero esto no fue todo, sino que a partir de estas leyes fue posible hacer predicciones acertadas no únicamente sobre motores a vapor, sino prácticamente de cualquier sistema físico, incluyendo modelos cosmológicos. Como ejemplo de esto último, podemos decir que ha contribuido a entender la relación entre materia y energía en modelos cosmológicos de universos en expansión. Por último, uno de los motivos que más fascinan de la termodinámica es que la misma es capaz de respaldar y al mismo tiempo dar cuenta de intuiciones que nos son tan familiares como el paso del tiempo y la tendencia al desorden y desgaste. Estos últimos conceptos están particularmente vinculados con el llamado Teorema de Crooks [1], que deduciremos en el capítulo 2.

En lo que respecta a nuestro tema, que es la vinculación entre la creación de partículas y la generación de entropía en procesos cosmológicos,

debemos tener en cuenta que la materia contribuye al contenido entrópico del universo. La creación de materia es en ciertos contextos consecuencia de la expansión del espacio-tiempo [2, 3]. Por ello siempre se asume, aunque sin probarlo, que la producción de entropía debería estar directamente relacionada con la creación de partículas [4]. De todas formas las leyes de la física son totalmente reversibles, por lo que se concluye que la entropía no puede aumentar en un proceso gobernado por leyes físicas tales como las ecuaciones de Einstein o de Schrödinger. Esta contradicción aparente permanece aún sin ser resuelta y ha dado lugar a muchos trabajos en el intento de comprender el rol de la creación de partículas en los procesos termodinámicos del universo.

En las décadas pasadas se han intentado numerosas aproximaciones que buscan dar cuenta de forma cuantitativa de la producción de entropía del universo. En ellas se emplearon tanto modelos abiertos como cerrados, formalismos clásicos y cuánticos [4, 5]. Muy comunmente en estos contextos la entropía de Von Neumann es vista como cuantificando la información inaccesible o *coarse grained* (por necesidad o elección). De todas formas, la entropía de Von Neumann de sistemas cuánticos cerrados no varía durante una evolución unitaria. Pero en un sistema cuántico abierto, el estado de la materia puede volverse *más mezclado* a medida que el sistema interactúa con el ambiente. De esta manera, se observa una pérdida de información del sistema y un incremento de su entropía. Se argumentó a menudo que la producción de entropía está directamente relacionada con el número de partículas creadas[6]. Otros trabajos sugieren que en un sistema cuántico cerrado se debería encontrar un parámetro entrópico que aumente de forma directa como consecuencia de la creación de partículas debido a la expansión. De todas formas, una conexión clara entre una medida establecida de entropía y el número de partículas creado en escenarios cosmológicos todavía permanece como una cuestión abierta.

En este trabajo usaremos herramientas de Teoría Cuántica de Campos en Espacios Curvos (TQCEC) [2] y conceptos recientemente desarrollados de termodinámica de sistemas cuánticos [1] con el fin de investigar la relación entre producción de entropía y creación de partículas en un universo en expansión. Estos mismos temas han sido estudiados en [3] para el caso de

un campo escalar libre en un universo de dimensión 1+1 con acoplamiento conforme, en el que solo dos modos de dicho campo han sido excitados. Aquí generalizaremos sus resultados para modelos cosmológicos más realistas, es decir, trabajaremos en un universo en expansión de dimensión 3+1 para cualquier tipo de acoplamiento (volveremos al caso de acoplamiento conforme con el fin de realizar los mismos desarrollos para algunos coeficientes de expansión particular). Como en [3] daremos un significado termodinámico a la creación de partículas a través de una cantidad llamada *fricción interna*. De esta manera, veremos que la fricción interna surge de las fluctuaciones cuánticas de los campos [1] y tiene una interpretación entrópica a través de una relación de fluctuación cuántica. El resultado principal del trabajo citado será una versión cuántica de la segunda ley en contextos cosmológicos, la cuál da cuenta de la creación de partículas. Dichos resultados, según se dijimos más arriba, se generalizarán aquí a modelos de universos en expansión más realistas (dimensión 3+1 y cualquier tipo de acoplamiento).

Para una comprensión más clara, esta tesis está organizada de la siguiente forma: en el capítulo 2 presentaremos un resumen de los trabajos realizados por Jarzynski y Crooks en donde se deducen los teoremas de fluctuación-disipación que usaremos luego para definir un parámetro entrópico. De esta manera, en el capítulo 6 podremos vincular este parámetro con la variación de entropía del campo escalar producida durante una evolución de la métrica. Luego en el capítulo 3, para poder aplicar estos conceptos de termodinámica en modelos cosmológicos, deberemos introducir nociones de teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos (TCEEC). En particular, en este capítulo estudiaremos como es la expresión de un campo escalar presente en un universo de FRW de dimensión 3 + 1 en expansión, con parámetro de acoplamiento a la curvatura ξ general. Supondremos que dicho universo parte de un estado asintótico IN en tiempo $t \rightarrow -\infty$, para luego finalizar en un estado asintótico OUT en tiempo $t \rightarrow +\infty$. Entre ambos límites la expansión tiene la libertad de ser arbitraria. Introduciremos los coeficientes de Bogoliubov y mediante ellos deduciremos la creación de partículas como consecuencia de la dinámica de la métrica, dicha producción de partículas se da lugar en expansiones no adiabáticas y es consecuencia de la amplificación paramétrica de fluctuaciones del vacío y de los modos inicialmente presentes del campo.

Antes de pasar a los desarrollos propios de este trabajo, en el capítulo 4 haremos un resumen de los desarrollos previos vinculados a este tema, y daremos un breve repaso del paper que motivó esta tesis, el mismo puede consultarse en [3]. Aquí definiremos una magnitud que llamaremos *trabajo de fricción*, la cual será esencial para vincular la variación de entropía con el número de partículas creadas.

En los capítulos 5 y 6 generalizaremos los resultados obtenidos en [3] en el caso de un universo de FRW de dimensión $3 + 1$ y constante de acoplamiento ξ general. Para ello utilizaremos los conceptos de termodinámica y TCETC desarrollados en los capítulos anteriores. Primero estudiaremos cómo varía la expresión del hamiltoniano del campo escalar entre los estados IN y OUT definidos más arriba, para luego generalizar la expresión del *trabajo de fricción* y mediante él la variación de entropía. Supondremos siempre que el campo escalar se acopla únicamente con la métrica y que su estado inicial es un estado térmico a temperatura $T = \beta^{-1}$. En el camino, veremos que luego de la expansión su estado final no será ya un estado térmico, sino que modos de igual módulo de vector de onda (casquetes esféricos en el espacio de fases) termalizarán a temperatura distinta, la cual dependerá de dicho módulo. Por otro lado, y este es el resultado más importante, se observa que para este caso la entropía es monótona creciente con el número de partículas creadas. Aclaremos que en este caso todo quedará escrito en términos de los coeficientes de Bogoliubov, en los cuales estará “encapsulada” la información acerca de la dinámica particular que siguió la métrica al pasar del estado IN al estado OUT.

Por último, en el capítulo 7 hallaremos las expresiones de los coeficientes de Bogoliubov para tres casos particulares:

- Espacio plano, anisótropo, con $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$. Tanto en este caso como en el siguiente, siguiendo el método de WKB haremos un desarrollo en serie para los parámetros relevantes, con el fin de estudiar un universo que sufre pequeñas desviaciones respecto de la simetría conforme.
- Espacio plano, isótropo, con $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$.
- Espacio plano, isótropo, $\xi = 1/6$ (acoplamiento conforme), y factor conforme el valor $C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta)$.

Finalmente, en el capítulo 8 comentaremos las conclusiones obtenidas en este trabajo, la posibilidad de extenderlo a otros escenarios, por ejemplo al caso de campo autointeractuante y las dificultades que implicaría esto último.

Capítulo 2

Conceptos de termodinámica y teoremas de fluctuación

En las últimas décadas se han desarrollado numerosos métodos para manipular a un sistema molécula por molécula, lo que dió lugar a la posibilidad de construir máquinas moleculares. En las cuales sus distintos componentes son de escala microscópica: del tamaño de una molécula o incluso de un átomo. Con el interés de estudiar las propiedades de dichos mecanismos, cobró gran importancia el estudio de la termodinámica a nivel microscópico. Más en la actualidad, el desarrollo de técnicas de confinamiento de átomos fríos [7] (cuyas temperaturas pueden reducirse por debajo de 1 mK) nos permiten entre sus muchas aplicaciones el estudio de las propiedades termodinámicas de sistemas compuestos por un único átomo. Por ejemplo, pueden estudiarse las características de una máquina térmica compuesta de un único ión [8].

Estudiando estos sistemas a escalas atómicas, es sumamente interesante preguntarse cuáles son las transformaciones que el sistema es capaz de realizar a lo largo del tiempo. Aquí entra en juego el llamado *Teorema de Crooks*, el cual establece una relación entre la probabilidad de que un sistema pase de un microestado A a otro microestado B, y la probabilidad de que dicha transformación se haga en sentido inverso, desde B hacia A. Lo notable de este teorema no es solo que de él se deduce la desigualdad de Clausius, sino que además predice que la misma puede ser violada por procesos espontáneos y la frecuencia con la que se producen estas violaciones.

Por supuesto, dicha frecuencia es infinitesimal para sistemas macroscópicos, pero se vuelve significativa para sistemas atómicos o moleculares. En opinión de algunos autores, este teorema nos da la mejor perspectiva sobre la naturaleza de la segunda ley de que disponemos hoy en día [9].

Recientemente se han estudiado las propiedades termodinámicas de campos cuánticos en un universo en expansión [3, 10]. Por un lado la materia contribuye al contenido de entropía del universo, y por otro la creación de partículas puede verse como consecuencia de la expansión del espacio-tiempo [11]. Si asumimos entonces que la producción de entropía está estrechamente vinculada a la creación de materia, cobran particular importancia el estudio de procesos cosmológicos inflacionarios, en donde la creación de partículas tiene como consecuencia una variación de entropía del universo.

Puede mostrarse que la producción de partículas en la era de Planck ($\sim 10^{-43}$ segundos luego del big bang) ha sido capaz de jugar un rol crucial en determinar la cantidad de materia del universo, como también en la evolución posterior del mismo [12] [13]. Por otro lado, y en línea con lo anterior, esta producción se cree que es una de las fuentes principales de entropía del universo, y entre otras cosas puede dar cuenta de la edad del mismo [14].

En el presente capítulo se presenta el tratamiento teórico necesario para vincular la variación de entropía entre un estado inicial y otro final de un mismo sistema con las probabilidades de transición entre ambos estados. La relación matemática que vincula estos parámetros se formula en el contexto de los llamados “teoremas de fluctuación” y recibe el nombre de Teorema de Crooks.

Los teoremas de fluctuación relacionan propiedades del equilibrio de un sistema (como la energía, entropía, etc.) con procesos fuera del equilibrio. Estas herramientas han resultado ser muy útiles para el estudio de sistemas dominados por fluctuaciones (tanto estadísticas como cuánticas) y en donde la termodinámica del equilibrio no es aplicable. Las mismas en general son debidas a la existencia de un agente externo el cual mueve al sistema fuera del equilibrio. En el caso del presente trabajo corresponde a la expansión del espacio-tiempo el cual, mediante el acople entre el campo y la métrica, perturba al campo (inicialmente considerado en un estado de

equilibrio térmico) llevándolo a un estado fuera del equilibrio. Dicho acoplamiento se manifiesta en la expresión del Hamiltoniano como una frecuencia dependiente del tiempo conforme: $\omega_k = \omega_k(\eta)$, mediante la cual se aleja al sistema del equilibrio durante el proceso de expansión.

A continuación se presenta uno de los teoremas de fluctuación más conocidos, y el que se usará en este trabajo: la identidad de Crooks.

Consideremos un sistema \mathcal{S} descrito por el hamiltoniano $H(\lambda(t))$. El hamiltoniano depende del tiempo a través de un parámetro $\lambda(t)$ que suponemos varía externamente. Llamaremos λ el “parámetro de trabajo”, pues justamente variándolo es que se realiza trabajo sobre el sistema.

Inicialmente a tiempo $t = 0$, el sistema S se encuentra en un estado ρ_0 . Luego, se realiza trabajo variando el parámetro de control desde un valor $\lambda(0)$ hasta alcanzar $\lambda(\tau)$ a un tiempo final $t = \tau$.

Supongamos que inicialmente el sistema S se encuentra en contacto con un baño térmico a temperatura $T = \beta^{-1}$. Por lo tanto, el estado inicial del sistema S será un estado térmico y la matriz densidad del estado inicial será:

$$\rho_0 = \frac{e^{-\beta H(\lambda(0))}}{Z}, \quad (2.1)$$

donde $Z = Tr(e^{-\beta H(\lambda(0))})$ es la función partición. Luego, el sistema se separa del baño, pasando a estar térmicamente aislado, y se realiza trabajo variando el parámetro de control λ como se explicó anteriormente.

Dado que en este caso el estado inicial es térmico, el mismo es diagonal en la base de autoestados de energía y la probabilidad p_n de medir una energía E_n a tiempo $t = 0$ es simplemente la medida de Gibbs

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}. \quad (2.2)$$

Como se dijo anteriormente, en nuestro caso $\lambda(t)$ será la frecuencia, la cual varía en un proceso de expansión: $\omega_k|_{t \rightarrow -\infty} \neq \omega_k|_{t \rightarrow +\infty}$.

Para un proceso de expansión, la probabilidad de medir una variación de entropía igual a s será:

$$P_E(s) = \sum_{m,n} p_n p_{m|n} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)], \quad (2.3)$$

en donde \tilde{s}_m hace referencia al valor observado de la entropía al final del proceso, la energía final es \tilde{E}_m , y $p_{m|n}$ es la probabilidad de transición al autoestado de energía final \tilde{E}_m dado que inicialmente se encontraba en el estado de energía E_n .

Consideremos ahora el proceso inverso al anterior, es decir, un proceso de contracción del espacio-tiempo. Dicha contracción se obtiene a partir de una inversión temporal de la evolución del parámetro λ . En este caso se parte del estado térmico $e^{-\beta H(\lambda(\tau))}/\tilde{Z}$ del Hamiltoniano $H(\lambda(\tau))$ a la misma temperatura β^{-1} que el caso anterior, con un valor inicial del parámetro $\lambda(\tau)$. Luego, variando el parámetro de control según la evolución inversa, se llega hasta un valor final $\lambda(0)$. La distribución de probabilidades para la variación de entropía del sistema S debido al nuevo proceso será entonces

$$P_C(s) = \sum_{m,n} \tilde{p}_m \tilde{p}_{n|m} \delta[s - (s_n - \tilde{s}_m)], \quad (2.4)$$

donde $\tilde{p}_n = \frac{e^{-\beta \tilde{E}_n}}{\tilde{Z}}$ es la probabilidad de medir una energía inicial \tilde{E}_m y $\tilde{p}_{n|m}$ la probabilidad de transición al autoestado de energía final E_n , dado que inicialmente se midió \tilde{E}_m . Veamos ahora como se vinculan entre sí las expresiones (2.3) y (2.4).

Multiplicando la distribución de probabilidades $P(s)$ por e^{-s} y usando la paridad de la delta, $\delta(x) = \delta(-x)$, se tiene

$$\begin{aligned} e^{-\beta s} P_E(s) &= \sum_{n,m} p_n p_{m|n} e^{-s} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)] \\ &= \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} p_{m|n} e^{-(\tilde{s}_m - s_n)} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)] \\ &= \frac{\tilde{Z}}{Z} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{\tilde{Z}} p_{m|n} e^{-(\tilde{s}_m - s_n)} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)] \\ &= e^{-\beta \Delta F} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{\tilde{Z}} p_{m|n} e^{-(\tilde{s}_m - s_n)} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde introducimos la diferencia de energía libre $\Delta F = \tilde{F} - F$, la cual se define como

$$F = \beta^{-1} \ln Z \quad (2.6)$$

y por lo tanto su diferencia resulta

$$\Delta F = \beta^{-1} \ln \frac{\tilde{Z}}{Z}. \quad (2.7)$$

Dado que p_n y \tilde{p}_m son las probabilidades de que inicialmente midamos energías E_n y \tilde{E}_m para procesos de expansión y contracción respectivamente, asociamos a dichas probabilidades las cantidades entrópicas $-\ln(p_n)$ y $-\ln(\tilde{p}_m)$. Definimos su diferencia como:

$$s_{n,m} = -\ln(p_n) + \ln(\tilde{p}_m) \quad (2.8)$$

y usando las definiciones de p_n y \tilde{p}_m tenemos

$$s_{n,m} = \beta(\tilde{E}_m - E_n) - \beta\Delta F, \quad (2.9)$$

o lo que es lo mismo

$$e^{-s_{n,m}} = e^{-\beta(\tilde{E}_m - E_n)} e^{\beta\Delta F} \quad (2.10)$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} e^{-\beta s} P_E(s) &= e^{-\beta\Delta F} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_n}}{\tilde{Z}} p_{m|n} e^{-s_{n,m}} \delta[s - s_{n,m}] \\ &= e^{-\beta\Delta F} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{\tilde{Z}} p_{m|n} e^{-\beta(\tilde{E}_m - E_n)} e^{\beta\Delta F} \delta[s - s_{n,m}] \\ &= \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta\tilde{E}_m}}{\tilde{Z}} p_{m|n} \delta[s - s_{n,m}] \\ &= \sum_{n,m} \tilde{p}_m p_{m|n} \delta[s - s_{n,m}], \end{aligned} \quad (2.11)$$

en donde se usó que $\tilde{p}_n = \frac{e^{-\beta\tilde{E}_n}}{\tilde{Z}}$.

Vemos que la expresión (2.11) es muy similar a la definición de P_C en la ecuación (2.4), salvo por las probabilidades de transición. Sin embargo, observando la definición de dichas probabilidades y la paridad de la delta de Dirac

$$p_{m|n} = |\langle m|n \rangle|^2 = |\langle n|m \rangle|^2 = \tilde{p}_{n|m} \quad ; \quad \delta[s - s_{n,m}] = \delta[-s + s_{n,m}] \quad (2.12)$$

Por lo tanto podemos escribir

$$e^{-\beta s} P_E(s) = \sum_{n,m} \tilde{p}_m \tilde{p}_{n|m} \delta[-s + s_{n,m}]. \quad (2.13)$$

Por otro lado, también puede demostrarse que las probabilidades de transición son simétricas ($p_{m|n} = p_{n|m}$) aludiendo al principio de reversibilidad microscópica, es decir, asumiendo que el Hamiltoniano es invariante ante inversiones temporales [1].

Finalmente, el lado derecho de la ecuación (2.13) es simplemente la definición de P_C (ecuación (2.4)) evaluada en $-s$. Por lo tanto resulta

$$\frac{P_E(s)}{P_C(-s)} = e^{-\beta s} \quad (2.14)$$

que es efectivamente el teorema de Crooks.

Notablemente, la identidad de Crooks relaciona la entropía, que es la propiedad de un sistema en equilibrio termodinámico, con las probabilidades de transición entre estados, en un proceso que puede estar arbitrariamente lejos del equilibrio.

En este trabajo usaremos estos resultados aplicados en un contexto cosmológico. El sistema estará formado por un campo escalar presente en un universo de $3 + 1$ acoplado de forma arbitraria a la métrica, tomando a la misma como la métrica clásica del espacio-tiempo de Friedmann Robertson Walker (aproximación semiclásica). El campo inicialmente estará en un estado de equilibrio térmico para luego ser perturbado y alejado del equilibrio por la variación de la métrica, la cual evoluciona entre estados asintóticamente estáticos.

Luego de probar que la creación de partículas debida a este proceso (capítulo 6) es creciente con el número de partículas creadas, calcularemos la densidad de modos creados para distintos tipos de evoluciones, estudiando la dependencia de dicha evolución con los parámetros que la determinan.

Capítulo 3

Conceptos de teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos

La teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos es de gran utilidad como aproximación a una teoría cuántica de la gravedad, de la que aún carecemos [2]. De esta manera, se consideran a las partículas como excitaciones de campos cuánticos propagándose en un fondo clásico (espacio-tiempo).

En este capítulo daremos una breve introducción las teorías cuánticas de campos definidas en métricas curvas. En la primer sección nos dedicaremos a introducir conceptos generales sobre espacios tiempos curvos. En particular, veremos las métricas de FRW con las cuales en el resto del trabajo describiremos al universo en evolución. Una vez comprendidas las mismas, pasaremos a explicar la teoría cuántica de campos referida a un campo escalar en un espacio-tiempo curvo. Cabe aclarar que hay casos de espacio-tiempos en los cuales no siempre es posible definir un concepto de partícula. De todas formas las métricas de FRW no presentan este problema y nos será sencillo definir un operador número de partícula, y de esta manera definir a las partículas como sus autoestados.

Un concepto fundamental que surgirá del estudio de las soluciones de la ecuación de movimiento del campo definida en espacios tiempos curvos será la pluralidad de bases en las cuales puede expandirse el mismo. De esta pluralidad de bases se deducen los *coeficientes de Bogoliubov*, los cuales

corresponden a los coeficientes de la matriz cambio de base entre ellas. La importancia de dichos coeficientes radica en que según veremos en la sección 3.2, el número de partículas creadas tras una evolución de la métrica será función de dichos coeficientes.

Finalmente en el capítulo 7 calcularemos estos coeficientes para tres evoluciones particulares de la métrica, y estudiaremos su comportamiento respecto de distintos parametros que caracterizan la evolución.

3.1. Espacio-tiempos curvos y unviuersos de FRW

En este trabajo se consideran a las partículas como excitaciones de campos cuánticos propagandose en un espacio-tiempo clásico. Consideraré dicho espacio-tiempo como el definido por la métrica de FRW con un factor de escala $a(t)$. La importancia de dicha métrica radica en que es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, describiendo un universo homogéneo e isótropo. Contando además con un factor de escala dependiente del tiempo el cual da cuenta de la expansión (o contracción) de la parte espacial de la métrica, describe un escenario que coincide en buena medida con las observaciones. [15]

La métrica de FRW definida de esta manera se escribe

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2(t)h_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

El intervalo estará entonces definido por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.2)$$

en donde la parte espacial de la métrica h_{ij} tiene la expresión

$$\begin{aligned} h_{ij} &= (1 - Kr)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \\ &= d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $f(x)$ definida por:

$$f(x) = r = \begin{cases} x & \text{si } K = 0 \\ \sin x & \text{si } K = -1 \\ \sinh x & \text{si } K = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Definiendo el tiempo conforme η según

$$\eta = \int^t a^{-1}(t') dt', \quad (3.5)$$

y sabiendo que $C(\eta) = a^2(t)$, podemos reescribir el intervalo (3.2) de la forma

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - h_{ij}dx^i dx^j). \quad (3.6)$$

Por lo tanto, la métrica definida en estas coordenadas resulta

$$g_{\mu\nu} = C(\eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -h_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

La ventaja de definir un factor de escala conforme es que el intervalo (3.6) y la métrica (3.7) son manifiestamente conformes a un espacio-tiempo de FRW estático.

3.2. Teoría cuántica de campos

Como se dijo anteriormente, consideraremos a las partículas como excitaciones de campos propagándose en un fondo clásico. El campo en cuestión será un campo escalar masivo en un espacio-tiempo curvo de FRW de dimensión $3 + 1$, la dinámica del mismo estará descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}[-g(x)]^{\frac{1}{2}} \{g^{\mu\nu} \phi(x)_{,\mu} \phi(x)_{,\nu} - [m^2 + \xi R(x)] \phi^2(x)\}, \quad (3.8)$$

siendo su acción respectiva

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x. \quad (3.9)$$

Si variamos la acción (3.9) se obtiene la ecuación de movimiento

$$\{\square + m^2 + \xi R(x)\}\phi(x) = 0, \quad (3.10)$$

en donde $\square \equiv \sqrt{-g}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu]$, y se considera a la métrica $g_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -)$.

Trabajando en las coordenadas definidas a partir del tiempo conforme (η, \vec{x}) (3.5), el campo solución de la ecuación (3.10) puede ser descompuesto en una base ortonormal de soluciones $u_{\vec{k}}(x, \eta)$. De esta manera que se tiene

$$\phi(x, \eta) = \int_{\vec{k}} d^3\vec{k} [a_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(x, \eta) + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(x, \eta)] \quad (3.11)$$

en donde $a_{\vec{k}}$ y $a_{\vec{k}}^\dagger$ son respectivamente los operadores de destrucción y creación del modo \vec{k} . Dichos operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\vec{k}'}; a_{\vec{k}}^\dagger] = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad ; \quad [a_{\vec{k}'}; a_{\vec{k}}] = [a_{\vec{k}}^\dagger; a_{\vec{k}}^\dagger] = 0. \quad (3.12)$$

Por otro lado, el operador de destrucción $a_{\vec{k}}$ define el estado de vacío $|0\rangle$, siendo éste el estado que verifica $a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \forall \vec{k}$. En general, se suele elegir como base el set de modos que satisface una ecuación de autovalores de la forma $i\partial_\tau u_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} u_{\vec{k}}$, en donde ∂_τ es un vector de Killing y $\omega_{\vec{k}}$ es un autovalor real.

Por último, se define el tensor de energía-momento en un espacio curvo como la variación de la acción (3.9) respecto de la métrica:

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{[-g(x)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (3.13)$$

en donde el factor $g(x)$ corresponde al determinante de la métrica.

El tensor de energía-momento para un campo escalar tiene entonces la expresión [2]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + (2\xi - \frac{1}{2})g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{,\rho}\phi_{,\sigma} - 2\xi\phi_{,\mu\nu}\phi + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}\phi\square\phi + \\ & - \xi[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\xi Rg_{\mu\nu}]\phi^2 + [\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi]m^2 g_{\mu\nu}\phi^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Recordemos que la densidad hamiltoniana puede deducirse del lagrangiano como la componente 0 – 0 del tensor de energía momento. Esto se debe a que a partir de la definición de dicho tensor en (3.13), esta componente coincide con la definición del hamiltoniano como transformada de Legendre del lagrangiano.

De esta forma, podemos hallar a partir de la expresión (3.14) una forma compacta para la densidad hamiltoniana (componente T_{00}). Si nos valemos de la ecuación de movimiento (3.10) y de la expresión de la métrica (3.1), mediante la primera escribimos el D'alambertiano en (3.14) en términos de m , ξ y R , y mediante la segunda expresamos las contracciones con la métrica en (3.14) en términos del factor de escala $a(t)$ y la métrica espacial h_{ij} . De esta manera la densidad hamiltoniana puede escribirse de la forma

$$T_{00} = \frac{1}{2}\phi_{,0}\phi_{,0} - 2\xi\phi_{,00}\phi + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right)[(m^2 + \xi R)\phi^2 + \frac{1}{a^2(t)}h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}]. \quad (3.15)$$

En las expresiones (3.14) y (3.15) utilicé que la derivada covariante es igual a la derivada parcial: $\phi_{;\alpha} = \phi_{,\alpha}$.

Partimos ahora de la expresión de la densidad hamiltoniana T_{00} (3.15), la cual la habíamos dejado expresada en las coordenadas (t, \vec{x}) . Dado que la base de soluciones de la ecuación de movimiento del campo escalar (3.19) se encuentra expresada en coordenadas referidas al tiempo conforme (η, \vec{x}) , reescribimos dicha densidad en términos de estas coordenadas.

De la expresión (3.15) resulta entonces que la densidad hamiltoniana expresada en términos del tiempo conforme tiene la expresión

$$T_{\eta\eta} = \frac{1}{2C(\eta)}\phi_{,\eta}\phi_{,\eta} - \frac{2\xi}{C(\eta)}\phi_{,\eta\eta}\phi + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right)[(m^2 + \xi R)\phi^2 + \frac{1}{C(\eta)}h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}]. \quad (3.16)$$

En donde para pasar de la expresión (3.15) a (3.16) consideré $\phi(t, \vec{x}) = \phi(\eta(t), \vec{x})$ y a partir de ello, mediante un cambio de variables tenemos

$$\phi_{,0} = \phi_{,t} = \frac{D\phi}{Dt} = \frac{D\phi}{D\eta} \frac{D\eta}{Dt} = \frac{1}{a(\eta)}\phi_{,\eta} \quad (3.17)$$

con D/Dt la derivada covariante respecto de t , y $a(\eta) = a(\eta(t)) = a(t)$.

Finalmente, para calcular la expresión del hamiltoniano basta integrar en el espacio la densidad hamiltoniana

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \hat{T}_{\eta\eta}. \quad (3.18)$$

3.2.1. Teoría cuántica de campos en espacios tiempos curvos

Una base de soluciones de un campo escalar en un universo de FRW de dimensión 3 + 1 es el set $\{u_{\vec{k}}(\vec{x})\}$ definido por [2]

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{[2C(\eta)\omega_{\vec{k}}]^{1/2}} e^{-i\omega_{\vec{k}}\eta} y_{\vec{k}}(\vec{x}) \quad (3.19)$$

con la relación de dispersión

$$\omega_{\vec{k}}^2 = k^2 + C(\eta) \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(\eta) \right]. \quad (3.20)$$

La dependencia espacial de (3.19) está contenida en el factor $y_{\vec{k}}(\vec{x})$, el cual es solución de la ecuación

$$\Delta^{(3)} y_{\vec{k}}(\vec{x}) = -(k^2 - K) y_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad (3.21)$$

en donde

$$\Delta^{(3)} y_{\vec{k}} \equiv h^{-\frac{1}{2}} \partial_i (h^{-\frac{1}{2}} h^{ij} \partial_j y_{\vec{k}}), \quad (3.22)$$

$h = \det(h_{ij})$. Por otro lado, normalizamos a las funciones $y_{\vec{k}}$ pidiendo

$$\int d^3\vec{x} h^{\frac{1}{2}} y_{\vec{k}}(\vec{x}) y_{\vec{k}'}(\vec{x}) = \delta(\vec{k}, \vec{k}') \quad (3.23)$$

para lo cual $\delta(\vec{k}, \vec{k}')$ es la función delta con respecto a la medida $\tilde{\mu}$:

$$\int d\tilde{\mu}(\vec{k}') f(\vec{k}') \delta(\vec{k}, \vec{k}') = f(\vec{k}). \quad (3.24)$$

Las autofunciones de (3.21) junto con la normalización correspondiente tienen la expresión

$$y_{\vec{k}'}(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}}, & \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad (K = 0) \\ \Pi^{(\pm)}(\chi) Y_J^M(\theta, \phi), & k = (k, J, M), \quad (K = \pm 1) \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

en donde

$$\begin{array}{l} \text{si } K=0 \left\{ \begin{array}{l} -\infty < k_j < \infty \\ k = |\vec{k}| \end{array} \right. \\ \text{si } K=+1 \left\{ \begin{array}{l} J = 0, 1, \dots, k-1; \quad k = 1, 2, \dots \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \\ \text{si } K=-1 \left\{ \begin{array}{l} J = 0, 1, \dots \\ 0 < k < \infty. \end{array} \right. \end{array}$$

Las funciones Y_J^M son armónicos esféricos y las funciones $\Pi^{(\pm)}$ están definidas por

$$\Pi_{kJ}^{(-)}(\chi) = \left[\frac{1}{2} \pi k^2 (k^2 + 1) \dots (k^2 + J) \right]^{-\frac{1}{2}} \sinh^J \chi \left(\frac{d}{d \cosh \chi} \right)^{1+J} \cos k\chi \quad (3.26)$$

y $\Pi_{kJ}^{(+)}(\chi)$ reemplazando en (3.26) k por $-ik$ y χ por $-i\chi$. Por último, la unidad de medida $\tilde{\mu}(k)$ se define de la forma

$$\int d\tilde{\mu}(k) = \left\{ \begin{array}{ll} \int d^3\vec{k}, & (K = 0) \\ \sum_{k,J,M}, & (K = +1) \\ \int_0^\infty dk \sum_{J,M}, & (K = -1) \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

3.2.2. Expresión del hamiltoniano de un campo escalar

Integrando la expresión (3.16) mediante (3.18) y teniendo en cuenta el desarrollo del campo ϕ en la base $\{u_{\vec{k}}(x)\}$ (3.11), la expresión de dichos elementos de base (3.19), las propiedades (3.23) y (3.24), y por último las relaciones de conmutación de los operadores de destrucción y creación $a_{\vec{k}}$ y $a_{\vec{k}}^\dagger$ (3.12), se tiene que la expresión del hamiltoniano es

$$\tilde{\mathcal{H}} = \int d\tilde{\mu}\omega_k \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}[\tilde{a}_{\vec{k}}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \quad (3.28)$$

con la relación de dispersión

$$\omega_k^2 = k^2 + C(\eta)[m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R(\eta)] \quad (3.29)$$

y $n_{\vec{k}}$ el operador número de partículas

$$\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \quad (3.30)$$

3.2.3. Coeficientes de Bogoliubov

Para la descomposición en modos del campo ϕ puede también elegirse otra base de modos $\{\tilde{u}_{\vec{k}}\}$ que satisfagan la misma ecuación de movimiento (3.10). En términos de esta nueva base podemos expandir el campo según

$$\phi(x, \eta) = \int_{\vec{k}} d^3\vec{k} [\tilde{a}_{\vec{k}} \tilde{u}_{\vec{k}}(x, \eta) + \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tilde{u}_{\vec{k}}^*(x, \eta)] \quad (3.31)$$

En la expresión anterior $\tilde{a}_{\vec{k}}$ y $\tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger$ son respectivamente los operadores de creación y destrucción de los modos $\tilde{u}_{\vec{k}}$ y $\tilde{u}_{\vec{k}}^*$ y verifican las relaciones de conmutación

$$[\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] = \delta(\vec{k}' - \vec{k}), \quad (3.32)$$

siendo nulo el resto de los conmutadores.

Estos nuevos operadores definen un vacío $|\tilde{0}\rangle$ que no necesariamente coincide con el vacío $|0\rangle$. Por lo que en general se tendrá $|\tilde{0}\rangle \neq |0\rangle$. El hecho de poseer más de un vacío es una propiedad central de la teoría de campos en espacios tiempos curvos y es responsable de muchas de las más interesantes predicciones de dicha teoría, tales como la evaporación de agujeros negros y el efecto Unruh [16, 17].

Ambos sets de operadores de creación y destrucción pueden vincularse mediante una transformación de Bogoliubov [2]

$$\tilde{a}_{\vec{k}} = \int_{\vec{k}'} d^3\vec{k}' [\alpha_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}'} + \beta_{\vec{k}\vec{k}'}^* a_{\vec{k}'}^\dagger], \quad (3.33)$$

en donde $\alpha_{\vec{k}\vec{k}'}$ y $\beta_{\vec{k}\vec{k}'}$ son los coeficientes de Bogoliubov y satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{k}(\alpha_{\vec{l}\vec{k}}\alpha_{\vec{m}\vec{k}}^* - \beta_{\vec{l}\vec{k}}\beta_{\vec{m}\vec{k}}^*) &= \delta[\vec{l} - \vec{m}] \\ \int d^3\vec{k}(\alpha_{\vec{l}\vec{k}}\beta_{\vec{m}\vec{k}} - \beta_{\vec{l}\vec{k}}\alpha_{\vec{m}\vec{k}}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Además, se tiene que en contextos de teoría cuántica de campos la producción de partículas es consecuencia directa de la inequivalencia entre distintos vacíos [2]. Por ejemplo, puede mostrarse que si partimos de un estado de vacío $|0\rangle$ y tras una evolución de la métrica (evolución dinámica del espacio-tiempo) el sistema finalizará en el estado $|\tilde{0}\rangle$, la densidad de partículas en el estado final será $\langle n_{out}^{\vec{k}} \rangle = \langle 0 | \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}} | 0 \rangle = \int d^3\vec{l} |\beta_{\vec{l}\vec{k}}|^2 \neq 0$.

Por último, en el caso en que el espacio-tiempo sea isótropo y homogéneo se tiene que los coeficientes de Bogoliubov son diagonales y dependen únicamente del módulo del vector de onda:

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{l}\vec{k}} &= \delta_{\vec{l},\vec{k}} \alpha_k \\ \beta_{\vec{l}\vec{k}} &= \delta_{-\vec{l},\vec{k}} \beta_k. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por lo que las relaciones de Bogoliubov (3.33) pueden escribirse de la forma

$$\tilde{a}_{\vec{k}} = \alpha_k a_{\vec{k}} - \beta_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger, \quad (3.36)$$

y las propiedades (3.34) se resumen en

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (3.37)$$

Esto sucede, por ejemplo, en el caso de universos de FRW, ya que una de sus principales características es la de ser métricas espacialmente isótropas y homogéneas.

Capítulo 4

Desarrollos previos

En el presente capítulo haremos un repaso de los desarrollos previos que motivaron este trabajo. Contaremos los resultados a los que en ellos se han llegado y por qué creemos que es interesante proponer una generalización de los mismos.

Para este trabajo nos hemos basado en [3], en donde los autores estudian los efectos que la expansión del espacio-tiempo tiene en un campo escalar acoplado con la métrica. Como resultado de esta dinámica de la métrica, dicho campo es visto como sufriendo una transformación fuera del equilibrio. Su principal resultado es encontrar una relación entre la producción de partículas debidas a la expansión y el aumento de entropía durante dicho proceso.

4.1. Modelo cosmológico

En este trabajo los autores consideran un universo plano de dimensión $1+1$, en el que se encuentra presente un campo escalar acoplado de manera conforme con la métrica. Recordemos que en este caso acoplamiento conforme y mínimo son idénticos, ya que con ambos se tiene $\xi = 0$ [2, 18, 19].

De esta forma, el intervalo y la ecuación de movimiento del campo escritos en tiempo conforme resultan

$$ds^2 = C(\eta) (-d\eta^2 + dx^2) \tag{4.1}$$

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 C(\eta) \right\} \phi(\eta, x) = 0, \quad (4.2)$$

en donde $C(\eta)$ es el factor conforme definido en (3.5).

Las soluciones a (4.2) que en el pasado y futuro remoto se comportan como soluciones de frecuencia positiva son

$$\begin{aligned} u_k^{in} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k^{in}}} e^{i(kx - \omega_k^{in}\eta)} \\ u_k^{out} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k^{out}}} e^{i(kx - \omega_k^{out}\eta)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde sus frecuencias respectivas estan definidas por

$$\begin{aligned} \omega_k^{in} &= \sqrt{k^2 + m^2 C|_{\eta \rightarrow -\infty}} \\ \omega_k^{out} &= \sqrt{k^2 + m^2 C|_{\eta \rightarrow +\infty}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

De esta manera podemos escribir a un campo escalar presente en el universo como combinación lineal de dichas soluciones:

$$\phi = \int dk \left[a_k u_k + a_k^\dagger u_k^* \right]. \quad (4.5)$$

Si recordamos la expresión (3.28), observamos que el hamiltoniano inicial y final definidos en $\eta \rightarrow -\infty$ y $\eta \rightarrow \infty$ respectivamente (pasado y futuro asintóticos), resultan ser

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^{in} &= \int dk \omega_k^{in} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}}^{in} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}}^{in}; \tilde{a}_{\vec{k}}^{in\dagger}] \right\} \\ \tilde{\mathcal{H}}^{out} &= \int dk \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}}^{out} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}}^{out}; \tilde{a}_{\vec{k}}^{out\dagger}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dadas las relaciones de Bogoliubov definidas en un espacio isótropo y homogéneo (3.36), veremos que implican una interacción únicamente entre los modos k y $-k$. De manera que cada par de modos evoluciona de manera independiente durante la evolución del espacio-tiempo. Podemos entonces, por simplicidad, concentrarnos en un único par de modos $(k, -k)$. Los hamiltonianos iniciales y finales resultan

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_k^{in} &= \omega_k^{in} \left\{ \hat{n}_k^{in} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\} \\ \tilde{\mathcal{H}}_k^{out} &= \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_k^{out} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{out}, \tilde{a}_k^{out\dagger}] \right\}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Notemos que en (4.7) reemplacé la notación vectorial \vec{k} por k , ya que por estar trabajando dimensión $1 + 1$ ambas expresiones son equivalentes.

Además de confinar nuestra atención al par de modos $(k, -k)$, suponemos también que cualquier otra interacción distinta de la interacción con el espacio-tiempo que sea capaz de sufrir el campo es despreciable durante el tiempo en que ambos modos están correlacionados debido a la expansión. Por último, suponemos también que el estado inicial de dicho par es un estado térmico ρ . Esto último lo consideramos como una consecuencia de la interacción entre el campo escalar ϕ y el resto de los campos presentes *antes* de que el espacio-tiempo comience a expandirse.

4.1.1. Trabajo hecho por el espacio-tiempo

Dado que estamos considerando al espacio-tiempo clásico como llevando al campo fuera del equilibrio, habrá entonces un cambio en la energía del campo inducido por la evolución de la métrica. Este cambio en la energía media del campo lo llamaremos *trabajo medio*, y puede entenderse como el trabajo efectuado por el espacio-tiempo sobre el campo. Definimos entonces el trabajo medio como

$$\begin{aligned}\langle W_k \rangle &\equiv \langle \hat{\mathcal{H}}_k^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}_k^{in} \rangle = Tr \left\{ \hat{\mathcal{H}}_k^{out} \rho \right\} - Tr \left\{ \hat{\mathcal{H}}_k^{in} \rho \right\} \\ &= \omega_k^{out} \left\{ \langle \hat{n}_k^{out} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{out}, \tilde{a}_k^{out\dagger}] \right\} - \omega_k^{in} \left\{ \langle \hat{n}_k^{in} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Si definimos ahora $\langle \hat{n}_k^{cr} \rangle$ como el número de partículas creadas e identificamos

$$\langle \hat{n}_k^{out} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{out}, \tilde{a}_k^{out\dagger}] = \langle \hat{n}_k^{cr} \rangle + \langle \hat{n}_k^{in} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}],\tag{4.9}$$

tendremos entonces que podremos reescribir a (4.9) de la forma

$$\langle W_k \rangle = \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle + (\omega_k^{out} - \omega_k^{in}) \left\{ \langle \hat{n}_k^{in} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\}. \quad (4.10)$$

De esta manera podemos identificar tres contribuciones al trabajo. La primera $\omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle$, que corresponde al costo energético de crear $\langle n_k^{cr} \rangle$ partículas con energía ω_k^{out} . La segunda contribución viene del término $(\omega_k^{out} - \omega_k^{in}) \langle \hat{n}_k^{in} \rangle$, que es el costo energético de cambiar la frecuencia de las partículas inicialmente presentes en el estado térmico inicial. Por último el término $(\omega_k^{out} - \omega_k^{in}) \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}]$, que corresponde con la energía empleada en cambiar el estado inicial del estado de vacío del campo. El principal resultado aquí es que las partículas creadas no son debidas a a interacciones entre partículas, sino al acople de una métrica dinámica con el campo.

Supongamos ahora el caso en que la expansión se dé de forma adiabática, con lo cual queremos indicar una evolución en la que no hay transición entre los distintos niveles de energía durante la misma. En dicho caso los coeficientes de Bogoliubov β_k se anulan y el hamiltoniano final resulta ser (ver ecuación (3.36))

$$\hat{\mathcal{H}}_k^{ad} = \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_k^{in} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\} = \frac{\omega_k^{out}}{\omega_k^{in}} \hat{\mathcal{H}}_k^{in}. \quad (4.11)$$

En este escenario definimos el trabajo que el espacio-tiempo efectúa sobre el campo como el *trabajo adiabático*. Si ahora tenemos en cuenta que por la ecuación (3.36) y la propiedad (3.37) los operadores de creación y destrucción del estado IN y OUT serán iguales (a menos de una fase), no resultará difícil ver de la expresión (4.10) que este trabajo puede escribirse

$$\langle W_k^{ad} \rangle = (\omega_k^{out} - \omega_k^{in}) \left\{ \langle \hat{n}_k^{in} \rangle + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}, \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\}. \quad (4.12)$$

Notemos que en una evolución adiabática no habrá creación de partículas. Esto ocurre siempre que la evolución del espacio-tiempo sea cuasiestática, o bien cuando el acoplamiento entre el campo y la métrica desaparece, lo que sucede siempre que la masa sea nula y el acoplamiento conforme.

Por último, definimos el trabajo de *fricción interna* como la diferencia entre el trabajo medio $\langle W_k \rangle$ y el trabajo adiabático $\langle W_k^{ad} \rangle$:

$$\langle W_k^{fric} \rangle \equiv \langle W_k \rangle - \langle W_k^{ad} \rangle = \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle. \quad (4.13)$$

Observemos que en este contexto el trabajo de fricción resulta proporcional al número de partículas creadas. De la mano de esto, la ecuación (4.13) puede entenderse como midiendo cuánto se aleja la evolución respecto de una cuasiestática, lo cual coincide con nuestra intuición de que cuanto más lejos estamos de una evolución adiabática mayor es el número de partículas creadas. Por último, observemos que aún en el caso en que no se creen partículas, sigue existiendo un costo energético en expandir el espacio-tiempo, que está en este caso cuantificado por $\langle W_k^{ad} \rangle$ (4.12).

Veamos ahora como utilizar $\langle W_k^{fric} \rangle$ para vincular la variación de entropía con el número de partículas creadas.

4.1.2. Producción de entropía

Dado que en nuestro caso estamos considerando un estado inicial térmico, tendremos que la función densidad $\hat{\rho}$ tiene la expresión:

$$\hat{\rho} = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} |n\rangle \langle n|. \quad (4.14)$$

Teniendo presentes las ecuaciones (2.8) y (2.14) podremos hacer el siguiente desarrollo. Calculamos primero el valor medio de la entropía para un proceso de expansión

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \beta \int s P_E(s) = \beta \int s \sum_{n,m} \tilde{p}_m \tilde{p}_{n|m} \delta[s - (\tilde{s}_m - s_n)] \\ &= \beta \sum_{n,m} s_{n,m} \tilde{p}_m \tilde{p}_{n|m} = \beta \sum_{n,m} [(\tilde{E}_m - E_n) - \Delta F] \tilde{p}_m \tilde{p}_{n|m}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tengamos en cuenta ahora que de (2.8) se deduce que $-\beta \Delta F = \ln(Z_m/Z_n)$, en donde recordemos que estamos notando a los estados con subíndice m como los estados iniciales del proceso de contracción, y aquellos con subíndice n a los respectivos del caso de expansión. Pero aquí entra una de las observaciones principales, y es que la temperatura inicial tanto para el proceso de expansión como de contracción la consideramos

en ambos casos igual. Por lo tanto ambas funciones de partición Z serán iguales y $\Delta F = 0$. De esta manera la expresión (4.15) resulta

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \beta \sum_{n,m} (\tilde{E}_m - E_n) \tilde{p}_m \tilde{p}_n |m\rangle \\ &= \beta \left\{ \sum_m E_m \langle m | \sum_n p_n |n\rangle \langle n | m \rangle - \sum_n E_n p_n \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si recordamos la ecuación (4.7) veremos que vale la igualdad

$$\begin{aligned} E_n &= \omega_k^{in} \left\{ \hat{n}_k^{in} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}; \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\} \\ &= \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_k^{in} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_k^{in}; \tilde{a}_k^{in\dagger}] \right\} = \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} E_m. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por lo que finalmente (4.16), si tenemos en cuenta la ecuación (4.13), da lugar a

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \beta \left\{ Tr[\hat{\mathcal{H}}_k^{out} \hat{\rho}] - \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} Tr[\hat{\mathcal{H}}_k^{in} \hat{\rho}] \right\} = \beta \langle W_k^{fric} \rangle \\ &= \beta \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Respecto de esta ecuación, recordemos que se ha demostrado que la fricción interna es no negativa para cualquier hamiltoniano dependiente del tiempo cuya dinámica parte de un estado térmico [20, 21].

Como consecuencia de la observación anterior, tendremos entonces que $\langle s \rangle \geq 0$. Esto último apoya fuertemente la afirmación de que $\langle s \rangle$ puede ser interpretado como una definición adecuada de entropía. Según los autores, este es el resultado principal de su trabajo, y el que nosotros pretendemos generalizar.

Por último, la íntima relación entre esta medida de entropía y el número de partículas creadas implica que si el campo en cuestión parte de un estado térmico (o más general, de un estado diagonal en la base $|n\rangle$), luego de este proceso tendremos $\langle n_k^{cr} \rangle \geq 0$. Por lo que de la ecuación (4.18) podremos reinterpretar esta magnitud en términos de la segunda ley.

Capítulo 5

Cálculo del trabajo de fricción para un universo de dimensión $3 + 1$ y acoplamiento ξ general

En esta sección buscaremos una expresión general del trabajo de fricción $\langle W^{fric} \rangle$ (expresión (4.13)) para un universo de FRW de dimensión $3 + 1$, valores arbitrarios para el acoplamiento ξ y la masa m del campo, en donde además pueden estar presentes los infinitos modos del campo escalar ϕ . La motivación principal será luego tener una relación general para el valor medio de la variación de entropía $\langle s \rangle$ en función del número de partículas creadas $\langle n^{cr} \rangle$ al estilo (4.18). Para ello generalizaremos el procedimiento explicado más arriba en el capítulo 4, y explicados detalladamente en [3].

Buscaremos primero la expresión del hamiltoniano referido a la métrica mencionada y con un factor conforme $C(\eta)$ arbitrario. Suponiendo además que dicho factor conforme es tal que la métrica evoluciona desde un estado asintótico IN a un estado asintótico OUT.

Una vez calculados los hamiltonianos del estado inicial (estado asintótico IN, referido a $\eta \rightarrow -\infty$) y del estado final (estado asintótico OUT, referido a $\eta \rightarrow +\infty$), se podrá observar que la diferencia entre ambos radica principalmente en la relación de dispersión (dependencia de la frecuencia ω_k respecto del módulo k del vector de onda) y una amplificación paramétrica de la densidad de fluctuaciones de vacío y de las partículas originalmente

presentes en el modo \vec{k} dada por el factor $(1 + 2|\beta_k|^2)$.

Luego de calcular ambos hamiltonianos, calcularemos nuevamente la magnitud que en el capítulo 4 llamamos *trabajo de fricción*. El mismo puede entenderse como el trabajo efectuado por la métrica sobre el campo durante la evolución del espacio-tiempo. Veremos entonces que dicha magnitud depende tanto de la relación de dispersión del campo en el estado final como del número de partículas creadas. Su importancia radicará en el hecho de que cuando calculemos en el capítulo 6 la variación de entropía del campo durante la evolución, observaremos nuevamente que esta variación está íntimamente ligada con el trabajo de fricción anteriormente definido, y mediante él, dependerá también del número de partículas creadas. De ahí su enorme importancia.

5.1. Hamiltonianos IN y OUT

Suponemos, como dijimos anteriormente, que la métrica evoluciona desde un estado asintótico IN con factor de escala $C|_{-\infty}$ a un estado OUT con factor de escala $C|_{+\infty}$, podemos entonces definir dos hamiltonianos, uno para cada región:

$$\hat{\mathcal{H}}^{in} = \int d\tilde{\mu} \omega_k^{in} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \quad (5.1)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{out} = \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{\hat{a}}_{\vec{k}}; \hat{\hat{a}}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.2)$$

En donde

$$\begin{aligned} \omega_{\vec{k}}^{in2} &= k^2 + C|_{-\infty} [m^2 + (\chi - \frac{1}{6})R|_{-\infty}] \\ \omega_{\vec{k}}^{out2} &= k^2 + C|_{+\infty} [m^2 + (\chi - \frac{1}{6})R|_{+\infty}], \end{aligned} \quad (5.3)$$

y $\hat{\hat{a}}_{\vec{k}}^\dagger$ y $\hat{\hat{a}}_{\vec{k}}$ son los operadores de creación y destrucción definidos en el espacio OUT. De la misma forma, $\hat{n}_{\vec{k}}$ y $\hat{\hat{n}}_{\vec{k}}$ son los operadores número de partículas definidos en el estado IN y OUT a partir de los operadores de creación y destrucción respectivos.

Dado que estaremos trabajando en la representación de Heisemberg, nos será conveniente escribir a los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{n}_{\vec{k}}$ en términos de los mismos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ y $\hat{a}_{-\vec{k}}$ definidos en la base IN. Para ello utilizando la relación (3.36) escribimos:

$$\begin{aligned}\hat{n}_{\vec{k}} &= \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} = (\alpha_k^* a_{\vec{k}}^\dagger - \beta_k a_{-\vec{k}})(\alpha_k a_{\vec{k}} - \beta_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger) \\ &= |\alpha_k|^2 \hat{n}_{\vec{k}} + |\beta_k|^2 \hat{n}_{-\vec{k}} + |\beta_k|^2 [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] - \alpha_k^* \beta_k^* a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger - \alpha_k \beta_k a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}},\end{aligned}\quad (5.4)$$

en donde para pasar a la última línea utilizamos la paridad de la delta y la definición del operador $\hat{n}_{\vec{k}}$ en (3.30).

Por otro lado, recordando que en la expresión del hamiltoniano (5.2) el operador $\hat{n}_{\vec{k}}$ estará siendo integrado en $d\tilde{\mu}$ (ver ecuación (3.27)), si hacemos un cambio de variables de \vec{k} a $-\vec{k}$, y nos valemos del hecho de que estamos integrando sobre todo el dominio podemos reescribir:

$$\int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} |\beta_k|^2 \hat{n}_{-\vec{k}} = \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} |\beta_k|^2 \hat{n}_{\vec{k}}. \quad (5.5)$$

En donde en la expresión anterior utilizamos que tanto ω_k como β_k dependen ambos del módulo de \vec{k} , por lo que $\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ y $\beta_{-\vec{k}} = \beta_{\vec{k}}$. Por otro lado, en el cambio de variables en la medida de integración, se tiene que $d\mu_{-\vec{k}} = -d\mu_{\vec{k}}$, pero dado que deberemos también invertir los límites de la integral se tiene finalmente que

$$\int d\mu_{-\vec{k}} = \int d\mu_{\vec{k}}. \quad (5.6)$$

Por último, utilizando la relación (3.37):

$$\hat{n}_{\vec{k}} = (1 + 2|\beta_k|^2) \hat{n}_{\vec{k}} + |\beta_k|^2 [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] - \alpha_k^* \beta_k^* a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger - \alpha_k \beta_k a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}, \quad (5.7)$$

que reemplazandolo en (5.2) da lugar a

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}^{out} &= \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} (1 + 2|\beta_k|^2) \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} + \\ &\quad - \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} \left\{ \alpha_k^* \beta_k^* a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_k \beta_k a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \right\}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Podemos ver que la última integral de (5.8) es un término no diagonal en la base $|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle$, siendo ésta la base de autoestados del hamiltoniano IN y $|n_{k_i}\rangle$ autoestado del operador número de partículas $\hat{n}_{\vec{k}_i}$. Dado que luego en el capítulo 5.2 tomaremos la traza sobre esta base, podemos descartar este último término ya que no contribuirá a la misma. Queda entonces finalmente

$$\hat{\mathcal{H}}^{out} = \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} (1 + 2|\beta_k|^2) \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.9)$$

Es importante notar que el factor $(1 + 2|\beta_k|^2)$ da cuenta de la amplificación paramétrica de la densidad de energía del vacío $\frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger]$ más la amplificación por el mismo factor del número de partículas originalmente presentes.

5.2. Cálculo del trabajo de fricción

Hasta ahora hemos calculado los operadores hamiltonianos para los estados IN y OUT ((5.1) y (5.9) respectivamente) escribiéndolos en términos de los operadores número de partículas de la base IN.

Sea el estado inicial de nuestro campo escalar $\hat{\phi}(x)$ el descrito por la función densidad ρ , tomamos el valor medio de ambos hamiltonianos sobre dicho estado inicial: $\langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = Tr\{\hat{\rho}\hat{\mathcal{H}}\}$, dando lugar a

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{H}}^{in} \rangle &= \int d\tilde{\mu} \omega_k^{in} \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \\ \langle \hat{\mathcal{H}}^{out} \rangle &= \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} (1 + 2|\beta_k|^2) \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

En la expresión (5.10) definimos la notación $n_{\vec{k}} = \langle \hat{n}_{\vec{k}} \rangle$, la cual la seguiremos usando en este trabajo salvo que se mencione lo contrario.

Al cambio en la energía media del campo lo llamamos el *trabajo medio*, el cual podemos calcular de la forma $\langle \mathcal{W} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}^{in} \rangle$. De esta forma se tiene

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \int d\tilde{\mu} \{ \tilde{\omega}_k (1 + 2|\beta_k|^2) - \omega_k \} \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.11)$$

Nótese que el mismo puede entenderse como un trabajo efectuado sobre el campo por la métrica en evolución.

Si definimos ahora el número de partículas creadas como

$$n_{\vec{k}}^{cr} = 2|\beta_k|^2 \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}[\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}, \quad (5.12)$$

la expresión (5.11) resulta

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \int d\tilde{\mu} [\tilde{\omega}_k n_{\vec{k}}^{cr} + (\tilde{\omega}_k - \omega_k) \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}[\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}]. \quad (5.13)$$

Así como anteriormente generalizamos la definición del trabajo medio del espacio-tiempo sobre el campo, generalizamos ahora el *trabajo adiabático*, que es el que se realiza sobre el campo para el caso de una evolución adiabática. Recordemos que por adiabática queremos indicar una evolución en la que no hay transición entre los distintos niveles de energía, es decir, no cambia la población n_k de cada nivel de energía, o lo que es lo mismo, el único cambio sufrido por el campo no será un cambio de las poblaciones de sus niveles de energía, sino un cambio de frecuencia de cada uno de dichos niveles: $\omega_k^{in} \rightarrow \omega_k^{out}$.

Teniendo en cuenta que en dicho caso los coeficientes de Bogoliubov β_k se anulan. No será difícil observar que por tener $\beta_k = 0$, de la propiedad (3.36) se deduce que $\tilde{a}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}$.

Para calcular dicho trabajo, primero debemos obtener el hamiltoniano que se obtiene en el estado final de dicha evolución: $\hat{\mathcal{H}}_{ad}^{out}$.

No es difícil notar que por ser nulos los coeficientes β_k , de la propiedad (3.36) se deduce también que $\tilde{a}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}$, por lo que dicho hamiltoniano se escribirá de la forma

$$\hat{\mathcal{H}}_{ad}^{out} = \int d\tilde{\mu} \tilde{\omega}_k \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}[\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.14)$$

En este caso $n_{\vec{k}}^{cr} \equiv 0$ y el trabajo adiabático definido como

$$\langle \mathcal{W}_{ad} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}_{ad}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}^{in} \rangle \quad (5.15)$$

tiene la siguiente expresión

$$\langle \mathcal{W}_{ad} \rangle = \int d\tilde{\mu} (\tilde{\omega}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}) \left\{ n_{\vec{k}} - \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.16)$$

Finalmente, la generalización del valor medio de la *fricción interna*, definida como la diferencia entre el valor medio del trabajo $\langle \mathcal{W} \rangle$ y el valor medio del trabajo adiabático $\langle \mathcal{W}_{ad} \rangle$ es:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}_{fric} \rangle &= \langle \mathcal{W} \rangle - \langle \mathcal{W}_{ad} \rangle \\ \langle \mathcal{W}_{fric} \rangle &= \int d\tilde{\mu} \tilde{\omega}_k n_{\vec{k}}^{cr}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nótese que como se mencionó anteriormente, dicho trabajo depende mediante $n_{\vec{k}}^{cr}$ del factor $|\beta_k|^2$, por lo que la escritura en términos de dicho factor será:

$$\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle = \int d\tilde{\mu} \tilde{\omega}_k 2|\beta_k|^2 \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \quad (5.18)$$

Como dijimos más arriba, la importancia de esta magnitud radica que en el capítulo 6 veremos que la variación de entropía es proporcional al trabajo de fricción, y mediante él, será monótono creciente con el número de partículas.

Capítulo 6

Producción de entropía, trabajo efectuado por la variación de la métrica y creación de partículas

En este capítulo deduciremos una expresión para la variación de entropía del campo debido al proceso de expansión, buscando generalizar la expresión (4.18) para el caso de estudio (campo masivo en un universo de FRW de dimensión 3+1 y acoplamiento ξ arbitrario). Por otro lado, estudiaremos las expresiones para el trabajo que la dinámica del espacio-tiempo efectúa sobre el campo, buscando interpretar cada una de las expresiones citadas anteriormente.

6.1. Producción de entropía

En esta sección vincularemos la variación de entropía del campo escalar debida a la evolución de la métrica con el trabajo de fricción (5.18). Como dijimos anteriormente, la métrica evolucionará entre un estado asintótico IN y un estado asintótico OUT. Para ello calcularemos la diferencia de entropía del campo en ambos estados, y para luego reescribir dicha diferencia en términos del trabajo de fricción.

Suponemos nuevamente que el estado inicial del campo es un estado térmico:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}^{in}}, \quad (6.1)$$

con $T = \beta^{-1}$ su temperatura.

Definimos las siguientes magnitudes:

Sea $p_{n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots}$ la probabilidad de que en un proceso de expansión se encuentren inicialmente $n_{\vec{k}_1}$ partículas en el modo \vec{k}_1 , $n_{\vec{k}_2}$ partículas en el modo \vec{k}_2 , y así sucesivamente, y lo mismo para $q_{m_{\vec{k}_1}, m_{\vec{k}_2}, \dots}$ en un proceso de contracción. Es decir, que en este último proceso se encuentren antes de la contracción $m_{\vec{k}_1}$ partículas en el modo \vec{k}_1 , y así sucesivamente.

Con el fin de simplificar la notación, defino los estados $|\vec{n}\rangle = |n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle$ y $|\vec{m}\rangle = |m_{\vec{k}_1}, m_{\vec{k}_2}, \dots\rangle$. De esta manera, las siguientes magnitudes podrán escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} E_{\vec{n}} &= \langle \vec{n} | \hat{H}^{in} | \vec{n} \rangle \\ p_{\vec{n}} &= \langle \vec{n} | \hat{\rho} | \vec{n} \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\vec{n}}} \\ q_{\vec{m}} &= \langle \vec{m} | \hat{\rho} | \vec{m} \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\vec{m}}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Suponiendo que el campo evoluciona desde una población inicial de modos $|\vec{n}\rangle$ a una población final $|\vec{m}\rangle$, mostraremos nuevamente que el valor medio de la variación de entropía en un proceso de expansión $\langle s \rangle$ es proporcional al valor medio del trabajo de fricción $\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle$ definido en (5.17).

Para ello calculamos primero el valor medio de la entropía

$$\langle s \rangle = \int s P_E(s), \quad (6.3)$$

que a partir de la definición de $P_E(s)$ (2.3) resulta

$$\langle s \rangle = \sum_{\vec{n}, \vec{m}} s_{\vec{n}, \vec{m}} p_{\vec{m}|\vec{n}} p_{\vec{n}}. \quad (6.4)$$

Según la relación (2.9) podemos reemplazar $s_{\vec{n}, \vec{m}}$ por $s_{n,m} = \beta(E_{\vec{m}} - E_{\vec{n}}) - \beta \Delta F$, con $\Delta F = \ln(Z^f/Z^i)$, en donde Z^f y Z^i hacen referencia a las funciones de partición de la matriz densidad del estado final e inicial. Pero dado que nos mantenemos en la representación de Heisenberg, la expresión de dicha matriz densidad será constante y por lo tanto $Z^f = Z^i$,

por lo que finalmente se tendrá $\Delta F = 0$. Es decir, estamos considerando que en el estado final las partículas a lo sumo se reordenarán entre los distintos niveles, pero no cambiará la energía de dichos niveles. O visto de otra forma, de cada nivel cambia su población y no su energía. Podemos entonces reemplazar $s_{\vec{n}, \vec{m}}$ por $\beta(E_{\vec{m}} - E_{\vec{n}})$, y escribir el valor medio de la entropía como:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \beta \sum_{\vec{n}, \vec{m}} (E_{\vec{m}} - E_{\vec{n}}) |\langle \vec{m} | \vec{n} \rangle|^2 p_{\vec{n}} = \beta \sum_{\vec{n}, \vec{m}} (E_{\vec{m}} - E_{\vec{n}}) \langle \vec{m} | \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | \vec{m} \rangle p_{\vec{n}} \\
&= \beta \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \{ E_{\vec{m}} \langle \vec{m} | (p_{\vec{n}} | \vec{n} \rangle \langle | \vec{m} \rangle - E_{\vec{n}} p_{\vec{n}} |\langle \vec{m} | \vec{n} \rangle|^2) \} \\
&= \beta \left\{ \sum_{\vec{m}} E_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \hat{\rho} | \vec{m} \rangle - \sum_{\vec{n}} E_{\vec{n}} p_{\vec{n}} \right\} \\
&= \beta \left\{ \sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \hat{H}^{in} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle - \sum_{\vec{n}} \langle \vec{n} | \hat{H}^{in} \hat{\rho} | \vec{n} \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Busquemos ahora una relación entre el valor medio de la densidad de energía en el estado final $\sum_{\vec{m}} E_{\vec{m}} q_{\vec{m}} = \sum_{\vec{m}} \langle m | E_{\vec{m}} \hat{\rho} | m \rangle$ y el hamiltoniano del estado OUT $\hat{\mathcal{H}}_k^{out}$. Para ello cabe recordar que las bases $\{|\vec{m}\rangle\}$ y $\{|\vec{n}\rangle\}$, son efectivamete la misma, ya que mediante $|\vec{m}\rangle$ quiero ver cuantas partículas se crearán en el modo k_i :

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle \rightarrow |m_{k_1}, m_{k_2}, \dots\rangle, \tag{6.6}$$

es decir, se crearán $m_{k_i} - n_{k_i}$ partículas en el modo k_i . Solo por conveniencia, y para tener en claro si se trata de la población de modos en el estado inicial o final hemos decidido utilizar dos nombres distintos.

Definimos los operadores $\hat{\mathcal{H}}_k^{in}$ y $\hat{\mathcal{H}}_k^{out}$ como aquellos restringidos a los modos con números de onda de módulo igual a k , es decir:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_k^{in} &= \int d\tilde{\mu}_k \omega_k^{in} \{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \} \\
\hat{\mathcal{H}}_k^{out} &= \int d\tilde{\mu}_k \omega_k^{out} \{ \hat{m}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

los mismos serán de gran utilidad en el siguiente paso y los subsiguientes desarrollos.

Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \hat{\mathcal{H}}^{in} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle &= \sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \int d\tilde{\mu} \omega_k^{in} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle \\
&= \sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \int d\tilde{\mu} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle \\
&= \sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \int d\tilde{k} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \int d\tilde{\Omega} \omega_k^{out} \left\{ \hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Por lo tanto resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | E_{\vec{m}} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle &= \int d\tilde{k} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \sum_{\vec{m}} \langle \vec{m} | \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \hat{\rho} | \vec{m} \rangle \\
&= \int d\tilde{k} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \rangle.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Para el segundo término del lado derecho de la expresión (6.5) tenemos asimismo que

$$\sum_{\vec{m}} \langle m | \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{in} \hat{\rho} | m \rangle = \int d\tilde{k} \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{in} \rangle \tag{6.10}$$

Reemplazando entonces las ecuaciones (6.9) y (6.10) en (6.5) tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \beta \left\{ \int d\tilde{k} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \rangle - \int d\tilde{k} \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{in} \rangle \right\} \\
&= \beta \int d\tilde{k} \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \left\{ \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \rangle - \frac{\omega_k^{out}}{\omega_k^{in}} \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{in} \rangle \right\} \\
&= \int d\tilde{k} \beta \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}} \left\{ \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{ad} \rangle \right\} \\
&= \int d\tilde{k} \tilde{\beta}_k \left\{ \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{ad} \rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

En la expresión anterior utilizamos que

$$\hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{ad} = \int d\tilde{\mu}_k \omega_k^{ad} \left\{ \hat{n}_k + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \tag{6.12}$$

es el hamiltoniano que se obtiene luego de una evolución adiabática, y definimos además la parámetro $\tilde{\beta}_k$ como la inversa de la temperatura de los modos con vector de onda de módulo igual a k :

$$\tilde{\beta}_k = \beta \frac{\omega_k^{in}}{\omega_k^{out}}. \quad (6.13)$$

Recordemos las expresiones (4.8), (4.13) y (5.17):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}_{fric} \rangle &= \langle \mathcal{W} \rangle - \langle \mathcal{W}_{ad} \rangle \\ \langle \mathcal{W} \rangle &= \langle \hat{\mathcal{H}}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}^{in} \rangle \\ \langle \mathcal{W}_{ad} \rangle &= \langle \hat{\mathcal{H}}^{ad} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}^{in} \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Por lo tanto tendremos entonces

$$\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}^{out} \rangle - \langle \hat{\mathcal{H}}^{ad} \rangle. \quad (6.15)$$

De la definición de $\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle$ en (5.17), tomemos la misma definición que en (6.7) restringida a los modos con vector de onda de módulo k , con lo cual resulta:

$$\langle \omega_k^{fric} \rangle = \int d\tilde{\Omega} \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle, \quad (6.16)$$

en donde $\int d\tilde{\Omega}$ es la integral con respecto al ángulo sólido.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \int d\tilde{k} \tilde{\beta}_k \int d\tilde{\Omega} \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle \\ &= \int d\tilde{k} \int d\tilde{\Omega} \tilde{\beta}_k \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle \\ &= \int d\tilde{\mu} \tilde{\beta}_k \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle, \end{aligned} \quad (6.17)$$

Con lo que finalmente llegamos a:

$$\langle s \rangle = \int d\tilde{\mu} \tilde{\beta}_k \omega_k^{out} \langle n_k^{cr} \rangle. \quad (6.18)$$

Esta expresión es efectivamente el resultado principal del trabajo, ya que siendo β_k y ω_k^{out} definidos positivos (ver las ecuaciones (6.13) y (5.3)),

tenemos que $\langle s \rangle$ es creciente con $\langle n_{\vec{k}}^{cr} \rangle$. Efectivamente, si separamos la integral (6.18) en contribuciones de modos con vectores de onda de módulo k (llamamos a estos modos “modos- k ”) según:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \int d\tilde{\mu} \tilde{\beta}_k s_k \\ s_k &= \tilde{\beta}_k \omega_k^{out} \langle n_{\vec{k}}^{cr} \rangle, \end{aligned} \quad (6.19)$$

vemos que s_k es *monótona creciente* con $\langle n_{\vec{k}}^{cr} \rangle$. Es decir, que la entropía asociada a modos- k es *directamente proporcional* al número de partículas creadas en dichos modos. En particular, el factor de proporcionalidad es $\tilde{\beta}_k \omega_k^{out}$, o lo que es lo mismo, de la definición de $\tilde{\beta}_k$ (6.13), el mismo puede reescribirse según $\beta \omega_k^{in}$. Este es el resultado al que nos propusimos llegar.

Si recordamos las definiciones de $\tilde{\beta}_k$ y $\langle n_{\vec{k}}^{cr} \rangle$ ((6.13) y (5.12) respectivamente), y recordando las relaciones de dispersión definidas en las regiones IN y OUT (5.3) tendremos

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k &= \beta \left\{ \frac{k^2 + C|_{-\infty} [m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R|_{-\infty}]}{k^2 + C|_{+\infty} [m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R|_{+\infty}]} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \langle n_{\vec{k}}^{cr} \rangle &= 2|\beta_k|^2 \left\{ \langle n_{\vec{k}} \rangle + \frac{1}{2}[\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

O lo que es lo mismo, podemos reescribir la expresión (6.18) de la forma

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \int d\tilde{\mu} \beta \left[k^2 + C|_{-\infty} \left(m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R|_{-\infty} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad 2|\beta_k|^2 \left\{ \langle n_{\vec{k}} \rangle + \frac{1}{2}[\tilde{a}_{\vec{k}'}; \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Algunas observaciones que podemos hacer respecto de la ecuación (6.21) son:

- Supongamos el caso de un universo de FRW, en los que vale

$$R|_{\pm\infty} = \frac{6K}{C|_{\pm\infty}}. \quad (6.22)$$

A partir de la definición (6.20) podemos ver que en este caso valdrá

$$\tilde{\beta}_k = \beta \left\{ \frac{k^2 + C|_{-\infty} m^2 + (\xi - \frac{1}{6})6K}{k^2 + C|_{+\infty} m^2 + (\xi - \frac{1}{6})6K} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.23)$$

De la ecuación anterior puede verse que si el espacio-tiempo se expande, es decir, si $C|_{+\infty} > C|_{-\infty}$ se tendrá que $\tilde{\beta}_k < \beta$: los modos se calientan ($\tilde{\beta}_k^{-1} > \beta^{-1}$, recordemos que la temperatura se calcula como la inversa de β) mientras que si el espacio-tiempo se contrae los modos se enfrían. También cabe remarcar que la temperatura final de cada modo es función del módulo de su vector de onda k , por lo que modos con igual k tendrán igual temperatura en el estado final. Veamos además que si el acoplamiento es conforme, la temperatura final no depende del tipo de curvatura.

A continuación mostramos dos gráficos (figuras (6.1) y (6.2)), de manera de poder visualizar lo que explicamos más arriba. Sobre un mismo gráfico, se muestra la curva de temperatura para los distintos modos en cada universo posible de FRW. En todos los casos tomamos $\beta = 1$, $m = 1$, $C|_{-\infty} = 0.1$ y $C|_{+\infty} = 1$, es decir, la elección de los dos últimos parámetros indican que consideramos el caso en que el universo se expande diez veces su tamaño original.

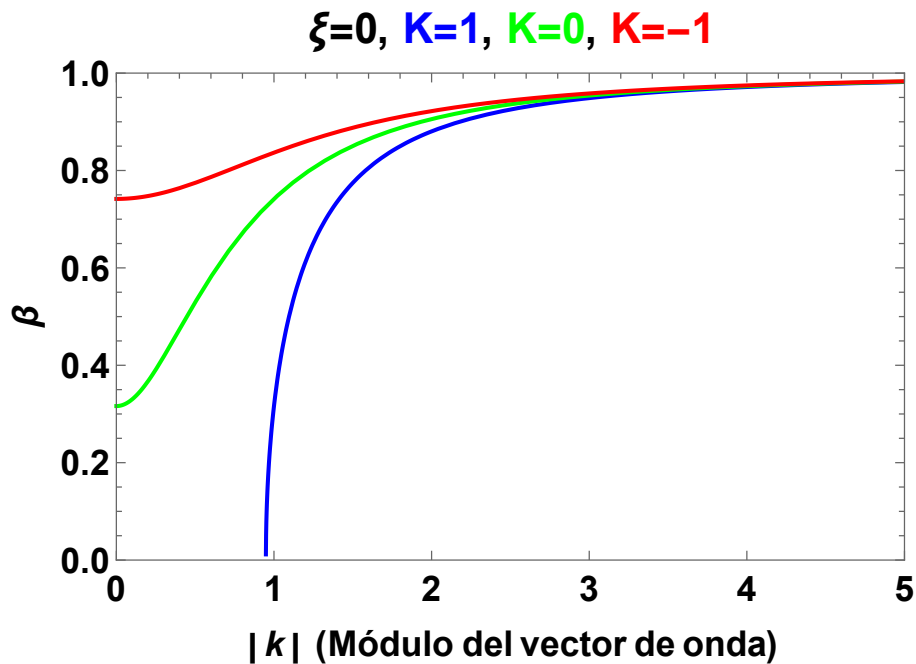
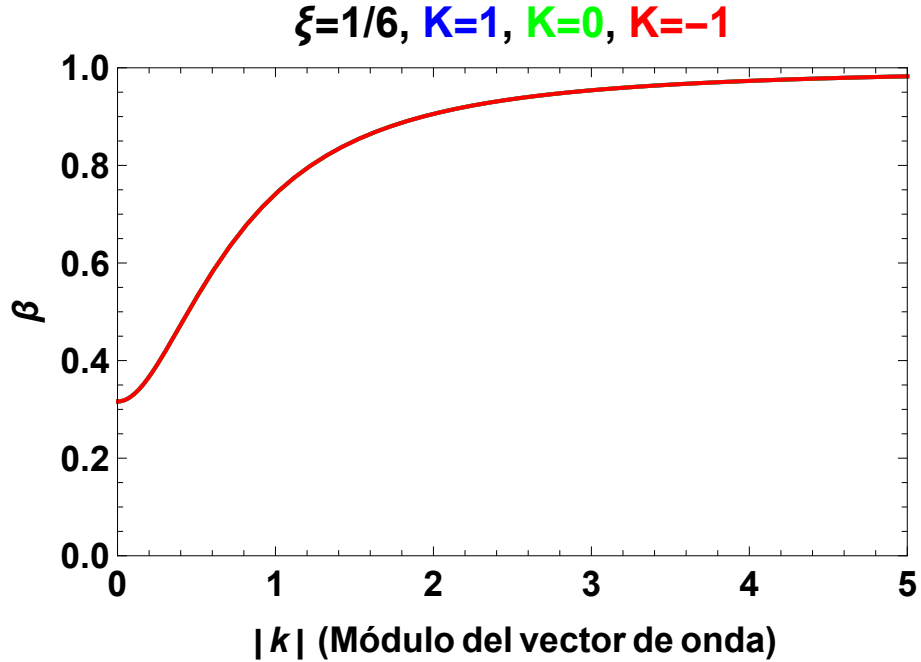


FIGURA 6.1: Acoplamiento mínimo: $\xi = 0$

FIGURA 6.2: Acoplamiento conforme: $\xi = 1/6$

Cabe aclarar que cualquier otra elección de parámetros reproducirá en líneas generales el mismo comportamiento de las tres curvas. Por último, en el caso de acoplamiento mínimo observamos que hay un rango de valores de k a los que no le corresponde ninguna temperatura. Como se observa claramente de la ecuación (6.23), esto sucede para valores de k en los que el denominador es menor o igual a cero, o lo que es lo mismo, para aquellos k que verifican $k^2 < 1 - C|_{+\infty}m^2$. Tengamos en cuenta que si el lado derecho de la desigualdad es cero o negativo, todos los valores de k estarán admitidos en el gráfico.

- Cuanto menor sea el valor de k en relación a $C|_{\pm\infty}m$, mayor será la variación de temperatura.
- Por último, si $k \rightarrow \infty$ entonces $\tilde{\beta}_k = \beta$, es decir, la temperatura se mantiene constante para dichos modos.

6.2. Trabajo efectuado sobre el campo

En esta sección nos proponemos estudiar las expresiones del trabajo que la métrica efectúa sobre el campo escalar (expresión (5.13)), el trabajo adiabático (expresión (5.16)), y el trabajo de fricción (expresión (5.18)).

Recordemos para ello las tres expresiones citadas, escritas ahora en términos de $|\beta_k|^2$ (ver expresión (5.12)):

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{W} \rangle &= \int d\tilde{\mu} [\omega_k^{out} 2|\beta_k|^2 + (\tilde{\omega}_k^{in} - \omega_k)] \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \\ \langle \mathcal{W}_{ad} \rangle &= \int d\tilde{\mu} (\tilde{\omega}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}^{in}) \left\{ n_{\vec{k}} - \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\} \\ \langle \mathcal{W}_{fric} \rangle &= \int d\tilde{\mu} \omega_k^{out} 2|\beta_k|^2 \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}.\end{aligned}\tag{6.24}$$

Notemos, como dijimos anteriormente, que el término

$$\omega_k^{out} n_{\vec{k}}^{cr} = \omega_k^{out} 2|\beta_k|^2 \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}\tag{6.25}$$

hace referencia al trabajo necesario para crear $n_{\vec{k}}^{cr}$ en el modo \vec{k} , mientras que el término

$$(\omega_k^{out} - \omega_k) \left\{ n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{k}}; \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] \right\}\tag{6.26}$$

indica la energía requerida para cambiar el estado de vacío.

Notemos, por último, que en las expresiones dadas en (6.24) no interviene el parámetro β . Esto es consecuencia de que ellas son generales para cualquier estado $\hat{\rho}$ del campo, no únicamente para un estado inicial térmico. La información de dicho estado inicial estará contenida en el valor medio $n_{\vec{k}}$.

Ya tenemos una expresión general para la variación de entropía durante una evolución arbitraria de la métrica entre dos estados asintóticos IN y OUT. Por otro lado, en (6.24) contamos con expresiones generales para el trabajo que la métrica al variar efectúa sobre el campo. Vemos que en (6.21) y (6.24) la entropía y el trabajo aparecen dependiendo de $|\beta_k|^2$, factor en el cual se encuentra “encapsulada” la información acerca de la dinámica mediante la cual el espacio-tiempo pasó del estado IN al OUT. En el próximo capítulo calcularemos este factor para tres casos particulares, estudiando detalladamente cada uno de ellos.

Capítulo 7

Cálculo de coeficientes de Bogoliubov para tres casos particulares

Hasta ahora tenemos como resultado del capítulo anterior que el valor medio de la variación de entropía $\langle s \rangle$ es función del número de partículas creadas, y éste a su vez del factor $|\beta_k|^2$ (ecuación 6.21). Veamos entonces como depende dicho factor en tres casos particulares. En cada uno de ellos estudiaremos distintos límites mostrando su comportamiento para algunos casos característicos.

- En el primero de los casos consideraremos pequeños apartamientos de la simetría conforme a un espacio-tiempo plano de Minkowski, los cuales darán lugar a un espacio-tiempo anisótropo, $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$. Esto será finalmente estudiado para el caso concreto de un factor de escala de la forma

$$\begin{aligned} C(\eta) &= C_1(\eta)C_2(\eta)C_3(\eta) \\ C_i(\eta) &= 1 + e^{-\alpha\eta^2} \cos(\beta\eta^2 - \delta_i). \end{aligned} \tag{7.1}$$

- El segundo es similar al anterior pero el apartamiento de la simetría conforme se dará en un espacio-tiempo plano e isótropo, es decir, consideraremos únicamente $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$, y factor de escala

$$C(\eta) = 1 + \frac{A}{1 + \eta^2}. \tag{7.2}$$

En éste caso estudiaremos en particular el límite de una evolución adiabática ($A \rightarrow 0$) y qué sucedería si en vez de una expansión ($A > 0$) se tuviese una contracción ($A < 0$).

Cabe aclarar que para los dos primeros casos mencionados no se tendrá una solución exacta sino un desarrollo a partir de la simetría conforme.

- Por último, consideraremos el caso de acoplamiento conforme y un factor de escala de la forma

$$C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta). \quad (7.3)$$

éste será el único que se podrá resolver en forma exacta, y en particular estudiaremos los límites de evolución adiabática ($\rho \rightarrow 0$) y evolución violenta ($\rho \rightarrow \infty$). Por otro lado, estudiaré el caso en que $A - B \rightarrow 0$, es decir, en el que el espacio-tiempo evoluciona desde un tamaño infinitesimalmente pequeño.

7.1. Teoría de perturbaciones para pequeños apartamientos de la simetría conforme: espacio anisótropo, $m \approx 0$ y $\xi \approx 1/6$

Consideremos un espacio-tiempo plano y anisótropo de intervalo

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2(t) dx_i^2, \quad (7.4)$$

en donde definimos

$$\begin{aligned}
C_i &\equiv a_i^2(t) \\
C(t) &\equiv a^2(t) = (a_1 a_2 a_3)^{2/3} = (C_1 C_2 C_3)^{1/3} \\
d_i &\equiv \frac{\dot{C}_i}{C_i} \\
D &\equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 d_i = \frac{\dot{C}}{C} \\
Q &\equiv \frac{1}{72} \sum_{i < j} (d_i - d_j)^2.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Nuevamente hicimos un cambio de variable $t \rightarrow \eta$ definiendo el tiempo conforme según (3.5). Por otro lado, el punto hace referencia a la derivada con respecto a η .

De las definiciones anteriores se tiene entonces que el escalar de Ricci resulta

$$R = \frac{1}{C} [3\dot{D} + \frac{3}{2}D^2 + 6Q]. \tag{7.6}$$

Dado que en éste caso el espacio-tiempo no es conformemente plano, no podrán definirse estados de vacío conforme para teorías de campos con lagrangianos conformemente invariantes, como se hizo más arriba para el caso de un universo de FRW.

La descomposición del campo escalar $\phi(x)$ seguirá siendo la expresada en (3.11). Teniendo en cuenta que la invariancia ante traslaciones espaciales sigue siendo una simetría del espacio, los modos $u_{\vec{k}}(x)$ pueden escribirse de la forma

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \chi_{\vec{k}}(\eta), \tag{7.7}$$

en donde las funciones $\chi_{\vec{k}}$ son solución de la ecuación

$$\frac{d^2 \chi_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \left\{ C(\eta) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{C_i(\eta)} + m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(\eta) \right] + Q(\eta) \right\} \chi_{\vec{k}} = 0, \tag{7.8}$$

y verifican la condición de normalización

$$\chi \partial_\eta \chi^* - \chi^* \partial_\eta \chi = i. \tag{7.9}$$

Podemos obtener una solución general de frecuencia positiva de la ecuación (7.8) mediante el método de WKB [2, 22], siendo esta esta solución de la forma:

$$\chi_{\vec{k}} = \frac{1}{(2W_{\vec{k}}(\eta))^{\frac{1}{2}}} e^{-i \int^{\eta} W_{\vec{k}}(\eta') d\eta'} \quad (7.10)$$

con

$$W_{\vec{k}}^{(0)} = \omega_{\vec{k}} = \left\{ C(\eta) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{C_i(\eta)} + m^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (7.11)$$

Podemos ahora definir estados de vacío adiabático como aquel que empalma a la solución exacta de frecuencia positiva de (7.8) a la solución aproximada en algún instante de tiempo η .

Explicaremos a continuación un método para obtener dichas soluciones aproximadas. Consideremos

$$ds^2 = C(\eta) \left\{ d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 [1 + h_i(\eta)] (dx^i)^2 \right\} \quad (7.12)$$

con $|h_i(\eta)| \ll 1 \forall i$ y pidiendo también que

$$\sum_{i=1}^3 h_i(\eta) = 0. \quad (7.13)$$

En éste caso, el desarrollo de la ecuación diferencial (7.8) a primer orden en WKB resulta

$$\frac{d^2 \chi_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \left\{ k^2 + C(\eta) \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R_I(\eta) \right] - \sum_{i=1}^3 h_i(\eta) k_i^2 \right\} \chi_{\vec{k}} = 0, \quad (7.14)$$

en donde definimos el escalar de Ricci para un espacio-tiempo isótropo ($h_i = 0$) como

$$R_I = \frac{1}{C} \left[3\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 \right]. \quad (7.15)$$

Impongamos ahora las siguientes condiciones [2]:

1. $h_i(\eta) \rightarrow 0$ con $\eta \rightarrow \pm\infty$
2. $C(\eta)R(\eta) \rightarrow 0$ con $\eta \rightarrow \pm\infty$, si $\xi \neq 1/6$
3. $C(\eta) \rightarrow C|_{+\infty} = C|_{-\infty} < \infty$ con $\eta \rightarrow \pm\infty$, si $m \neq 0$.

Físicamente, de observar la expresión (7.12) vemos que la primer condición implica que para $\eta \rightarrow \pm\infty$ se tiene un espacio plano e isótropo. La segunda condición, de la expresión (7.14) vemos que es requerida para tener soluciones de espacio plano en $\eta \rightarrow \pm\infty$. Para ello requerimos que en éste límite $R(\eta) \rightarrow 0$, es decir, que el espacio sea efectivamente plano. Por último, la tercer condición (en caso de tratarse de un campo masivo) indica que la métrica luego de la dinámica recobra las mismas condiciones iniciales. Es decir, coinciden los estados asintóticos IN y OUT del espacio-tiempo.

De esta manera, la solución de 7.8 para $\eta \rightarrow -\infty$ será de la forma

$$\chi_{\vec{k}}^{in}(\eta) = \frac{1}{(2\omega_k)^{\frac{1}{2}}} e^{-i\omega_k \eta} \quad (7.16)$$

con $\omega_k^2 = k^2 + C|_{-\infty} m^2$. Puede verse entonces que coincide asintóticamente con modos de frecuencia positiva en $\eta \rightarrow 0$. Juntando la condiciones enunciadas más arriba y la expresión (7.16) nos dan la ecuación integral

$$\begin{aligned} \chi_{\vec{k}}(\eta) &= \chi_{\vec{k}}^{in}(\eta) + \frac{1}{\omega_k} \int_{-\infty}^{\eta} V_{\vec{k}}(\eta') \sin[\omega_k(\eta - \eta')] \chi_{\vec{k}}(\eta') d\eta' \\ V_{\vec{k}}(\eta) &= \sum_i h_i(\eta) k_i^2 + m^2 [C|_{+\infty} - C(\eta)] - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) C(\eta) R_I(\eta). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Para tiempos largos, (7.17) puede escribirse de la forma

$$\chi_{\vec{k}}^{out}(\eta) = \alpha_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}}^{in}(\eta) + \beta_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}}^{in*}(\eta) \quad (7.18)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}} &= 1 + i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\vec{k}}^{in*}(\eta') V_{\vec{k}}(\eta') \chi_{\vec{k}}(\eta') d\eta' \\ \beta_{\vec{k}} &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\vec{k}}^{in}(\eta') V_{\vec{k}}(\eta') \chi_{\vec{k}}(\eta') d\eta'. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Si se supone $|V_{\vec{k}}(\eta)| \ll 1 \forall \eta$, podrá resolverse 7.17 por iteración. Al menor orden en $V_{\vec{k}}$, y tomando $\chi_{\vec{k}}(\eta) = \chi_{\vec{k}}(\eta)^{in}$ los coeficientes de Bogoliubov resultan

$$\begin{aligned}\alpha_{\vec{k}} &= 1 + \frac{i}{2\omega_k} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{\vec{k}}(\eta') d\eta' \\ \beta_{\vec{k}} &= -\frac{i}{2\omega_k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\omega_k \eta} V_{\vec{k}}(\eta') d\eta'.\end{aligned}\quad (7.20)$$

Esta técnica consiste en una expansión en serie tomando como orden cero un espacio-tiempo conforme a Minkowski. Esta trivialidad conforme puede romperse como consecuencia de la anisotropía, de una masa no nula ($m \neq 0$) o de un acoplamiento no conforme ($\xi \neq 1/6$). Estos dos últimos casos lo cual serán estudiados en la sección 7.2.

Como ejemplo, consideremos un espacio-tiempo con intervalo 7.12 y

$$h_i(\eta) = e^{-\alpha\eta^2} \cos(\beta\eta^2 - \delta_i), \quad (7.21)$$

en donde α, β y δ_i son constantes, y la condición (7.13) se satisface pidiendo que los δ_i difieran entre sí en $2\pi/3$. De (7.17) y (7.20) se tendrá

$$\beta_{\vec{k}} = -\frac{i\pi^{1/2}}{2\omega_k} \sum_i k_i^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-2\omega_k/(\alpha+i\beta)}}{(\alpha+i\beta)^{1/2}} e^{-i\delta_i} \right\}, \quad (7.22)$$

y calculando el cuadrado de su módulo $|\beta_{\vec{k}}|^2$ resulta

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi e^{-\frac{4\alpha\omega_k}{\alpha^2+\beta^2}}}{4\omega_k^2 \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \left\{ kx^2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \gamma\right) - ky^2 \cos(\gamma) + kz^2 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right) \right\}^2 \quad (7.23)$$

con

$$\begin{aligned}\gamma &= \delta + \frac{\theta}{2} - \frac{2\beta\omega_k}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ \vec{k} &= (k_x, k_y, k_z) \\ \omega_k^2 &= k^2 + m^2.\end{aligned}\quad (7.24)$$

En la expresión anterior consideramos las fases δ_i definidas como $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\delta - \frac{2\pi}{3}, \delta, \delta + \frac{2\pi}{3})$.

A continuación estudiaremos algunas consideraciones sobre la expresión (7.23) para $|\beta_k|^2$. Primero veremos para qué vectores de onda \vec{k} se anula, y luego cómo es el comportamiento asintótico de la misma con respecto al parámetro α .

- En particular, se tiene que $|\beta_k|^2$ se anula para números de onda que verifiquen

$$\sum_i h_i k_i^2 = 0. \quad (7.25)$$

Lo cual puede verse de despejar alguna de las variables k_i en función de las otras dos, y reemplazarlo en (7.23). Esto último es sumamente importante, ya que indica que no habrá creación de partículas para dichos modos.

Veamos qué implica esto último. Si observamos la ecuación (7.14) veremos que en éste caso la expresión se reduce a

$$\frac{d^2 \chi_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \left\{ k^2 + C(\eta) \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R_I(\eta) \right] \right\} \chi_{\vec{k}} = 0. \quad (7.26)$$

Para estos modos la anisotropía no existe: ellos “ven” un espacio isótropo. Notemos además que el escalar de Ricci que interviene en (7.26) es el definido en (7.15) a partir de un espacio-tiempo con dicha simetría.

Como ejemplo consideremos un caso particular. Supongamos $\beta = 0$ y $\delta = 0$, es decir, la ruptura de la simetría conforme estará dada por términos $h_i(\eta)$ de la forma

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= e^{-\alpha\eta^2} \cos(-2\pi/3) = e^{-\alpha\eta^2} \cos(2\pi/3) = -\frac{e^{-\alpha\eta^2}}{2} \\ h_2(\eta) &= e^{-\alpha\eta^2} \\ h_3(\eta) &= e^{-\alpha\eta^2} \cos(2\pi/3) = -\frac{e^{-\alpha\eta^2}}{2}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

entonces, el valor de $|\beta_k|^2$ en éste caso estará dado por

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi e^{-\frac{4\omega_k^{out}}{\alpha}}}{16\alpha\omega_k^{out2}} (k_x^2 - 2k_y^2 + k_z^2)^2. \quad (7.28)$$

Puede verse fácilmente que la expresión (7.28) se anulará en éste caso para los vectores de onda que verifiquen

$$k_y^2 = \frac{k_x^2}{2} + \frac{k_z^2}{2}. \quad (7.29)$$

Lo cual coincide con lo dicho anteriormente, ya que si calculamos

$$\begin{aligned} \sum_i h_i k_i^2 &= e^{-\alpha\eta^2} \cos(2\pi/3) k_x^2 + e^{-\alpha\eta^2} k_y^2 + e^{-\alpha\eta^2} \cos(2\pi/3) k_z^2 \\ &= e^{-\alpha\eta^2} (\cos(2\pi/3) k_x^2 + k_y^2 + \cos(2\pi/3) k_z^2) \\ &= e^{-\alpha\eta^2} \left(-\frac{1}{2} k_x^2 + k_y^2 - \frac{1}{2} k_z^2 \right), \end{aligned} \quad (7.30)$$

la sumatoria se anulará si se verifica la condición (7.29). Es decir, que en éste caso el factor $|\beta_k|^2$ se anula si y solo si lo hace también la sumatoria (7.30).

■ $\alpha \rightarrow 0$

Consideramos aquí el caso en el que la métrica oscila en el tiempo con una amplitud que varía lentamente, o mejor dicho, infinitamente lenta. El límite de 7.23 a segundo orden en α es

$$\begin{aligned} |\beta_k|^2 &= \frac{\pi}{4\beta\omega_k^2} \left\{ k_x^2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - \gamma \right] - k_y^2 \cos[\gamma] + k_z^2 \cos \left[\gamma + \frac{\pi}{6} \right] \right\}^2 \\ &\quad - \frac{\pi\alpha}{\beta^3\omega_k} \left\{ k_x^2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - \gamma \right] - k_y^2 \cos[\gamma] + k_z^2 \cos \left[\gamma + \frac{\pi}{6} \right] \right\}^2 \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{8\beta^5\omega_k^2} \left\{ \pi (\beta^2 - 16\omega^2) \left(-k_x^2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - \gamma \right], \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_y^2 \cos[\gamma] - k_z^2 \cos \left[\gamma + \frac{\pi}{6} \right] \right) \right\}^2 + O[\alpha^3], \end{aligned}$$

en donde el parámetro γ tiende a su vez a

$$\gamma \rightarrow \delta + \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega_k}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right).$$

Aquí la interpretación es directa, ya que puede verse que a medida que aumentamos el orden de aproximación (o lo que es lo mismo, a medida que nos es permitido trabajar con valores de α cada vez mayores), el valor de $|\beta_k|^2$ irá disminuyendo. Esto se debe a que con mayor α la amplitud de oscilación se “apagará” más rápido en $\eta \rightarrow \pm\infty$.

■ $\alpha \rightarrow \infty$

En éste caso el límite será

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi}{4\alpha\omega_k^2} \left\{ k_x^2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \gamma\right) - k_y^2 \cos(\gamma) + k_z^2 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right) \right\}^2 + O\left[\frac{1}{\alpha}\right]^2 \quad (7.31)$$

junto con $\gamma \rightarrow \delta + O\left[\frac{1}{\alpha}\right]^2$.

Con lo que puede verse que en el límite de $\alpha \rightarrow \infty$ no habrá creación de partículas, esto es, una variación de la métrica que tiende a una delta (recordemos la expresión de h_i definida en (7.21)) no excitará ningún modo del campo. Por otro lado, y esto es a nuestro juicio lo más importante es términos de su interpretación, la diferencia principal entre (7.23) y (7.31) es que en la segunda desaparece el factor exponencial. Esto quiere decir que para valores finitos del parámetro α , la amplificación de modos con alto número de onda no será suprimida, es más, será favorecida para modos altamente energéticos, ya que de la ecuación (7.31) vemos que con $k \rightarrow \infty$ tendremos $|\beta_k|^2 \propto k^2/\alpha$.

Podemos ensayar una explicación en el marco de la desigualdad de Heisemberg $\Delta E \Delta t \geq 1/2$. A partir de ella, puede pensarse que partículas virtuales de energía E viven por un intervalo de tiempo $\Delta t \geq 1/(2E)$ antes de aniquilarse. En éste contexto, la creación de partículas ocurrida durante un proceso de expansión del espacio-tiempo, puede interpretarse como consecuencia de que al producirse un par virtual, esta aparece durante un intervalo de tiempo Δt , antes de volverse a juntar y aniquilarse. Pero aquellas partículas virtuales que sobreviven un tiempo suficientemente largo como para que al estirarse el espacio-tiempo se alejen lo suficiente de manera de no volver a

encontrarse, cambiarán entonces su categoría de virtual por real, pasando a engrosar las filas de las partículas ya creadas. De esta manera, si la dinámica del universo es tal que el mismo se expande durante un intervalo de tiempo igual a $\Delta t/2$, para luego contraerse en otro intervalo de igual duración, las partículas que podrán ser producidas (o mejor dicho, que serán producidas con mayor probabilidad) serán aquellas con energía E tal que $E \geq 1/(2\Delta t)$. Es decir, privilegiará la producción de partículas energéticas por sobre las menos energéticas, ya que las segundas no tendrán tiempo de producirse (la misma desigualdad de Heisemberg nos indica que durante interacciones de duración Δt se privilegiará la creación de partículas con energía $E \geq 1/(2\Delta t)$), y las primeras al hacerlo se “separarán” antes de poder volver a juntarse, pasando entonces a existir. Es decir, de ver la ecuación (7.31) vemos que éste proceso favorece la producción de partículas con números de onda que verifiquen $k^2 \gg \alpha$. Evidentemente, en el límite $\alpha \rightarrow \infty$, esta producción será anulada para todo valor de k .

Visualicemos lo explicado más arriba en un gráfico, por simplicidad suponemos $m = 1$, $\beta = T^{-1} = 1$, $\alpha = 2$. Para ello mostramos en las figuras (7.1) y (7.3) el número de partículas creadas y la variación de entropía en función del modo. Recordemos que de la ecuación (5.12), en n_k^{cr} interviene el valor medio del número de partículas iniciales, por lo tanto por tratarse de un campo escalar (spin cero), dicho valor medio debe calcularse a partir de la estadística de Bose-Einstein. Para la variación de entropía en función de \vec{k} se tomó el argumento de la expresión (6.21).

Como comentario, remarquemos que para distintos valores de m se obtuvieron gráficos similares, sin observarse en ellos diferencias notorias respecto al comportamiento de n_k^{cr} y s respecto de \vec{k} .

Observemos que tanto las partículas creadas como el trabajo y la variación de entropía heredan la anisotropía de la dinámica. Tenemos en todos los casos como dirección privilegiada a k_y , que de las relaciones (7.27) es efectivamente la dirección en la que el espacio-tiempo se expande. De hecho, es para modos propagándose únicamente en esta dirección para los que se maximiza tanto la creación de partículas como la variación de entropía.

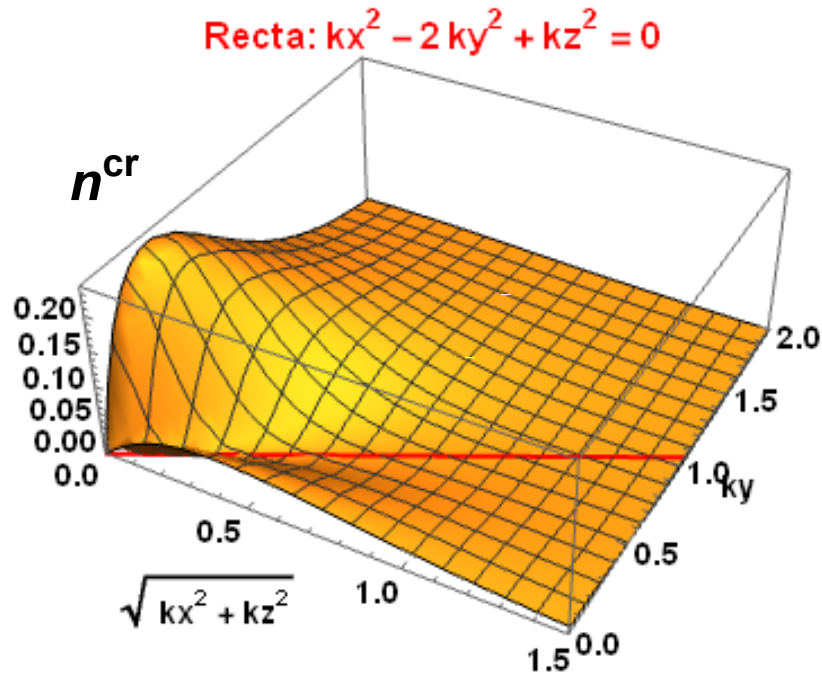


FIGURA 7.1: Número de partículas creadas en función del vector de onda para un valor de masa $m = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$

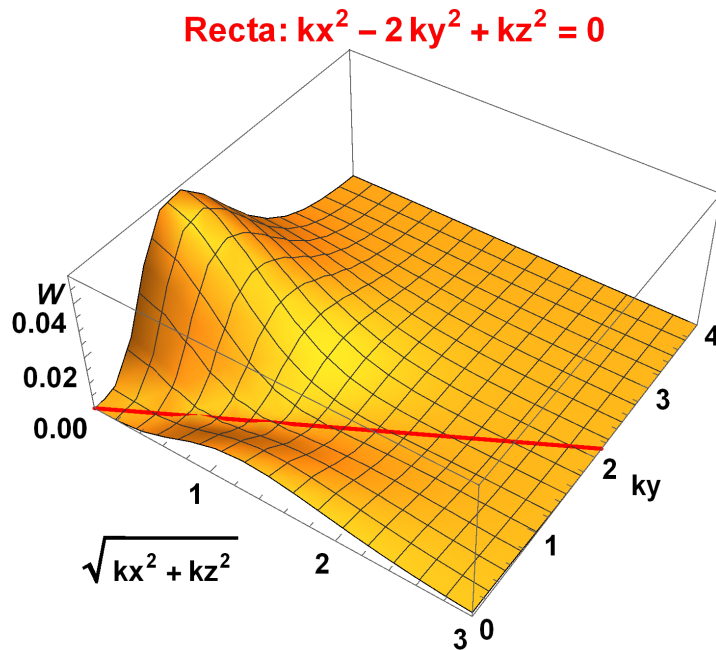


FIGURA 7.2: Trabajo total efectuado sobre cada modo en función del vector de onda, para un valor de masa $m = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$

Por otro lado, observemos de las relaciones (7.1) y (5.3) que por tener en esta caso $w_{\vec{k}}^{in} = w_{\vec{k}}^{out}$, a partir de (6.24) tendremos $\langle W \rangle = \langle W_{fric} \rangle$ y $\langle W_{ad} \rangle = 0$. Por lo tanto, el gráfico mostrado en la figura (7.2) coincide con el correspondiente al trabajo de fricción, y por las ecuaciones (6.16) y

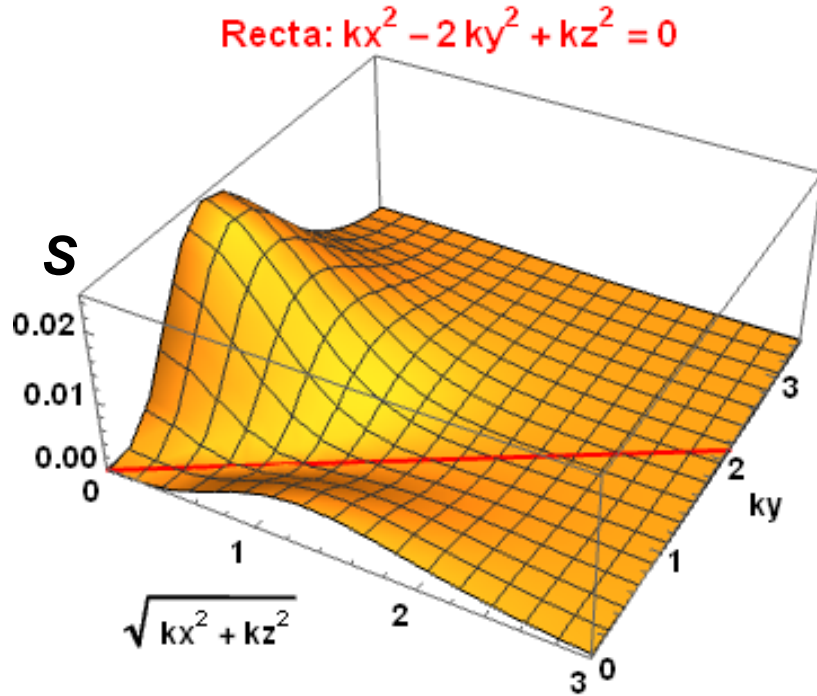


FIGURA 7.3: Variación de entropía para cada modo en función del vector de onda, para un valor de masa $m = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$

(6.17), podemos ver que los gráficos de las figuras (7.2) y (7.3) coinciden a menos de un factor igual a $\tilde{\beta}_{\vec{k}}$ (ver ecuaciones (6.16) y (6.17)).

Recordemos por último que para los vectores de onda que satisfacen la relación (7.29) no habrá creación de partículas y por lo tanto su variación de entropía y el trabajo efectuado sobre ellos serán nulos. Esto se observa claramente en las figuras (7.1), (7.3) y (7.2), en las cuales se marcan los modos que verifican dicha propiedad.

7.2. Teoría de perturbaciones para un espacio isótropo, plano y $\xi \approx 1/6$ y $m \approx 0$

Supongamos ahora el caso de un espacio isótropo, plano y pequeñas desviaciones de la simetría conforme dadas por $\xi \approx 1/6$ y $m \approx 0$.

En un espacio isótropo tendremos $a_i(t) = a_j(t) \forall i, j$, por lo que el factor de escala $C(\eta)$ tendrá la expresión $C(\eta) = a^2(\eta)$ (ecuación (7.5)), en donde nuevamente gracias a la definición del tiempo conforme (3.5) estamos considerando $\eta = \eta(t)$.

La ecuación diferencial (7.8) resulta que

$$\frac{d^2 \chi_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \left\{ k^2 + C(\eta)(m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R(\eta)) \right\} \chi_{\vec{k}} = 0, \quad (7.32)$$

en donde el parámetro R vale

$$R = \frac{1}{C} [3\dot{D} + \frac{3}{2}D^2]$$

$$D = \frac{\dot{C}}{C}.$$

Recordemos que aquí la derivada punto significa derivar con respecto al tiempo conforme η .

En el caso de un espacio-tiempo plano

$$R \xrightarrow[\eta \rightarrow \pm\infty]{} 0,$$

por lo que las condiciones descritas en la página ?? de la sección ?? pueden reducirse a las condiciones 1 y 3.

Podemos entonces repetir los mismos pasos que hicimos anteriormente para obtener un desarrollo en serie de los coeficientes de Bogoliubov, teniendo en cuenta que ahora la el potencial $V_{\vec{k}}(\eta)$ en (7.17) tendrá la expresión

$$V_{\vec{k}}(\eta) = m^2 [C|_{+\infty} - C(\eta)] - (\xi - \frac{1}{6})C(\eta)R(\eta). \quad (7.33)$$

Para estudiar un caso particular supondré un factor conforme de la forma

$$C(\eta) = 1 + \frac{A}{1 + B\eta^2}. \quad (7.34)$$

éste factor da cuenta de una expansión seguida luego de una contracción, en donde tanto el estado inicial como final de la métrica son iguales. El parámetro A indica en éste caso la magnitud de la expansión, es decir, cuánto aumenta de tamaño el universo, y el parámetro B el intervalo de tiempo en que dicha dinámica es apreciable. En esta evolución $1/\sqrt{B}$ será un tiempo característico, ya que el mismo indicará el tiempo en que la perturbación de la métrica (dada por el segundo término en (7.34)) se reduce a la mitad de su tamaño.

Reemplazando esta expresión en (7.33) y esta a su vez en (7.20) tendremos

$$|\beta_k|^2 = \frac{\left(\frac{\pi A m^2}{\sqrt{B}} + \frac{3\pi(A(\sqrt{A+1}-3)+4(\sqrt{A+1}-1))B(\xi-\frac{1}{6})}{A\sqrt{(A+1)B}} \right)^2}{4(k^2 + m^2)}. \quad (7.35)$$

Consideremos ahora algunos desarrollos interesantes de dicha expresión:

■ *Desarrollo alrededor de $m \approx 0$*

$$\begin{aligned} |\beta_k|^2 = & \frac{9\pi^2 (\xi - \frac{1}{6})^2 [A(\sqrt{A+1}-3) + 4(\sqrt{A+1}-1)]^2 B}{4k^2 A^2(A+1)} + \\ & + \frac{\pi^2 m^2 (\xi - \frac{1}{6})}{4k^2} \left\{ \frac{6(\sqrt{A+1}A - 3A + 4\sqrt{A+1} - 4)\sqrt{B}}{\sqrt{(A+1)B}} + \right. \\ & \left. - \frac{9(A(\sqrt{A+1}-3) + 4(\sqrt{A+1}-1))^2 B (\xi - \frac{1}{6})}{A^2(A+1)k^2} \right\} + \\ & + O[m^4] \end{aligned}$$

En particular, observamos que el límite de (7.35) con $m \rightarrow 0$ es proporcional a $(\xi - \frac{1}{6})^2$, es decir, que en caso de tener masa nula y acoplamiento conforme, $|\beta_k|^2$ será nulo, lo cual es consistente con resultados anteriores en el contexto de TCETC [23].

■ *Evolución adiabática (expansión infinitamente lenta): $B \rightarrow 0$*

$$\begin{aligned} |\beta_k|^2 = & \frac{\pi^2 A^2 m^4}{4B(k^2 + m^2)} + \frac{6\pi^2 (\sqrt{A+1}A - 3A + 4\sqrt{A+1} - 4) m^2 (\xi - \frac{1}{6})}{4\sqrt{A+1}(k^2 + m^2)} + \\ & + \frac{9\pi^2 (A(\sqrt{A+1}-3) + 4(\sqrt{A+1}-1))^2 B (\xi - \frac{1}{6})^2}{4A^2(A+1)(k^2 + m^2)} + \\ & + O[B^{7/2}] \end{aligned}$$

Vemos aquí que a primer orden se tendrá

$$|\beta_k|^2 \sim \frac{\pi^2 A^2 m^4}{4B(k^2 + m^2)}, \quad \forall (\xi - \frac{1}{6}) \quad \& \quad m^2 \neq 0, \quad (7.36)$$

es decir, en la producción de partículas habrá aquí una competencia entre el parámetro A que indica en qué porcentaje el espacio aumenta su tamaño, y el parámetro B que indica la duración de la dinámica del espacio-tiempo. En el caso en que $A \ll \sqrt{B}$ la producción será prácticamente suprimida, privilegiando la producción de modos con pequeño número de onda. En cualquier otro caso, se tendrá que con $B \rightarrow 0$ la producción de partículas escalará a infinito, lo cual puede interpretarse de la siguiente manera: si la dinámica se produce durante tiempos arbitrariamente grandes, la cantidad de partículas producidas por unidad de tiempo irá acumulandose, dando entonces lugar a una producción neta de un gran número de partículas.

■ **Pequeña perturbación:** $A \rightarrow 0$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\pi^2 A^2 m^4}{4B(k^2 + m^2)} + \frac{\pi^2 A^3 m^2 (6\xi - 1)}{32(k^2 + m^2)} + O[A^4] \quad (7.37)$$

$$\forall \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \quad \& \quad m^2 \neq 0,$$

Por último, es interesante remarcar que en el caso de una pequeña perturbación, a primer orden no nulo el sistema no distingue si es una expansión o contracción adiabática, es decir, si $A > 0$ o $A < 0$, por lo que en ambos casos la producción de partículas será idéntico para ambos casos.

Cabe aclarar que los límites de la forma $m \rightarrow \infty$ y $A \rightarrow \infty$ no son representativos en éste esquema, ya que en esta aproximación nos estamos restringiendo siempre al caso de $|V_{\vec{k}}(\eta)| \ll 1 \quad \forall \eta$.

Siguiendo el esquema trazado en la sección anterior, mostramos ahora dos gráficos en las figuras (7.5) y (7.6), en los que puede observarse la dependencia del número de partículas creadas y la variación de entropía con respecto del módulo del vector de onda k y la masa m del campo. En éste caso consideramos $A = 0.01$, $\xi = 1/6$ (acoplamiento conforme), y $B = 1$. Nuevamente, no se han hallado diferencias significativas con respecto a la utilización de otros valores para estos parámetros.

Nótese que los tres gráficos casos se maximizan tanto la entropía como el trabajo y la producción de partículas para modos en reposo ($\vec{k} = 0$). Es decir, tras la dinámica el campo creará con mayor preferencia partículas en

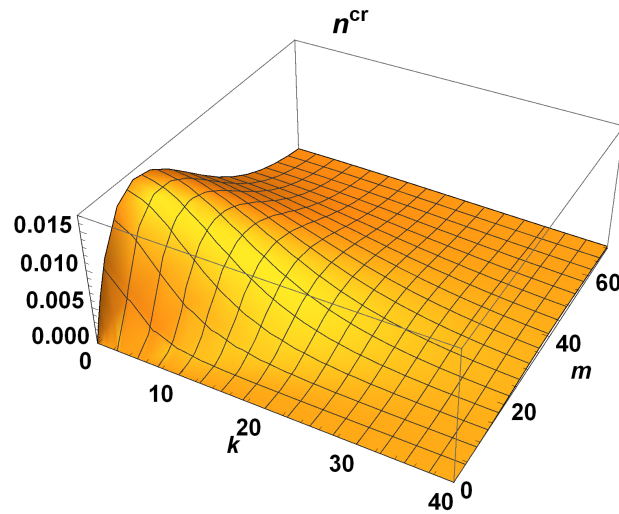


FIGURA 7.4: Número de partículas creadas en función de la masa y del vector de onda

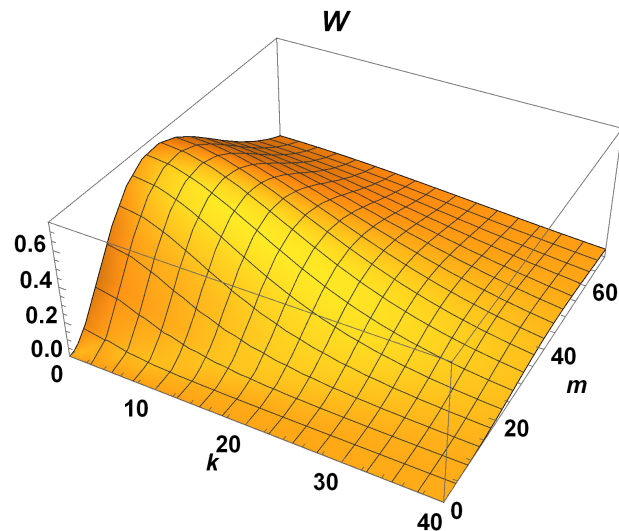


FIGURA 7.5: Trabajo efectuado sobre el campo en función de la masa y del vector de onda

reposo. Por otro lado, y en consonancia con lo dicho anteriormente en la sección (7.1), a partir del factor de escala con el que trabajamos tendremos $\omega_k^{in} = \omega_k^{out}$ (7.34), por lo que el trabajo total será igual al trabajo de fricción. Por último, la similitud entre los gráficos de trabajo efectuado y variación de entropía se debe a que ambos difieren únicamente en un factor $\tilde{\beta}_k$.

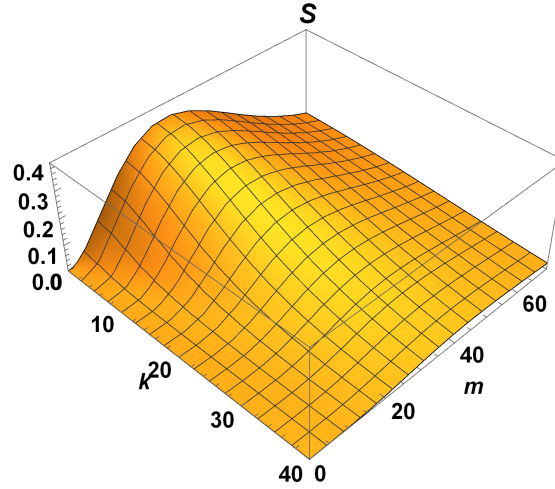


FIGURA 7.6: Variación de entropía para cada modo en función de la masa y del vector de onda

7.3. Espacio-tiempo plano, acoplamiento conforme $\xi = 1/6$ y factor conforme $C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta)$

Consideremos un último caso, en donde un espacio tiempo plano evoluciona con un factor conforme de la forma

$$C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta) \quad (7.38)$$

con A, B y ρ constantes.

Dado que $C(\eta)$ no es función de la coordenada espacial \vec{x} , la invariancia ante traslaciones espaciales seguirá siendo una simetría del espacio-tiempo, por lo que proponemos una separación de variables de la forma

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{C^{1/2}(\eta)} \mathcal{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}) \chi_{\vec{k}}(\eta). \quad (7.39)$$

En esta expresión la dependencia temporal dada por el factor $\chi_{\vec{k}}(\eta)$ no será ya una exponencial según consideramos más arriba en (3.19), sino que será solución de la ecuación

$$\frac{d^2 \chi_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \{k^2 + C(\eta)m^2\} \chi_{\vec{k}} = 0. \quad (7.40)$$

La diferencia entre la solución de la ecuación (7.40) y la expresión (3.19) radica en que para la primera estamos considerando un espacio-tiempo dinámico, mientras que para la segunda nos restringimos únicamente a las regiones IN y OUT, en donde el espacio tiempo es asintóticamente estático.

A pesar de las diferencias mencionadas en las soluciones de (7.40) y (3.19), dado que estamos considerando un espacio asintóticamente plano la solución de (7.40) debe tener como límites asintóticos modos de frecuencia positiva. Es decir, en $\eta \rightarrow \pm\infty$ la solución de (7.40) debe tender a (3.19).

Las soluciones que en el pasado y futuro remoto se comportan como modos de frecuencia positiva son:

$$\begin{aligned}\chi_k^{in}(\eta) &= \frac{1}{2\omega_k^{in}} e^{-i\{\omega_+\eta + \frac{\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]\}} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(1 + i\frac{\omega_-}{\rho}; i\frac{\omega_-}{\rho}; 1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))\right) \\ \chi_k^{out}(\eta) &= \frac{1}{2\omega_k^{in}} e^{-i\{\omega_+\eta + \frac{\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh(\rho\eta)]\}} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(1 + i\frac{\omega_-}{\rho}; i\frac{\omega_-}{\rho}; 1 - i\frac{\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))\right),\end{aligned}\tag{7.41}$$

con

$$\begin{aligned}\omega_{in}^2 &= k^2 + m^2(A - B)^2 \\ \omega_{out}^2 &= k^2 + m^2(A + B)^2 \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in}).\end{aligned}\tag{7.42}$$

En donde las funciones ${}_2F_1(a, b, c, z)$ corresponden a funciones hipergeométricas. A partir del comportamiento asintótico de dichas funciones puede verse que efectivamente sus límites son

$$\begin{aligned}\chi_k^{in}(\eta) &\xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2\omega_{in})^{1/2}} e^{-i\omega_{in}\eta} \\ \chi_k^{out}(\eta) &\xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\omega_{out})^{1/2}} e^{-i\omega_{out}\eta}.\end{aligned}\tag{7.43}$$

Para calcular los coeficientes de Bogoliubov α_k y β_k se pide que verifiquen

$$u_k^{in}(\eta, x) = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_k^{out*}(\eta, x), \quad (7.44)$$

lo cual se satisface si éstos son de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-i\frac{\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-i\frac{\omega_{+}}{\rho}\right) \Gamma\left(1 - i\frac{\omega_{+}}{\rho}\right)} \\ \beta_k &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-i\frac{\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(i\frac{\omega_{-}}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + i\frac{\omega_{-}}{\rho}\right)}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

con $\Gamma(z)$ la función gamma.

Finalmente, si tomamos el módulo al cuadrado de las expresiones anteriores, estas dan como resultado los siguientes coeficientes de Bogoliubov:

$$\begin{aligned} |\alpha_k|^2 &= \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{+}}{\rho}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{in}}{\rho}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{out}}{\rho}\right)} \\ |\beta_k|^2 &= \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{-}}{\rho}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{in}}{\rho}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi\omega_{out}}{\rho}\right)}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Cabe remarcar que en el caso en que $m = 0$, de la ecuación (7.42) se tendrá $\omega_{-} = 0$ y por lo tanto también $|\beta_k|^2 = 0$, lo cual es una muestra más de que teniendo acoplamiento conforme y masa nula no hay creación de partículas [2]. Por otro lado si en lugar de un proceso de expansión se considera uno de contracción, en el desarrollo anterior habrá que efectuar el cambio $\rho \rightarrow -\rho$, pero en éste caso de la expresión (7.46) y las definiciones (7.42) se observa que la expresión de $|\beta_k|^2$ es invariante, por lo que los estudios y consideraciones que haremos de aquí en adelante valen tanto para un proceso de expansión como uno de contracción.

Estudiaremos a continuación algunos límites característicos del factor $|\beta_k|^2$.

Expansión adiabática: $\rho \rightarrow 0$

En el caso de una evolución infinitamente lenta tendremos

$$|\beta_k|^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} e^{-2\pi\frac{\omega_{in}}{\rho}} \rightarrow 0 \quad (7.47)$$

Como era de esperar, en el caso de una evolución adiabática la creación de partículas disminuye exponencialmente, por lo que en el límite de $\rho = 0$ no habrá producción de nuevos modos. Cabe aclarar que éste es un resultado conocido, y de hecho ya lo utilizamos en (5.14).

Expansión violenta: $\rho \rightarrow \infty$

En el caso de una evolución infinitamente rápida se tiene

$$\begin{aligned}
 |\beta_k|^2 &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
 &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\left(\frac{k^2 + m^2(A+B)}{k^2 + m^2(A-B)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{k^2 + m^2(A-B)}{k^2 + m^2(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

En dicho caso podemos distinguir dos nuevas situaciones:

- $k \rightarrow \infty$ o bien $m \rightarrow 0$ & $k \neq 0$

En ambos casos tenemos que

$$|\beta_k|^2 \rightarrow 0. \tag{7.49}$$

Con lo cual puede verse que la probabilidad de creación de partículas se anula para modos con vector de onda alto. Por otro lado y como se dijo anteriormente, para el caso de $m \rightarrow 0$ es una verificación más de que con acoplamiento conforme y masa nula no hay creación de partículas.

El caso del límite $m \rightarrow 0$ y $k \rightarrow 0$ lo estudiaremos en detalle en la ecuación (7.51).

- $A + B \gg \frac{k^2}{m^2} \gg A - B$

$$|\beta_k|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \frac{m^2}{k^2} (A + B) \tag{7.50}$$

Con lo que se ve que en éste caso el número de partículas creados es proporcional a $A + B$. Es decir, para vectores con longitud de onda mucho mayor al parámetro $A - B$ pero mucho menores a $A + B$, el coeficiente $|\beta_k|^2$ será proporcional al valor final del factor de escala.

- $k \rightarrow 0$

$$|\beta_k|^2 \rightarrow \sinh^2 \left(\frac{\pi (m^2(A+B)^2 - m^2(A-B)^2)}{2\rho} \right) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi m^2(A-B)^2}{\rho} \right) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi m^2(A+B)^2}{\rho} \right) + O[k^2] \quad (7.51)$$

Vemos que para modos de vector de onda nulo el coeficiente $|\beta_k|^2$ será finito siempre que $m \neq 0$ y $B \neq A$. Pero veamos con más detalle estos dos últimos casos:

- Tomemos de la expresión (7.51) el límite $m \rightarrow 0$, esto nos da

$$|\beta_k|^2 \rightarrow \frac{4A^2B^2\rho^2}{\pi^2m^4(A^2-B^2)^4} - \frac{8(A^2B^2(A^4+4A^2B^2+B^4))}{3(A^2-B^2)^4} + O(m^2) + O[k^2]. \quad (7.52)$$

Con lo cual vemos que en este límite $|\beta_k|^2 \rightarrow \infty$ tanto si $B \rightarrow A$ como si $m \rightarrow 0$.

- Por otro lado, si de (7.51) tomamos el límite $B \rightarrow A$ (dejando libre el valor de la masa) tendremos que esta expresión diverge, es decir:

$$\lim_{B \rightarrow A} \left\{ \lim_{k \rightarrow 0} |\beta_k|^2 \right\} = \infty \quad (7.53)$$

Resumiendo, tendremos que en el límite $k \rightarrow 0$ el factor $|\beta_k|^2$ diverge si $m \rightarrow 0$ o bien $B \rightarrow A$.

“Big Bang”: Hacia la singularidad en $\eta \rightarrow -\infty$: $B \rightarrow A$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2 \left(\frac{2\pi A^2 m^2}{\rho} \right)}{\sinh^2 \left(\frac{\pi k^2}{\rho} \right) \sinh^2 \left(\frac{\pi (4A^2 m^2 + k^2)}{\rho} \right)} \left\{ 1 + \frac{4\pi A m^2}{\rho} \times \right. \\ \left. + \left[2 \coth \left(\frac{\pi (4A^2 m^2 + k^2)}{\rho} \right) - \coth \left(\frac{2\pi A^2 m^2}{\rho} \right) \right] (A-B) + \right. \\ \left. + O[(A-B)^2] \right\}$$

En éste último caso, un límite súmamente interesante es aquel con $\rho \rightarrow \infty$, el cual corresponde a un escenario de gran inflación: expansión exponencialmente rápida de un universo infinitesimalmente pequeño. A primer orden no nulo tenemos

$$|\beta_k|^2 = \frac{4A^4 m^4 \rho^2}{k^4 (4\pi A^2 m^2 + \pi k^2)^2} + O\left[\frac{1}{\rho}\right]^0. \quad (7.54)$$

Podemos ver que en éste límite la creación de partículas crece como ρ^2 , pero para los modos más energéticos (aquellos con k grande) tendremos $|\beta_k|^2 \propto \rho^2/k^8$, por lo tanto su producción será rápidamente cancelada. Observemos también, que para valores de m no nulos, $|\beta_k|^2$ diverge con $k \rightarrow 0$.

Por último, comparemos el número de partículas creadas y la variación de entropía en función del modo k y la masa m del campo, para dos escenarios distintos. En el primero de ellos consideramos $A = 2$, $B = 1$, $\rho = 1$ $m = 1$ y $\beta = 1$ (figuras (7.7) y (7.11)). Es decir, de los valores de A y B vemos que el universo triplica su tamaño. En el segundo caso consideramos nuevamente $m = 1$ y $\beta = 1$, pero $A = B = 1$, lo que corresponde a partir de una singularidad en $\eta \rightarrow -\infty$ (figuras (7.12) y (7.16)). Aquí estamos considerando la expresión general de $|\beta_k|^2$ dada en (7.46). El número de partículas creadas estará dado por la ecuación (6.20), tomando allí $\langle n_{\vec{k}} \rangle$ como el que se obtiene a partir de la estadística de Bose-Einstein (recorremos que todo campo escalar cuenta con spin 0), y para la expresión de la entropía consideraremos el argumento de la integral (6.21). De esta manera, estaremos considerando el aporte de cada modo a la entropía total.

En las figuras (7.7) y (7.10) mostramos los gráficos correspondientes al número de partículas creadas y el trabajo de fricción efectuado sobre el campo para el caso de $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$ y $B = 1$. La similitud entre ambos gráficos es consecuencia de la relación (6.16), ya que por tratarse de un espacio isótropo ambos difieren en un factor igual a $4\pi\omega_k^{out}$.

Por otro lado, en la figura (7.9) observamos el trabajo adiabático que la variación de la métrica realiza sobre el campo. Recordemos que dicho trabajo indica la energía necesaria para cambiar el estado de vacío, o más

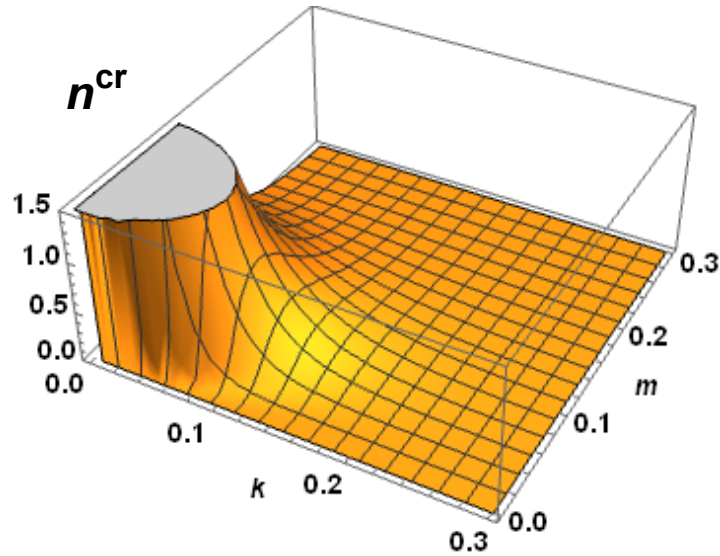


FIGURA 7.7: Número de partículas creadas en función del vector de onda y de la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

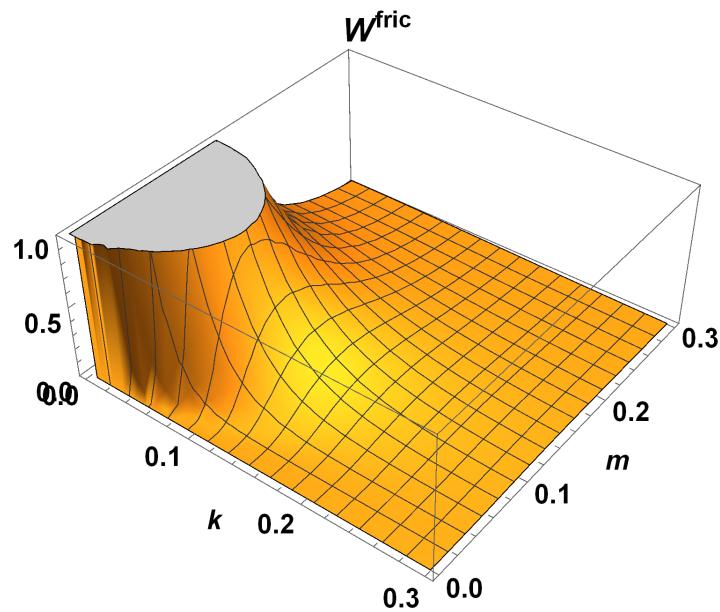


FIGURA 7.8: Trabajo de fricción efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

precisamente, la el trabajo requerido para cambiar la frecuencia del estado de vacío de ω_k^{in} a ω_k^{out} sin crear ninguna partícula extra (ver ecuación (5.16)). Recordemos que en todos los casos asumimos que el valor medio de la población de modos $n_{\vec{k}}$ corresponde a una distribución de Bose-Einstein.

Para finalizar con nuestras consideraciones sobre el trabajo, en la figura (7.10) mostramos el trabajo total realizado sobre el campo luego del proceso de expansión. Observamos (como es de esperar a partir de la ecuación

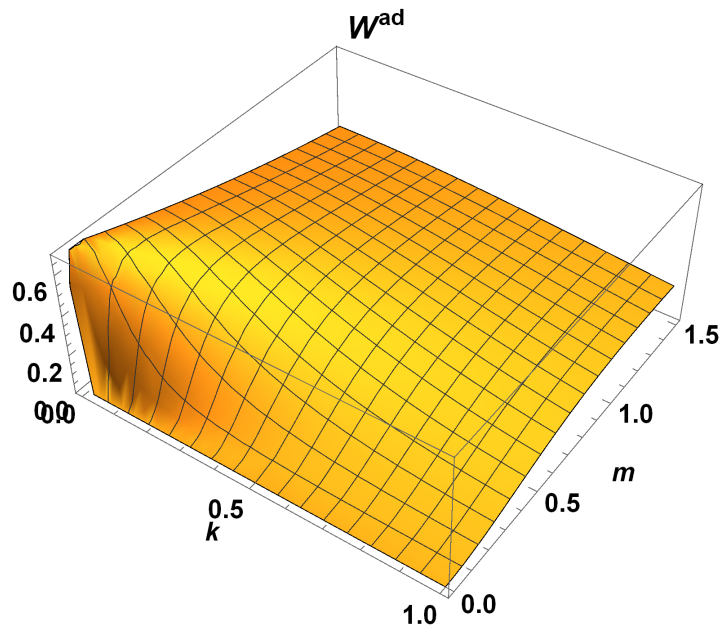


FIGURA 7.9: Trabajo adiabático efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

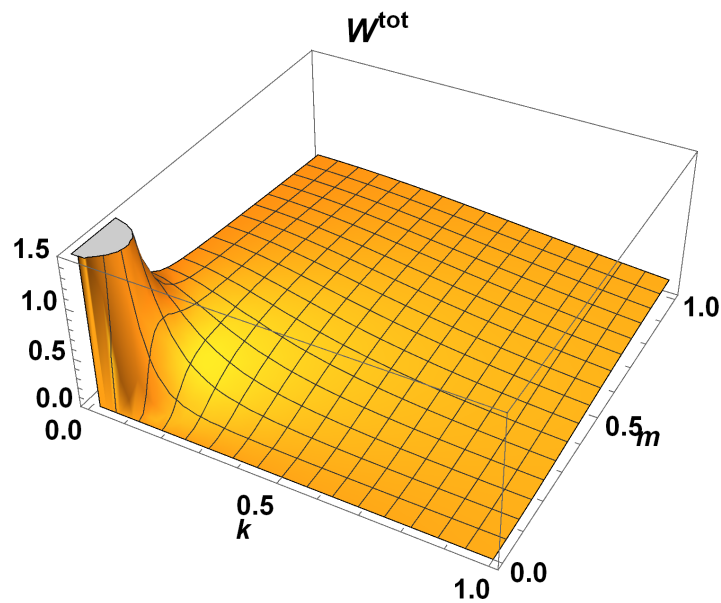


FIGURA 7.10: Trabajo total efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

(5.13)) que dicha superficie coincide con la suma de las superficies mostradas en (7.8) y (7.9), dado que el trabajo total es la suma del adiabático más el de fricción.

Por último, en la figura (7.11) podemos ver la variación de entropía en función del modo y de la masa de campo. Nótese la similitud con la figura

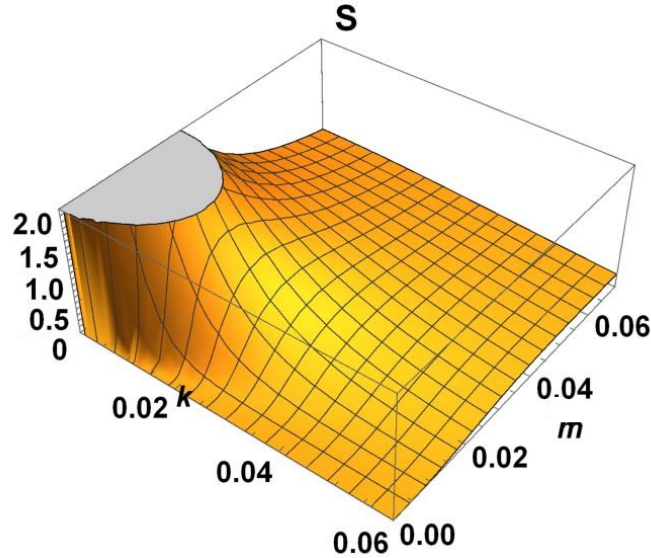


FIGURA 7.11: Variación de entropía para cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

(7.8), lo cuál es consecuencia, como ya hemos nombrado, de las ecuaciones (6.16) y (6.17), a partir de las cuales vemos que el valor medio de la entropía y del trabajo de fricción difieren, para cada modo, en un factor igual a $\tilde{\beta}_k$.

Si realizamos los mismos análisis para el caso de partir de una singularidad en la región IN ($A = B$), vemos que lo mismo que dijimos anteriormente vale también para este caso. Para ello, suponemos $\beta = 1$, $\rho = 1$ y $A = B = 1$, y mostramos en las figuras (7.12), (7.13), (7.14), (7.10) y (7.16) el número de partículas creadas; el trabajo de fricción, adiabático y total; y la variación de entropía en función del modo y de la masa del campo.

Notemos nuevamente la similitud en el comportamiento de los gráficos mostrados en (7.12) y (7.13), la cual es consecuencia de la ecuación (6.16). A partir de allí podemos observar que $\langle \omega_k^{fric} \rangle$ y $\langle n_k^{cr} \rangle$ difieren ambas en un factor igual a $4\pi\omega_k^{out}$. Dicha similitud no es de extrañar, ya que como mencionamos anteriormente, el trabajo de fricción corresponde a aquella porción del trabajo total responsable de la creación de partículas: mientras que $\langle \mathcal{W}_{ad} \rangle$ hace referencia al costo energético de cambiar el estado de vacío, $\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle$ indica la energía que se utiliza en crear n_k^{cr} partículas. De ahí la similitud entre ambas figuras.

Nuevamente, observemos que el gráfico de la figura (7.15) corresponde a la suma de los dos anteriores ((7.13) y (7.14)).

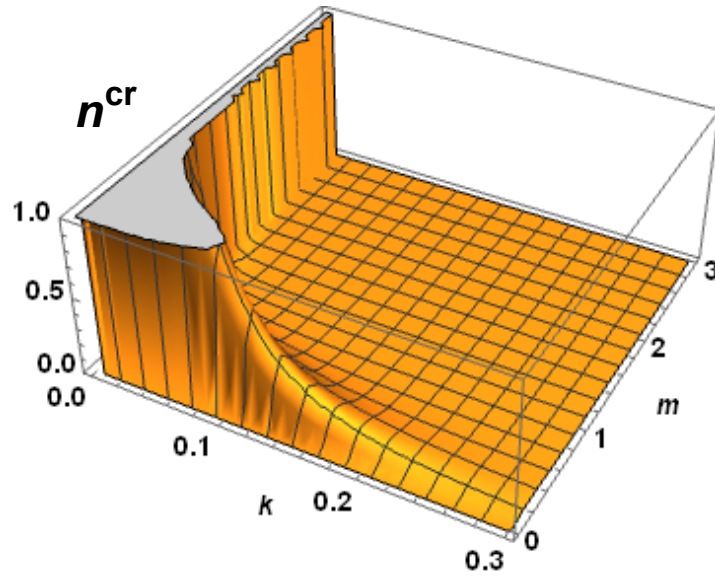


FIGURA 7.12: Número de partículas creadas en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

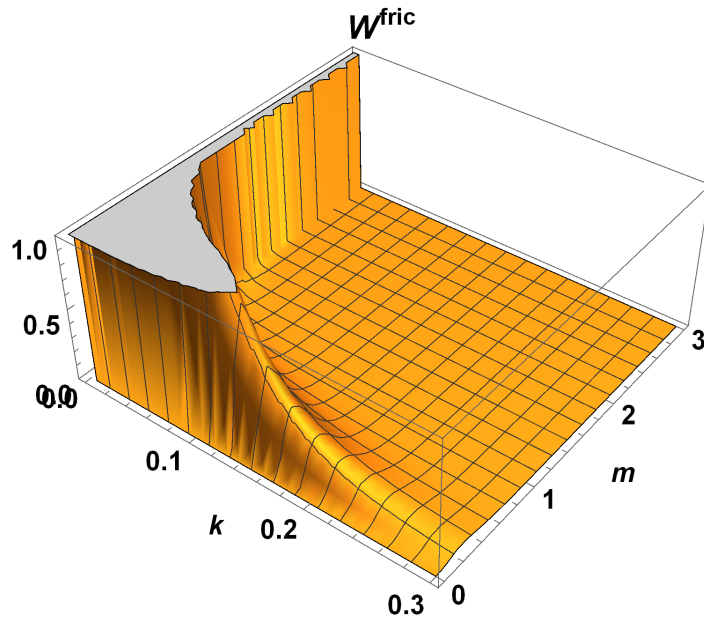


FIGURA 7.13: Trabajo de fricción efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

Por último, y tal como sucedió en el ejemplo anterior, la similitud entre los gráficos de las figuras (7.13) y (7.16) se debe a las ecuaciones (6.16) y (6.17).

En todos los casos podemos observar que n_k^{cr} , $\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle$, $\langle \mathcal{W}_{tot} \rangle$ y s son mayores para valores de m y k cercanos a cero, y que para el escenario en el que partimos de una singularidad en $\eta \rightarrow -\infty$ esta divergencia es más acentuada. De la mano con esto último, en la figura (7.12) vemos que la

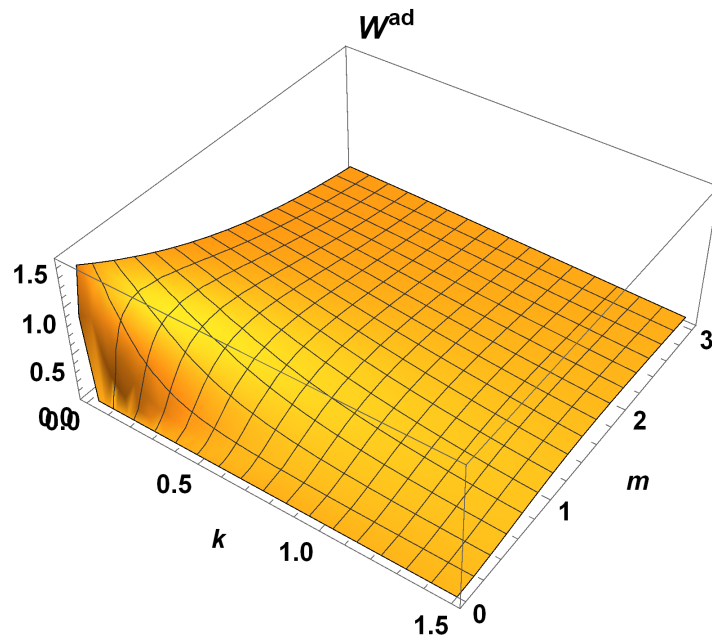


FIGURA 7.14: Trabajo adiabático efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

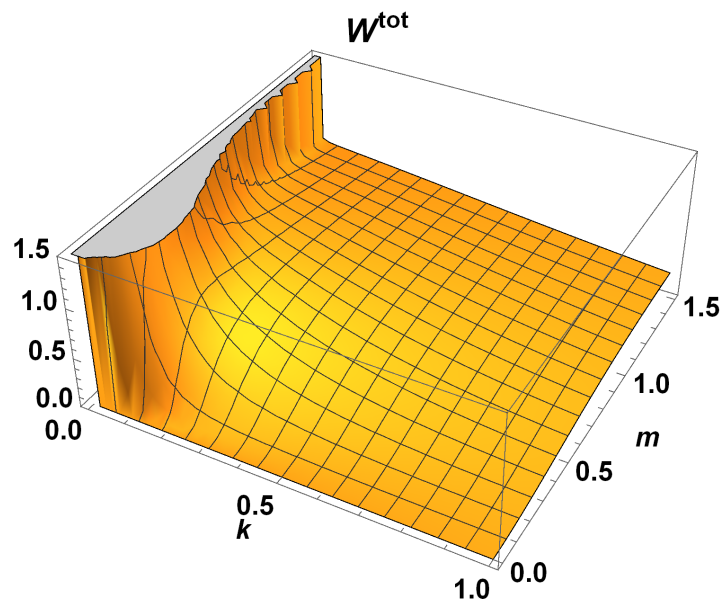


FIGURA 7.15: Trabajo total efectuado sobre cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

dinámica del espacio-tiempo privilegiará la creación de modos o bien con bajo número de onda k , o bien con masa m cercana a cero, mientras que el aporte del resto de los modos es rápidamente cancelado.

Con el fin de estudiar el comportamiento de estas funciones cuando

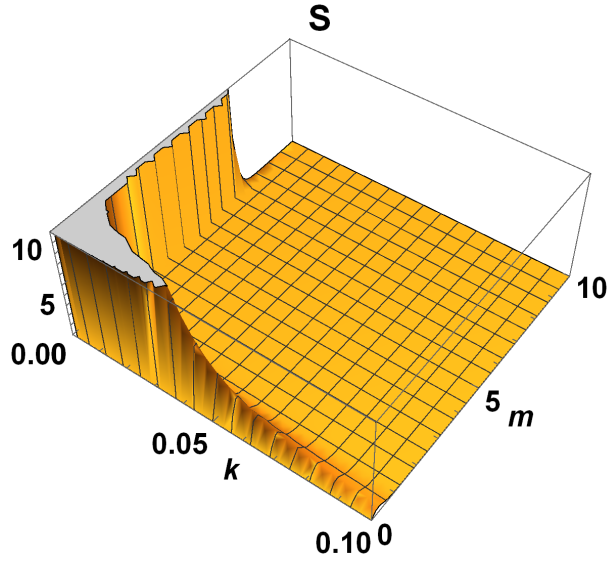


FIGURA 7.16: Variación de entropía para cada modo en función del vector de onda y la masa, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

$m \approx 0$ y $k \approx 0$, mostramos en las figuras (7.17) y (7.18) curvas de nivel para el número de partículas creadas y la variación de entropía en el caso $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$. Por otro lado, en las figuras (7.19) y (7.20) haremos el mismo análisis para valores de parámetros $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$ (es decir, aquí consideramos $A = B$). Debido a las escalas que aquí intervienen, en todos los casos expresamos el eje vertical en escala logarítmica. De esta manera comprenderemos mejor como se comportan estas funciones cuando alguno de los parámetros m o k es cercano a cero.

A pesar de no hacer dicho análisis para $\langle \mathcal{W}_{fric} \rangle$ y $\langle \mathcal{W}_{tot} \rangle$, los mismos resultados y comportamientos generales obtenidos para n_k^{cr} y s serán válidos también para los primeros. Esto es consecuencia, nuevamente, de las relaciones (6.16) y (6.17).

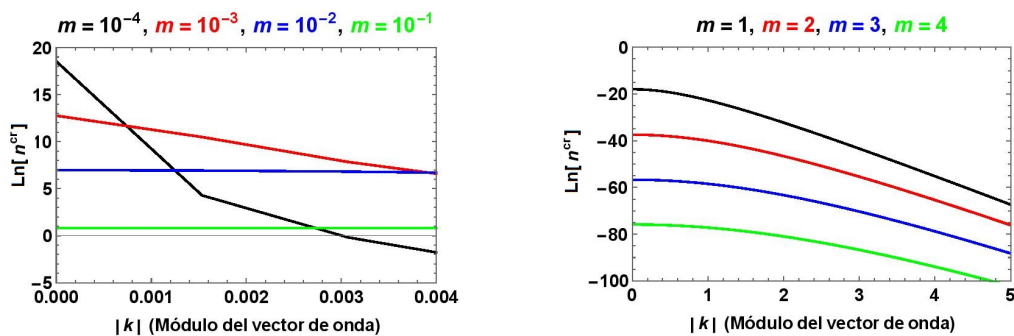


FIGURA 7.17: Curvas de nivel para el número de partículas creadas en función del módulo vector de onda, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

Si bien en las figuras mostradas en (7.17) observamos que para masas de orden 1 el número de partículas creadas decrece a medida que aumenta el valor de la masa, no pasa lo mismo a medida que $m \rightarrow 0$. En este caso (obsérvese la figura 7.7) tendremos que diverge la producción de partículas para masas tendientes a cero. Esto último puede observarse en la ecuación (7.52).

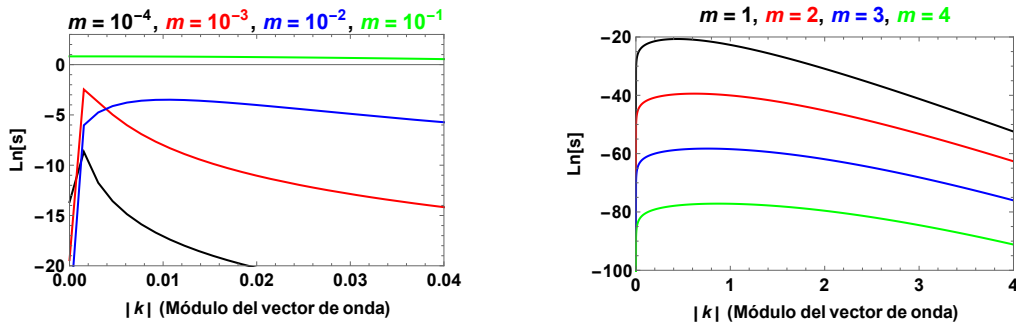


FIGURA 7.18: Curvas de nivel para la variación de entropía en función del módulo del vector de onda, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 2$, $B = 1$

En la figura (7.18) podemos observar que a medida que disminuye el valor de la masa, la variación de entropía se maximiza en modos con vectores de onda cada vez menores. Aclaremos que si bien en la figura de la izquierda de (7.18) la curva correspondiente a $m = 10^{-1}$ pareciera ser constante, la escala utilizada no permite aquí apreciar el verdadero comportamiento de la misma, el cual es similar al de las otras curvas de nivel: parte de un valor de $\ln(s) = 0.82$ para luego decrecer a medida que aumenta $|k|$ (comportamiento muy similar al de las figuras de la derecha).

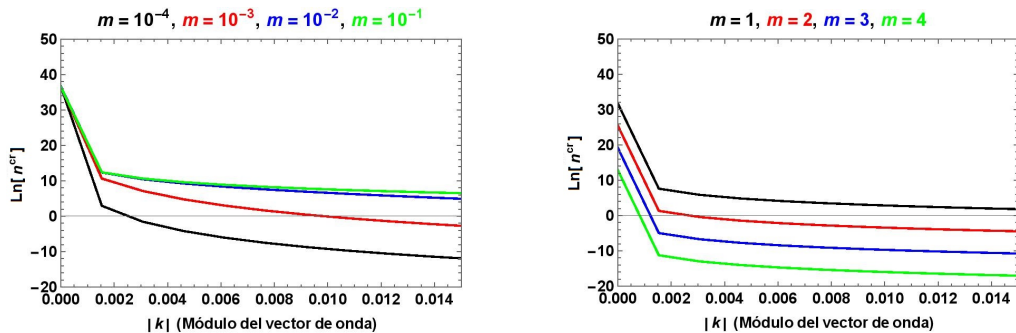


FIGURA 7.19: Curvas de nivel para el número de partículas creadas en función del módulo del vector de onda, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

En (7.19) vemos un comportamiento que ya introducidos más arriba, y es que en el caso de tener $A = B$ y $m \rightarrow 0$, la producción de partículas diverge (recordemos que en (7.53) el parámetro $|\beta_k|^2$ tiende a infinito si

$A \rightarrow B$, $k \rightarrow 0$ y $m \rightarrow 0$). Esto no sucede para $m \rightarrow \infty$, ya que de la figura de la derecha en (7.19) observamos que n^{cr} disminuye a medida que aumenta m .

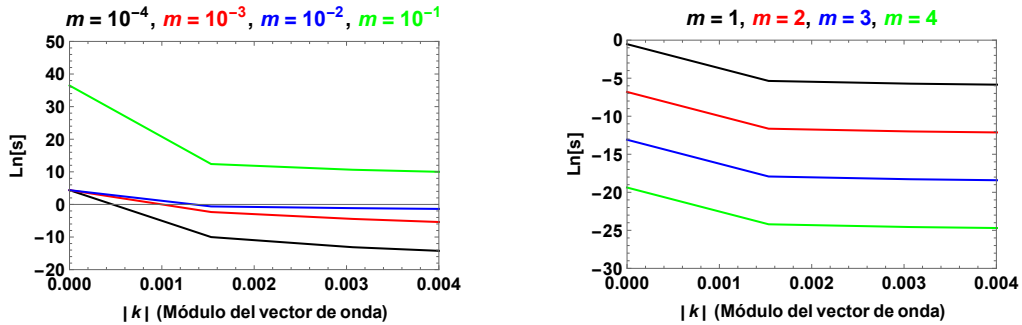


FIGURA 7.20: Curvas de nivel para la variación de entropía en función del módulo vector de onda, $\beta = 1$, $\rho = 1$, $A = 1$, $B = 1$

Por último, en (7.20) vemos un comportamiento similar al visto en la figura (7.18), aquí la función parte de un valor máximo de entropía en $k = 0$, para luego decrecer a medida que aumenta k . Lo mismo sucede para cualquier valor de m . Nótese finalmente que aquí no tendremos ninguna divergencia.

Teniendo presente los resultados de la sección 6, en los cuales vinculamos el aumento de entropía de un campo escalar que debido a la dinámica del espacio-tiempo es llevado arbitrariamente lejos del equilibrio con el número de partículas creadas, pudimos estudiar en esta sección los detalles de tres procesos cosmológicos distintos. En el primero tratamos el caso en que dos dimensiones del espacio se contraen mientras la tercera se expande, para luego expandirse las primeras y contraerse la última, volviendo a la misma configuración inicial. Allí observamos que tanto el número de partículas creadas como el aumento de entropía en función del modo \vec{k} heredan la asimetría de la dinámica, maximizándose ambos para modos orientados en la dirección de expansión del espacio. Luego estudiamos el escenario en que las tres dimensiones del espacio siguen un proceso de expansión-contracción para finalizar nuevamente en el mismo estado inicial. Allí vimos que tanto $n_{\vec{k}}^{cr}$ como s se maximizan para modos con vector de onda nulo, preferenciando entonces la creación de éste tipo de modos y siendo ellos los que más aumentan su entropía. Por último, examinando el caso inflacionario distinguimos dos casos distintos: un caso inflacionario en donde la región IN corresponde a un universo de volumen no nulo ($A \geq B$), y el caso de

singularidad en $\eta \rightarrow -\infty$ ($A = B$). En ambos casos la producción de partículas diverge si $m, k \rightarrow 0$, advertimos entonces que aquí se privilegiará la producción de partículas con número de onda y masa nula. La diferencia principal entre ambos radica para qué valores de masa m y vector de onda k se maximiza la entropía. En el primer caso la entropía se maximiza para modos de masa m y vector de onda k finitos y no nulos, mientras que en el segundo alcanza un máximo con $m, k \rightarrow 0$.

El caso de $A = B$ (el cual corresponde a la singularidad en $\eta \rightarrow 0$) caso es quizás el más interesante, ya que es la única solución exacta con la que trabajamos en esta sección, y el que más se acerca a la historia del universo primigenio.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el caso de un campo escalar libre presente en un universo de FRW de dimensión $3 + 1$, acoplado a la métrica la cual evoluciona entre dos estados asintóticos IN en $t \rightarrow -\infty$ y OUT en $t \rightarrow \infty$. Cuando nos referimos al campo como libre, queremos indicar que mientras el espacio-tiempo evoluciona, la interacción entre este campo y cualquier otro distinto de la métrica es despreciable, por ejemplo, esto ocurre cuando el espacio-tiempo sufre una expansión (o contracción) extremadamente rápida. Supusimos además que el estado inicial del campo es un estado de equilibrio térmico. Mientras que tratamos al campo con el formalismo de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempos curvos, al espacio-tiempo lo tratamos de forma clásica (aproximación semiclásica), el cual en su dinámica aleja al campo de su estado de equilibrio.

Teniendo en cuenta las distintas opciones de funciones de base que se nos plantearon al momento de cuantizar el campo escalar, y sobre todo la inequivalencia de los estados de vacío en las regiones IN y OUT, vimos que la dinámica de la métrica induce creación de partículas. Observamos también que dicha creación se produce como consecuencia de una amplificación paramétrica de las partículas ya existentes, y de la amplificación de las fluctuaciones de vacío. Esta producción de partículas se manifiesta como una diferencia entre los hamiltonianos IN y OUT, a partir de los cuales pudimos definir el número de partículas creadas, y hallar una expresión para ellas. De esta manera, hemos calculado luego el trabajo de fricción, el cual fue de suma importancia ya que nos permitió conectar la variación de entropía

del campo con el número de partículas creadas. Esto último lo hicimos valiéndonos de los teoremas de fluctuación, recientemente desarrollados para estudiar procesos que suceden arbitrariamente lejos del estado de equilibrio termodinámico. El resultado principal de este trabajo fue mostrar que en el caso estudiado la entropía resulta monótona creciente con el número de partículas creadas, y la importancia de esto radica en que es un resultado totalmente general: vale siempre que estemos tratando con un campo libre en un universo de FRW de dimensión $3 + 1$, y en donde su estado inicial es un estado térmico. Esto mismo es una generalización de los resultados anteriormente obtenidos en [3].

Otro resultado obtenido y consistente también con los desarrollos en [3], es el hecho de que en espacios isótropos la dinámica del campo puede separarse en modos con igual módulo de vector de onda. Es decir, las partículas con vector de onda igual a k_1 no solo no interactúan con aquellas de módulo $k_2 \neq k_1$, sino que sus contribuciones a la variación de la entropía del campo son independientes: la entropía no vincula modos con distinto módulo de vector de onda. Esto se debe a que en la expresión del hamiltoniano OUT, los modos \vec{k} interactúan únicamente con los modos $-\vec{k}$, pero dado que el espacio es isótropo, su dinámica es indistinta de la dirección que estemos tratando, por lo que modos con igual módulo de vector de onda k seguirán la misma dinámica.

Finalmente, proponemos extender estos resultados a tres escenarios: estado inicial distinto del de equilibrio térmico, por ejemplo diferencias de fase; interacciones no lineales; y por último, vincularlo con escenarios de agujeros negros, estudiando la variación de entropía de un campo escalar cuando el agujero negro varía su tamaño, o bien en un escenario de colapso gravitatorio.

Bibliografía

- [1] M. Campisi, P. Hänggi, and P. Talkner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 771 (2011).
- [2] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1984).
- [3] N. Liu, J. Goold, I. Fuentes, V. Vedral, K. Modi, and D. E. Bruschi, *Class. Quant. Grav.* **33**, 035003 (2016), [arXiv:1409.5283 \[quant-ph\]](#) .
- [4] L. Parker, *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1969).
- [5] B. L. Hu, in *2nd Journee Cosmologique within the framework of the International School of Astrophysics, D. Chalonge Paris, France, June 2-4, 1994* (1994) pp. 0111–126, [arXiv:gr-qc/9409053 \[gr-qc\]](#) .
- [6] D. Koks, A. Matacz, and B. L. Hu, *Phys. Rev.* **D55**, 5917 (1997), [Erratum: *Phys. Rev.*D56,5281(1997)], [arXiv:quant-ph/9612016 \[quant-ph\]](#) .
- [7] G. D. Chiara, A. J. Roncaglia, and J. P. Paz, *New Journal of Physics* **17**, 035004 (2015).
- [8] O. Abah, J. Roßnagel, G. Jacob, S. Deffner, F. Schmidt-Kaler, K. Singer, and E. Lutz, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 203006 (2012).
- [9] E. A. Calzetta, *Entropia* (2009).
- [10] M. Farahmand, H. Mohammadzadeh, and H. Mehri-Dehnavi, *Int. J. Mod. Phys.* **A32**, 1750066 (2017), [arXiv:1610.00537 \[quant-ph\]](#) .
- [11] C. A. Egan and C. H. Lineweaver, *Astrophys. J.* **710**, 1825 (2010), [arXiv:0909.3983 \[astro-ph.CO\]](#) .

-
- [12] B. L. Hu and L. Parker, *Phys. Rev. D* **17**, 933 (1978).
- [13] B. L. Hu and H. E. Kandrup, *Phys. Rev.* **D35**, 1776 (1987).
- [14] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981).
- [15] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Oxford, 2005).
- [16] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1976).
- [17] S. A. Fulling, *Phys. Rev.* **D7**, 2850 (1973).
- [18] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and J. G. Russo, *Phys. Rev.* **D59**, 064007 (1999), [arXiv:gr-qc/9808048 \[gr-qc\]](#) .
- [19] F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev.* **D58**, 024009 (1998), [arXiv:gr-qc/9712091 \[gr-qc\]](#) .
- [20] A. Allahverdyan and T. M. Nieuwenhuizen, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **305**, 542 (2002).
- [21] M. Campisi and P. Hänggi, *Entropy* **13**, 2024 (2011), [arXiv:1111.1829 \[physics.pop-ph\]](#) .
- [22] S. A. O. Carl M. Bender, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I* (Springer New York, 2009).
- [23] F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev.* **D55**, 3889 (1997), [arXiv:gr-qc/9609073 \[gr-qc\]](#) .