

Tesis de Grado

Ondas y turbulencia cuasi-geostrófica en flujos rotantes y estratificados

Oks, David

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Oks, David. (2017). Ondas y turbulencia cuasi-geostrófica en flujos rotantes y estratificados. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000025_Oks

Cita tipo Chicago:

Oks, David. "Ondas y turbulencia cuasi-geostrófica en flujos rotantes y estratificados". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000025_Oks

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Ondas y turbulencia cuasi-geostrófica en flujos rotantes y estratificados

David Oks

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Abril de 2017

TEMA: Ondas y turbulencia cuasi-geostrófica en flujos rotantes y estratificados

ALUMNO: David Oks

L.U. Nº: 158/12

LUGAR DE TRABAJO: Depto de Fisica. FCEN. U.B.A.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo D. Mininni

FECHA DE INICIACIÓN: Abril 2016

FECHA DE FINALIZACIÓN: Abril 2017

FECHA DEL EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de tesis de licenciatura

Jurado

Resumen

El estudio de flujos rotantes y estratificados en un régimen turbulento resulta fundamental para el entendimiento de flujos atmosféricos y oceánicos, donde la gravedad y la fuerza inercial de Coriols permiten la existencia de, respectivamente, ondas de gravedad e inerciales. Estas ondas, producidas por las interacciones resonantes entre tres modos (conocidas como “tríadas resonantes”), juegan un rol importante en la ruptura de la isotropía estadística de flujos turbulentos. Los flujos fuertemente estratificados tienden a formar estructuras contenidas en el plano horizontal, mientras que los predominantemente rotantes tienden a formar estructuras estiradas a lo largo del eje vertical. Cuando la rotación se equipara a la estratificación, domina el régimen cuasi-geostrófico (CG) que consiste en modos “lentos” de frecuencia nula.

En esta tesis, llevamos a cabo simulaciones numéricas directas de flujos hidrodinámicos tridimensionales integrando las ecuaciones de Boussinesq en un sistema de referencia rotante, con eje de rotación alineado a la fuerza de gravedad. Aplicamos un forzado mecánico de Taylor-Green (TG) en dominios cúbicos y periódicos, con resoluciones espaciales lineales de 256^3 y 512^3 puntos. Fijando el *parámetro de Coriolis*, f , que cuantifica la intensidad de la rotación, y variando la *frecuencia de Brunt-Väisälä*, N_{bv} , que mide la intensidad de estratificación, estudiamos como la distribución anisótropa de energía depende de la razón N_{bv}/f .

Observamos que el cociente entre la escala característica horizontal y vertical es compatible con una relación lineal con N_{bv}/f en un rango del espacio de parámetros donde se anulan las tríadas resonantes, $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$. Esto es consistente con el análisis espectral realizado, donde observamos que en grandes escalas la energía se acumula en el plano horizontal para flujos fuertemente estratificados, y a lo largo del eje vertical para flujos predominantemente rotantes. A su vez, en el rango inercial, donde el flujo de energía entre escalas es constante, observamos que los espectros de energía son compatibles con leyes de potencias observadas en flujos geofísicos: $E(k) \sim k^{-3}$ para flujos fuertemente estratificados [10], y $E(k) \sim k^{-2}$ para los predominantemente rotantes [73].

A partir de los espectros espacio-temporales, cuantificamos sistemáticamente la contribución de las ondas a la energía total, observando que en el rango no-resonante la concentración de energía alrededor de la relación de dispersión lineal es mínima comparada con el resto del espacio de parámetros explorado. En este rango también observamos una mayor proporción de energía CG, estimada como la energía de los modos con frecuencia nula. Esto refleja la inhibición de modos ondulatorios en este rango, como predice la teoría de ondas resonantes [90].

Agradecimientos

Agradezco a mi padre por el amor y apoyo incondicional que siempre me brindó en cada uno de mis proyectos.

A mis hermanas por hacerme feliz cada día.

A Meri por completarme y enseñarme lo no numerable.

Agradezco al Grupo de Plasmas Astrofísicos por las horas de cálculo utilizadas en los clusters del grupo.

Quisiera agradecer a mi director de tesis Pablo Mininni, por su gran paciencia y dedicación para guiarme a lo largo de todo este camino.

Índice general

Resumen	1
Agradecimientos	3
1. Introducción	6
2. Turbulencia hidrodinámica	10
2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	10
2.1.1. Condiciones de contorno periódicas	12
2.1.2. Leyes de conservación	12
2.1.3. Escalas características de energía	14
2.1.4. Espectro espacio-temporal	16
2.1.5. Espectros reducidos	16
2.2. Teoría de Kolmogorov (K41)	18
2.2.1. Observaciones experimentales	18
2.2.2. Hipótesis de la teoría K41	19
2.2.3. Escalas características de la turbulencia	20
2.2.4. La cascada de Richardson	22
2.2.5. Principales resultados de la teoría K41	23
2.3. Turbulencia en flujos geofísicos	25
2.4. Turbulencia estratificada	26
2.4.1. Ecuaciones de Boussinesq	26
2.4.2. Ondas de gravedad internas	28
2.4.3. Algunos resultados previos	29
2.5. Turbulencia rotante	30
2.5.1. Ecuaciones dinámicas	30
2.5.2. Teorema de Taylor-Proudman	31
2.5.3. Ondas inerciales	32
2.5.4. Algunos resultados previos	34
2.6. Turbulencia rotante y estratificada	35
2.6.1. Ecuaciones dinámicas	35

2.6.2.	Modos lineales, cuasigeostróficos y de ondas de gravedad-inerciales	36
2.6.3.	Tríadas resonantes	38
2.6.4.	Tiempos característicos	39
2.6.5.	Barrido de vórtices	40
2.6.6.	Anulación de tríadas resonantes en $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$. . .	41
2.6.7.	Ecuación cuasi-geostrófica	42
2.6.8.	Algunos resultados previos	43
3.	Herramientas y métodos	46
3.1.	Simulaciones numéricas directas	46
3.1.1.	Resolución espacial: método pseudo-espectral	47
3.1.2.	Evolución temporal: esquema de Runge-Kutta	49
3.1.3.	Paralelización del método numérico	50
3.1.4.	Forzado del sistema	50
3.2.	Re-grillado	50
4.	Resultados	52
4.1.	Resumen de las simulaciones	53
4.2.	Simulaciones con 256³ puntos	53
4.2.1.	Parámetros y forzado del sistema	53
4.2.2.	Estado estadísticamente estacionario	55
4.2.3.	Estimación de la escala disipativa ($N_{bv} = f = 0$)	56
4.2.4.	Análisis espectral	56
4.2.5.	Espectro axisimétrico	65
4.3.	Simulaciones con 512³ puntos	65
4.3.1.	Elección de parámetros de las simulaciones	66
4.3.2.	Espectro axisimétrico	72
4.3.3.	Espectro espacio-temporal	73
4.3.4.	Modos cuasi-geostróficos	80
5.	Conclusiones	82

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la turbulencia rotante y estratificada resulta fundamental para el entendimiento de flujos geofísicos, tanto atmosféricos como oceánicos. En estos casos, la fuerza de empuje generada por los gradientes de densidad, y la fuerza inercial de Coriolis producida por la rotación de la Tierra, proveen las fuerzas restitutivas necesarias para dar lugar a la excitación de ondas dispersivas [19]. Los flujos geofísicos suelen estar un régimen altamente turbulento, y están conformados por estructuras complejas de remolinos que interactúan de forma fuertemente no-lineal, por lo que se vuelven impredecibles salvo en sentido estadístico, y difíciles de modelar. La estratificación y rotación lleva a dos tipos de movimientos: por un lado, modos tridimensionales (3D) “rápidos” en pequeñas escalas que consisten en ondas de gravedad-inerciales, y por otro lado, modos “lentos” de gran escala que consisten en flujos denominados cuasi-geostróficos (CG), en los cuales la fuerza de Coriolis está aproximadamente balanceada con los gradientes de presión horizontales. Estos últimos también se conocen como modos de *vorticidad potencial* (*VP*).

La influencia de la estratificación y rotación sobre la dinámica de la atmósfera y del océano varía según la escala estudiada. En las escalas geofísicas más grandes tanto la rotación como la estratificación son importantes, y el régimen dominante es el cuasi-geostrófico. En particular, en el rango $\mathcal{O}(800 - 2500)$ km, se ha observado que el espectro de energía atmosférico escala como $E(k) \sim k^{-3}$ [74]. Esta ley de potencias se explica en la teoría cuasi-geostrófica clásica de Charney [22]. A medida que se consideran escalas cada vez más pequeñas se reduce la influencia de estos efectos sobre la dinámica del sistema. Según la visión clásica, a medida que se reduce la escala de observación, la rotación se debilita antes que la estratificación. La mesoescala atmosférica (escalas horizontales de $\mathcal{O}(1 - 100)$ km) y la submesoescala oceánica ($\mathcal{O}(10)$ m – $\mathcal{O}(10)$ km) se caracterizan por una fuerte estratificación con rotación moderada (con número de Rossby, $Ro \gtrsim 1$, que mide la importancia de la rotación; ver [30]), donde el espectro escala aproximadamente co-

mo $E(k) \sim k^{-5/3}$ [74]. Este exponente podría ser explicado por una cascada inversa bidimensional alimentada por inestabilidades convectivas [100]. En [56] Lilly predijo que una cascada directa de enstrofía (el valor cuadrático medio de la vorticidad en el fluido) con espectro $E(k) \sim k^{-3}$, alimentada por inestabilidades de grandes escalas podría coexistir, sin distorsión significativa, con una cascada inversa de energía con $E(k) \sim k^{-5/3}$ alimentada por inestabilidades en pequeñas escalas. Esta predicción fue luego verificada numéricamente [62], aunque en el caso atmosférico la validez de esta teoría es todavía discutida.

Análisis recientes de datos oceánicos y desarrollos de turbulencia débil indican la existencia de una variedad de regímenes dependiendo de si dominan los remolinos del régimen cuasi-geostrófico o los modos ondulatorios, enfatizando la importancia de las no-linealidades una vez roto el balance geostrófico [80]. Las interacciones entre vientos y ondas tienen también un rol importante en las capas límites atmosférica y oceánica, con consecuencias dinámicas para el transporte y mezclado de impulso, CO_2 y de calor [44]. Un modelado incorrecto de estas interacciones resulta en una capa de mezclado demasiado fina en modelos climáticos del océano del hemisferio sur [32], afectando la evolución climática general [21]. Consecuentemente, resulta de suma importancia comprender las interacciones entre remolinos y ondas en este tipo de flujos.

La interacción y dinámica de los modos ondulatorios que surgen en estos flujos encuentran su explicación en la teoría de ondas resonantes [19, 103, 104]. Con suficiente rotación y estratificación, estos modos dominan por encima de los modos cuasi-geostróficos, y las interacciones no-lineales entre tríadas de modos ondulatorios se convierten en el mecanismo predominante de transferencia de energía. La teoría de ondas resonantes predice que dados tres modos \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} , estos pueden interactuar y transferir energía entre sí, si los vectores de onda forman un triángulo $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ y además cumplen con la condición de resonancia $\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(\mathbf{p}) + \sigma(\mathbf{q}) = 0$ (siendo σ la frecuencia asociada a cada modo). Sin embargo, en el caso rotante y estratificado existe un rango de parámetros $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ (siendo N_{bv} la frecuencia de Brunt-Väisälä que da una medida del grado de estratificación, y f el parámetro de Coriolis, igual a dos veces la frecuencia angular del sistema rotante) en el que dichas resonancias se anulan. Fuera de esta región, las primeras tríadas resonantes que surgen para $N_{bv}/f < 1/2$ tienden a bidimensionalizar el flujo, formando estructuras verticales con forma de columna; mientras que las primeras tríadas resonantes que surgen para $N_{bv}/f > 2$ tienden a unidimensionalizar el flujo, formando estructuras con forma de panqueque o de capas [90]. En contraste, en el caso cuasi-geostrófico Charney argumenta que la turbulencia es isótropa en la coordenada re-escalada $(N_{bv}/f)z$, implicando que el cociente entre las escalas características horizontal y vertical cumplen con $L_{\perp}/L_{\parallel} \sim N_{bv}/f$ [22]. Esta relación fue verificada

en simulaciones numéricas de turbulencia cuasi-geostrófica [82], y en simulaciones de turbulencia fuertemente estratificada y rotante donde, aumentando la frecuencia de rotación desde 0, se examinó la transición desde turbulencia estratificada (donde $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-5/3}$ y $L_{\parallel} \sim U/N_{bv}$, con U la velocidad r.m.s.) a turbulencia cuasi-geostrófica (donde $E(k) \sim k^{-3}$ y $L_{\perp}/L_{\parallel} \sim N_{bv}/f$) [102].

Con estos resultados presentes, en esta tesis nos proponemos estudiar las transiciones que ocurren en el flujo a medida que el parámetro N_{bv}/f se varía, con especial interés en el rango próximo a $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ donde las interacciones resonantes desaparecen. En particular, estudiamos cómo cambia la dirección e intensidad de anisotropización del flujo a medida que se varía N_{bv} , fijando la frecuencia de rotación f . En el rango de anulación de tríadas resonantes, donde dominan los modos cuasi-geostróficos, se halla un rango lineal para L_{\perp}/L_{\parallel} consistente con la relación observada en [58, 102]. Este análisis se complementa con el estudio del espectro espacio-temporal, con el fin de detectar la existencia o no de modos ondulatorios, y determinar si dominan o no frente a los modos cuasi-geostróficos. Estimando la energía en modos cuasi-geostróficos a partir de la cuantificación de los modos con frecuencia nula, dentro del rango de anulación de tríadas resonantes se observa un mayor apartamiento del espectro respecto de la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales, en comparación con la región de parámetros complementaria ($\{N_{bv}/f < 1/2\} \cap \{N_{bv}/f > 2\}$). Se observa también una mayor concentración de energía en modos “lentos” dentro de la región de anulación de tríadas resonantes, pero tan sólo un $\sim 10\%$ mayor a la región complementaria, lo que confirma la dependencia débil de la energía de modos cuasi-geostróficos con el parámetro N_{bv}/f para flujos con $Ro \lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$ observada en [102].

A continuación se detalla la estructura de la tesis. En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con los fundamentos necesarios para comprender la turbulencia hidrodinámica isotrópica y homogénea. Se introduce la teoría de Kolmogorov (K41) que describe a estos flujos, y mediante una descripción fenomenológica, se detallan las escalas características del régimen turbulento, y sus principales resultados, como por ejemplo la ley de potencias para la cascada de energía directa de Richardson. A continuación se deduce la aparición de ondas de gravedad internas a partir de la linealización de las ecuaciones dinámicas, introduciendo las ecuaciones de Boussinesq. Se describen las principales características de los flujos rotantes en los que aparecen ondas inerciales. Finalmente, se explica el caso rotante y estratificado y se introduce la teoría de ondas resonantes en la que los modos lineales del sistema se clasifican entre modos “rápidos” y ondulatorios, y “lentos” y cuasi-geostróficos. Se definen las escalas temporales relevantes del flujo, que permiten determinar los efectos dominantes. Además, se deduce la existencia de la región de anulación de tríadas resonantes y se introduce la ecuación cuasi-

geostrófica para esta región del espacio de parámetros. En el capítulo 3 se describen las herramientas y métodos numéricos utilizados para realizar las simulaciones numéricas directas de flujos turbulentos, con un forzado mecánico de Taylor-Green. También se describe un mecanismo para aumentar la resolución espacial que permite ahorrar valioso tiempo de cómputo. En el capítulo 4 se presentan los resultados de las simulaciones, se analizan los exponentes de escala, se estudia la dependencia de las escalas características horizontales y verticales en función del grado de estratificación y rotación, y se emplean los espectros espacio-temporales para intentar comprender la interacción entre regímenes ondulatorios y modos cuasi-geostróficos. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Turbulencia hidrodinámica

En este capítulo se introducen las ecuaciones de Navier-Stokes que describen la dinámica de un fluido, se distingue entre el régimen laminar y turbulento, y se presentan las magnitudes físicas conservadas en un flujo inviscido. En §2.1.2 se definen las funciones y cantidades físicas relevantes para el estudio de la turbulencia, para luego presentar en §2.2 la teoría formulada por Kolmogorov en 1941 para turbulencia isótropa y homogénea, antes definiendo las escalas relevantes. En §2.4 se introduce el efecto de la estratificación en la turbulencia, que conlleva la aparición de ondas de gravedad internas. En §2.5 se describe el efecto de la rotación, junto con el surgimiento de ondas inerciales. Finalmente, en §2.6 se considera el sistema rotante y estratificado, introduciendo la teoría de ondas resonantes, que distingue entre los modos ondulatorios y el régimen cuasi-geostrófico de los modos “lentos”.

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Los flujos turbulentos, ubicuos en la naturaleza, deben su complejidad a las interacciones no-lineales generadas por el acoplamiento entre modos en diferentes escalas. Estas interacciones son descritas por la ecuación de Navier-Stokes, que rige la dinámica de fluidos clásicos. A pesar de que los fluidos están conformados por moléculas, la ecuación de Navier-Stokes (2.1), conocida desde 1823 por Navier [75] describe al fluido como un continuo de materia. Esta aproximación consiste en tomar valores medios de los observables y propiedades del fluido, definiendo los promedios sobre regiones macroscópicas respecto de las escalas que caracterizan a los movimientos moleculares, y microscópicas respecto de las escalas características del flujo.

En esta tesis nos restringimos a fluidos incompresibles y newtonianos. Incompresibles porque la densidad material en una parcela de fluido es constante, o lo que es equivalente: su campo de velocidades satisface la ecuación (2.2). Son newtonianos

porque la razón de deformación es lineal respecto del esfuerzo viscoso ejercido sobre el fluido. Esta última restricción corresponde a la ley constitutiva denominada ley de viscosidad de Newton [29]. De la segunda ley de Newton, y su ley de viscosidad, se deriva la ecuación de Navier-Stokes (2.1) para el campo de velocidades euleriano \mathbf{v} de un fluido incompresible, newtoniano y homogéneo, mientras que a partir de la conservación de masa, se deduce la ecuación de continuidad (2.2),

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

Aquí $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática con μ la viscosidad dinámica y ρ la densidad del fluido, p es la presión (un campo escalar), y \mathbf{f} el campo de fuerzas externas. La ecuación (2.1) describe la dinámica del campo de velocidades, determinada por el término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ responsable de las interacciones no-lineales, el término de esfuerzos viscosos $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ encargado de la difusión del campo de velocidades, más los términos de presión y fuerzas externas.

La ecuación de Navier-Stokes tiene la particularidad de que puede ser adimensionalizada dividiendo por escalas características del sistema de longitud (L), velocidad (U) y tiempo (T), quedando expresada solamente en función de un parámetro adimensional, el número de Reynolds, definido como

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}. \quad (2.3)$$

El número de Reynolds es la razón entre las fuerzas viscosas e inerciales, siendo estas últimas las fuerzas que surgen del movimiento interno relativo debido a las diferentes velocidades de elementos de fluido. Pero el movimiento relativo entre capas del fluido también genera rozamiento, factor importante en el desarrollo de la turbulencia. Así, los efectos inerciales son inhibidos por los efectos viscosos, que progresivamente absorben más energía cinética a medida que se aumenta la viscosidad del fluido (o se disminuye la escala de excitación), suavizan los gradientes de velocidades y evitan la mezcla rápida entre capas de fluido. De esta forma, el número de Reynolds permite diferenciar entre los dos principales regímenes dinámicos de un fluido:

- **Régimen laminar:** ocurre a bajos números de Reynolds ($Re \lesssim \mathcal{O}(1)$), cuando dominan los esfuerzos viscosos y se caracteriza por un flujo suave.
- **Régimen turbulento:** ocurre en presencia de una inestabilidad a números de Reynolds altos ($Re \gg \mathcal{O}(1)$), cuando dominan las fuerzas inerciales que tienden a producir vórtices, remolinos caóticos y otras inestabilidades secundarias en el flujo.

En este último régimen domina el término no-lineal de la ecuación de Navier-Stokes, encargado de redistribuir la energía entre las distintas escalas de movimiento, como podrían ser remolinos de distintos tamaños, sin afectar el balance de energía total del sistema [36]. En turbulencia isotrópica y homogénea la transferencia de energía se realiza desde escalas grandes hacia escalas cada vez más pequeñas, en un proceso que se denomina *cascada de energía*.

2.1.1. Condiciones de contorno periódicas

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario explicitar las condiciones de contorno (*cdc*). Con el fin de facilitar el estudio teórico resulta útil eliminar las *cdc* considerando que el fluido llena todo el volumen en \mathbb{R}^3 . Esto conlleva a dificultades en la resolución numérica del problema, y por esto se consideran entonces *cdc* periódicas sobre el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}(x + nL, y + mL, z + qL) = \mathbf{v}(x, y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \forall n, m, q \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

donde L es el período del dominio espacial. Tomando el límite $L \rightarrow \infty$ se recupera el caso del fluido en el espacio \mathbb{R}^3 sin contornos [36]. Considerando *cdc* periódicas, y tomando el rotor de (2.1), con $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (ec. (2.2)), es posible eliminar la presión de las ecuaciones de Navier-Stokes y obtener la ecuación para la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ del fluido,

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2.5)$$

donde la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$, que también será periódica en el dominio, se define como el rotor del campo de velocidades,

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

2.1.2. Leyes de conservación

En los sistemas mecánicos conservativos descritos por una función Lagrangiana, las simetrías se relacionan con cantidades conservadas. El teorema de Noether (1918) enuncia que por cada simetría del sistema, existirá una ley de conservación asociada. La ecuación de Navier-Stokes es disipativa, sin embargo permite la existencia de leyes de conservación. Para estudiar las ecuaciones de balance de donde se deducirán las conservaciones, es necesario primero definir los valores medios de cantidades físicas que serán utilizados a lo largo del trabajo.

Valores medios y teoremas ergódicos

Asumiendo *cdc* periódicas se define el valor medio espacial de una función periódica arbitraria $f(\mathbf{r})$ como

$$\langle f \rangle_{\mathbf{X}} \equiv \frac{1}{L^3} \int_{B_L} f(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.7)$$

donde L es el período de la caja. En esta tesis, cuando se obvие escribir explícitamente el subíndice \mathbf{X} , se debe asumir que se está haciendo referencia al valor medio espacial, calculado sobre el dominio que corresponda según el caso. Para funciones del tiempo $f(t)$, a lo largo de la tesis también se considerará el valor medio temporal

$$\langle f \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_f} f(t) dt, \quad (2.8)$$

definido en una ventana temporal $t \in [t_0, t_f]$, con $T = t_f - t_0$ el ancho de la misma.

Considerando a la velocidad como una variable aleatoria, el teorema ergódico de Birkhoff nos permitirá utilizar los valores medios temporales o espaciales de cantidades físicas para comparar con los valores medios estadísticos con los que trata la teoría de turbulencia [36].

Conservaciones

A continuación se presentan las principales ecuaciones de balance para un fluido barotrópico incompresible [36]. Es evidente que las ecuaciones de balance de energía y helicidad se transformarán en ecuaciones de conservación en caso de que se anule la viscosidad.

Estas ecuaciones en ausencia de fuerzas externas son, la conservación del impulso

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (2.9)$$

la ecuación de balance de la energía cinética

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \nu \left\langle \sum_{ij} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 \right\rangle = -\nu \langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle, \quad (2.10)$$

y la ecuación de balance de la helicidad

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle = -\nu \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} \rangle. \quad (2.11)$$

Se definen los valores medios de la energía cinética E_c , la enstrofía Ω_c , la helicidad H y la helicidad vortical H_ω como

$$E_c \equiv \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle, \quad (2.12a) \quad \Omega_c \equiv \left\langle \frac{\omega^2}{2} \right\rangle, \quad (2.12b)$$

$$H \equiv \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle, \quad (2.12c) \quad H_\omega \equiv \left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} \right\rangle \quad (2.12d)$$

Reescribiendo las ecuaciones de balance de energía media (2.10) y helicidad media (2.11) en función de las cantidades definidas anteriormente, se vuelve evidente que Ω_c y H_ω determinan la tasa de decaimiento de E_c y H respectivamente

$$\frac{dE_c}{dt} = -2\nu\Omega_c, \quad (2.13a) \quad \frac{dH}{dt} = -2\nu H_\omega. \quad (2.13b)$$

La disipación media de energía por unidad de masa

$$\varepsilon \equiv -\frac{dE_c}{dt} = 2\nu\Omega_c \quad (2.14)$$

será frecuentemente utilizada en el resto del trabajo. En adelante, se obviará especificar que E_c , Ω_c , H y H_ω son valores medios.

2.1.3. Escalas características de energía

Las ecuaciones de balance de la sección anterior no contienen contribuciones del término no-lineal de la ecuación de Navier-Stokes. Es entonces que naturalmente surge la pregunta de ¿cuál es el rol de ese término en relación a la energía? Estudiando el espectro de energía se ve que el término no-lineal es el encargado de redistribuir la energía entre múltiples escalas de movimiento, sin modificar la energía total del sistema.

Para analizar cómo es el proceso de redistribución de energía escala por escala, resulta útil estudiar la dinámica del sistema en el espacio de Fourier. Con ese fin, se definen los filtros *pasa-altos* y *pasa-bajos* de una función [36], que respectivamente atenúan las componentes espectrales de una función por debajo y por encima de un dado número de onda $K > 0$ asociado a una escala espacial $l = 2\pi/K$. Dada una función L -periódica, $f(\mathbf{r})$, y su descomposición de Fourier discreta

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3, \quad (2.15)$$

se definen la función *pasa-bajos-filtrada* como

$$f_K^<(\mathbf{r}) \equiv \sum_{\mathbf{k} \leq K} \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.16)$$

y la función *pasa-altos-filtrada*

$$f_K^>(\mathbf{r}) \equiv \sum_{k \geq K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.17)$$

la escala espacial $l = 2\pi/K$ se denominará la escala del filtrado. Sumando las dos funciones filtradas, se recupera la función original: $f(\mathbf{r}) = f_K^<(\mathbf{r}) + f_K^>(\mathbf{r})$. Esta descomposición puede ser aplicada al campo de velocidades en la ecuación de Navier-Stokes obteniendo dos funciones $\mathbf{v}_K^<(\mathbf{r})$ y $\mathbf{v}_K^>(\mathbf{r})$. Estas se interpretan como los campos de velocidades de remolinos en escalas respectivamente mayores y menores a l .

Empleando la identidad de Parseval,

$$\langle fg \rangle = \sum_k \hat{f}_k \hat{g}_{-k}, \quad (2.18)$$

se deduce la ecuación de balance de energía escala por escala [36]

$$\partial_t \mathcal{E}_K + \Pi_K = -2\nu\Omega_K + \mathcal{F}_K, \quad (2.19)$$

donde se introdujo la energía acumulada entre los números de onda 0 y K

$$\mathcal{E}_K \equiv \frac{1}{2} \langle |\mathbf{v}_K^<|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} k^2 |\hat{\mathbf{v}}_k|^2, \quad (2.20)$$

la enstrofía acumulada

$$\Omega_K \equiv \frac{1}{2} \langle |\boldsymbol{\omega}_K^<|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} k^2 |\hat{\boldsymbol{\omega}}_k|^2, \quad (2.21)$$

la inyección de energía acumulada inyectada por la fuerza externa f

$$\mathcal{F}_K \equiv \langle \mathbf{f}_K^< \cdot \mathbf{v}_K^< \rangle = \sum_{k \leq K} \hat{\mathbf{f}}_k \cdot |\hat{\mathbf{v}}_{-k}|^2, \quad (2.22)$$

y el flujo de energía a través del número de onda K

$$\begin{aligned} \Pi_K &\equiv \langle \mathbf{v}_K^< \cdot [(\mathbf{v}_K^< + \mathbf{v}_K^>) \cdot \nabla (\mathbf{v}_K^< + \mathbf{v}_K^>)] \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_K^< \cdot [\mathbf{v}_K^< \cdot \nabla \mathbf{v}_K^>] \rangle + \langle \mathbf{v}_K^< \cdot [\mathbf{v}_K^> \cdot \nabla \mathbf{v}_K^>] \rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde la segunda igualdad proviene de expandir el producto en la primer línea, y ver que $\langle \mathbf{v}_K^< \cdot (\mathbf{v}_K^< \cdot \nabla \mathbf{v}_K^<) \rangle = \langle \mathbf{v}_K^< \cdot (\mathbf{v}_K^> \cdot \nabla \mathbf{v}_K^<) \rangle = 0$. La ecuación de balance (2.19) puede ser interpretada como que la tasa de variación de la energía acumulada entre las escalas espaciales $l \sim K^{-1}$ e ∞ (es decir, respectivamente entre los números de

onda K y 0) es igual a la energía inyectada en esas escalas por la fuerza externa (\mathcal{F}_K), menos la energía disipada en esas escalas ($2\nu\Omega_K$) y menos el flujo de energía (Π_K) disipada en escalas más pequeñas (o lo que es lo mismo, en números de onda mayores que K) debido a interacciones no-lineales. En otras palabras, la energía inyectada en las escalas grandes y que no es disipada en esas escalas (un efecto despreciable para números de Reynolds muy grandes), debe ser transferida hacia escalas más pequeñas por el término no-lineal.

2.1.4. Espectro espacio-temporal

A partir de la energía acumulada en la ecuación (2.20) en su versión continua, se define el espectro de energía en el dominio espacial

$$E(k) \equiv \frac{d\mathcal{E}(k)}{dk}. \quad (2.24)$$

De la misma forma que en el dominio espacial, es posible estudiar los espectros y flujos de energía en el dominio temporal. Conociendo la energía media en cada instante, $E(t) = \langle E(\mathbf{r}, t) \rangle$ se puede obtener el espectro de energía en el dominio temporal

$$E(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\sigma t} dt, \quad (2.25)$$

donde σ es la frecuencia angular. Considerando los dos dominios, es posible construir el espectro de energía espacio-temporal [27]

$$E(\mathbf{k}, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \sigma t)} dt d^3r, \quad (2.26)$$

que será estudiado con profundidad en §4.3.3 para los flujos simulados.

2.1.5. Espectros reducidos

La estratificación y rotación de los sistemas considerados en esta tesis introducirá una anisotropía en la distribución de la energía, y de otras cantidades físicas en general. Es por eso que se considerará un eje privilegiado en $\hat{\mathbf{e}}_z$, paralelo al eje de rotación y a la dirección del gradiente de densidad. Al introducir este eje privilegiado, el sistema pasa de tener una simetría esférica en el espacio de Fourier, a una simetría cilíndrica. Esta nueva simetría motiva un cambio de variables esféricas por variables axisimétricas a la hora de construir los espectros. A partir de la función de autocorrelación de la velocidad $U_{ij}(\mathbf{k})$ escrita en el espacio de Fourier,

y con la suposición de homogeneidad (pero no isotropía), es posible definir varios sub-espectros para contemplar las variaciones angulares del mismo. Considerando la traza del tensor $U(\mathbf{k}) = U_{ii}(\mathbf{k})$ se define el espectro de energía axisimétrico en coordenadas Cartesianas

$$E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \equiv \sum_{\substack{k_{\perp} \leq |\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_z| < k_{\perp} + 1, \\ k_{\parallel} \leq k_z \leq k_{\parallel} + 1}} U(\mathbf{k}) = \int_0^{\pi} U(\mathbf{k}) |\mathbf{k}| \sin \theta \, d\phi, \quad (2.27)$$

donde θ es el ángulo zenital en el espacio de Fourier respecto al eje vertical con vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_z$, ϕ el ángulo azimutal respecto al eje x , $\mathbf{k}_{\perp} = k_x \hat{\mathbf{e}}_x + k_y \hat{\mathbf{e}}_y$ y $\mathbf{k}_{\parallel} = k_z \hat{\mathbf{e}}_z$ [71]. El espectro axisimétrico también puede ser expresado en términos de coordenadas polares $E(|\mathbf{k}|, \theta)$, con $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{e}}_x + k_y \hat{\mathbf{e}}_y + k_z \hat{\mathbf{e}}_z$. La primera definición en la ecuación (2.27), que involucra una suma doble, es la expresión discreta utilizada en simulaciones y que corresponde a contar energía en todos los modos con igual k_{\parallel} y k_{\perp} (en cáscaras de ancho unitario), pero con distintos valores de ϕ . Los factores geométricos en la integral provenientes del Jacobiano quedan automáticamente considerados en las sumas por la misma definición de k_{\perp} , y por el hecho de que el número de modos por cáscara varía con la distancia al origen. Los espectros para distintas variaciones angulares se obtienen de graficar $E(k, \theta)$ sobre una línea con θ fijo. Por ejemplo, $\theta = 0$ corresponde a $E(k_{\perp} = 0, k_{\parallel})$, mientras que $\theta = \pi/2$ corresponde a $E(k_{\perp}, k_{\parallel} = 0)$. Al graficar las curvas de nivel del espectro axisimétrico en los próximos capítulos, se incluye un factor $1/\sin \theta$ para recuperar curvas de nivel circulares en el caso completamente isótropo.

A partir del espectro axisimétrico, es posible definir los espectros de energía reducidos como función de k_{\perp} , k_{\parallel} y k :

$$E(k_{\perp}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \, dk_{\parallel}, \quad (2.28a) \quad E(k_{\parallel}) = \int_0^{+\infty} E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \, dk_{\perp}, \quad (2.28b)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi} E(k, \theta) k \, d\theta. \quad (2.29)$$

Por último, notar que es posible considerar por separado las distintas contribuciones de las componentes del campo de velocidad a la energía cinética. Con este fin, se utilizarán las siguientes notaciones para referirse respectivamente a la energía perpendicular y paralela:

$$E^{k_{\perp}}(k_i) = \frac{1}{2} [|\hat{v}_x|^2(k_i) + |\hat{v}_y|^2(k_i)], \quad (2.30a) \quad E^{k_{\parallel}}(k_i) = \frac{1}{2} |\hat{v}_z|^2(k_i), \quad (2.30b)$$

donde k_i puede referirse a k , k_{\perp} o k_{\parallel} . En la misma línea, se definen los flujos de energía reducidos

$$\Pi(K_{\perp}) = \langle \mathbf{v}_{K_{\perp}}^{\leftarrow} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] \rangle, \quad (2.31a) \quad \Pi(K_{\parallel}) = \langle \mathbf{v}_{K_{\parallel}}^{\leftarrow} \cdot [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] \rangle. \quad (2.31b)$$

Estas magnitudes corresponden respectivamente al flujo de energía cinética hacia afuera de los cilindros $k_{\perp} = K_{\perp}$ (ec. (2.31a)) y hacia afuera de los planos horizontales $k_z = \pm K_z$ (ec. (2.31b)).

2.2. Teoría de Kolmogorov (K41)

Los flujos turbulentos son sistemas caóticos, descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineal (Navier-Stokes), altamente sensibles a las condiciones iniciales. La observación de estos flujos pone en evidencia la impredecibilidad de los detalles en su dinámica. Sin embargo, es afortunado que muchas de sus propiedades estadísticas sí son reproducibles. Este tipo de observaciones motivó la búsqueda de una descripción probabilística de la turbulencia a principios del siglo XX (Taylor [95, 97]).

2.2.1. Observaciones experimentales

Las siguientes son leyes empíricas que se observaron en experimentos de turbulencia completamente desarrollada. Cualquier teoría de la turbulencia debiera incluir estas leyes ya sea dentro de sus hipótesis, o de sus resultados.

1. **Ley de los 2/3.** En un fluido turbulento con número de Reynolds muy alto, el valor medio del cuadrado del incremento de velocidad $\langle [\delta v(l)]^2 \rangle \equiv \langle [v(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - v(\mathbf{x})]^2 \rangle_{\mathbf{x}}$ (donde v es la proyección de la velocidad en la dirección del incremento \mathbf{l}), entre dos puntos separados por una distancia l , sigue aproximadamente una ley de potencias: $\langle [\delta v(l)]^2 \rangle \sim l^{2/3}$.
2. **Ley de la disipación finita de energía.** Si en un flujo turbulento todos los parámetros de control se mantienen iguales, excepto por la viscosidad que se reduce al mínimo posible, la tasa de energía disipada por unidad de masa $-dE/dt$ se comporta de un modo consistente con un límite positivo y finito.

Actualmente no existe una teoría completa que parta de la ecuación de Navier-Stokes y lleve a las dos leyes experimentales anteriores. Sin embargo, es posible formular hipótesis compatibles con estas leyes, que lleven a la ley de los 2/3 y a predicciones adicionales. Con este fin, en 1941 Kolmogorov presentó la teoría (K41) que describe las leyes de escala de la turbulencia isótropa, homogénea y completamente desarrollada [46, 47, 48]. Esta servirá como base para luego introducir la teoría de turbulencia rotante y estratificada.

2.2.2. Hipótesis de la teoría K41

El modelo de Kolmogorov para turbulencia isotrópica, homogénea y completamente desarrollada requiere de tres hipótesis, reformuladas por Frisch [36] de una forma más clara que en la formulación original de Kolmogorov:

1. **Hipótesis de universalidad:** En el límite de $Re \rightarrow \infty$, a pequeñas escalas ($l \ll l_0$, donde l_0 es la escala integral) y lejos de los contornos del sistema, todas las simetrías posibles de la ecuación de Navier-Stokes, usualmente rotas por los mecanismos forzantes que producen la turbulencia, son restauradas en un sentido estadístico.
2. **Auto-similaridad del flujo:** Bajo las mismas hipótesis que en (1), el flujo turbulento es auto-similar a pequeñas escalas. Esto quiere decir que dentro del rango inercial, las propiedades del flujo serán invariantes ante cambios de escala, a menos de un factor de escala con un único exponente de escala $h \in \mathbb{R}$. La auto-similaridad se puede escribir matemáticamente en función de los incrementos de velocidad como

$$\delta v(\lambda l) = \lambda^h \delta v(l), \quad (2.32)$$

con incrementos l y λl pequeños en comparación con la escala integral l_0

3. **Disipación de energía finita:** Bajo las mismas hipótesis que en (1), el flujo turbulento tiene una tasa media de disipación de energía ε finita y no-nula.

Notar que en las tres hipótesis se considera que $Re \rightarrow \infty$, lo que implica que la viscosidad $\nu \rightarrow 0$. De la ecuación (2.10) se sigue entonces que para que ε se mantenga finito en este límite, algunas de las derivadas del campo de velocidad \mathbf{v} deben ser no acotadas.

En un flujo turbulento, isotrópico y homogéneo, la viscosidad es despreciable en escalas grandes e intermedias. La energía se inyecta en el sistema por un forzante en una determinada escala de movimiento, como podría ser l_F , el tamaño de unas paletas que agitan el fluido. Este forzado generará vórtices de este tamaño característico. Es posible que el flujo sea anisótropo a estas escalas, debido a una anisotropía en el forzado o los contornos del sistema. Mediante interacciones no-lineales, estos vórtices transferirán su energía a remolinos más pequeños, que a su vez transferirán su energía a otros todavía más pequeños. A medida que se reduce la escala de los remolinos hay una pérdida en la información geométrica y direccional, estableciéndose una estadística isotrópica y universal para las pequeñas escalas. El proceso se repite iterativamente, hasta llegar a una escala tan pequeña que los

esfuerzos viscosos se vuelven dominantes, y terminan de disipar la energía cinética en forma de calor.

2.2.3. Escalas características de la turbulencia

En el breve resumen de la dinámica de un flujo turbulento descrito en el último párrafo se vuelve evidente la necesidad de definir tres escalas características:

1. **Escala integral** (l_0): En esta tesis se define como el promedio pesado por el espectro de energía de la inversa del número de onda k

$$l_0 = 2\pi \frac{\int_0^\infty k^{-1} E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}. \quad (2.33)$$

2. **Escala de inyección de energía** (l_F): Es la escala de movimiento en la cual el forzante introduce energía al sistema.
3. **Rango inercial** ($\eta \ll l \ll l_0$): Es el rango de escalas en el que tanto la inyección directa de energía por el forzante, como la disipación viscosa, son despreciables. Por eso, en el estado estacionario de un flujo, dentro de este rango la energía entrante se iguala a la energía saliente. En la ecuación de balance (2.19), esto se traduce como que el flujo de energía Π_k debe ser igual a la disipación de energía media ε definida en la ecuación (2.14), y debe ser independiente de k , siempre que k se encuentre en el rango inercial.
4. **Escala de disipación de energía** (η): Es la escala en la que la viscosidad se vuelve dominante. Aquí es donde la energía cinética se disipará en forma de calor mediante la acción de los esfuerzos viscosos.

La transferencia de energía de vórtices grandes a pequeños en un flujo turbulento fue modelada por primera vez en 1922 por Richardson [83]. Este modelo brinda también una forma rápida, basada en el análisis dimensional, de construir la teoría K41 [29]. Antes de presentarlo definamos algunas cantidades relevantes. La velocidad característica v_l es la velocidad típica asociada a la escala $\sim l$. Se puede considerar una definición pragmática como

$$v_l \sim \sqrt{\langle \delta v^2(l) \rangle}. \quad (2.34)$$

El *tiempo no-lineal* $\tau_{NL}(l)$ es el tiempo de giro de un remolino de tamaño l . Además, es el tiempo típico en el que una estructura de tamaño $\sim l$ sufre una distorsión significativa debido al movimiento relativo de sus componentes. En base

a las hipótesis de K41, en el rango inercial solo puede depender de l y v_l , y entonces se define como

$$\tau_{NL}(l) \sim \frac{l}{v_l}. \quad (2.35)$$

Es razonable entonces que $\tau_{NL}(l)$ también sea el tiempo típico de transferencia de energía de escalas $\sim l$ a escalas menores. De aquí se estima que el flujo de energía Π_k (con $k \sim l^{-1}$) puede ser estimado como el cociente entre la energía cinética en esas escalas $\sim v_l^2$ y el tiempo característico de transferencia de energía a escalas menores $\tau_{NL}(l)$,

$$\Pi_l \sim \frac{v_l^2}{\tau_{NL}(l)} \sim \frac{v_l^3}{l}. \quad (2.36)$$

Por las hipótesis de K41, en el rango inercial el flujo de energía es independiente de l e igual a la disipación de energía media ε

$$\Pi_l \sim \frac{v_l^3}{l} \sim \varepsilon. \quad (2.37)$$

Luego, el campo de velocidades sigue una ley de escalas con exponente 1/3

$$v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}. \quad (2.38)$$

Por otro lado, el tiempo no-lineal también es un invariante de escala $\tau_{NL}(l) \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}$.

Reemplazando l y v_l por las cantidades características de la escala integral l_0 y v_0 , se encuentra que la tasa de disipación escala como $\varepsilon \sim v_0^3/l_0$. Ahora, considerando el otro extremo del rango inercial, donde la viscosidad se vuelve relevante, el tiempo característico para que la difusión viscosa atenúe excitaciones en escalas $\sim l$ es

$$\tau_{\text{dif}}(l) \sim \frac{l^2}{\nu}, \quad (2.39)$$

que tiende a cero con l de forma mucho más rápida que $\tau_{NL}(l)$. Igualando $\tau_{NL}(l)$ con $\tau_{\text{dif}}(l)$ se obtiene la escala disipativa de Kolmogorov η debajo de la cual la difusión viscosa se vuelve dominante

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (2.40)$$

notar que esta escala crece con la viscosidad como $\nu^{3/4}$. Esta escala será muy importante para elegir correctamente la viscosidad en las simulaciones numéricas.

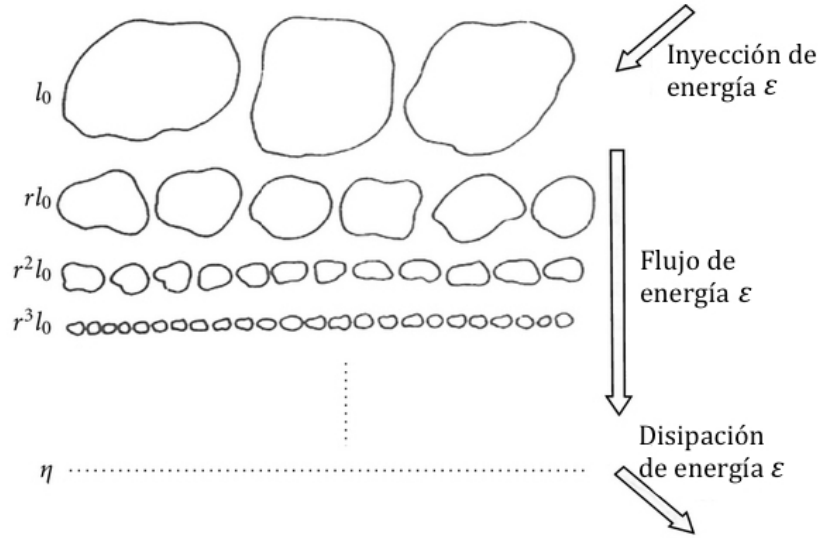


Figura 2.1: Esquema de la cascada de energía del modelo de Richardson [35].

2.2.4. La cascada de Richardson

El modelo presentado en la sección anterior considera el flujo turbulento como una superposición de vórtices de variados tamaños, que se transfieren energía entre sí mediante interacciones no-lineales. Se encuentran representados pictóricamente en la figura 2.1, en la realidad los vórtices más pequeños se encuentran contenidos dentro de los mayores. Los vórtices de mayor tamaño son de la escala integral $\sim l_0$. Los vórtices sucesivamente más pequeños son de escala $l_n \sim l_0 q^n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $0 < q < 1$. Los vórtices más pequeños en la cascada están en la escala de disipación de Kolmogorov $\sim \eta$. La energía inyectada en las escalas mayores a una tasa ε (por unidad de masa) se transfiere hacia vórtices cada vez más pequeños, siempre a la misma tasa ε (de aquí el nombre de “cascada” de energía), hasta ser finalmente removida por disipación en el fondo de la cascada, nuevamente a una tasa ε .

Además de la hipótesis de invariancia de escalas, esta teoría requiere **localidad de interacciones**. Esto quiere decir que en el rango inercial, el flujo en escalas $\sim l$ involucra predominantemente a escalas de tamaño comparable, por ejemplo desde ql hasta $q^{-1}l$. Por “localidad” entonces nos referimos a la localidad en el espacio de Fourier, pero no en el espacio físico.

Esta suposición puede ser justificada de dos formas. La primera es que la estructura fina de los vórtices pequeños no se ve afectada por el *barrido* uniforme producido por los vórtices de escalas mucho mayores. En otras palabras, los vórtices de escala l en el rango inercial contenidos dentro de los vórtices de mayor escala $\sim l_0$ son barridos uniformemente por estos últimos. El barrido de los vórtices puede ser pensado como una transformación Galileana aleatoria, transformación que man-

tiene invariante a la ecuación de Navier-Stokes [36]. Es por esto que la estructura fina de los vórtices de escala $\sim l$ no se ve afectada por el barrido uniforme. Veremos que esto no es necesariamente cierto en el caso rotante y estratificado.

El segundo argumento para justificar la localidad de interacciones es que la distorsión en vórtices producida por esfuerzos de cizalla, se debe predominantemente a esfuerzos de cizalla entre vórtices de escalas similares. Por análisis dimensional, la cizalla típica s_l asociada a una escala l dentro del rango inercial es

$$s_l \sim \frac{v_l}{l} \sim \varepsilon^{1/3} l^{-2/3}, \quad (2.41)$$

donde la última relación se obtiene reemplazando la ley de escalas que sigue el campo de velocidades en la ecuación (2.38). Es decir que la cizalla más débil ocurre en la escala integral $l \sim l_0$, mientras que la más intensa en la escala de disipación $l \sim \eta$. El efecto neto es que los únicos vórtices que producen una distorsión apreciable sobre los vórtices de escala l mediante esfuerzos de cizalla son los de escala $l' \sim l$. Este argumento fenomenológico solo vale en el límite de Reynolds tendiendo a infinito, mientras que para Reynolds finito las interacciones no-locales dan correcciones que deben ser tenidas en cuenta [70].

2.2.5. Principales resultados de la teoría K41

A continuación se presentan algunos de los principales resultados de la teoría de Kolmogorov para turbulencia isótropa y homogénea (K41).

Ley de los 2/3 e invariancia de escala

En la sección anterior vimos que en el rango inercial de un flujo turbulento, el incremento de la velocidad cumple

$$\langle \delta v(l) \rangle \sim l^{1/3}. \quad (2.42)$$

Es interesante notar que esta ley vale para los incrementos de las componentes de la velocidad, independientemente de la isotropía del flujo [64]. De la hipótesis de auto-similaridad se deduce que el incremento de la velocidad elevado a la potencia p , (llamada también la función de estructura de orden p) debe satisfacer

$$\langle [\delta v(l)]^p \rangle \propto l^{p/3}. \quad (2.43)$$

Luego, como por las hipótesis de Komogorov $\langle [\delta v(l)]^p \rangle$ debe depender únicamen-

te de ε y l en el rango inercial, por análisis dimensional

$$\langle [\delta v(l)]^p \rangle = C_p \varepsilon^{p/3} l^{p/3}, \quad (2.44)$$

donde C_p representa una constante universal. Reemplazando $p = 2$ en la relación anterior, se obtiene la ley de los 2/3, con C_2 la denominada constante universal de Kolmogorov. La “universalidad” de esta constante está soportada por abundante evidencia experimental en números de Reynolds de microescala suficientemente altos, arrojando un valor aproximado de $C_2 \approx 0,5$ [93]. Análogamente con $p = 3$ y $C_3 = -4/5$ se obtiene la llamada “ley de los 4/5” de Kolmogorov.

Estríctamente hablando, la hipótesis de auto-similaridad de Kolmogorov es demasiado fuerte, y hoy existe evidencia experimental [63] que muestra que la ecuación (2.44) da una buena aproximación a los datos para $p \leq 3$, pero se desvía de los experimentos para valores mayores de p .

Espectro de Kolmogorov

La ley de potencias para el espectro de energía $E(k)$ con exponente $-5/3$ para flujos turbulentos isótropos y homogéneos es uno de los resultados más conocidos de la teoría de Kolmogorov. A continuación se deriva esta ley. Asumiendo que el espectro de energía, definido en la ecuación (2.24), sigue una ley de potencias

$$E(k) \propto k^{-n}, \quad 1 < n < 3, \quad (2.45)$$

y empleando el teorema de Wiener-Khinchin, que relaciona el espectro con la función de correlación [36], se deduce que el campo de velocidades tiene incrementos cuadráticos homogéneos, y la función de estructura de segundo orden también sigue una ley de potencias,

$$\langle [\delta v(l)]^2 \rangle \propto l^{n-1}. \quad (2.46)$$

La restricción matemática de que $1 < n < 3$ se impone para evitar divergencias al integrar $E(k)$ entre $k = 0$ y $+\infty$. Esto es, una divergencia para números de onda altos (divergencia ultravioleta) en el caso de que $n < 1$, o para números de onda bajos (divergencia infrarroja) si $n > 3$.

Usando la ley de los 2/3 que se obtiene de la ecuación (2.44) para $p = 2$, n queda determinado en $n = 5/3$. Reemplazando en la ecuación (2.45) se deduce el famoso espectro de Kolmogorov

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.47)$$

2.3. Turbulencia en flujos geofísicos

La dinámica de la atmósfera y del océano está influenciada por la estratificación estable de densidad y por la rotación de la Tierra, con una importancia que varía según la escala estudiada. En las escalas geofísicas más grandes, en las que los números de Rossby (Ro) y Froude (Fr) son pequeños (estos son, respectivamente, medidas inversas de la importancia de la rotación y estratificación del sistema), tanto la rotación como la estratificación son importantes. A medida que se consideran escalas más pequeñas se reduce la influencia de la rotación y estratificación. Según la visión clásica, la rotación se debilita de forma más rápida que la estratificación, pues $N_{bv}/f \sim \mathcal{O}(100)$ en la mayor parte de la atmósfera y los océanos (donde N_{bv} , la *frecuencia de Brunt-Väisälä*, es una medida de la estratificación, y $f = 2\Omega$, el *parámetro de Coriolis*, el doble de la frecuencia angular de rotación de la Tierra. La mesoescala atmosférica (escalas horizontales de $\mathcal{O}(1)$ km – $\mathcal{O}(100)$ km) y la submesoescala oceánica ($\mathcal{O}(10)$ m – $\mathcal{O}(10)$ km) se caracterizan por una fuerte estratificación con rotación moderada ($Ro \gtrsim 1$; ver [30]). Es por esto que la turbulencia estratificada ($Ro = \infty$) suele considerarse como una primer aproximación a este régimen. Sin embargo, esto no es cierto en escalas grandes en la atmósfera, y en regiones de los océanos donde N_{bv}/f puede variar entre 1 y 10.

Lindborg [57] realizó simulaciones numéricas para intentar comprender el efecto de la rotación sobre flujos estratificados y el espectro $\sim k_{\perp}^{-5/3}$ observado en la cascada directa en la mesoescala atmosférica. Waite y Bartello [102] también simularon sistemas fuertemente estratificados con rotación variable, dominados por movimientos vorticales, en un amplio rango de números de Rossby, limitándose a sistemas dominados por vorticidad potencial. En esta tesis también se trabaja con sistemas dominados por la vorticidad potencial, pero en contraste, se fija la rotación del sistema para unos pocos valores de f , y barriendo el parámetro N_{bv} se varía el grado de estratificación, para estudiar cómo los parámetros N_{bv} y N_{bv}/f influyen a los espectros y estructuras características del sistema.

2.4. Turbulencia estratificada

A continuación se describirá brevemente la dinámica y algunos resultados principales de un flujo con densidad uniformemente estratificada. El gradiente de densidad introducido proveerá la fuerza restitutiva que dará lugar a un tipo de ondas que surge en flujos estratificados: las ondas de gravedad internas.

2.4.1. Ecuaciones de Boussinesq

Se considera un fluido uniformemente estratificado e incompresible sujeto a pequeñas perturbaciones en densidad. En el estado de equilibrio, la densidad y la presión varían según

$$\rho_0 = \bar{\rho} + \Delta\rho_0(z) = \bar{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz}z, \quad (2.48)$$

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g} = -\rho_0 g \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.49)$$

donde \mathbf{g} es la aceleración gravitacional, y $d\rho_0/dz < 0$ para asegurar estabilidad. La densidad media, $\bar{\rho}$, y el gradiente de densidad, $d\rho_0/dz$, son ambas constantes. Bajo una perturbación del fluido, la densidad se describe como

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(z) + \rho'(\mathbf{r}), \quad (2.50)$$

con ρ' la fluctuación en densidad producida. Se adopta la aproximación de Boussinesq [14] en la que se asumen pequeñas perturbaciones y gradientes de densidad respecto a la media: $\Delta\rho_0, \rho' \ll \bar{\rho}$, y donde las únicas contribuciones de $\Delta\rho$ y ρ' apreciables son las que aparecen en la fuerza de empuje $\rho\mathbf{g} = -\rho_0 g \hat{\mathbf{e}}_z$. A partir de la ecuación de incompresibilidad, de continuidad y del impulso, y empleando la aproximación de Boussinesq junto con las expresiones para la densidad (2.48) y el gradiente de la presión (2.49), se deducen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del fluido [29]

$$\frac{D\rho'}{Dt} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad (2.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.52)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p^* + \rho' \mathbf{g} + \bar{\rho} \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.53)$$

donde $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es la derivada material y $p^* \equiv p - p_0$ representa el desvío de la presión hidrostática; en adelante, cuando se trate de sistemas estratificados se hará referencia a esta simplemente como p . La ecuación de vorticidad asociada

a (2.53) es

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla(\rho'/\bar{\rho}) \times \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.54)$$

Notar que en la ecuación (2.54) no aparece la presión. La estratificación introduce una dirección privilegiada en $\hat{\mathbf{e}}_z$ y rompe la isotropía del sistema. Se introduce la *frecuencia de Brunt-Väisälä*, N_{bv} , que da una medida de la fuerza restitutiva,

$$N_{bv}^2 \equiv -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho_0}{dz}. \quad (2.55)$$

La frecuencia de las ondas de gravedad que ocurren en fluidos estratificados será de orden N_{bv} . De hecho, en la aproximación lineal de las ecuaciones dinámicas (2.51-2.53), N_{bv} es exactamente la frecuencia de las ondas de gravedad.

El número adimensional de Froude, Fr , que da una medida de la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas de empuje en el fluido, se define como

$$Fr \equiv \frac{U}{N_{bv} L}, \quad (2.56)$$

donde U es la velocidad característica del flujo, y L es la longitud característica del flujo que se considerará como la escala integral definida en la ecuación (2.33). Existe una ambigüedad en la elección de estas dos cantidades, pues el fluido es anisótropo en el caso de estratificación fuerte ($Fr \ll 1$), distinguiendo entre la dirección paralela a $\hat{\mathbf{e}}_z$ y las direcciones perpendiculares a $\hat{\mathbf{e}}_z$. Esta ambigüedad motiva definir los números de Froude direccionales perpendicular y paralelo,

$$Fr_{\perp} \equiv \frac{U}{N_{bv} L_{\perp}}, \quad (2.57a) \quad Fr_{\parallel} \equiv \frac{U}{N_{bv} L_{\parallel}}, \quad (2.57b)$$

donde L_{\perp} y L_{\parallel} son las escalas integrales perpendicular y paralela, respectivamente definidas como

$$L_{\perp} \equiv 2\pi \frac{\int_1^{k_{\max}} k_{\perp}^{-1} E(k_{\perp}) dk_{\perp}}{\int_1^{k_{\max}} E(k_{\perp}) dk_{\perp}}, \quad (2.58a) \quad L_{\parallel} \equiv 2\pi \frac{\int_1^{k_{\max}} k_{\parallel}^{-1} E(k_{\parallel}) dk_{\parallel}}{\int_1^{k_{\max}} E(k_{\parallel}) dk_{\parallel}}. \quad (2.58b)$$

La cantidad L_{\perp} definida en la ecuación (2.58a) es un promedio de $k_{\perp}^{-1} \sim l_{\perp}$ pesado por el espectro reducido perpendicular $E(k_{\perp})$. De esta forma, L_{\perp} da una noción de la escala en la que en promedio se encuentra la energía en el plano perpendicular. La misma interpretación vale para L_{\parallel} a lo largo del eje vertical en la ecuación (2.58b).

En el régimen de $Fr \ll 1$, no es difícil ver intuitivamente que como consecuencia de la mayor fuerza restitutiva en z , se tiene que $U_{\parallel} \ll U_{\perp}$, donde U_{\parallel} y U_{\perp} son las velocidades características en dirección paralela y perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_z$ respectivamente.

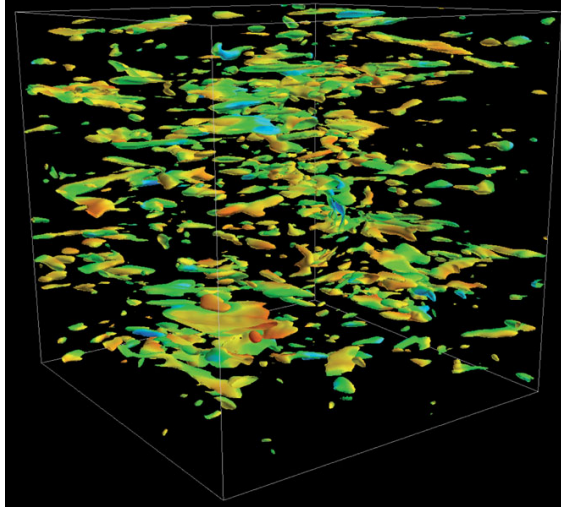


Figura 2.2: Superficies de enstrofía constante en turbulencia rotante y estratificada en decaimiento, con estratificación dominante: $N_{bv}/f = 10$. Notar la estructura de capas o estratos, con regiones de alta vorticidad en forma de panqueques. La figura es una adaptación de Liechtenstein y otros, 2005 [54].

La ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ sugiere que $U_{\parallel}/L_{\parallel} \sim U_{\perp}/L_{\perp}$, lo que implica que $L_{\parallel} \ll L_{\perp}$. En el caso de un flujo poco viscoso y estacionario, con $Fr \ll 1$, el flujo tomará la forma de una pila de movimientos cuasi-bidimensionales apilados uno encima del otro, en una estructura de capas como se observa en la figura 2.2.

Además se define el número de Reynolds de flotación [16],

$$Re_b \equiv \frac{\varepsilon}{\nu N_{bv}^2}, \quad (2.59)$$

que distingue entre dos regímenes en turbulencia estratificada. Para $Re_b \gg 1$, los esfuerzos viscosos se vuelven despreciables, y L_{\parallel} escala como $L_{\parallel} \sim U/N_{bv}$, de tal forma que la dinámica es inherentemente tridimensional, pero fuertemente anisótropa. Cuando $Re_b \ll 1$, la cizalla vertical se vuelve relevante, por lo que $L_{\parallel} \sim L_{\parallel}/Re^{1/2}$. En esta tesis se utilizará la definición (2.59) para el número de Reynolds de flotación, pero también se suele definir como $\varepsilon/(\nu N_{bv})$ [91], o en función de las escalas integrales vertical y perpendicular como $Re(L_{\perp}/L_{\parallel})$ [6].

2.4.2. Ondas de gravedad internas

La estratificación de un fluido aporta la fuerza restitutiva necesaria para que se produzcan las ondas de gravedad internas. Estas se describen en más detalle a continuación. Por simplicidad, el análisis se restringe a flujos inviscidos, en un dominio infinito, con estratificación uniforme. Linealizando las ecuaciones (2.51) y (2.54), se obtienen ecuaciones para la densidad y vorticidad. En estas se observa

que las ondas de gravedad no permiten el transporte de la componente vertical de la vorticidad, aunque sí de la energía e impulso. Derivando respecto al tiempo, tomando el rotor y quedándose con la componente z de la ecuación, se obtiene

$$\partial_t^2(\nabla^2 v_z) + N_{bv}^2 \nabla_{\perp}^2 v_z = 0, \quad (2.60)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$. La ecuación (2.60) permite la existencia de ondas anisótropas y dispersivas denominadas ondas de gravedad internas. Proponiendo una solución de onda plana $v_z = |v_z| \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \sigma_G t)]$ se obtiene la relación de dispersión para la frecuencia angular σ_G ,

$$\sigma_G = N_{bv} \frac{k_{\perp}}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.61)$$

con \mathbf{k}_{\perp} y \mathbf{k}_{\parallel} definidas en §2.1.5. La velocidades de fase y grupo son respectivamente

$$\mathbf{c}_f^{(G)} = N_{bv} \frac{k_{\perp} \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^3}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{c}_g^{(G)} = N_{bv} \frac{(k_{\parallel}^2 \mathbf{k}_{\perp} - k_{\perp}^2 \mathbf{k}_{\parallel})}{|\mathbf{k}|^3 k_{\perp}}. \quad (2.63)$$

En las expresiones anteriores se evidencia que la frecuencia σ_G es nula cuando \mathbf{k} es vertical, mientras que es máxima e igual a N_{bv} cuando \mathbf{k} es horizontal. Además, la velocidad de grupo es perpendicular a la velocidad de fase, es decir que la energía viaja en dirección perpendicular a la dirección de propagación aparente de los frentes de onda. Las ondas de baja frecuencia ($\sigma_G \approx 0$) tienen vector de onda vertical ($\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_{\parallel}$), y son las que mejor dispersan energía ya que tienen máxima velocidad de grupo. Por otro lado, las ondas de alta frecuencia ($\sigma_G \approx N_{bv}$) tienen vector de onda horizontal ($\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_{\perp}$), y no dispersan energía pues tienen velocidad de grupo nula. La mayor eficacia en la dispersión de energía por medio de ondas de gravedad en el plano horizontal respecto al vertical, explica en parte la formación de estructuras de capas horizontales en un flujo estratificado.

2.4.3. Algunos resultados previos

En la mesoescala atmosférica, donde domina la estratificación por encima de la rotación, pero el régimen dominante es cuasi-geostrófico y no dominado por ondas, se ha observado un espectro de energía compatible con la ley de potencias $E(k) \sim k^{-3}$ [74]. La teoría cuasi-geostrófica clásica fue formulada por Charney en 1971 [22]. Charney da un argumento fenomenológico que soporta la ley de potencias $\sim k^{-3}$, también observada en simulaciones numéricas [65, 10].

A medida que se aumenta el grado de estratificación, y se elimina del todo a la rotación, deja de valer la teoría cuasi-geostrófica. En este último régimen se ha

observado un espectro de energía perpendicular compatible con $E(k_\perp) \sim k_\perp^{-5/3}$ [74, 24], y simulaciones numéricas han generado resultados consistentes con esta ley de potencias cuando existen inestabilidades intensas en pequeñas escalas (la convección local) [85, 101, 57, 58]. Cuando la convección local se suprime por disipación, el espectro parecería volverse más empinado, hacia k_\perp^{-5} [52, 101]. Como ya se mencionó, la dinámica asintótica en el límite del movimiento vortical fuertemente estratificado consiste en capas de flujo cuasi-horizontal, desacopladas entre sí [84, 55]. Billiant y Chomaz [10] argumentan que en turbulencia estratificada, L_\parallel escala como U/N_{bv} , lo que sugiere que $Fr_\parallel \equiv 1$ a medida que $Fr_\perp \rightarrow 0$, y explica la relación de autosimilaridad observada para el espectro de energía cinética vertical $E_c(k_\parallel) \sim N_{bv}^2 k_\parallel^{-3}$. Este comportamiento fue verificado en simulaciones numéricas [101, 58], donde también se observó que el espectro paralelo $E(k_\parallel)$ es aproximadamente plano hasta $k_\parallel \sim N_{bv}/U$. Además, varios estudios de turbulencia estratificada forzada han encontrado una transferencia lenta y sistemática de energía hacia modos con velocidad horizontal uniforme y con cizalla vertical ($k_\perp = 0$) [90, 52, 101, 102].

En flujos estratificados dentro del rango inercial domina el espectro de energía paralelo $E_c(k_\parallel)$, frente al perpendicular $E_c(k_\perp)$. Es por eso que la ley de escalas de Billiant y Chomaz puede ser aproximada por una ley de potencias para el espectro isótropo en el rango inercial: $E_c(k) \sim k^{-3}$. Esta ley de potencias será utilizada en esta tesis como referencia para comparar con los espectros de las simulaciones en las que la estratificación domine sobre la rotación.

2.5. Turbulencia rotante

A continuación se describe la física de los fluidos que se encuentran predominantemente en un estado de rotación de cuerpo rígido, con pequeños apartamientos de ese estado. Al considerar un sistema de referencia (*sdr*) no-inercial que rota junto con el fluido, aparece una fuerza ficticia relevante en la ecuación de Navier-Stokes, la fuerza de Coriolis. Esta última tomará el rol de fuerza restitutiva para dar lugar a un nuevo tipo de ondas que ocurren en los fluidos rotantes: las ondas inerciales.

2.5.1. Ecuaciones dinámicas

Se considera un *sdr* que rota respecto del sistema de laboratorio, con una velocidad angular constante Ω . Luego, aparecen dos fuerzas en las ecuaciones de Newton: $-2m\Omega \times \mathbf{v}$ y $-m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$, conocidas respectivamente como la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga; donde \mathbf{v} y \mathbf{r} son, respectivamente, la velocidad y posición medidas en el *sdr* rotante. Sumando las fuerzas ficticias a la ecuación (2.1), y aprovechando que la fuerza centrífuga es irrotacional, la ecuación de Navier-Stokes en

el *sdr* rotante se convierte en

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla (\tilde{p}/\rho) + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.64)$$

donde se define la presión reducida como $\tilde{p} \equiv p - \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$. En adelante, cuando se trate con *sdr* rotantes, se entiende que p representa a la presión reducida en vez de \tilde{p} .

Si l es una escala del movimiento típica, entonces el número de Rossby, Ro , da una medida de la razón entre las fuerzas inerciales $|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|$ y la fuerza de Coriolis $|2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}|$,

$$Ro \equiv \frac{U}{\Omega L}, \quad (2.65)$$

con U y L respectivamente la velocidad y longitud características del flujo.

2.5.2. Teorema de Taylor-Proudman

A continuación se considera el caso fuertemente rotante, $Ro \ll 1$, con número de Reynolds alto $Re \gg 1$, para mostrar una característica importante de la turbulencia rotante. Si $Re \gg 1$ se puede despreciar el término viscoso en la ecuación (2.64). Si además $Ro \ll 1$, se puede despreciar el término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, luego la ecuación (2.64) se simplifica en la forma lineal

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla (p/\rho) + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.66)$$

Tomando el rotor, se tiene que

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.67)$$

Si el movimiento es estacionario, o cuasi-estacionario, se puede despreciar la derivada $\partial_t \boldsymbol{\omega}$, y se llega a que

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (2.68)$$

Es decir que en un flujo turbulento ($Re \gg 1$), fuertemente rotante ($Ro \ll 1$) y cuasi-estacionario, \mathbf{v} se vuelve bidimensional en el sentido de que se vuelve independiente de la coordenada paralela a $\boldsymbol{\Omega}$. Esto se denomina el teorema de Taylor-Proudman. Esta bidimensionalidad es diferente a la del caso estratificado, donde las capas con flujo horizontal estaban separadas por fuertes gradientes verticales. Aquí el flujo no depende de la coordenada a lo largo de $\boldsymbol{\Omega}$, y como veremos más adelante, el flujo tiende a generar estructuras con forma de columna.

La bidimensionalidad del campo de velocidades es una característica fundamental de los flujos rotantes. Esta es una de las motivaciones para el estudio de flujos

estrictamente bidimensionales, que son una buena aproximación a muchos flujos que ocurren en la naturaleza y el laboratorio. Además, la bidimensionalidad de los sistemas reduce los requerimientos computacionales, facilitando la simulación de dichos flujos. En su famoso trabajo de turbulencia bidimensional [51], Kraichnan y Montgomery presentan una exhaustiva descripción de dichos flujos.

2.5.3. Ondas inerciales

La fuerza de Coriolis permite que un fluido rotante e incompresible soporte ondas internas, denominadas ondas inerciales [39]. Aplicando el operador $\nabla \times (\partial/\partial t)$ a la ecuación (2.67) se obtiene una ecuación de ondas

$$\partial_t^2(\nabla^2 \mathbf{v}) + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} = 0, \quad (2.69)$$

que soporta soluciones de onda plana

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{v}} \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \sigma_I t)], \quad (2.70)$$

con relación de dispersión

$$\sigma_I = \pm \frac{2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{|\mathbf{k}|}. \quad (2.71)$$

Se adopta la convención $\sigma_I \geq 0$, luego el signo positivo (negativo) en la ecuación (2.71) corresponde a $k_z \geq 0$ ($k_z < 0$). La velocidad de grupo de las mismas está dada por

$$\mathbf{c}_g^{(I)} \equiv \frac{\partial \sigma_I}{\partial t} = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^3} = \pm 2 \frac{k^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^3}, \quad (2.72)$$

de donde se observa la sorprendente propiedad de que su velocidad de grupo es perpendicular a la velocidad de fase,

$$\mathbf{c}_f^{(I)} = \frac{2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^3}. \quad (2.73)$$

Es decir que, así como en las ondas de gravedad, también en las ondas inerciales la energía se propaga en dirección perpendicular a la dirección de propagación de los frentes de onda. Las dos velocidades se relacionan según $\mathbf{c}_g^{(I)} = \pm (2\boldsymbol{\Omega}/|\mathbf{k}| - \mathbf{c}_f^{(I)})$, luego la velocidad de grupo es coplanar con $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{k} . Además,

$$\mathbf{c}_g^{(I)} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \pm 2k^{-3} [k^2 \Omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2], \quad (2.74)$$

de donde se observa que el signo positivo (negativo) en las ecuaciones (2.71, 2.72 y 2.74) corresponde también a que la energía se propague hacia arriba (abajo) en forma de onda. La dirección de propagación de la energía está asociada a que las

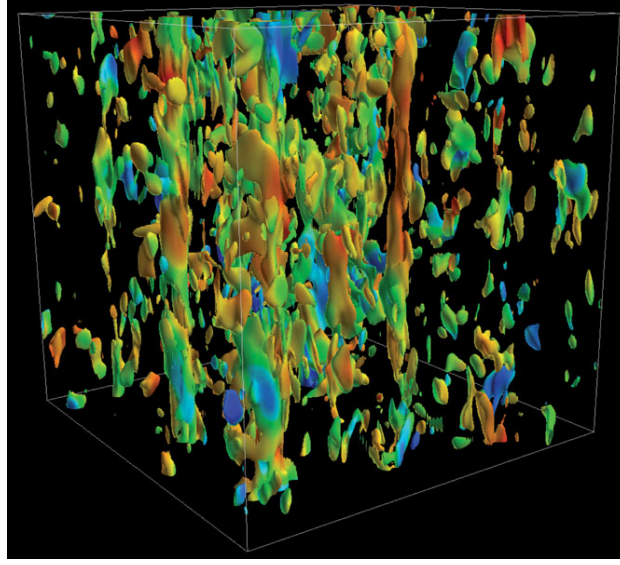


Figura 2.3: Superficies de enstrofía constante en turbulencia rotante y estratificada estadísticamente homogénea en decaimiento, con rotación dominante: $N_{bv}/f = 0,1$ (adaptación de Liechtenstein y otros, 2005 [54].)

ondas inerciales son intrínsecamente helicoidales. Combinando la ecuación (2.67) con la relación de dispersión (2.71), se deduce que $\tilde{\omega} = \pm|\mathbf{k}|\tilde{v}$, donde $\tilde{\omega}$ es la amplitud de la vorticidad. Es decir que la velocidad es paralela a vorticidad y ambos campos están en fase, con lo que las ondas inerciales poseen máxima helicidad. El signo positivo (negativo) en la ecuación (2.74) corresponde a una helicidad negativa (positiva). Luego un paquete con helicidad negativa (positiva) se propaga hacia arriba (abajo), pues vale que $\mathbf{c}_g^{(I)} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$ (< 0).

La frecuencia de las ondas inerciales es independiente de $|\mathbf{k}|$, pero depende de la orientación relativa entre $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{k} . Varía desde $\sigma_I \approx 0$ (frecuencias bajas) para $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \approx 0$, con velocidad de grupo $\mathbf{c}_g = \pm 2\boldsymbol{\Omega}/|\mathbf{k}|$, hasta $\sigma_I = 2|\boldsymbol{\Omega}|$ (frecuencias altas), con velocidad de grupo despreciable. En adelante, se hará referencia al *parámetro de Coriolis*, definido como

$$f \equiv 2\Omega. \quad (2.75)$$

Este parámetro es igual a la máxima frecuencia de oscilación posible de las ondas inerciales.

Una consecuencia observable del teorema de Taylor-Proudman y de las ondas inerciales en flujos rotantes es la formación de columnas rígidas de fluido, denominadas *columnas de Taylor*, formadas encima de un cuerpo rígido u obstáculo colocado en el flujo. Estas columnas se mueven solidarias al cuerpo rígido que produce la perturbación. Las ondas inerciales que propagan energía e información en el sentido vertical (paralelo al eje de rotación), son las encargadas de construir y reconstruir continuamente estas columnas, transmitiendo la información necesaria como para

que la columna se mantenga solidaria al cuerpo rígido. Al suprimir la derivada temporal en la ecuación (2.67), se filtran las ondas. Sin embargo, el efecto a largo plazo de las ondas inerciales, la formación de columnas de Taylor, sigue estando contemplado en la solución cuasi-estacionaria del teorema de Taylor-Proudman. Este mecanismo de propagación de información, hará que en el estado estacionario, o cuasi-estacionario, los flujos rotantes tiendan a formar estructuras estiradas en la dirección paralela al eje de rotación (ver fig. 2.3).

2.5.4. Algunos resultados previos

La presencia de rotación en un flujo turbulento introduce un eje privilegiado que genera la ruptura de isotropía del sistema [17, 18, 9]. Para rotación intensa (bajo Ro con Re fijo), es bien conocido que los flujos tridimensionales tienden a bidimensionalizarse y permanecer suaves (o regulares) en el límite inviscido [3]. Como resultado de la selección de interacciones triádicas por ondas resonantes (descriptas en §2.6.1), la energía se transfiere preferentemente hacia modos en el plano perpendicular al eje de rotación [18, 104]. Los flujos con rotación intensa son entonces muchas veces modelados como flujos bidimensionales, porque a pesar de ser una idealización de los flujos reales, facilitan y proveen un punto de partida para la modelización de flujos geofísicos, además de presentar una estadística rara y a la misma vez instructiva. Además de volverse anisótropa al tender hacia la bidimensionalización del flujo, la transferencia de energía se enlentece, resultando en un espectro de energía más empinado que en el caso isótropo y homogéneo [104].

Recientemente ha resurgido el interés en la turbulencia bidimensional. La mayor capacidad de cómputo hace que sea posible modelar flujos con números de Reynolds más altos, por lo tanto permite una determinación más precisa de la estadística y de las características de dichos flujos. Por otro lado, la atmósfera es vista a grandes escalas como cuasi-bidimensional. En la capa límite atmosférica se ha observado un espectro de energía $\sim k^{-3}$ en escalas grandes, seguido por una ley $\sim k^{-5/3}$ en escalas pequeñas [74]. Esto ha generado controversia respecto de lo que se esperaba a partir de las predicciones de Kraichnan y Montgomery para turbulencia bidimensional [51].

La cascada inversa en turbulencia bidimensional fue postulada por Onsager [31, 77] cuando estudiaba las interacciones en un ensamble de vórtices puntuales. También fue postulada por Kraichnan [50] usando equilibrios estadísticos para un número de grados de libertad finito en el caso de un fluido ideal. Esta cascada se caracteriza por un flujo constante de energía hasta la escala más grande que sea accesible para el sistema. Se la atribuye a la restricción dual de conservación de energía y enstrofía totales en flujos bidimensionales inviscidos. El artículo de Kraichnan y Montgomery [51] enuncia que la cascada inversa para fluidos bidimensionales de-

bería seguir un espectro $E(k) \sim k^{-5/3}$, junto con una cascada $\sim k^{-3}$ en la cascada directa de enstrofía hacia pequeñas escalas [7, 53]. Se han observado espectros más empinados [12, 13, 99], en particular en las simulaciones numéricas más tempranas con baja resolución; en algunos casos esto se relaciona con la dominancia de fuertes vórtices coherentes de dichas simulaciones.

La cascada inversa en turbulencia bidimensional fue observada en simulaciones numéricas por primera vez en [42], para luego ser confirmada experimentalmente en [92, 11, 94]. La cascada inversa hacia grandes escalas en flujos rotantes fue observada en [89], mientras que la coexistencia de una cascada inversa hacia grandes escalas con una cascada directa de energía (y helicidad) hacia pequeñas escalas fue estudiada en [67, 68], con una recuperación de la isotropía y ley de escalas de Kolmogorov en escalas pequeñas [71]. Mediante simples argumentos fenomenológicos, se sugiere que en el rango inercial el espectro perpendicular escala como $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2}$ [73, 68, 105]. Sin embargo, dentro del rango inercial, $E(k_{\perp})$ domina sobre $E(k_{\parallel})$, por lo que es posible aproximar la ley de potencias para el espectro perpendicular por una para el espectro isótropo, $E(k) \sim k^{-2}$. Esta ley de potencias será utilizada como referencia para comparar con los espectros de las simulaciones en las que la rotación domine sobre la estratificación.

2.6. Turbulencia rotante y estratificada

A continuación se presenta la dinámica de flujos rotantes y estratificados bajo la aproximación de Boussinesq. Además se introduce la teoría de ondas resonantes, en la que se descompone el sistema en modos de onda (con frecuencia no-nula) y cuasi-geostróficos (con frecuencia nula).

2.6.1. Ecuaciones dinámicas

En caso de tener flujos rotantes y estratificados, como es el caso de los sistemas tratados en esta tesis, con $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{e}}_z$ paralelo a la dirección de los gradientes de densidad $-\mathbf{g}$, las ecuaciones de Boussinesq son [87]

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\Omega \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{v} + N\theta \hat{\mathbf{e}}_z + \nabla P = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (2.76a)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} - N(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (2.76b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.76c)$$

donde $P \equiv p - p_0 - \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$ es la *presión efectiva*, y θ las *fluctuaciones de temperatura potencial*, proporcionales a las fluctuaciones de densidad. Por simplicidad,

en lo que queda del trabajo, se referirá al campo escalar θ como “fluctuaciones de densidad”, y a la presión efectiva directamente como p . La densidad de masa total está dada por la ecuación (2.50). El término \mathbf{f} en la ecuación (2.76a) representa el forzado externo de la velocidad. En esta tesis no se aplican forzados sobre las fluctuaciones de densidad θ .

2.6.2. Modos lineales, cuasigeostróficos y de ondas de gravedad-inerciales

En el límite inviscido sin forzado ($\nu = \kappa = \mathbf{f} = 0$), las ecuaciones de Boussinesq (2.76) conservan la *vorticidad potencial* (VP) definida como $\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \rho$ [90],

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \rho) = 0, \quad (2.77)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_a \equiv \boldsymbol{\omega} + f\hat{\mathbf{e}}_z$ es la vorticidad absoluta ($\boldsymbol{\omega}$ está definida en el *sdr* rotante). En la aproximación de Boussinesq, la conservación de la vorticidad potencial en elementos de fluido es equivalente a la conservación del volumen de un elemento de fluido, pues $\boldsymbol{\omega}_a$ evoluciona como un elemento de línea, mientras que $\nabla \rho$ como un elemento de superficie. La vorticidad potencial puede ser expresada en términos de $\boldsymbol{\omega}$ y θ . Usando la expresión para la densidad (2.50) y la frecuencia de Brunt-Väisälä (2.55), se tiene que

$$\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \rho = \left(-\frac{\rho_0}{g} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{1/2} (-N_{bv}f + f\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \theta - N_{bv}\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta), \quad (2.78)$$

y la conservación de VP (2.77), puede reescribirse como,

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)(f\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \theta - N_{bv}\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta) = 0. \quad (2.79)$$

Dado que en esta tesis $N_{bv}f$ es constante en todo el volumen, en el resto del trabajo, cuando se habla de vorticidad potencial se estará haciendo referencia a la cantidad $VP \equiv f\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \theta - N_{bv}\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta$.

La conservación de la vorticidad potencial implica una restricción importante sobre la dinámica del flujo. Como consecuencia, da lugar a dos clases de modos lineales: ondas de gravedad-inerciales con frecuencia no nula y vorticidad potencial nula, y por el otro lado modos cuasi-geostróficos (CG), también conocidos como modos de vorticidad potencial, con frecuencia nula y vorticidad potencial no nula. Para un dominio no acotado, o con *cdc* periódicas, los modos lineales de la ecuación

(2.76) son

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \sigma(\mathbf{k})t]}, \quad (2.80)$$

donde $\phi = (\check{\mathbf{v}}, \check{\theta})$. Como consecuencia de la condición de continuidad (2.76c), solamente hay tres modos por vector de onda. En general, dos de estos modos ϕ^\pm tienen frecuencia no-nula σ^\pm y el tercero ϕ^0 tiene frecuencia nula $\sigma^0 = 0$. Los primeros dos modos corresponden a ondas de gravedad-inerciales sin VP , mientras que el último corresponde a un modo CG. Los modos CG son también llamados en la literatura como “modos lentos” (ya que tienen frecuencia de las ondas nula), mientras que los modos de las ondas son también llamados “modos rápidos”. En el límite lineal, la conservación de VP (2.79) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} (f \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \theta - N_{bv} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad (2.81)$$

que en el espacio de Fourier se escribe como $\sigma (i f k_z \check{\theta} - N_{bv} \check{\boldsymbol{\omega}}_z) = 0$. Esto requiere que $\sigma = 0$ para los modos CG o que $(i f k_z \check{\theta} - N_{bv} \check{\boldsymbol{\omega}}_z) = 0$ para los modos de ondas. Los detalles pueden verse en [5].

Reemplazando los modos de Fourier (2.80) en las ecuaciones de Boussinesq (2.76), se llega a la relación de dispersión para las ondas de gravedad-inerciales

$$\sigma_{IG}^\pm = \pm \frac{\sqrt{f^2 k_z^2 + N_{bv}^2 k_\perp^2}}{k}, \quad (2.82)$$

con velocidad de grupo

$$\mathbf{c}_g^{(IG)} = \frac{f^2 - N_{bv}^2}{\sigma k^4} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k}_\parallel \times \mathbf{k})], \quad (2.83)$$

de donde se vuelve evidente que las ecuaciones (2.62) y (2.72) son casos particulares de la ecuación (2.72), y lo mismo para las relaciones de dispersión. Notar que σ_{IG} se encuentra entre N_{bv} y f , y que la velocidad de grupo se anula cuando $N_{bv} = f$. Luego, se espera que los flujos con $N_{bv} \approx f$ exhiban poco comportamiento de onda. Las simulaciones con las que se tratará en esta tesis se encuentran en el rango $0,1 \leq N_{bv}/f \leq 10$.

Además, se deben considerar dos casos especiales: (i) $k_\perp = 0$, y (ii) $k_z = N_{bv} = 0$. En el caso (i) $k_\perp = 0$, cuando el vector de onda $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$, se obtienen los modos con velocidad horizontal uniforme y con cizalla vertical, también conocidos como *vientos horizontales* con cizalla vertical. Estos modos no tienen ni vorticidad vertical, ni vorticidad potencial. Además, por la condición de continuidad (2.76c), tampoco presentan velocidad en z . En este caso especial las frecuencias correspondientes asociadas a los modos ϕ^\pm son $\sigma^\pm = \pm f$ respectivamente, mientras que las fluctua-

ciones de densidad de los modos ϕ^0 tienen frecuencia nula $\sigma^0 = 0$. El caso especial (ii) $k_z = N_{bv} = 0$ corresponde a rotación pura con el vector de onda $\mathbf{k} \perp \hat{\mathbf{e}}_z$. En este caso, los modos son lentos (*geostróficos*) con frecuencia nula $\sigma^\pm = \sigma^0 = 0$.

Es posible, en el espacio de Fourier, descomponer la velocidad y las fluctuaciones de densidad en términos de los modos solenoidales ortonormales

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v}} \\ \widehat{\theta} \end{pmatrix}(\mathbf{k}, t) = a^+(\mathbf{k}, t)\phi^+(\mathbf{k}) + a^-(\mathbf{k}, t)\phi^-(\mathbf{k}) + a^0(\mathbf{k}, t)\phi^0(\mathbf{k}), \quad (2.84)$$

$$a^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t) = \overline{\phi^{(\alpha)}} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v}} \\ \widehat{\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

donde $\alpha = -, 0, +$. En el caso inviscido sin forzado, la evolución de $a^{(\alpha)}e^{i\sigma^{(\alpha)}t}$ es regida únicamente por las interacciones no-lineales,

$$\frac{d}{dt} \left(a^{(\alpha)} e^{i\sigma^{(\alpha)}t} \right) = -e^{i\sigma^{(\alpha)}t} \overline{\phi^{(\alpha)}} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}} \\ \widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

donde $\widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}$ y $\widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla \theta}$ son las transformadas de Fourier de los términos no-lineales de las ecuaciones de Boussinesq (2.76a) y (2.76b) respectivamente.

2.6.3. Tríadas resonantes

Es posible escribir explícitamente la transformada de Fourier de la ecuación de Boussinesq completa (2.76a) en función de sus modos lineales haciendo un cambio de variables [102], para llegar a la ecuación que describe la dinámica de los modos,

$$\frac{dB_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}}{dt} + i\sigma_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} B_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\alpha\beta\gamma} B_{-\mathbf{p}}^{(\beta)} B_{-\mathbf{q}}^{(\gamma)} e^{i(\sigma_{\mathbf{p}}^{(\beta)} + \sigma_{\mathbf{q}}^{(\gamma)} - \sigma_{\mathbf{k}}^{(\alpha)})} + \widehat{F}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \widehat{D}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}, \quad (2.87)$$

donde $\sigma_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ es la relación de dispersión de las ondas de gravedad-inerciales con polarización α , $\widehat{D}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ es el término de disipación, $B_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = a_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}/k_{\perp}$, con $\alpha = -, 0, +$, son las amplitudes normalizadas de los modos normales con vector de onda \mathbf{k} , y Γ son los coeficientes de interacción entre modos [102].

La sumatoria de la ecuación de Boussinesq transformada (2.87) corresponde a las interacciones no-lineales entre los modos con vector de onda \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} . Del subíndice de la sumatoria se evidencia que para que haya interacciones entre modos será necesario que se cumpla la condición de tríada entre los modos involucrados,

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0. \quad (2.88)$$

Al integrar el término no-lineal en la ecuación (2.87) en el tiempo sobre un período de las ondas, surge una nueva restricción a las tríadas interactuantes [104]. Las frecuencias asociadas a los modos involucrados deben cumplir la condición de resonancia,

$$-\sigma^{(\alpha)}(\mathbf{k}) + \sigma^{(\beta)}(\mathbf{p}) + \sigma^{(\gamma)}(\mathbf{q}) = 0, \quad (2.89)$$

ya que cualquier otra combinación de las ondas interfiere en forma destructiva. Esta restricción a tríadas resonantes vale también para los flujos rotantes y estratificados. Como se demostrará a continuación, la ecuación (2.89) también implica la existencia de un rango del parámetro N_{bv}/f en el que las tríadas resonantes se anulan [90].

Waleffe describe estas interacciones exhaustivamente para turbulencia homogénea en [103], y para flujos rápidamente rotantes en [104], donde demuestra el acuerdo con clausuras Markovianas y da un argumento para la bidimensionalización de los flujos rotantes. En [103] Waleffe descompone el campo de velocidades en modos helicoidales, permitiendo identificar 8 interacciones triádicas fundamentales. Su “suposición de inestabilidad” establece que la dirección estadística de transferencia de energía en una tríada es aquella en la que la frecuencia σ de las ondas se reduce. Es decir, hacia los modos bidimensionales en el caso puramente rotante, y hacia modos con cizalla vertical en el caso puramente estratificado.

2.6.4. Tiempos característicos

En la teoría de ondas en turbulencia, resulta útil conocer las distintas escalas temporales relevantes a los fenómenos estudiados. Estas escalas temporales dependerán del vector de onda \mathbf{k} . Asumiendo que el tiempo más corto dominará la dinámica del flujo, es posible definir distintas regiones en el plano k_{\perp}, k_{\parallel} según cuál sea el efecto dominante. La primer escala temporal será el período de ondas

$$\tau_w(\mathbf{k}) = C_w \frac{1}{\sigma_{IG}(\mathbf{k})} = C_w \frac{k}{\sqrt{f^2 k_{\parallel}^2 + N_{bv}^2 k_{\perp}^2}}, \quad (2.90)$$

donde C_w será una constante adimensional de $\mathcal{O}(1)$. Este tiempo debe ser comparado con el tiempo no-lineal definido en la ecuación (2.35), que se puede re-expresar en función del espectro de energía: $\tau_{NL}(\mathbf{k}) \sim k^{-3/2} E(k)^{-1/2}$. Es posible entonces utilizar una ley de potencias estimada para $E(k)$ para expresar a $\tau_{NL}(\mathbf{k})$ explícitamente en función de k . Se suele considerar $E(k) \sim N^2 k^{-3}$ [10, 22] en el caso de turbulencia estratificada, y $E(k) \sim \varepsilon^{1/2} \Omega^{1/2} k^{-2}$ [25, 73, 71, 105] en el caso de turbulencia rotante. En el caso rotante y estratificado, considerado en esta tesis, se utilizará la estimación $E(k) \sim k^{-2,5}$ para obtener una expresión aproximada explícita para

$\tau_{NL}(\mathbf{k})$ en función de k ,

$$\tau_{NL}(\mathbf{k}) = C_{NL} \frac{1}{k^{1/4}}, \quad (2.91)$$

donde C_{NL} es otra constante adimensional de $\mathcal{O}(1)$. Notar que tanto para el caso rotante, como para el estratificado, el espectro de energía es anisótropo, dependiendo de k_{\perp} y k_{\parallel} , y no simplemente de k . Sin embargo, aquí solamente conciernen las estimaciones de orden de magnitud para las escalas temporales, por lo que se consideran las expresiones más simples de los espectros isótropos.

El barrido (de “*sweeping*” en inglés) de remolinos de tamaño $l \sim k^{-1}$, llevado a cabo por el flujo en las escalas más grandes, puede ser el proceso dominante en la decorrelación de modos de Fourier cuando el tiempo de barrido τ_{sw} es más corto que el tiempo de ondas τ_w [98, 23, 76, 88]. El barrido está asociado a las interacciones no-locales en el espacio de Fourier que resultan en la advección de pequeños remolinos causada por los remolinos que concentran la energía del sistema. El tiempo de barrido es

$$\tau_{sw} = C_{sw} \frac{1}{Uk}, \quad (2.92)$$

donde C_{sw} es otra constante adimensional de $\mathcal{O}(1)$.

Finalmente, el tiempo no-lineal $\tau_{NL}(\mathbf{k})$, definido en (2.91), deberá distinguirse del *tiempo no-lineal de grandes escalas*, τ_{NLG} , independiente de k , que se usará para estimar a grandes rasgos la escala temporal de transferencia de energía entre escalas, en cada sistema particular. Este tiempo se define como

$$\tau_{NLG} \equiv \frac{l_F}{U}, \quad (2.93)$$

donde l_F es la escala de inyección de energía del forzado, y U la velocidad r.m.s.

2.6.5. Barrido de vórtices

Para describir correctamente la relación de dispersión esperada para los flujos turbulentos con números de Rossby y Froude moderados considerados en esta tesis, es necesario tomar en cuenta el fenómeno de barrido de vórtices introducido en la sección anterior §2.6.4, que introduce una frecuencia σ_{sw} asociada,

$$\sigma_{sw} = \pm \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.94)$$

En el espectro espacio-temporal $E(k, \sigma)$ se encontrarán excitaciones tanto superpuestas, como debajo de la curva dada por la relación (2.94), lo que evidencia el efecto de barrido [26]. Las estructuras de tamaño $l \sim k^{-1}$ son advectadas por la velocidad en escalas grandes, que a grandes rasgos fluctúa entre 0 y U . Es decir, que a un dado número de onda k , se excitan todas las frecuencias entre $\sigma \approx -Uk$

y $+Uk$.

2.6.6. Anulación de tríadas resonantes en $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$

No es difícil demostrar que en el rango $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ se anulan las interacciones de tríadas resonantes entre ondas de gravedad-inerciales [90]. Las interacciones de tríadas resonantes requieren que los modos interactuantes \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} formen un triángulo $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$, y que además la suma de sus frecuencias verifique la condición de resonancia $-\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(\mathbf{p}) + \sigma(\mathbf{q}) = 0$ [104]. Si $N_{bv} = f$, entonces $\sigma = \pm N_{bv} \forall \mathbf{k}$, y la suma de frecuencias nunca se puede anular. En ese caso $-\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(\mathbf{p}) + \sigma(\mathbf{q}) = \pm N_{bv}$, $\pm 2N_{bv}$ o $\pm 3N_{bv}$. De forma más general, la ecuación (2.82) implica que $\min|\sigma| = \min\{N_{bv}, f\}$, y que $\max|\sigma| = \max\{N_{bv}, f\}$, donde los extremos se dan en $k_{\parallel} = 0$ o $k_{\perp} = 0$. La condición de resonancia $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ implica que dos de esas frecuencias deben tener el mismo signo, mientras que la otra tendrá el signo opuesto. Se puede elegir $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$ sin pérdida de generalidad, y escribir la condición de resonancia como $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3$. Esta última relación sólo puede satisfacerse si $2 \min\{N_{bv}, f\} < \max\{N_{bv}, f\}$, donde se puede tomar la desigualdad estricta pues los vectores de onda forman un triángulo ($\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$), y no es posible construirlo con dos vectores horizontales y uno vertical, o viceversa. Si $\max\{N_{bv}, f\} = N_{bv}$, esta condición se convierte en $N_{bv}/f > 2$; si $\max\{N_{bv}, f\} = f$, entonces $N_{bv}/f < 1/2$. Luego, a partir de la región complementaria a estas dos, se deduce que no existe ninguna tríada resonante cuando

$$\frac{1}{2} \leq \frac{N_{bv}}{f} \leq 2. \quad (2.95)$$

Se espera que afuera, pero cerca de este rango, existan pocas tríadas resonantes, y que recién jueguen un rol significativo para $N_{bv}/f \ll 1/2$ o $N_{bv}/f \gg 2$.

Para $N_{bv}/f < 1/2$ las primeras tríadas resonantes que surgen consisten en un modo vertical $(0, 0, k_z)$ (que corresponde al modo más alto $\sigma_3 = f$), y dos modos cuasi-horizontales \mathbf{p} , \mathbf{q} con $p_{\perp} = q_{\perp} \gg |p_{\parallel}|, |q_{\parallel}|, |k_{\parallel}|$, pues $k_z + p_z + q_z = 0$. La “suposición de inestabilidad” de Waleffe [104] sugiere que, estadísticamente, la energía en dicha tríada será transferida desde modos verticales y rápidos de grandes escalas a los modos cuasi-horizontales y lentos de escalas pequeñas. Análogamente, para $N_{bv}/f > 2$, las primeras tríadas resonantes consisten de un modo horizontal y rápido de gran escala, y dos modos cuasi-verticales y lentos de pequeña escala. En este caso, se esperaría que la transferencia ocurra desde el modo horizontal y rápido de gran escala hacia los modos cuasi-verticales y lentos de pequeñas escalas. Estos argumentos sugieren que las primeras tríadas resonantes que surgen cuando $N_{bv}/f < 1/2$ tienden a bidimensionalizar el flujo (estructuras con forma de columna,

ver fig. 2.3), mientras que las primeras tríadas resonantes que surgen con $N_{bv}/f > 2$ tienden a unidimensionalizar el flujo (estructuras con forma de panqueque, ver fig. 2.2).

2.6.7. Ecuación cuasi-geostrófica

Simulaciones en el rango $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ muestran que los modos CG [90] dominan la dinámica en escalas mayores a las del forzado. Luego, se puede considerar que la dinámica de grandes escalas resulta únicamente de interacciones de modos CG. En ausencia de forzado y disipación, de la expresión explícita de ϕ^0 y de la ecuación (2.86) se tiene que los modos CG aislados, con autofunción ϕ^0 satisfacen

$$\frac{d}{dt}a_{\mathbf{k}}^0 = \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \overline{a_{\mathbf{p}}^0} \overline{a_{\mathbf{q}}^0}, \quad (2.96)$$

donde

$$C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = \frac{iN_{bv}(\mathbf{p} \times \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)}{\sigma_k k \sigma_p p \sigma_q q} (\sigma_q^2 q^2 - \sigma_p^2 p^2), \quad (2.97)$$

con $\sigma_k k = (N_{bv}^2 k_{\perp}^2 + f^2 k_z^2)^{1/2}$. Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (2.87). La restricción de tríada $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ implica que $(\mathbf{p} \times \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = (\mathbf{q} \times \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = (\mathbf{k} \times \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)$, es decir que $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}$ consiste de un coeficiente cíclicamente simétrico multiplicado por $(\sigma_q^2 q^2 - \sigma_p^2 p^2)$. Luego,

$$C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} + C_{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{k}} + C_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{p}} = 0, \quad (2.98)$$

$$\sigma_k^2 k^2 C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} + \sigma_p^2 p^2 C_{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{k}} + \sigma_q^2 q^2 C_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{p}} = 0, \quad (2.99)$$

y las interacciones de tríadas preservan dos invariantes cuadráticos, la energía total

$$|a(\mathbf{k}, t)|^2 + |a(\mathbf{p}, t)|^2 + |a(\mathbf{q}, t)|^2, \quad (2.100)$$

y la parte cuadrática de la enstrofia potencial

$$\sigma_k^2 k^2 |a(\mathbf{k}, t)|^2 + \sigma_p^2 p^2 |a(\mathbf{p}, t)|^2 + \sigma_q^2 q^2 |a(\mathbf{q}, t)|^2. \quad (2.101)$$

Considerando $\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \equiv -Na_{\mathbf{k}}^0/(\sigma_k k)$, la transformada de Fourier inversa de las ecuaciones (2.96) y (2.97) es

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(\nabla_H^2 + \frac{f^2}{N_{bv}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.102)$$

donde $\nabla_H^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla \psi$, y $\theta = -(f/N) \partial_z \psi$. Esta es la ecuación

cuasi-geostrófica [22], que conserva la energía total

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{f^2}{N_{bv}^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = 0, \quad (2.103)$$

y la pseudo-estrosfía potencial

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \left(\nabla_H^2 \psi + \frac{f^2}{N_{bv}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)^2 \right\rangle = 0. \quad (2.104)$$

Si bien la ecuación (2.102) suele derivarse en el límite $N_{bv} \gg f$, la derivación presentada aquí y derivada originalmente en [90] muestra que en el caso $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ (relevante en escalas grandes de la atmósfera y en regiones abisales de los océanos) la aproximación cuasi-geostrófica también es válida.

2.6.8. Algunos resultados previos

Liechtenantstein y otros [54] realizaron simulaciones numéricas de turbulencia estadísticamente homogénea, rotante y estratificada; de allí se obtuvieron las figuras 2.2 y 2.3 donde se ve que cuando la estratificación es fuerte y la rotación débil, los remolinos de gran-escala que concentran la energía del flujo son aplanados y horizontales, con forma de panqueque. Esto es lo que se esperaba de las predicciones en §2.4: Cuando $Fr_{\perp} \ll 1$, el número de Froude vertical $Fr_{\parallel} \sim 1$. Esto requiere que $L_{\parallel} \ll L_{\perp}$, lo que implica que los remolinos son planos y anchos. En contraste, cuando la rotación es fuerte y la estratificación débil, los remolinos de gran-escala que concentran la energía estarán dominados por estructuras alargadas en la dirección vertical con forma de cigarro. Estas estructuras podrían estar relacionadas al crecimiento espontáneo de estructuras de columnas mediante la propagación de ondas inerciales para $Ro \leq \mathcal{O}(1)$, o al efecto de las interacciones resonantes.

Finalmente, cuando la rotación y estratificación son de igual intensidad, y $N_{bv} = f$, como se observa en la figura 2.4, no hay una anisotropía obvia en los remolinos de gran-escala. Esto es consistente con el hecho de que para $N_{bv} = f$ no hay dispersión de energía por medio de ondas.

Waite y Bartello [102] estudiaron la transición entre la turbulencia puramente estratificada sin rotación, y la turbulencia cuasi-geostrófica con estratificación y rotación. Fijando el grado de estratificación, disminuyeron gradualmente el número de Rossby en un rango amplio, para analizar como dependen el espectro de energía y las escalas integrales direccionales de este parámetro. Encontraron que dentro del rango de N_{bv} considerado (4 a 8), el parámetro N_{bv}/f es de segundo orden. Tanto Waite y Bartello [102], como Reinaud, Dritschel y Koudella [82], verificaron

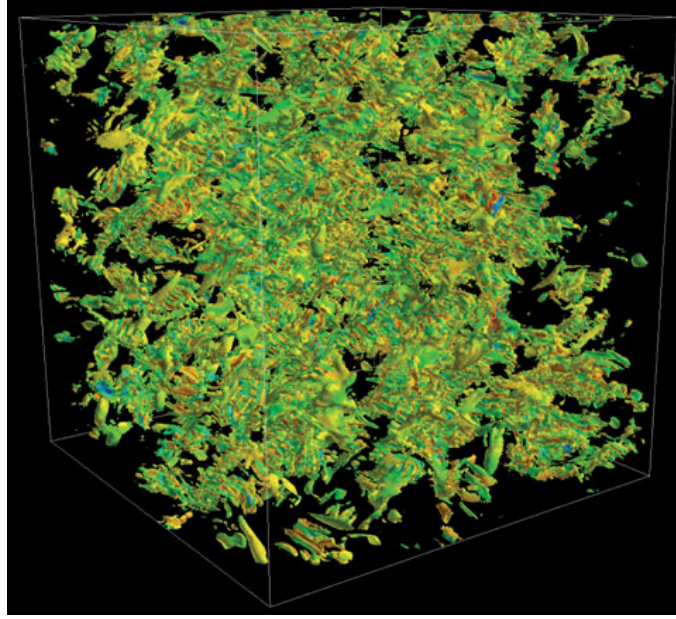


Figura 2.4: Superficies de enstrofía constante en turbulencia rotante y estratificada estadísticamente homogénea en decaimiento con $N_{bv}/f = 1$ (adaptación de Liechtenstein y otros, 2005 [54].)

en simulaciones numéricas cuasi-geostróficas que para Ro pequeños ($\lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$), L_{\parallel} recupera la forma cuasi-geostrófica $L_{\perp}/L_{\parallel} \sim N_{bv}/f$ que predice Charney en 1971 [22]. Babin, Mahalov y Nicolaenko [4] argumentan que una rotación débil genera un acoplamiento entre las capas de turbulencia estratificada, de tal forma que también se tiene la ley de escala cuasi-geostrófica $L_{\perp}/L_{\parallel} \sim N_{bv}/f$ cuando $Ro > 1$. Sin embargo $U/N > (f/N_{bv})L_{\perp}$ cuando $Ro > 1$, con lo que el acoplamiento se podría ver opacado por la convección local y la turbulencia de pequeña escala. Billant y Chomaz [10] verificaron esta complicación y argumentan que alrededor de $Ro \sim 1$, L_{\parallel} transiciona de un régimen $\sim (f/N_{bv})L_{\perp}$ (con $Ro < 1$) a $\sim U/N_{bv}$ (con $Ro > 1$).

Como se describió en §2.5.4 y §2.4.3, con rotación y estratificación se espera que dentro del rango inercial el espectro de energía se vuelva más empinado que en el caso no rotante y no estratificado, y que sea compatible con una ley de potencias cercana a $\sim k^{-2}$ cuando domine la rotación ($N_{bv}/f < 1$), y cercana a $\sim k^{-3}$ cuando domine la estratificación ($N_{bv}/f > 1$). Asumiendo que existe una transición suave entre estos dos últimos regímenes, se puede estimar que en el caso en el que la rotación esté balanceada con la estratificación ($N_{bv} = f$), el exponente de escala del espectro se encontrará en el punto medio entre -2 y -3 , es decir que el espectro seguirá una ley de potencias compatible con $E(k) \sim k^{-2.5}$. Esta ley de potencias será utilizada como referencia para comparar con los espectros de las simulaciones en las que la rotación esté balanceada con la estratificación.

Dado el amplio bagaje de estudios realizados para comprender la dependencia

de la dinámica de los flujos turbulentos rotantes y estratificados en función de la intensidad de rotación, esta tesis se centra en estudiar la dependencia de los flujos con el grado de estratificación (N_{bv}), manteniendo la frecuencia de rotación fija, para unos pocos valores del parámetro de Coriolis.

Capítulo 3

Herramientas y métodos

En este capítulo presentamos las herramientas numéricas y los métodos usados para estudiar turbulencia y la presencia de ondas en flujos rotantes y estratificados. En §3.1 describimos las simulaciones numéricas directas, mientras que en §3.2 presentamos un método para cambiar la resolución de las simulaciones a medida que se aumenta el número de Reynolds.

3.1. Simulaciones numéricas directas

En esta tesis se utilizaron simulaciones numéricas directas (DNS por sus siglas en inglés) para integrar las ecuaciones de Boussinesq de un flujo rotante y estratificado (2.76a-2.76c). Como indica su nombre, una simulación numérica directa resuelve directamente el sistema de ecuaciones dinámicas, y no un modelo promediado. Se busca utilizar suficiente resolución espacial y cadencia temporal como para resolver numéricamente todos los procesos físicos relevantes. Estas simulaciones se realizaron utilizando el software GHOST [69, 37, 38] que emplea un método *pseudo-espectral* [20, 79] (descrito en §3.1.1) para la resolución espacial de las ecuaciones, y un esquema de Runge-Kutta de segundo orden (descrito en §3.1.2) para la evolución temporal del sistema. Como se mencionó en §2.1.1, se consideraron *cdc* periódicas en un dominio cúbico de lado $L = 2\pi$.

Resulta fundamental que tanto la resolución espacial como temporal de la simulaciones sean adecuadas para abordar los procesos físicos de interés. Respecto a la resolución espacial, en esta tesis se buscan estudiar procesos ubicados en escalas mayores a las disipativas. Es decir, las escalas integrales y el rango inercial, sin dejar de resolver la escala disipativa $\eta \sim 1/k_\eta \sim (\varepsilon/\nu^3)^{-1/4}$. Luego, el número de onda asociado a la escala de disipación k_η deberá ser menor al máximo número de onda resuelto en la simulación $k_{\max} = N/3$ (esto se explica en detalle en §3.1.1).

Resolviendo todas las escalas entre la escala integral y la disipativa, el mínimo

número necesario de puntos en la grilla tridimensional N^3 es

$$N^3 \leq \gamma (Re)^{9/4}, \quad (3.1)$$

con un factor de proporcionalidad frente al número de Reynolds que se ajusta realizando simulaciones en baja resolución.

El criterio utilizado para elegir el paso de integración temporal dt , es que este sea menor al tiempo que le toma al elemento de fluido más veloz moverse una distancia dx (o, en presencia de ondas, al tiempo de propagación del frente en la misma distancia). Siguiendo la condición de Courant-Friederichs-Lewy (CFL) [28]

$$dt \leq \frac{dx}{U_{\max}} \sim \frac{1}{U_{\max}N}, \quad (3.2)$$

donde U_{\max} es la máxima velocidad en el flujo y dx la distancia mínima entre dos puntos. En este caso, los movimientos más veloces corresponderán a modos de ondas de gravedad-inerciales (2.82). La velocidad de fase de las ondas de gravedad puede ser aproximada (en orden de magnitud) como $c_f^{(G)} = N_{bv}(k_{\perp}/k) \sim N_{bv}$, y análogamente para las ondas inerciales $c_f^{(I)} = f(k_{\parallel}/k) \sim f$. Luego, la mayor velocidad del flujo será $U_{\max} = \max\{N_{bv}, f\}$ según domine un tipo de onda o el otro. Bajo estas aproximaciones, la condición CFL se convierte en

$$dt \lesssim \frac{1}{\max\{N_{bv}, f\}N}. \quad (3.3)$$

3.1.1. Resolución espacial: método pseudo-espectral

Cuando la geometría del dominio de integración y las *cdc* permiten que exista una base completa de funciones en dicho dominio, resulta computacionalmente más eficiente para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales emplear métodos espectrales o pseudo-espectrales, que resuelven un sistema de forma global en el espacio de Fourier, en vez de métodos de elementos finitos que resuelven el problema en el espacio físico de forma local. Los métodos espectrales del tipo Galerkin-Fourier son los adecuados para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales tanto parciales como ordinarias que tengan *cdc* periódicas. El código empleado en esta tesis para integrar espacialmente a las ecuaciones de Boussinesq utiliza un método Galerkin-Fourier [37].

El método pseudo-espectral consiste en calcular las derivadas espaciales del campo de velocidades en el espacio de Fourier, mientras que los productos entre los campos se calculan en el espacio real [20, 43]. En una dimensión, el campo de

velocidades en el espacio de Fourier es

$$v(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t) e^{ikx}. \quad (3.4)$$

Este desarrollo de Fourier se aproximará por la serie truncada

$$v(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} v_k(t) e^{ikx}. \quad (3.5)$$

El error introducido en este truncado es aceptable siempre que no afecte significativamente al subespacio generado por los números de onda de interés en la expansión. El método espectral tiene la ventaja de que trabaja directamente con los modos de Fourier que corresponden a las escalas naturales del proceso turbulento ($l \sim k^{-1}$). Además, la convergencia numérica del proceso es exponencialmente rápida. Para ver esto alcanza con considerar la transformada de Fourier del campo de velocidades

$$\hat{v}(k) = \int e^{-ikx} v(x) dx. \quad (3.6)$$

Integrando por partes, se deduce que para valores de k grandes $\hat{v}(k) \sim k^{-1}$, pues $|\partial_x v|$ está acotado. Repitiendo el proceso m veces, se obtiene que $\hat{v}(k) \sim k^{-m}$, de modo que para cualquier $v(x)$ periódica y diferenciable, se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} |v(k)|/k^m = 0$ para todo $m > 0$. Es decir que la contribución de los modos más altos tiende a cero más rápido que cualquier potencia de k . En otras palabras, la convergencia del método es exponencial.

La ecuación de interés en esta tesis, es decir la ecuación de Navier-Stokes, contiene términos lineales y no-lineales que se deben calcular en el espacio espectral. Estos son el término de advección (no-lineal), los términos viscoso y de gradiente de presión. La evaluación y transformación del término no-lineal en una grilla de N números de onda involucra $\mathcal{O}(N^2)$ operaciones de punto flotante, pues se debe convolucionar v con $\partial_x v$ en el espacio de Fourier. Sin embargo, en el espacio real este término solamente involucra $\mathcal{O}(N)$ operaciones ya que es un producto interno. Para aprovechar esta ventaja, se anti-transforman los términos v y $\partial_x v$ del espacio espectral al real utilizando una transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés); el cálculo de la derivada espacial en el espacio de Fourier involucra solamente multiplicar a la expansión por ik . Luego, se realiza el producto directo entre ambos términos, y se vuelve a transformar el resultado al espacio de Fourier. Este proceso disminuye el número de operaciones de $\mathcal{O}(N^2)$ a $\mathcal{O}(N \log N)$, debido a que la FFT requiere $\mathcal{O}(N \log N)$ operaciones para transformar el campo del dominio real al espectral, y viceversa.

Al discretizar el espacio real en N intervalos dx , surge un efecto espurio por el hecho de que no es posible distinguir entre las funciones e^{ikx} y $e^{ik'x}$ cuando $|k'| > N/2$ y $|k| < N/2$, donde $N/2$ es el número de onda de Nyquist en este espacio de N puntos. Mientras que en los términos lineales solo aparecen los números de onda truncados $k = -N/2 + 1, -N/2 + 2, \dots, N/2$, al evaluar el término no-lineal se acoplan distintos modos de Fourier, y se pueden excitar números de onda k' más altos: $|k'| > N/2$. La proyección de estos modos armónicos en el espacio truncado producirán el efecto espurio conocido como *aliasing*. Para evitar este efecto, se utiliza la regla de *dealiasing* de los 2/3 [78], que consiste en forzar todos los modos con $k > N/3$ a que tengan amplitud nula, lo que garantiza que el acoplamiento espurio con estos modos sea nulo. El resultado es que el método se vuelve estable, no dispersivo, y conservativo en el caso ideal para todos los invariantes cuadráticos de las ecuaciones.

3.1.2. Evolución temporal: esquema de Runge-Kutta

Para la evolución de los campos en el tiempo se utilizó el método de Runge-Kutta de segundo orden descrito a continuación [2]. Sea $G(t)$ un campo genérico cuya dinámica está descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dG(t)}{dt} = F(G, t), \quad (3.7)$$

y G_0 el valor de $G(t)$ a tiempo t_0 conocido. Luego se integra la ecuación diferencial a partir de ese valor, discretizando el tiempo con un paso dt . Se avanza inicialmente medio paso, de modo tal que

$$G_{t_0+1/2} = G_{t_0} + \frac{dt}{2} F(G_{t_0}, t_0),$$

que permite conocer $G_{t_0+1/2}$ para volver a utilizarlo en la ecuación (3.7), obteniendo

$$G_{t_0+1} = G_{t_0} + dt F(G_{t_0+1/2}, t_0 + 1/2).$$

.

Iterando este proceso, se logra evolucionar el sistema en el tiempo. Es posible obtener resultados con menor error considerando esquemas de Runge-Kutta de orden mayor, pero esto implicaría un mayor costo computacional. Teniendo en cuenta cuáles son los procesos de interés, el método de segundo orden resulta en un buen equilibrio entre precisión y tiempo de cómputo.

3.1.3. Paralelización del método numérico

Para evitar problemas con alta resolución espacial y utilizar *clusters* de computadoras para acelerar el cálculo, el método descrito arriba se paraleliza utilizando OpenMP y la biblioteca MPI. Detalles del método de paralelización pueden encontrarse en [69].

3.1.4. Forzado del sistema

En esta tesis se emplearon condiciones iniciales de reposo para el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0) = 0$, $\forall \mathbf{r}$, y fluctuaciones de densidad nulas en todo el espacio $\theta(\mathbf{r}, t = 0) = 0$, $\forall \mathbf{r}$. Es por eso que la energía cinética es inicialmente nula en todas las simulaciones. Se utilizó un forzado de Taylor-Green con número de onda definido en $\mathbf{k}'_F = (k_{TG}, k_{TG}, k_{TG})$, con $k_{TG} = 2$ [96], luego el número de onda efectivo del forzado es $k'_F = 2\sqrt{3}$. Notar que en simulaciones numéricas se deben considerar números de onda discretos, con lo cual aquí el número de onda más cercano a $2\sqrt{3}$ será $k_F = 3$. Las componentes cartesianas del forzado son

$$\mathbf{f} = f_0 \begin{pmatrix} \sin(k_{TG}x) \cos(k_{TG}x) \\ -\cos(k_{TG}x) \sin(k_{TG}x) \\ 0 \end{pmatrix} \cos(k_{TG}z). \quad (3.8)$$

La amplitud del forzado fue elegida en cada resolución de tal forma que la energía converja a valores de orden ~ 1 en el estado turbulento estacionario. El número de onda del forzado, k_F , será utilizado para calcular el número de Reynolds de forma numérica,

$$Re \equiv \frac{l_F U}{\nu}, \quad (3.9)$$

donde $l_F = 2\pi/k_F$ es la escala de inyección de energía y como se definió anteriormente, U es la velocidad r.m.s.

Alexakis [1] presenta una descripción exhaustiva del mecanismo de forzado Taylor-Green en un flujo rotante para varios números de Reynolds altos y números de Rossby bajos. En ninguna simulación de esta tesis se inyectó energía potencial al sistema. El forzado utilizado siempre es puramente mecánico.

3.2. Re-grillado

Para poder simular con mayor exactitud los fenómenos físicos de interés en esta tesis, se trabajó finalmente con una grilla cúbica de $N^3 = 512^3$ puntos. Esta resolución es lo suficientemente alta como para preservar la exactitud de las derivadas espaciales involucradas y capturar los fenómenos físicos de interés. Sin

embargo, aumentar la resolución implica un crecimiento exponencial en el número de operaciones, así incrementando los tiempos de cómputo. Además, el tiempo de convergencia hacia un estado estacionario en el que se llegan a excitar las escalas de movimiento más pequeñas también crece exponencialmente. Es por esto que las pruebas iniciales fueron realizadas en resoluciones más bajas ($N^3 = 128^3$ y 256^3).

Considerando que en el presente trabajo se realizó un barrido en el espacio de parámetros N_{bv}/f y N_{bv} , resultó de suma relevancia optimizar los tiempos de cómputo. Con este fin se utilizó una técnica de *re-grillado*, que consiste en inicialmente simular el flujo en una resolución más baja, N_0 , desde el tiempo inicial t_0 hasta t_{RG} , momento en el cual se considera que el sistema de baja resolución ya se encuentra en un régimen estadísticamente estacionario. En ese instante se frena la simulación, se aumenta la resolución a N_F (por ejemplo $N_F = 2N_0$, aunque no necesariamente en un factor 2), se aumenta el número de Reynolds disminuyendo la viscosidad, y se reanuda la evolución del sistema en la nueva resolución. El aumento de resolución puede reiterarse m veces hasta llegar a la resolución deseada: $N_f^{(m)} = 2^m N_0$. De esta forma, sólo una fracción de la simulación se lleva a cabo en la grilla más fina, reduciendo importantemente el costo computacional (en términos de tanto memoria como CPU). Notar que este procedimiento de re-grillado también puede ser empleado a la inversa, es decir para reducir la resolución espacial. Esto último puede resultar útil por ejemplo cuando se realizan comparaciones con *Simulaciones de Grandes Escalas* (mejor conocidas como LES por sus siglas en inglés para “Large Eddy Simulations”).

La implementación de este procedimiento requiere de algunos cuidados en el código al momento de reanudar la simulación. Es necesario verificar que la paralelización de los cálculos de FFTs en grillas de distintos tamaños se haga de forma correcta. A su vez, se deben realizar los chequeos de precisión para todas las normas, como por ejemplo \mathcal{L}_2 , pero también \mathcal{L}_∞ necesaria para la evaluación de singularidades.

En la práctica, el método de re-grillado consiste de tomar un conjunto de datos en el espacio real, transformarlo al espacio de Fourier, y luego completar con ceros los nuevos números de onda para aumentar la resolución (o truncar el sistema para reducirla). Finalmente, se realiza una transformada inversa multidimensional en la nueva resolución espectral, para transformar el sistema de nuevo al espacio real con la nueva resolución. Los datos resultantes pueden ser utilizados para reanudar la simulación en la nueva resolución. Brachet y otros [15] presentan un estudio detallado de implementación del esquema de re-grillado utilizado en esta tesis, y confirman la confiabilidad del método en cuanto a la preservación de la exactitud espectral del código.

Capítulo 4

Resultados

Una primer etapa de esta tesis consistió en realizar simulaciones en baja resolución con $N^3 = 128^3$ y $N^3 = 256^3$ (paralelizadas usando entre 8 y 16 procesadores en un *cluster* con 200 procesadores, 256 GB de memoria RAM, y 16 TB de almacenamiento en disco, con tiempos de cómputo de aproximadamente 12 h) con los siguientes objetivos en vista: En primer lugar, comenzar a comprender la dinámica del sistema rotante y estratificado en el rango de parámetros de parámetros estudiado ($0,1 \leq N_{bv}/f \leq 10$), y la influencia de N_{bv} y N_{bv}/f sobre las estructuras anisótropas generadas en el flujo. En segundo lugar, hallar los parámetros idóneos para que el método numérico pseudo-espectral converja correctamente en los sucesivos pasos y resuelva todas las escalas físicamente relevantes. Los parámetros y las configuraciones de control son: el paso temporal dt , la viscosidad ν , el coeficiente de difusión κ , la intensidad del forzado f_0 (de tal forma que la energía se mantenga de orden $\mathcal{O}(1)$), el tipo de forzado y los números de onda en los que se inyecta la energía. En tercer lugar, las simulaciones de baja resolución fueron utilizadas para generar las condiciones iniciales que luego se emplearon en simulaciones de mayor resolución ($N^3 = 512^3$) mediante la re-dimensionalización de la grilla espacial. Este procedimiento permitió ahorrar tiempo de cómputo en las simulaciones de alta resolución, solamente teniendo que esperar a que el sistema se relaje a la nueva resolución y viscosidad.

En este capítulo se presentan entonces los resultados de estas simulaciones, resumiendo primero el conjunto de todas las simulaciones realizadas para explorar el espacio de parámetros, y discutiendo después los resultados para las simulaciones a medida que se incrementa la resolución.

4.1. Resumen de las simulaciones

En el cuadro 4.1 se detallan los parámetros empleados para las simulaciones realizadas con resoluciones lineales $N = 256$ y 512 , en el subespacio de parámetros $0,1 \leq N_{bv}/f \leq 10$, más una simulación con $N = 256$ y con $N_{bv} = f = 0$. Los sistemas tratados tienen números de Reynolds en el rango $310 - 920$ en el caso de $N = 256$, y en el rango $800 - 2300$ para las simulaciones con $N = 512$. Los rangos de números de Froude son $0,026 - 1,8$ para $N = 256$ y $0,051 - 0,82$ para $N = 512$, mientras que los rangos de números de Rossby son $0,018 - 0,33$ para $N = 256$ y $0,040 - 0,26$ para $N = 512$. Los bajos números de Froude y Rossby dan lugar a que aparezcan ondas de gravedad e inerciales respectivamente. El hecho de que los números de Reynolds sean moderados ($Re \sim \mathcal{O}(10^3)$) permite que la turbulencia no inhiba las ondas. Con números de Reynolds más chicos, el sistema no desarrolla turbulencia. Por otro lado, con números de Reynolds más altos ($Re \gtrsim 10^5$) el sistema tendería en las escalas más pequeñas hacia la isotropía estadística.

En todas las simulaciones rotantes y estratificadas de esta tesis se observa una ruptura de la isotropía estadística. Esto es consecuencia de la imposición de una dirección privilegiada, en este caso el eje vertical \hat{e}_z paralelo al eje de rotación $\hat{\Omega}$ y de estratificación \hat{g} . La anisotropía de las estructuras características del flujo se evidenciará más adelante donde mostraremos los cocientes entre las escalas integrales perpendiculares y las paralelas a \hat{e}_z para el conjunto de las simulaciones realizadas.

4.2. Simulaciones con 256^3 puntos

En la presente sección se presentan los resultados de las simulaciones con resolución $N^3 = 256^3$ de fluidos con $0,1 \leq N_{bv}/f \leq 10$, más una simulación de control sin rotación ni estratificación con $N_{bv} = 0$ y $f = 0$.

4.2.1. Parámetros y forzado del sistema

Como se describió en §3.1.4, se emplearon condiciones iniciales de reposo para el campo de velocidades, y nulas para las fluctuaciones de densidad en todo el espacio. Se utilizó un forzado de Taylor-Green, y la amplitud del forzado $f_0 = 0,095$ en la ecuación (3.8) fue elegida de tal forma que la energía converja en valores $\sim \mathcal{O}(1)$. La viscosidad $\nu = 2 \cdot 10^{-3}$ fue seleccionada de tal forma que sea posible resolver la escala de disipación con la presente resolución. La difusividad es $\kappa = 5 \cdot 10^{-3}$. El método numérico empleado utiliza la regla de los $2/3$ para evitar aliasing en la región de interés en el espacio de Fourier (ver §3.1). Luego, el máximo número de onda resuelto es $k_{\max} = N/3 \approx 85$.

Simulación	N_{bv}/f	N_{bv}	f	Re	Fr	Ro	Re_b	τ_{NLG}	α	ε	k_η	k_{fin}	ΔT_{NL}
A1	-	0	0	490	-	-	-	4.5	1.8 ± 0.4	0.023	41	12	13
A2	0.1	0.1	1	390	1.80	0.18	1300	5.6	2.2 ± 0.4	0.012	35	11	11
A3	0.25	0.25	1	420	0.77	0.19	250	5.2	2.2 ± 0.3	0.015	37	10	11
A4	0.25	2	8	310	0.071	0.018	1.6	7.0	- \pm -	0.0077	31	5	9
A5	0.5	0.5	1	440	0.40	0.20	70	5.0	2.3 ± 0.3	0.018	39	10	12
A6	0.5	4	8	720	0.082	0.041	4.8	3.1	- \pm -	0.0024	23	4	20
A7	1	1	1	470	0.21	0.21	22	4.7	2.4 ± 0.2	0.022	41	10	13
A8	1	4	4	800	0.091	0.091	6.6	2.7	- \pm -	0.0032	25	5	22
A9	1.54	1	0.65	460	0.21	0.33	21	4.7	2.3 ± 0.2	0.020	40	10	13
A10	2	2	1	520	0.12	0.24	7.3	4.2	2.7 ± 0.2	0.013	36	8	14
A11	2	8	4	920	0.053	0.11	2.6	2.4	- \pm -	0.0068	30	5	25
A12	2.5	10	4	880	0.040	0.10	1.4	2.5	- \pm -	0.0060	29	5	24
A13	3.5	3.5	1	540	0.070	0.25	2.7	4.1	2.7 ± 0.2	0.016	37	8	15
A14	5	5	1	550	0.050	0.25	1.4	4.0	2.7 ± 0.5	0.014	37	8	15
A15	10	10	1	560	0.026	0.26	0.37	3.9	2.3 ± 0.3	0.016	37	8	15
B1 (A3)	0.25	0.25	1	1100	0.82	0.20	740	4.9	1.9 ± 0.1	0.015	74	18	3
B2 (A5)	0.25	0.5	2	800	0.29	0.073	68	6.9	2.5 ± 0.4	0.0061	59	11	3
B3 (A5)	0.5	0.5	1	1200	0.43	0.22	220	4.6	2.0 ± 0.1	0.020	79	17	4
B4 (A6)	0.5	4	8	1800	0.08	0.040	11	3.1	- \pm -	0.007	61	4	1
B5 (A7)	1	1	1	1200	0.22	0.22	58	4.5	2.1 ± 0.1	0.020	79	14	4
B6 (A10)	2	2	1	1400	0.12	0.25	21	4.0	2.3 ± 0.2	0.014	72	11	4
B7 (A11)	2	8	4	2300	0.053	0.11	6.4	2.4	- \pm -	0.0029	49	4	2
B8 (A14)	5	5	1	1400	0.051	0.26	3.7	3.9	2.5 ± 0.3	0.015	74	10	5

Cuadro 4.1: Datos de simulaciones con $N = 256$ (A1 a A15) y $N = 512$ (B1 a B8). Se detalla (entre paréntesis) el estado final utilizado como condición inicial para el re-grillado. α es el exponente del ajuste de potencias sobre el espectro de energía isotropo, y $\Delta T_{NL} = T/\tau_{NLG}$ el número de tiempos no-lineales considerados en la ventana temporal de promediado. Ver la definición de las magnitudes en el texto.

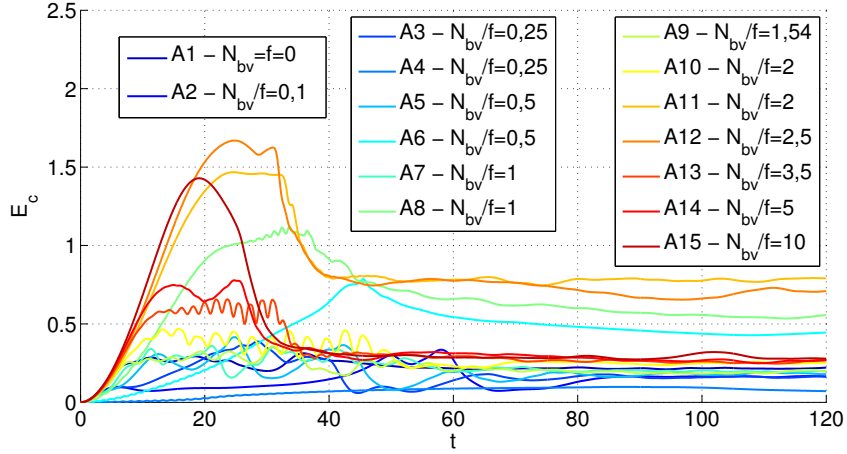


Figura 4.1: Energía cinética en función del tiempo para las simulaciones con $N = 256$ (simulaciones A1 a A15 en la tabla 4.1).

4.2.2. Estado estadísticamente estacionario

La figura 4.1 muestra la evolución de energía cinética para todas las simulaciones con $N = 256$, definida por simplicidad como $E_c(t) = \langle |\mathbf{v}|^2(t) \rangle_{\mathbf{x}}$. La escala temporal, en unidades adimensionales, corresponde al tiempo de giro de un vórtice en las escalas grandes con $L = 1$ y velocidad $U = 1$. Las curvas presentan un fuerte crecimiento inicial pues comienza a actuar el forzado de Taylor-Green sobre el fluido que se encuentra inicialmente en reposo, hasta llegar a un máximo a los $\sim 5 \tau_{NLG}$ (los tiempos no-lineales, τ_{NLG} , de cada simulación se detallan en el cuadro 4.1). Aquí es cuando la cascada directa de energía finalmente llega a excitar las escalas de disipación y el sistema comienza a disipar energía en forma significativa. Esto hace que la energía decrezca hasta estabilizarse en valores entre $\sim 0,2$ y $\sim 0,8$.

Para asegurar la estacionariedad del sistema, se dejó evolucionar la simulación

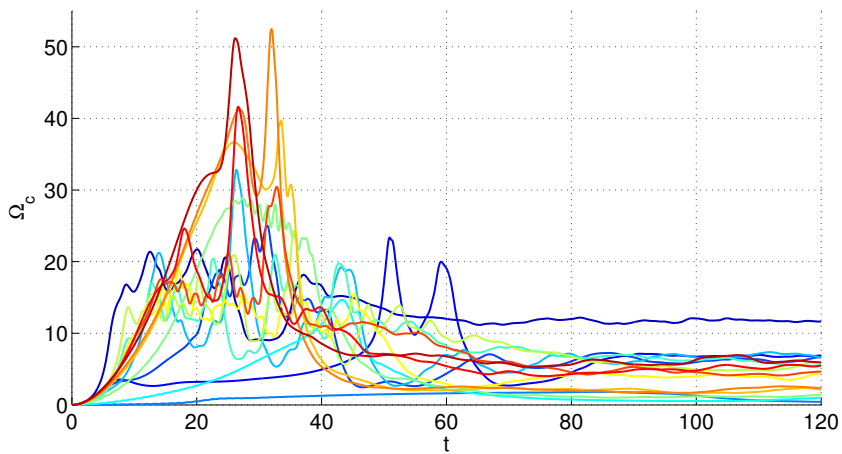


Figura 4.2: Enstrofia en función del tiempo para $N = 256$. El código de colores es el mismo que en la figura 4.1

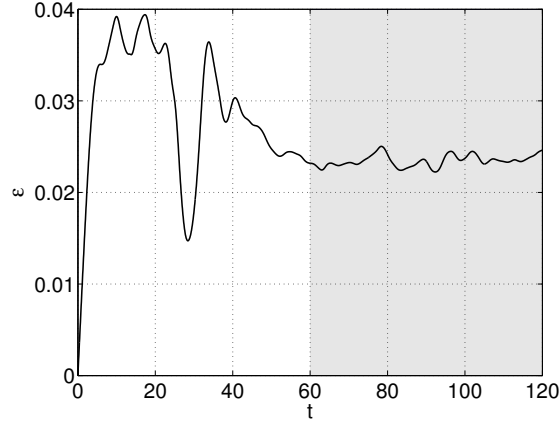


Figura 4.3: Tasa de inyección de energía cinética en función del tiempo, para la simulación A1 sin rotación ni estratificación. El promedio de la tasa de inyección, $\langle \varepsilon(t) \rangle_T = 0,023$, calculado sobre la región gris, se utiliza para estimar la escala de disipación.

hasta lograr la estabilización de la enstrofia $\Omega(t)$ alrededor de un valor asintótico. En todas las simulaciones, como se observa en la figura 4.2, esta convergencia se logró antes de $t_0 = 60$. Es por eso que para todos los cálculos de valores medios y transformadas de Fourier realizados en esta sección, se empleó la ventana temporal $I_t = [t_0, t_f] = [60, 120]$. El largo de las ventanas $T = t_f - t_0 = 60$ corresponde a entre 5 y 25 tiempos no-lineales, dependiendo de la simulación.

4.2.3. Estimación de la escala disipativa ($N_{bv} = f = 0$)

Como experimento de control, se realizó una simulación (A1 en la tabla 4.1) con $N = 256$ sin rotación ($f = 0$) ni estratificación ($N_{bv} = 0$). Para estimar la escala de disipación $\eta \sim 1/k_\eta$ de todas las simulaciones con $N = 256$, se empleó esta simulación de control, y se aplicó la estimación en la ecuación (2.40) que surge del análisis dimensional en la teoría de Kolmogorov: $\eta \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. La tasa de inyección media, $\langle \varepsilon(t) \rangle_T = 0,023$, se obtiene de promediar la curva de la figura 4.3 en la ventana temporal I_t . Esto resulta en una escala de disipación $\eta \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$, lo que equivale a decir que el rango disipativo comienza en el número de onda $k_\eta \approx 41$. Así, esta simulación, y las demás simulaciones con $N = 256$, están bien resueltas espacialmente.

4.2.4. Análisis espectral

A diferencia de la escala disipativa, los rangos inerciales fueron determinados para cada simulación en particular. En cada caso, el mismo se determinó como el rango de números de onda entre $k_F = 3$ y k_{fin} , para los cuales el flujo de energía

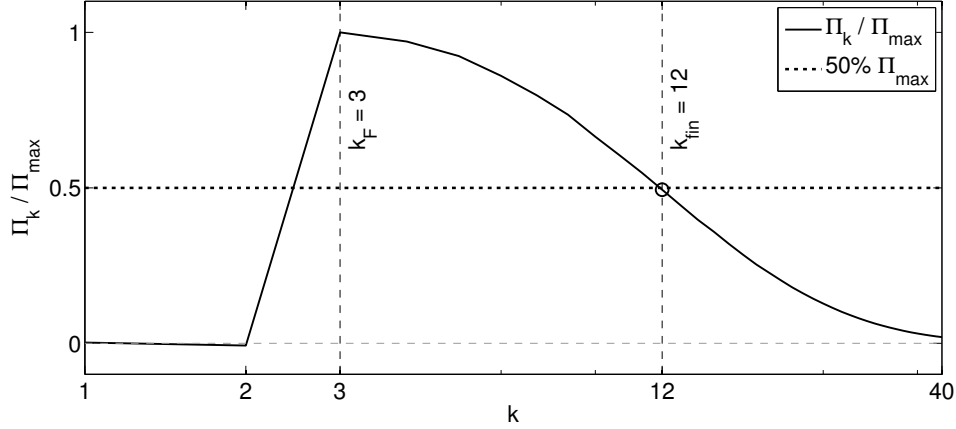


Figura 4.4: Flujo de energía total $\Pi(k)$ para la simulación A1 sin rotación ni estratificación, en escala logarítmica para el eje horizontal y lineal para el eje vertical. La línea punteada indica el inicio estimado del rango inercial, es decir el número de onda donde el forzado inyecta la energía, $k_F = 3$, mientras que el círculo indica el final estimado del rango inercial, $k_{\text{fin}} = 12$, definido como el punto en el que el flujo de energía decae a un 50 % de su valor máximo.

se mantenía considerablemente constante; es decir que en este rango la energía se conserva en forma aproximada mientras se transfiere entre escalas. Es necesario entonces establecer un valor arbitrario para la máxima caída aceptable del flujo. El criterio utilizado para determinar el fin del rango inercial k_{fin} , es que este sea el número de onda en el cual el flujo de energía $\Pi(k)$ decae a un 50 % de su valor máximo en la escala de inyección de energía. A modo de ejemplo, en la figura 4.4 se muestra la curva de flujo de energía para el caso de la simulación sin rotación ni estratificación, para la cual se obtiene como una aproximación del rango inercial el intervalo $[k_F, k_{\text{fin}}] = [3, 12]$. Más adelante será evidente que aumentando la resolución y disminuyendo la viscosidad, crecerá el número de Reynolds, y por lo tanto se extenderán los rangos inerciales de las simulaciones.

En la figura 4.5 se observa el espectro de energía isotrópico $E(k)$ compensado por $k^{-5/3}$, la ley de escalas predicha por la teoría de Kolmogorov para el espectro en un flujo turbulento isotrópico y homogéneo. Se espera que en el rango inercial $E(k)/k^{-5/3}$ se mantenga horizontal, luego la figura 4.5 indicaría que dentro del rango inercial estimado a partir de los flujos de energía vale la ley de escalas $k^{-5/3}$ de Kolmogorov de forma aproximada.

Una vez determinados los rangos inerciales de cada simulación, es posible realizar un ajuste de potencias en k sobre el espectro $E(k)$ en esta región para determinar cuál es la ley de potencias aproximada que se cumple en cada caso. Para hallar el exponente característico, se aplica un ajuste lineal de cuadrados mínimos sobre los datos en escala logarítmica $\{\log_{10}[k_i], \log_{10}[E(k_i)]\}$, restringido a los números de onda pertenecientes al rango inercial. En el caso de la simulación sin rotación ni

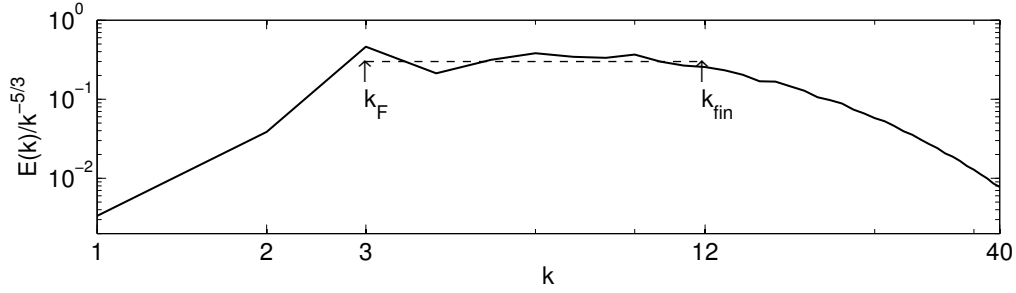


Figura 4.5: En línea sólida se grafica, en escala logarítmica, el espectro isótropo de la simulación sin rotación ni estratificación, compensado por $k^{-5/3}$, la ley de escala que predice la teoría K41 para el espectro en el rango inercial. La línea horizontal punteada se muestra a modo de referencia para comparar con el espectro compensado dentro del rango inercial, identificado como el rango en el cual el espectro compensado se mantiene aproximadamente plano.

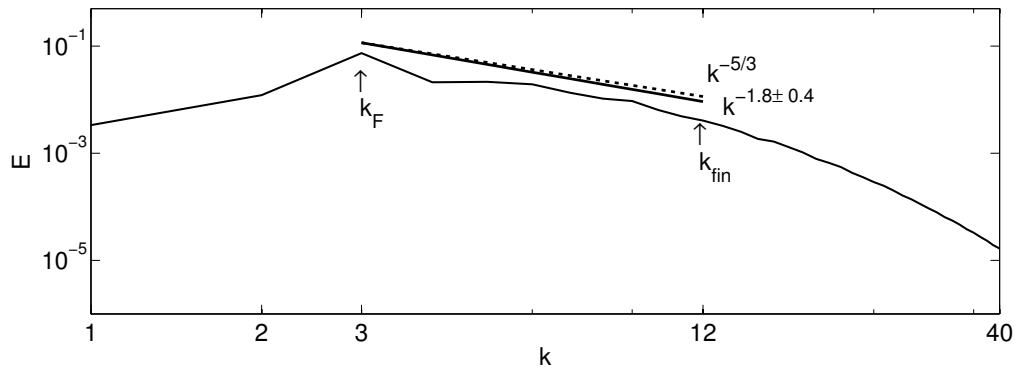


Figura 4.6: Espectro isótropo de la energía para la simulación A1 sin rotación ni estratificación. La recta de referencia punteada (\cdots) indica el exponente de escala $-5/3 \simeq 1,7$ que predice la teoría K41, mientras que la recta sólida ($—$) muestra el exponente $\alpha = 1,8 \pm 0,4$ que resultó del ajuste lineal aplicado sobre el logaritmo del espectro de energía en el rango inercial.

estratificación (ver fig. 4.6), se obtiene un exponente $\alpha = -1,8 \pm 0,4$ para la ley de potencias $E(k) \sim k^{-\alpha}$. Los errores presentados, así como en todos los parámetros de ajuste que se presenten a continuación, corresponden a los intervalos de confianza de 95% de los ajustes de cuadrados mínimos. Este exponente es compatible con el exponente $-5/3 \simeq 1,7$ que predice la teoría de Kolmogorov para turbulencia isótropa y homogénea.

Los rangos inerciales para cada una de las simulaciones con rotación y estratificación fueron determinados de forma análoga a cómo se hizo para la simulación de control A1. En la figura 4.7 se presentan los flujos de energía isótropos utilizados para hallar dichos rangos inerciales en las simulaciones con $f = 1$; además se grafican los flujos perpendiculares y paralelos (definidos en las ecs. (2.31a) y (2.31b) respectivamente). Todos los rangos inerciales comienzan aproximadamente en $k_F = 3$. Los

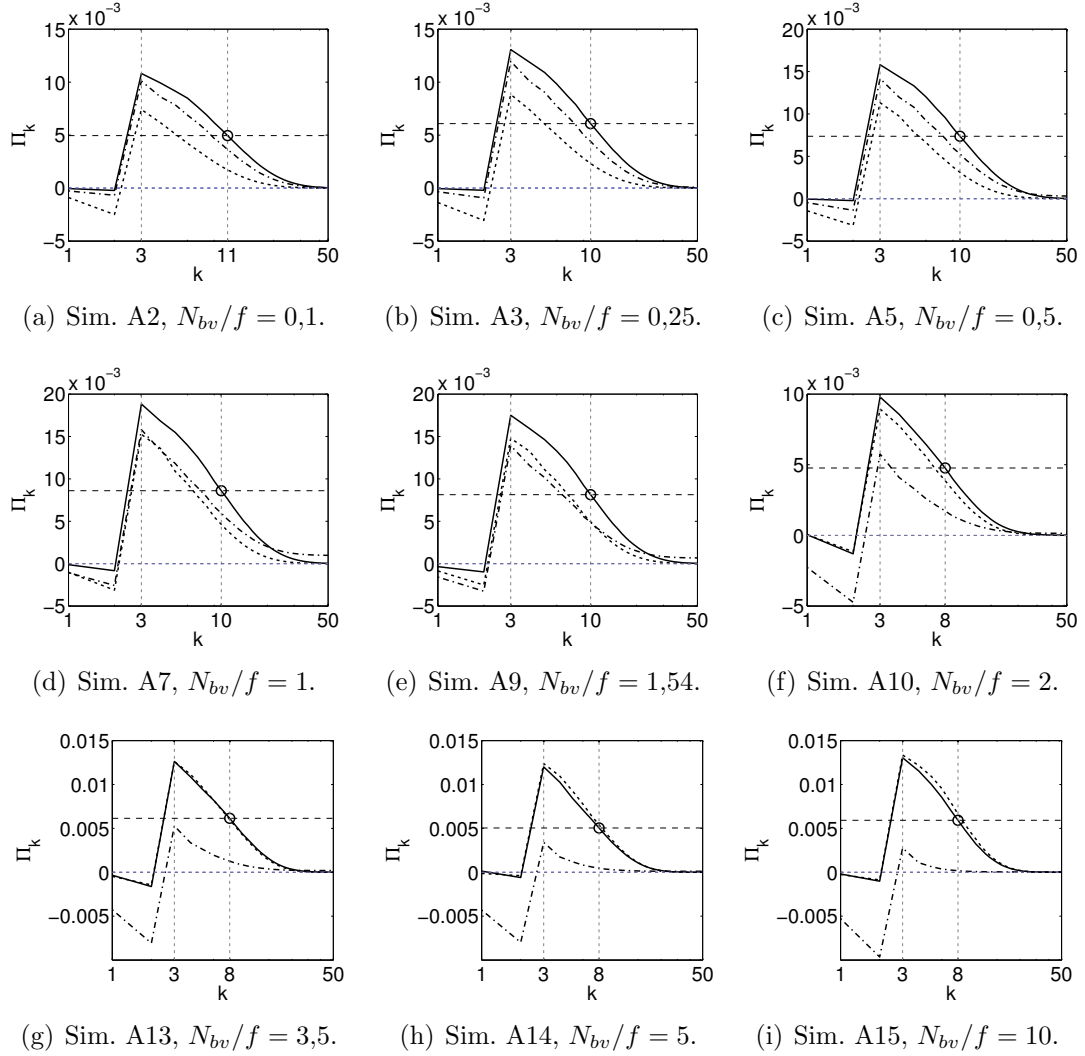


Figura 4.7: Flujos de energía isotrópico (—), perpendicular (— · —) y paralelo (···) de la energía total (definidos en las ecs. (2.23) y (2.31)), para las simulaciones con $N = 256$ y con $f = 1$. El círculo indica el fin del rango inercial, definido como el número de onda en el que el flujo decae a un 50 % de su máximo.

finales estimados de los respectivos rangos inerciales, k_{fin} , determinados a partir de los flujos de energía (fig. 4.7), están detallados en la tabla 4.1.

Dentro de los rangos inerciales se identificaron las leyes de potencias que siguen los espectros isotrópicos de cada una de las configuraciones. Como se describió en §2.5.4 y §2.4.3, se espera que el espectro de energía isotrópico en turbulencia rotante, dentro del rango inercial, siga una ley de escalas $E(k) \sim k^{-2}$, mientras que en los flujos estratificados se espera que siga la ley $E(k) \sim k^{-3}$. Ambas leyes de potencia corresponden al límite de Reynolds infinito. Para números de Reynolds más bajos, como es el caso de las simulaciones de esta tesis, puede esperarse un espectro más empinado en el rango inercial ya que hay disipación de energía no despreciable en

números de onda bajos.

Notar que los espectros de turbulencia rotante y estratificada son anisótropos (ver §2.4.3 y §2.5.4), por simplicidad aquí se consideran las leyes para los espectros isotrópicos, tomando a estas como aproximaciones de las leyes originales. Esta aproximación está fundamentada por el hecho de que en el rango inercial domina $E(k_{\perp})$ sobre $E(k_{\parallel})$ en el caso rotante, y viceversa en el caso estratificado (ver fig. 4.9). En la figura 4.8 se observan los espectros de energía cinética, potencial y total (suma de las últimas dos), para cada una de las simulaciones con $N = 256$ y con $f = 1$. Superpuestas a estos espectros, a modo de referencia se muestran las pendientes correspondientes a las leyes de escala aproximadas que se esperan en cada caso: $\sim k^{-2}$ para $N_{bv}/f < 1$, $\sim k^{-3}$ para $N_{bv}/f > 1$ y $\sim k^{-2,5}$ para $N_{bv} = f$. También se presentan las pendientes que salen de ajustar linealmente al espectro en escala logarítmica dentro del rango inercial estimado. Con excepción de la simulación A15 (para la cual $N_{bv}/f = 10$), en los casos presentados con $f = 1$ los espectros se vuelven más empinados a medida que se incrementa el valor de N_{bv} , con exponentes de escala tendiendo hacia $\alpha = 2$ cuando domina la rotación ($N_{bv}/f < 1$), y hacia $\alpha = 3$ cuando domina la estratificación ($N_{bv}/f > 1$). En la simulación A7 donde la rotación está balanceada con la estratificación ($N_{bv} = f$), el exponente del ajuste es $\alpha = 2,4 \pm 0,2$, valor compatible con la ley de potencias esperada para este caso, $\alpha = 2,5$. Además, a partir de los datos de la tabla 4.1, es evidente que la rotación y estratificación hacen que el espectro se vuelva más empinado que en el caso no rotante y no estratificado, donde el ajuste da un exponente $\alpha = 1,8 \pm 0,4$, valor compatible con el espectro $E(k) \sim k^{-5/3}$ de Kolmogorov. En casos en los que el rango inercial es muy angosto, en la tabla 4.1 no se presentan los exponentes característicos α debido a la falta de datos como para tener significancia estadística.

En las escalas integrales (números de onda tales que $k \lesssim k_F \sim 1/l_F$) de los espectros de las simulaciones predominantemente estratificadas A9-A15 (correspondientes a las figs. 4.8(e)-4.8(i), con $1,54 \leq N_{bv}/f \leq 10$) se observa una cierta acumulación de energía en escalas mayores a la de inyección (l_F), lo que aplanan el espectro en ese rango, en comparación con las simulaciones predominantemente rotantes (A1-A6). En la figura 4.7 también se observa un flujo de energía total negativo en el mismo rango para estas simulaciones, especialmente en los casos en el entorno de $N_{bv}/f \approx 2$ donde el flujo negativo es el más grande. Esto indicaría la posible presencia de una cascada de energía inversa como mecanismo de transferencia de energía a las escalas más grandes. Por otro lado, la energía potencial no presenta acumulación de energía en las escalas integrales.

Para comprender la estructura anisótropa del sistema a medida que se barre el parámetro N_{bv}/f , resulta útil mirar los espectros perpendicular $E(k_{\perp})$ y paralelo $E(k_{\parallel})$, definidos en las ecuaciones (2.28a) y (2.28b) respectivamente. En la figura 4.9

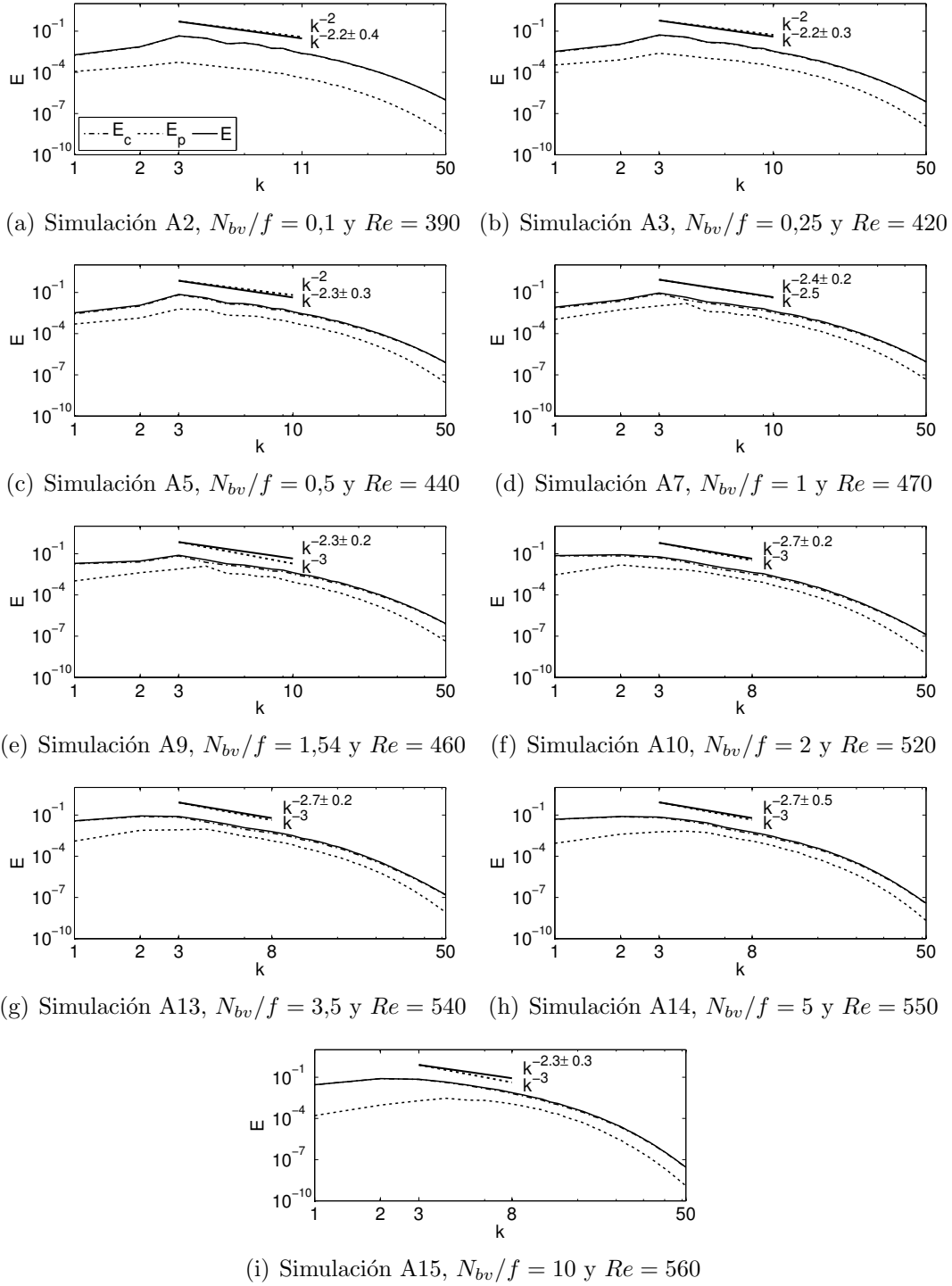


Figura 4.8: Espectros isotropos de la energía cinética ($-\cdot-$), potencial (\cdots) y total ($—$) promediados en la ventana temporal I_t , para las simulaciones con $N = 256$. La energía total casi no se aparta de la cinética, ya que en cada número de onda, la contribución de la energía potencial es aproximadamente un orden de magnitud menor a la energía cinética. Arriba de los espectros se grafican las pendientes correspondientes a la ley de escalas esperada según domine la rotación o estratificación ($—$), y a la pendiente del ajuste lineal del espectro de energía total en escala logarítmica, dentro del rango inercial estimado (\cdots).

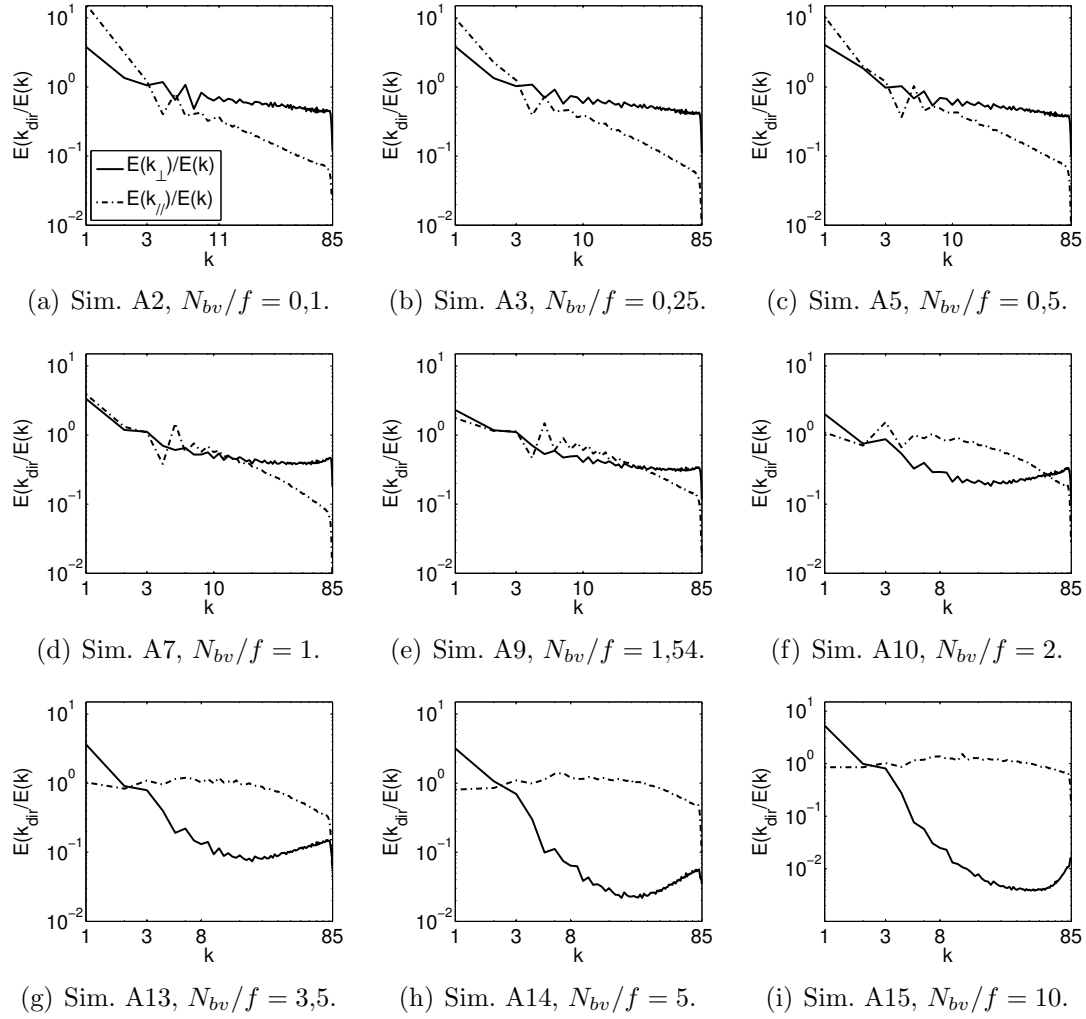


Figura 4.9: Espectros paralelo $E(k_{\parallel})$ y perpendicular $E(k_{\perp})$ de la energía total, promediados a lo largo de la ventana temporal entre $t_0 = 60$ y $t_f = 120$, y divididos por el espectro isótropo promedio $E(k)$, para las simulaciones con $N = 256$ y con $f = 1$.

se observa que en las mayores escalas ($k < k_F$), para $N_{bv}/f < 1$ domina la contribución del espectro paralelo de energía total $E(k_{\parallel})$ por encima de la del perpendicular $E(k_{\perp})$. Esta relación se invierte para $N_{bv}/f > 1$, donde domina $E(k_{\perp})$ por encima de $E(k_{\parallel})$. En contraste, para escalas en el rango inercial ($k_F < k < k_{\text{fin}}$), domina el espectro perpendicular respecto al paralelo para $N_{bv}/f < 1$, y el paralelo respecto al perpendicular para $N_{bv}/f > 1$. En las simulaciones con $N_{bv}/f < 1$, el dominio de $E(k_{\perp})$ sobre $E(k_{\parallel})$ se mantiene hasta las escalas disipativas. Sin embargo, para las simulaciones con estratificación dominante A9 ($N_{bv}/f = 1,54$) y A10 ($N_{bv}/f = 2$), en las figuras 4.9(e) y 4.9(f) respectivamente, se observa que la relación entre $E(k_{\perp})$ y $E(k_{\parallel})$, se vuelve a invertir, con $E(k_{\perp}) > E(k_{\parallel})$ en las escalas más pequeñas. En el caso de la simulación A9, este cruce se da alrededor del fin del rango inercial

($k \approx k_{\text{fin}}$) mientras que para A10, se da en números de onda mayores. Es decir, que en ambas simulaciones se presentan tres regiones marcadas por el inicio y fin del rango inercial. Finalmente, para el caso en el que la rotación y la estratificación están en balance $N_{bv} = f = 1$ (fig. 4.9(d)), se tiene que $E(k_{\parallel}) \approx E(k_{\perp})$ desde las escalas más grandes hasta aproximadamente el fin del rango inercial, dominando el espectro perpendicular en las escalas más pequeñas. Para las simulaciones estrictamente contenidas en el rango no-resonante ($1/2 < N_{bv}/f < 2$), pareciera que el fin del rango inercial marca un lugar relevante en la relación entre los espectros reducidos direccionales. Sería necesario realizar un mayor número de simulaciones dentro de este rango para confirmar la importancia de esta escala en la relación entre los espectros direccionales, y para confirmar la existencia de tres regiones de dominio, análogas a las observadas en las simulaciones A9 y A10. Sin embargo, con los datos aquí mostrados se da evidencia clara de tres regímenes del rango inercial en el espacio de parámetros. Para $N_{bv}/f < 1$, $E(k_{\perp}) \approx E(k)$ y domina la dinámica de todo el rango inercial (compatible con estructuras con forma de columna). Para $N_{bv}/f > 1$, $E(k_{\parallel}) \approx E(k)$ (compatible con un flujo en estratos o capas verticales). Y para $N_{bv}/f \approx 1$, $E(k_{\perp}) \approx E(k_{\parallel}) \approx E(k)$.

Para conocer las escalas en el espacio real de las estructuras formadas como consecuencia de la rotación o estratificación del sistema, resulta útil estudiar el cociente entre la escala integral perpendicular L_{\perp} y la paralela L_{\parallel} , definidas en las ecuaciones (2.58). Para calcular los resultados presentados aquí, se hace un paso del continuo al caso discreto, transformando las integrales de la ecuación (2.58) a sumas sobre números de onda hasta $k_{\text{max}} = N/3$,

$$L_{\perp} \equiv 2\pi \frac{\sum_1^{k_{\text{max}}} k_{\perp}^{-1} E(k_{\perp})}{\sum_1^{k_{\text{max}}} E(k_{\perp})}, \quad (4.1a) \quad L_{\parallel} \equiv 2\pi \frac{\sum_1^{k_{\text{max}}} k_{\parallel}^{-1} E(k_{\parallel})}{\sum_1^{k_{\text{max}}} E(k_{\parallel})}. \quad (4.1b)$$

En la figura 4.10 se muestra la evolución de la razón $L_{\perp}/L_{\parallel}(t)$ para la simulación A5. En la figura 4.11 se muestra para cada simulación, el promedio de $L_{\perp}/L_{\parallel}(t)$ calculado en las ventanas temporales I_t . Además de mostrar las simulaciones con $N = 256$, en esta figura mostramos también resultados para las simulaciones con $N = 512$ que serán discutidas en detalle en la próxima sección. Para $N = 256$, $I_t = [60, 120]$; las ventanas de integración para $N = 512$ se presentan en la tabla 4.1. La figura 4.11 también muestra una posible relación lineal directa $\langle L_{\perp}/L_{\parallel} \rangle_T = a N_{bv}/f + b$ (con $a > 0$) en la región no-resonante ($1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$), lo cual indica que la energía pasa de estar concentrada en grandes estructuras verticales a estar en grandes estructuras horizontales a medida que se aumenta el parámetro N_{bv}/f . Esta linealidad se pierde fuera del rango no-resonante. En la región de anulación de tríadas resonantes se espera que dominen los modos CG, con lo cual la relación

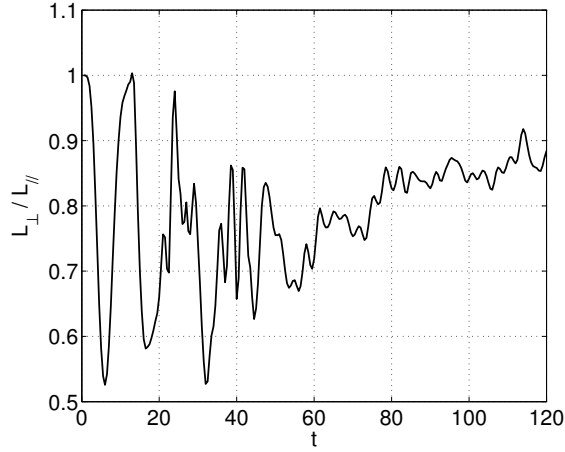


Figura 4.10: Evolución temporal del cociente entre la escala perpendicular y la paralela $L_{\perp}/L_{\parallel}(t)$ para la simulación A5 ($N_{bv}/f = 0,5$). Se observa que el cociente converge a un valor menor que 1, lo cual es esperable ya que la rotación es dominante en este caso

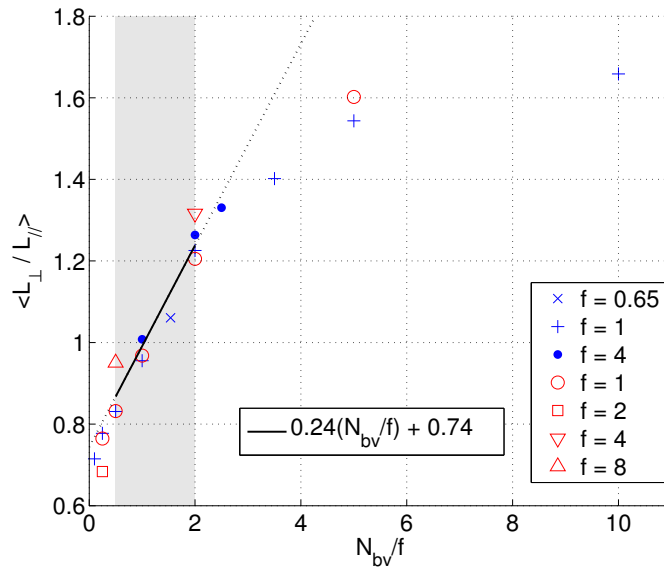


Figura 4.11: Cociente entre la escala integral perpendicular y la paralela, promediado en el tiempo durante el estado estacionario $\langle L_{\perp}/L_{\parallel} \rangle_T$, para distintas resoluciones ($N = 256$ en azul, $N = 512$ en rojo), y distintos valores de N_{bv} y f . La zona pintada de gris indica la región no-resonante, y la recta negra representa el ajuste lineal aplicado a los datos que pertenecen a este rango.

de linealidad observada en la figura 4.11 es compatible con la teoría de turbulencia cuasi-geostrófica (CG) de Charney [22]. Charney propone que el flujo turbulento CG es isótropo en la coordenada re-escalada $(N_{bv}/f)z$, lo que implica una escala vertical $L_{\parallel} \sim (f/N)L_{\perp}$, o lo que es lo mismo, $L_{\perp}/L_{\parallel} \sim N_{bv}/f$ [102]. Esta ley de escalas fue verificada en simulaciones numéricas de las ecuaciones CG [82] en las que se encontró que $L_{\perp}/L_{\parallel} \approx 1,3(N_{bv}/f)$. En la figura 4.11 se presenta un ajuste lineal

restringido a los datos contenidos en la región no-resonante, de donde se obtuvo una pendiente $a = 0,24 \pm 0,02$. Sin embargo, dado que aquí se utilizaron distintas definiciones para las escalas integrales direccionales (2.58a,2.58b), este valor no es directamente comparable con el publicado en [82].

Fuera de la región no-resonante se pierde la relación de linealidad: para $N_{bv}/f \gg 2$ se evidencia una saturación en el efecto de concentración de energía en escalas perpendiculares. No hay suficientes datos en la región $N_{bv}/f \ll 1/2$ para evaluar la validez de la relación de linealidad en esa región del espacio de parámetros.

4.2.5. Espectro axisimétrico

Continuando con el análisis de la distribución espectral de energía en función de N_{bv}/f , en la figura 4.12 se presentan las curvas de nivel de los espectros axisimétricos de energía cinética en función de k_{\perp} y k_{\parallel} , definidos en la ecuación (2.27). La escala logarítmica de grises indica la intensidad de $E_c(k_{\perp}, k_{\parallel})$ en cada punto del espacio Fourier. En el caso de perfecta isotropía se esperaría que las curvas de nivel formen arcos de un círculo. A medida que N_{bv}/f se aparta de la unidad, en el caso $N_{bv}/f > 1$, se evidencia una tendencia de la energía a acumularse sobre $k_{\perp} = 0$, mientras que en el caso $N_{bv}/f < 1$, sobre $k_{\parallel} = 0$. Las curvas de nivel se acomodan a esta distribución de energía anisótropa.

La isotropía para el caso $N_{bv} = f = 1$ es compatible con lo observado en la simulación A7 (fig. 4.12(d)). En las simulaciones A9-A15, con $N_{bv}/f > 1$ (figs. 4.12(e)-4.12(i)) es evidente que la energía se tiende a acumular hacia modos con $k_{\perp} = 0$ a medida que aumenta el grado de estratificación tal como se mencionó. En las simulaciones A2-A5, con $N_{bv}/f < 1$ (figs. 4.12(a)-4.12(c)), la acumulación de energía sobre $k_{\parallel} = 0$ esperada se observa de forma sutil si se compara el valor de k_{\perp} en el que cada curva de nivel cruza el eje horizontal, con el valor de k_{\parallel} en el que la misma curva de nivel cruza el eje vertical.

4.3. Simulaciones con 512^3 puntos

En esta sección se presentan los resultados de las simulaciones llevadas a cabo con resolución $N = 512$. A los análisis realizados en la sección anterior, se le agrega un estudio del espectro espacio-temporal $F(\mathbf{k}, \sigma)$ (donde F puede ser el espectro de potencia de v_x, v_y, v_z, θ o la energía total E) que permite capturar en mayor detalle la presencia o ausencia de ondas respectivamente fuera o dentro de la región no-resonante, $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$, definida en §2.6.6.

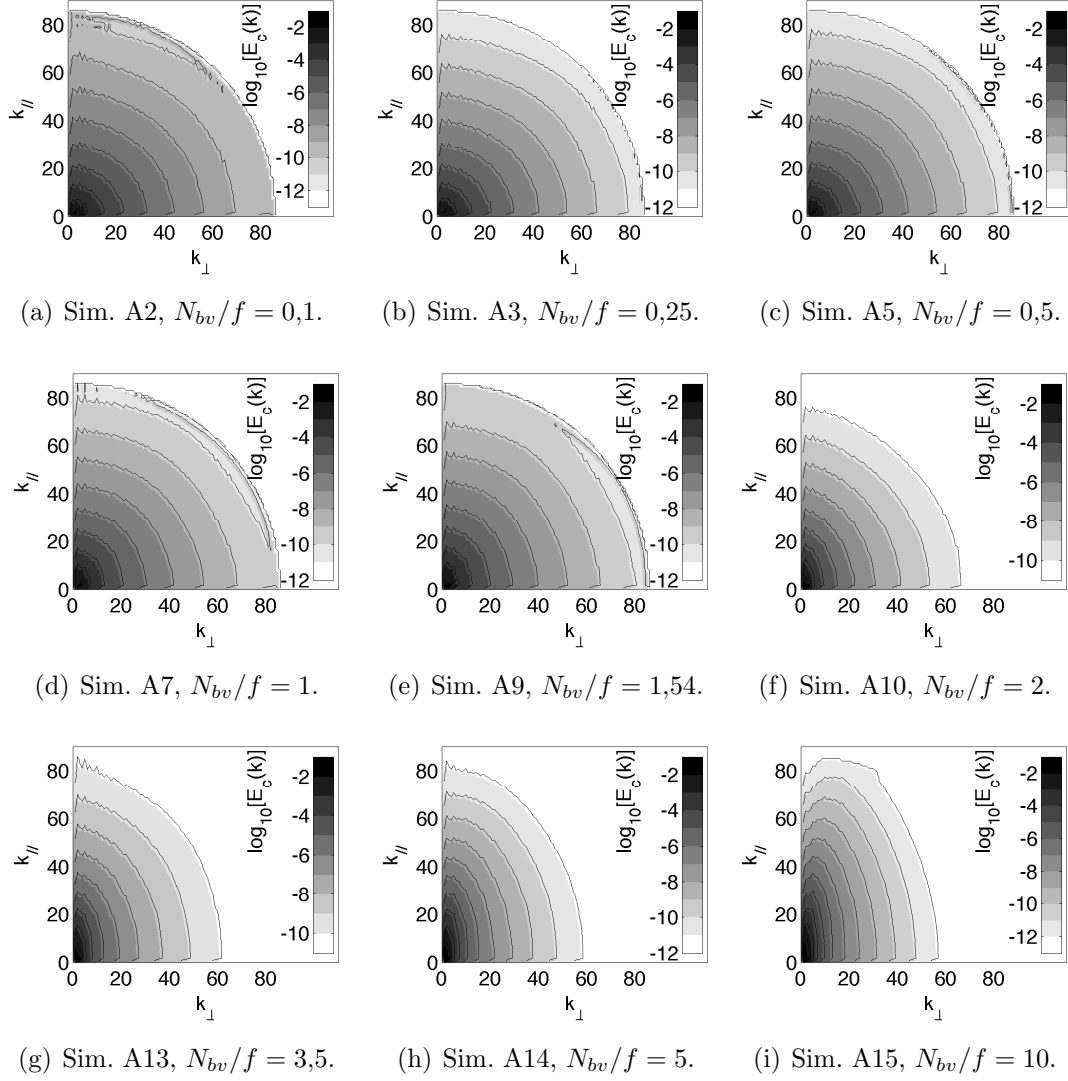


Figura 4.12: Espectro axisimétrico $E_c(k_{\perp}, k_{\parallel})$ de la energía cinética promediado sobre la ventana temporal entre $t_0 = 60$ y $t_f = 120$ para las simulaciones con $N = 256$. La escala logarítmica de grises indica la amplitud espectral en cada punto del plano k_{\perp}, k_{\parallel} .

4.3.1. Elección de parámetros de las simulaciones

Se utilizó una cadencia temporal lo suficientemente alta como para poder efectivamente calcular el espectro espacio-temporal $F(\mathbf{k}, \sigma)$ para cada campo F . Para capturar los efectos de ondas, el paso temporal debe ser por lo menos el doble de la frecuencia de las ondas más rápidas del sistema (de gravedad si $N_{bv}/f > 1$, o inerciales si $N_{bv}/f < 1$). Para el método de Runge-Kutta de segundo orden se utilizó un paso temporal de $dt = 10^{-3}$, adquiriendo la transformada Fourier espacial de los campos cada 10 pasos ($dt_s = 10^{-2}$), y adquiriendo las cantidades físicas globales (energía, enstrofia y tasa de inyección de energía) cada 20 pasos ($dt_g = 2 \cdot 10^{-2}$).

Para mantener $\varepsilon \sim \mathcal{O}(1)$ con la resolución aumentada, se redefine la viscosidad de tal forma que siga valiendo $k_\eta \sim k_{\max}$, donde $k_{\max} = N/3$ y $k_\eta \sim (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$. Luego, comparando con los valores de la simulación con $N = 256$

$$\begin{aligned} \frac{k_{\max}^{(256)}}{k_{\max}^{(512)}} &= \frac{256}{512} \sim \left[\frac{\varepsilon^{(256)}}{\varepsilon^{(512)}} \left(\frac{\nu^{(512)}}{\nu^{(256)}} \right)^3 \right]^{1/4} \sim \frac{k_\eta^{(256)}}{k_\eta^{(512)}}, \\ \Rightarrow \nu^{(512)} &\sim \left[\left(\frac{256}{512} \right)^4 \frac{\varepsilon^{(512)}}{\varepsilon^{(256)}} \right]^{1/3} \nu^{(256)}, \end{aligned}$$

y pidiendo $\varepsilon^{(512)} \sim \varepsilon^{(256)}$ por hipótesis de la teoría K41,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nu^{(512)} &\sim \left[\frac{256}{512} \right]^{4/3} \nu^{(256)}, \\ \nu^{(256)} = 2 \cdot 10^{-3} &\Rightarrow \nu^{(512)} \sim 8 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Luego, la viscosidad se configuró en $\nu = 8 \cdot 10^{-4}$. Se utilizó un forzado de Taylor-Green (3.8) con amplitud $f_0 = 9,5 \cdot 10^{-2}$ y nuevamente $k_F = 3$, barriendo N_{bv}/f entre 0,25 y 5. Los valores de N_{bv} y f fueron elegidos, igual que en la sección §4.2, de tal forma que no se viole la condición CFL con la resolución ampliada ($N = 512$) y el nuevo paso temporal ($dt = 10^{-3}$). Con el objetivo de ganar tiempo de cómputo, para cada una de las simulaciones con $N = 512$ se utilizó el último estado de la simulación asociada con $N = 256$ (de igual N_{bv} y f) como condición inicial, y el método de re-grillado descrito en la sección §3.2 para duplicar la resolución de la misma. De este modo se logra llegar a un estado turbulento estacionario en un menor tiempo de cómputo ($\sim 1\tau_{NLG}$), ya que el sistema sólo debe relajar a la nueva viscosidad y resolución.

Al igual que en la sección §4.2, para realizar los cálculos espectrales y de valores medios, se determinó un tiempo inicial t_0 considerado como el instante en el cual la enstrofia se estabiliza (fig. 4.13). En esta sección, los valores de t_0 no serán necesariamente iguales para cada una de las simulaciones, pues los tiempos de estabilización difieren. Para las simulaciones B1-B8 los tiempos iniciales de las ventanas temporales son $t_0 = 10, 10, 10, 5, 10, 10, 8$ y 6 respectivamente.

La estabilización hacia un nuevo estado estadísticamente estacionario se verifica en la evolución del espectro isótropo $E(k)$, que se observa a modo de ejemplo en la figura 4.14 correspondiente a la simulación B1. En la condición inicial el espectro decae rápidamente para $k > k_{\max}^{(256)}$ ($k_{\max}^{(256)} = 85$), ya que a $t = 0$ esos modos no tienen energía. A medida que el sistema se relaja a la nueva resolución y viscosidad, la cascada directa de energía excita las amplitudes espectrales correspondientes a

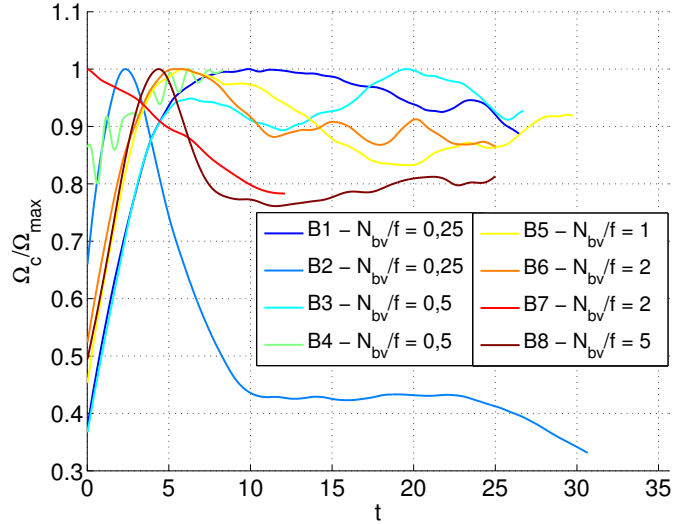


Figura 4.13: Enstrofía en función del tiempo para las simulaciones con $N = 512$, normalizada por el máximo valor de Ω_c en la serie temporal para observar mejor el detalle de las curvas.

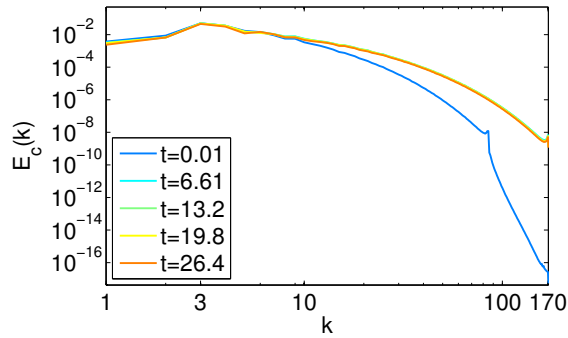


Figura 4.14: Espectro isótropo de energía cinética en múltiples instantes, para la simulación B1 con $N = 512$, $f = 1$ y con $N_{bv}/f = 0,25$.

números de onda $k_{\max}^{(256)} < k < k_{\max}^{(512)}$ ($k_{\max}^{(512)} = 170$), que eran inaccesibles para $N = 256$ pero que sí lo son para la resolución ampliada.

En cada simulación, de la misma forma que en §4.2, a partir del flujo de energía (ver la fig. 4.15) se estimó el fin del rango inercial del sistema. Los rangos inerciales resultantes para las simulaciones B1-B8 se detallan en la tabla 4.1. Todos comienzan aproximadamente en $k_F = 3$, y finalizan en el número de onda k_{fin} . Notar que al aumentar la resolución espacial, los rangos inerciales se ensanchan.

En las figuras 4.15, correspondientes a los flujos de energía de las simulaciones con $f = 1$ y N_{bv} entre 0,25 y 5, se evidencia que en las escalas más grandes el flujo negativo de energía es más intenso (mayor en módulo) para $\Pi_{k\parallel}$ que para $\Pi_{k\perp}$ en el caso de rotación dominante ($N_{bv}/f < 1$), y viceversa para cuando domina la estratificación ($N_{bv}/f > 1$). También, que para las simulaciones en el entorno de $N_{bv}/f \approx 2$ el flujo negativo toma su valor absoluto máximo. Es decir que la

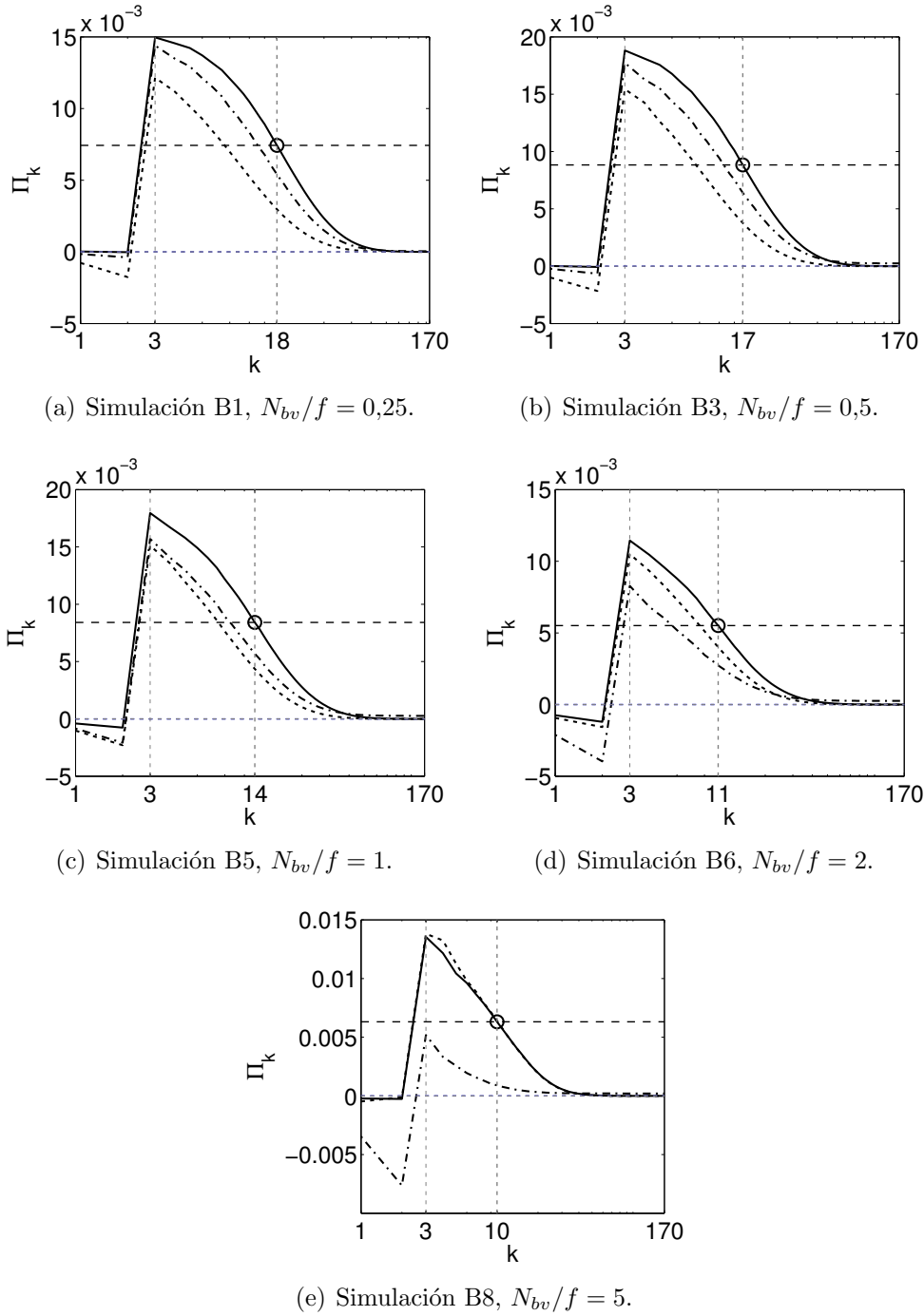


Figura 4.15: Flujo de energía cinética isotrópico (—), perpendicular (---) y paralelo (···), para las simulaciones con $N = 512$ y con $f = 1$.

transferencia inversa de energía es nuevamente máxima en el entorno de este valor.

Como consecuencia de la diferencia en la intensidad del flujo negativo en las direcciones k_{\perp} y k_{\parallel} al variar N_{bv}/f , tenderá a haber una mayor acumulación de energía en las escalas grandes hacia $k_{\parallel} = 0$ para el caso $N_{bv}/f \ll 1$, y hacia $k_{\perp} = 0$ para $N_{bv}/f \gg 1$. En contraste, en el rango inercial (escalas chicas con $k > k_F$), el

flujo de energía positivo (hacia escalas más pequeñas) es dominado por Π_{k_\perp} para $N_{bv}/f < 1$, y por Π_{k_\parallel} para $N_{bv}/f > 1$. Esto indica que en el caso de rotación dominante la transferencia de energía hacia escalas más pequeñas se lleva a cabo en el espacio de Fourier predominantemente de forma radial hacia afuera de los cilindros concéntricos con ejes principales paralelos a k_z , mientras que en el caso de estratificación dominante esta transferencia se realiza predominantemente a través de planos normales a k_z .

En resumen, en el caso de flujos predominantemente rotantes, la cascada inversa es dominada por la transferencia de energía en k_\parallel (hacia modos con $k_\perp \neq 0$ y $k_\parallel = 0$), mientras que la cascada directa es dominada por flujo de energía en k_\perp (hacia $k_\perp \gg k_F$). Esto es compatible con estructuras con forma de columna y con gradientes verticales despreciables. En contraste, en los flujos predominantemente estratificados, la cascada inversa es dominada por la transferencia de energía en k_\perp (hacia modos con $k_\parallel \neq 0$ y $k_\perp = 0$), mientras que la cascada directa es dominada por flujo de energía en k_\parallel (hacia $k_\parallel \gg k_F$). Esto es compatible con estructuras con forma de capas con fuertes gradientes verticales y gradientes horizontales despreciables, y con la formación de vientos horizontales con cizalla vertical. Todos estos resultados también son consistentes con lo observado en la resolución más baja (ver fig. 4.7).

Una vez determinados los rangos inerciales, es posible buscar los exponentes que caracterizan las leyes de escala de los espectros de energía en este rango. Los exponentes observados en los rangos inerciales (ver tabla 4.1 y fig. 4.16) se encuentran entre los exponentes esperados para la turbulencia rotante ($E(k) \sim k^{-2}$, ver §2.5.4) y la estratificada ($\sim k^{-3}$, ver §2.4.3). En la figura 4.16 que muestra los espectros de las simulaciones con $N = 512$ y con $f = 1$, se observa que así como ocurría con $N = 256$, con $N = 512$ el espectro de energía se vuelve más empinado a medida que se incrementa el parámetro N_{bv} . Para la simulación B1 con $N_{bv}/f = 0,25$, la pendiente del ajuste lineal del espectro en escala logarítmica es $1,9 \pm 0,1$, es decir, compatible con la ley de potencias esperada para flujos predominantemente rotantes. En el otro extremo, para la simulación B8 con $N_{bv}/f = 5$, la pendiente según el ajuste es $2,5 \pm 0,3$, que se aproxima a la pendiente esperada para flujos predominantemente estratificados.

La mayor intensidad del flujo negativo para $\Pi(k_\parallel)$ ($\Pi(k_\perp)$) mencionada más arriba, en comparación con $\Pi(k_\perp)$ ($\Pi(k_\parallel)$) en el caso de $N_{bv}/f = 0,25$ ($N_{bv}/f = 5$) observada entre las figuras 4.15(a) y 4.15(e), es consistente con la acumulación de energía en grandes escalas que se observa en el espectro paralelo $E_c(k_\parallel)$ (perpendicular $E_c(k_\perp)$) en la figura 4.17(a) (4.17(b)). Estas observaciones indican una cascada de energía inversa hacia grandes escalas en k_\parallel en el caso de rotación dominante, y una transferencia hacia escalas grandes en k_\perp en el caso de estratificación dominante. Los mecanismos de cascadas inversas de energía son los responsables de la

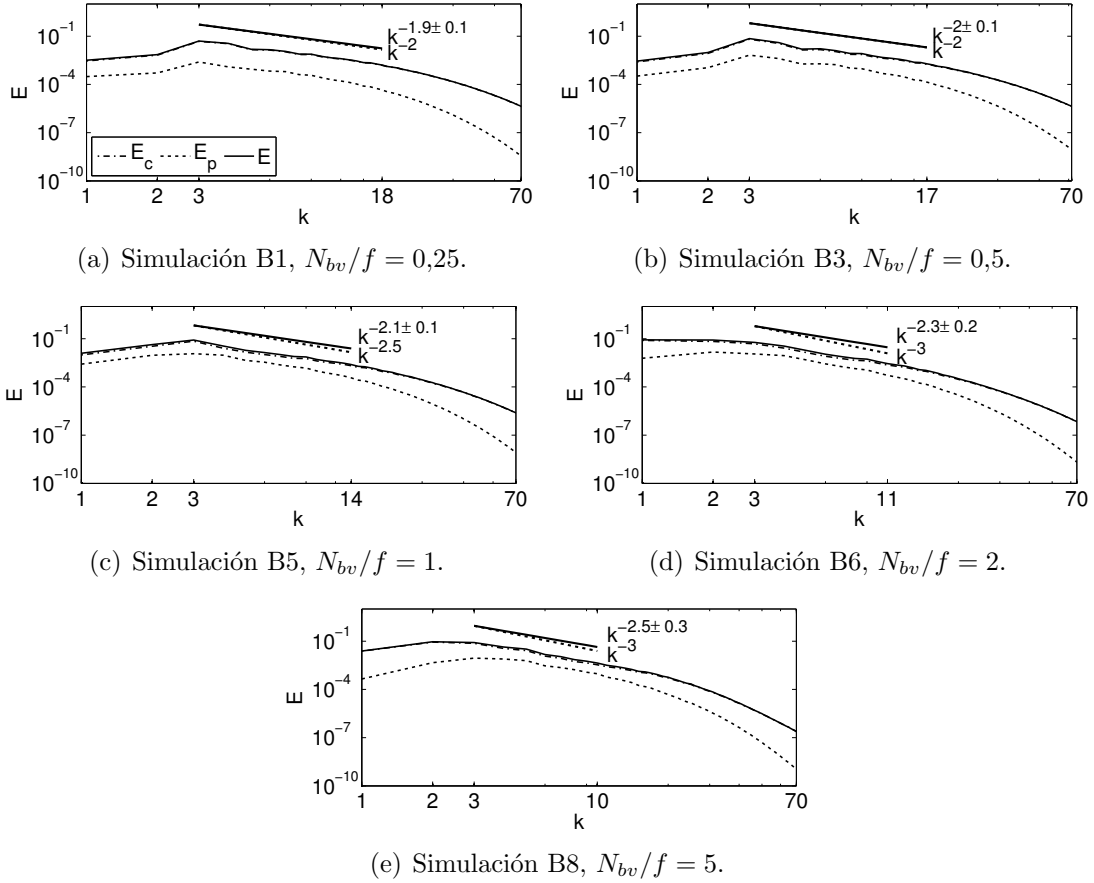


Figura 4.16: Espectros isotropos de la energía cinética ($-\cdot-$), potencial ($\cdot\cdot\cdot$) y total ($—$) promediados sobre las ventanas temporales I_t , definidas independientemente para cada una de las simulaciones con $N = 512$ y con $f = 1$. Diferentes leyes de potencia se muestran como referencia.

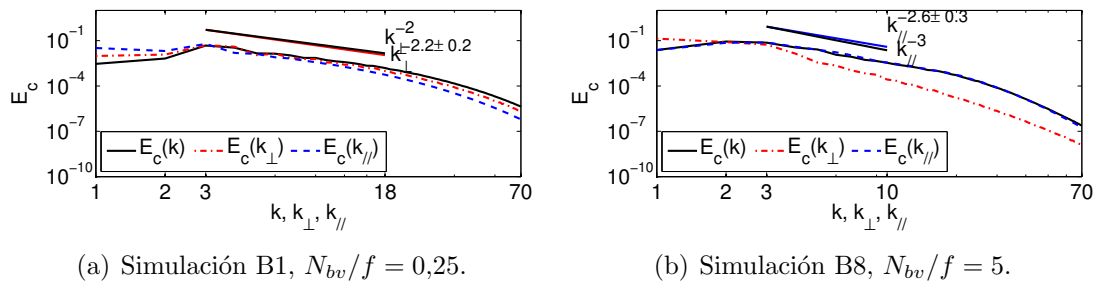


Figura 4.17: Espectros isotropo, paralelo y perpendicular de la energía cinética, promediados sobre las ventanas temporales I_t correspondientes a cada una de las simulaciones B1 y B8, con $N_{bv}/f = 0,25$ y $N_{bv}/f = 5$ respectivamente, y ambas con $f = 1$.

relación directa entre $\langle L_{\perp}/L_{\parallel} \rangle_T$ y N_{bv}/f observada en la figura 4.11.

Por otro lado, para $k > k_F$, al igual que en los flujos direccionales de la figura

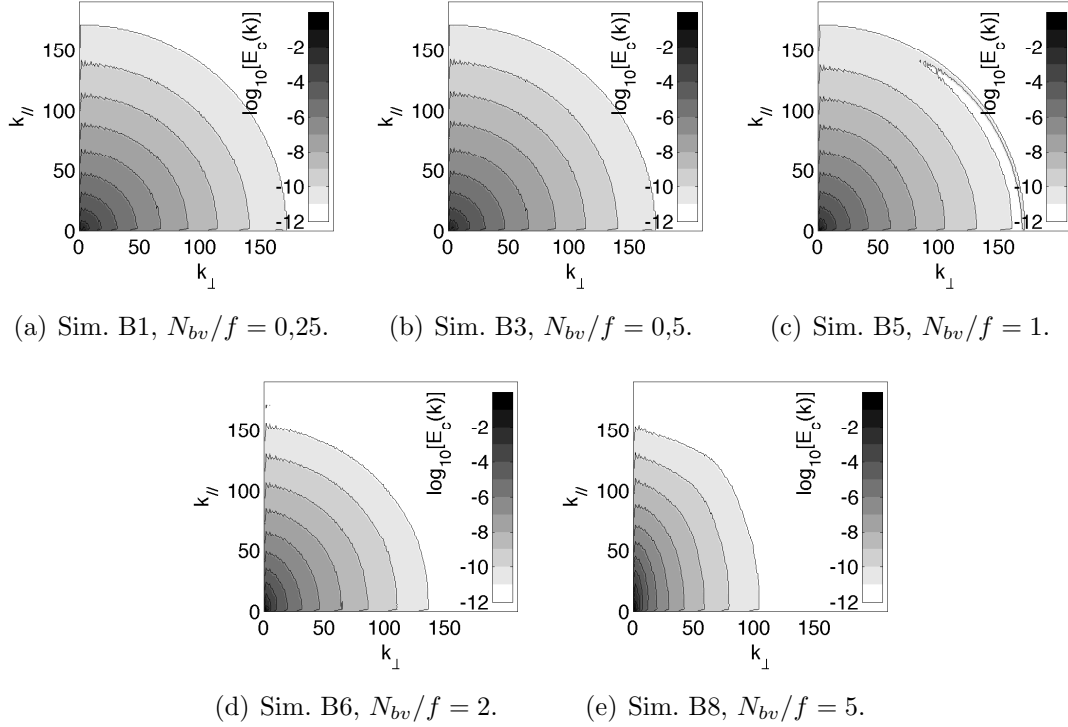


Figura 4.18: Espectro axisimétrico de la energía cinética en función de las componentes paralela y perpendicular del número de onda, promediado temporalmente, para las simulaciones con $N = 512$ y con $f = 1$.

4.15, en los espectros reducidos de la figura 4.17 se observa que en la simulación con $N_{bv}/f = 0,25$ domina el espectro perpendicular de la energía cinética $E_c(k_{\perp})$ (fig. 4.17(a)), mientras que en el caso con $N_{bv}/f = 5$ domina el espectro paralelo $E_c(k_{\parallel})$ (fig. 4.17(b)).

4.3.2. Espectro axisimétrico

Al igual que para $N = 256$ (§4.2.5), se calcularon los espectros axisimétricos de la energía cinética $E_c(k_{\perp}, k_{\parallel})$ cada 200 pasos temporales, es decir con una cadencia $dt_s = 0,2$. Estos espectros axisimétricos fueron luego promediados a lo largo de las ventanas temporales I_t correspondientes a cada simulación, para producir las figuras 4.18 en donde se presentan las curvas de nivel de los espectros en el plano k_{\perp}, k_{\parallel} .

En las simulaciones con $N_{bv}/f = 0,25$ y $0,5$ se esperaría una transferencia predominante de energía hacia modos con $k_{\parallel} = 0$. Estos modos que surgen en la turbulencia puramente rotante son denominados en la literatura como modos bidimensionales o 2D [25, 19, 51], y como ya se mencionó tienden a formar estructuras vorticales estiradas en el eje \hat{e}_z con “forma de filamentos” o columnas (ver fig. 2.3). La propagación de energía para formar estas estructuras se hace mediante ondas

inerciales cuya velocidad de grupo es máxima en dirección $\hat{\mathbf{e}}_z$. En las figuras 4.18(a) y 4.18(b), correspondientes a las simulaciones B1 y B3, esto se observa como un sutil aplastamiento de las curvas de nivel del espectro axisimétrico hacia el eje $k_{\parallel} = 0$.

Por otro lado, en la figura 4.18(e), que corresponde a la simulación B8, con $N_{bv}/f = 5$, se evidencia claramente un aplastamiento de las curvas de nivel hacia el eje $k_{\perp} = 0$. Esta observación verifica que el flujo de energía ocurre predominantemente hacia modos con $k_{\perp} = 0$, conocidos como modos unidimensionales o 1D, característicos de la turbulencia puramente estratificada [26, 90, 19, 60]. En los modos 1D hay una propagación de energía en el plano $x - y$ mediante ondas de gravedad, lo que termina formando estructuras aplanadas con “forma de panqueque” en este plano, y con espesor despreciable en el eje $\hat{\mathbf{e}}_z$ (ver fig. 2.2).

4.3.3. Espectro espacio-temporal

En esta sección se presentan los espectros espacio-temporales de los campos v_x y v_z , con el fin de detectar la presencia o ausencia de ondas de gravedad-inerciales en los sistemas estudiados. Como se mencionó anteriormente, para realizar este análisis se debieron almacenar los campos con muy alta cadencia, con $dt_s = 10^{-2}$, para poder resolver las ondas en el tiempo y el espacio.

En los sistemas con rotación dominante ($N_{bv}/f \ll 1$) se considera el campo v_x pues se espera que esta componente del campo de velocidades sea más intensa cuando haya ondas inerciales ya que la perturbación ocurre en el plano $x - y$ según la ecuación (2.73). En contraste, para los sistemas fuertemente estratificados ($N_{bv}/f \gg 1$) se considera v_z pues es la componente que se espera sea más intensa en las ondas de gravedad según la ecuación (2.63). Para los sistemas más balanceados ($N_{bv} \approx f$), se presentan los espectros de ambas componentes. Dado que los espectros dependen de $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ y de la frecuencia σ , para visualizar estos espectros de forma más clara se fijan algunas componentes de \mathbf{k} . En el caso de v_x se fijan $k_y = 0$ y k_x en 3 valores ($k_x = 0, 3, 6$), y se toman k_z y σ como variables. Por otro lado, para v_z se fijan $k_y = 0$ y $k_z = 0, 3, 6$, y se toman k_x y σ como variables.

Una vez fijado el vector de onda, se toma la DFT (transformada de Fourier discreta por sus siglas en inglés) de la componente cartesiana $v_i(\mathbf{k})$ en el tiempo, para pasar del dominio temporal t al dominio espectral σ , con lo que se obtiene $\hat{v}_i(k_x, k_y, k_z, \sigma)$. El algoritmo utilizado para la FFT se encuentra en [33, 34]. La DFT se define como

$$\hat{v}(\mathbf{k}, \sigma_q) = \sum_{p=1}^M v(\mathbf{k}, t_p) e^{(-2\pi i/M)(p-1)(q-1)}, \quad (4.2)$$

donde M es el número de puntos utilizados en la DFT, igual al número de puntos

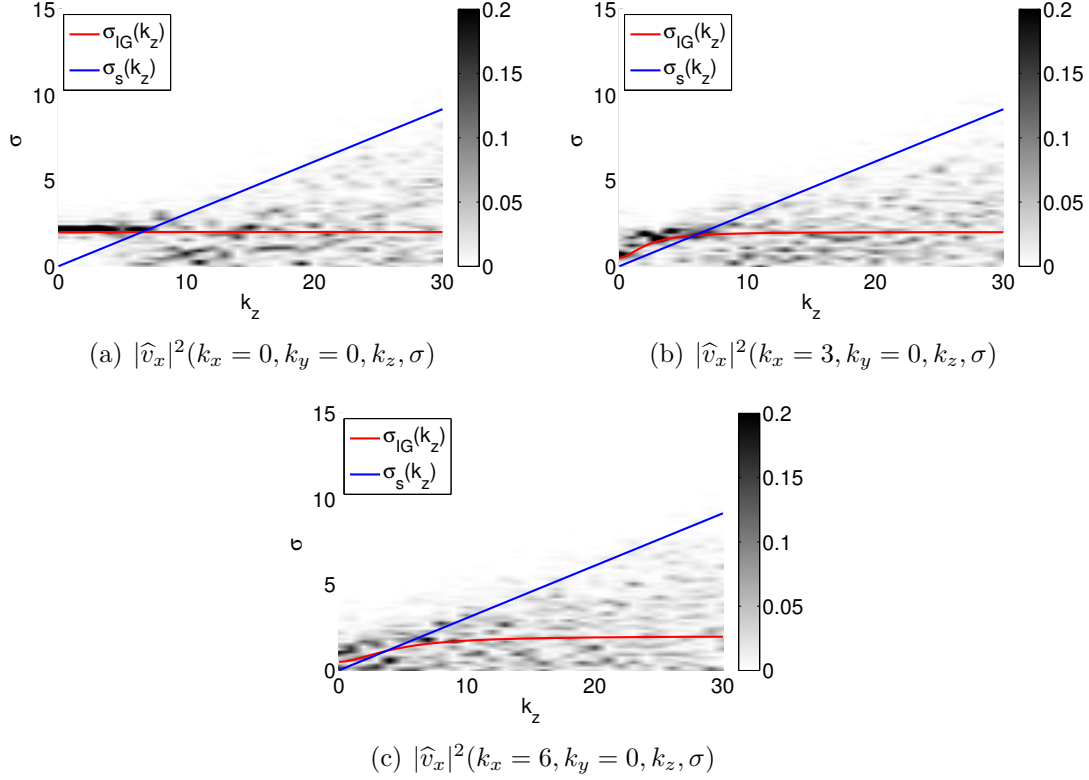


Figura 4.19: Espectro de potencia espacio-temporal de la velocidad en x para la simulación B2 con $N_{bv}/f = 0,25$ y $f = 1$: $|\widehat{v}_x|^2(k_x = k_0, k_y = 0, k_z, \sigma)$, donde en (a) $k_0 = 0$, (b) $k_0 = 3$, y (c) $k_0 = 6$. La curva roja muestra la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales (2.82) que predice la teoría de ondas resonantes, fuera de la región $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$. En azul, la “relación de dispersión” del barrido dada por la ecuación (2.94).

de discretización en el tiempo t_p y al número de frecuencias discretas σ_q .

En la figura 4.19 se consideran los espectros de potencia $|\widehat{v}_x|^2(k_x, k_y = 0, k_z, \sigma)$ con $k_x = 0, 3, 6$ para la simulación B2, con $N_{bv}/f = 0,25$ y $f = 1$. En las figuras 4.19(a) y 4.19(b) (correspondientes a $k_x = 0$ y $k_x = 3$ respectivamente) se observa que las mayores amplitudes espectrales se superponen con la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales $\sigma_{IG}(k_z)$, siempre que $\sigma_{IG}(k_z)$ sea mayor a $\sigma_s(k_z)$ (la “relación de dispersión” del barrido). Este fenómeno también se observa, con menor claridad, en la figura 4.19(c) correspondiente a $k_x = 6$. Una vez que $\sigma_s(k_z)$ supera a $\sigma_{IG}(k_z)$, se pone en evidencia el efecto de barrido: en vez de que la energía se concentre sobre una curva bien definida, para cada k se excitan todas las frecuencias entre 0 y $\sigma_s(k) = Uk$. En otras palabras, el tiempo característico más corto (o la frecuencia más alta) domina la dinámica de cada escala espacial. Se define entonces aquí a k_s como el número de onda en el que $\sigma_{IG}(k_s) = \sigma_s(k_s)$, es decir en el que se cruzan la relación de dispersión ondulatoria y la “relación de dispersión” del barrido.

A continuación se presentan las figuras del espectro espacio-temporal de las simulaciones en el rango de anulación de tríadas resonantes $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ (figs. 4.20 a 4.22). En este rango de parámetros, no hay una clara anisotropía definida, por lo que se grafican tanto el espectro espacio-temporal $|\widehat{v}_x|^2$, como $|\widehat{v}_z|^2$.

En el caso de la simulación B4, con $N_{bv}/f = 0,5$ y $f = 8$ (fig. 4.20), se observa un mejor acuerdo entre la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales y el espectro de potencias de v_x que para el de v_z . En general, se esperaría que haya un mejor acuerdo para v_x que para v_z para la rotación dominante, que es el caso de la simulación B4 (aunque sin demasiada intensidad). Nuevamente, para números de onda $k > k_s$, se evidencia el barrido de frecuencias por el flujo en escalas grandes entre 0 y $U k$. Este sistema está justo sobre el borde de la región no-resonante, lo que podría explicar que todavía se detecten ondas en los espectros espacio-temporales.

A medida que N_{bv}/f se adentra en el rango de anulación de tríadas resonantes, se espera que se pierda el acuerdo entre los espectros del campo de velocidades y la relación de dispersión de las ondas. En la figura 4.21 se presentan los espectros espacio-temporales correspondiente a la simulación B5, con $N_{bv}/f = 1$ y $f = 1$. Allí se observa un inesperado acuerdo entre el espectro $|\widehat{v}_x|^2(k_x = 0, k_y = 0, k_z, \sigma)$ y la relación de dispersión ondulatoria (fig. 4.21(a)) para $k < k_s$. En el resto de las figuras, como consecuencia de que las curvas $\sigma_{IG}(k)$ y $\sigma_s(k)$ se cruzan en números de onda muy bajos, no se logra determinar de forma clara si es que hay superposición o no entre el espectro y la relación de dispersión para $k < k_s$. De todas formas, el resultado final es que en esta simulación el rol de las ondas es poco importante ya que se observa muy poca acumulación de la energía en el entorno de la relación de dispersión cuando se la compara con el caso $N_{bv}/f = 0,5$ mostrado en la figura 4.20.

Nuevamente en el borde de la región no-resonante, en la figura 4.22 se presentan los espectros correspondientes a la simulación B6, con $N_{bv}/f = 2$ y $f = 1$. Se observa algún acuerdo entre el espectro y la relación de dispersión ondulatoria para $k < k_s$. En particular, en las figuras 4.22(d), 4.22(f) correspondientes a los espectros de v_z con $k_z = 0$ y 6 respectivamente, y en la figura 4.22(a) correspondiente al espectro de v_x con $k_x = 0$, se observan algunos indicios de superposición entre el espectro y la relación de dispersión ondulatoria. Pero de nuevo, el hecho de que el barrido comience a actuar en números de onda bajos no permite una clara distinción visual de la concentración de amplitud espectral sobre $\sigma_{IG}(k)$. Más adelante veremos una forma de cuantificar la importancia de las ondas que va más allá de esta inspección visual, y que resolverá este problema.

Finalmente, en la figura 4.23 se presentan los espectros $|\widehat{v}_z|^2(k_x, k_y = 0, k_z = k_0, \sigma)$ para la simulación B8, con $N_{bv}/f = 5$ y $f = 1$, y para $k_0 = 0, 3$ y 6. En la figura 4.23(c), con $k_z = 6$, se observa una superposición no muy marcada de la excitación de algunos modos con la relación de dispersión de ondas para

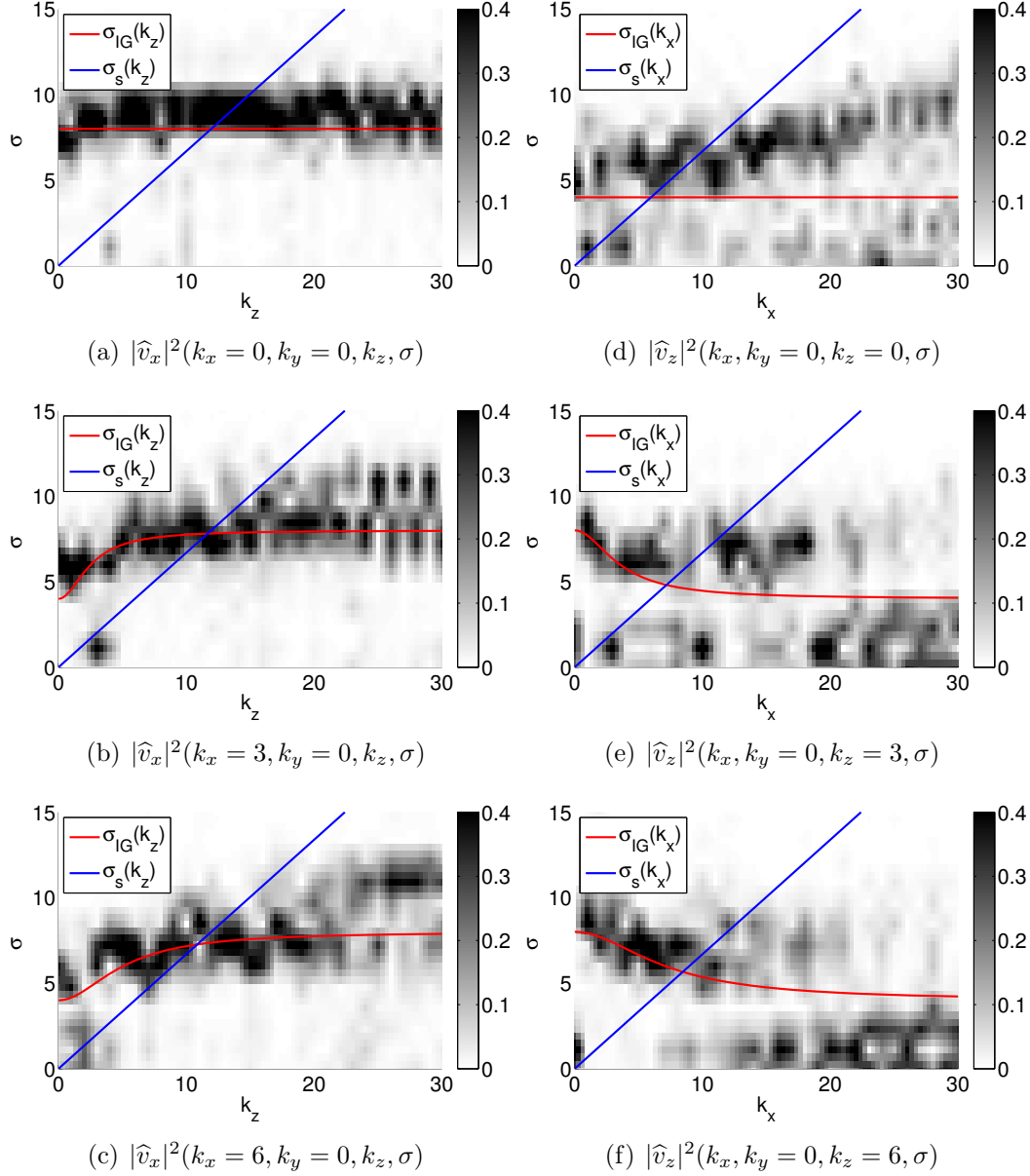


Figura 4.20: Espectro de potencia espacio-temporal de la velocidad en x (a-c) y en z (d-f) para la simulación B4 con $N_{bv}/f = 0,5$ y $f = 8$: $|\widehat{v}_x|^2(k_x = k_0, k_y = 0, k_z, \sigma)$ y $|\widehat{v}_z|^2(k_x, k_y = 0, k_z = k_0, \sigma)$ respectivamente, donde en (a) y (d) $k_0 = 0$; en (b) y (e) $k_0 = 3$; y en (c) y (f) $k_0 = 6$. La curva roja muestra la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales (2.82) que predice la teoría de ondas lineales. En azul, la “relación de dispersión” del barrido dada por la ecuación (2.94).

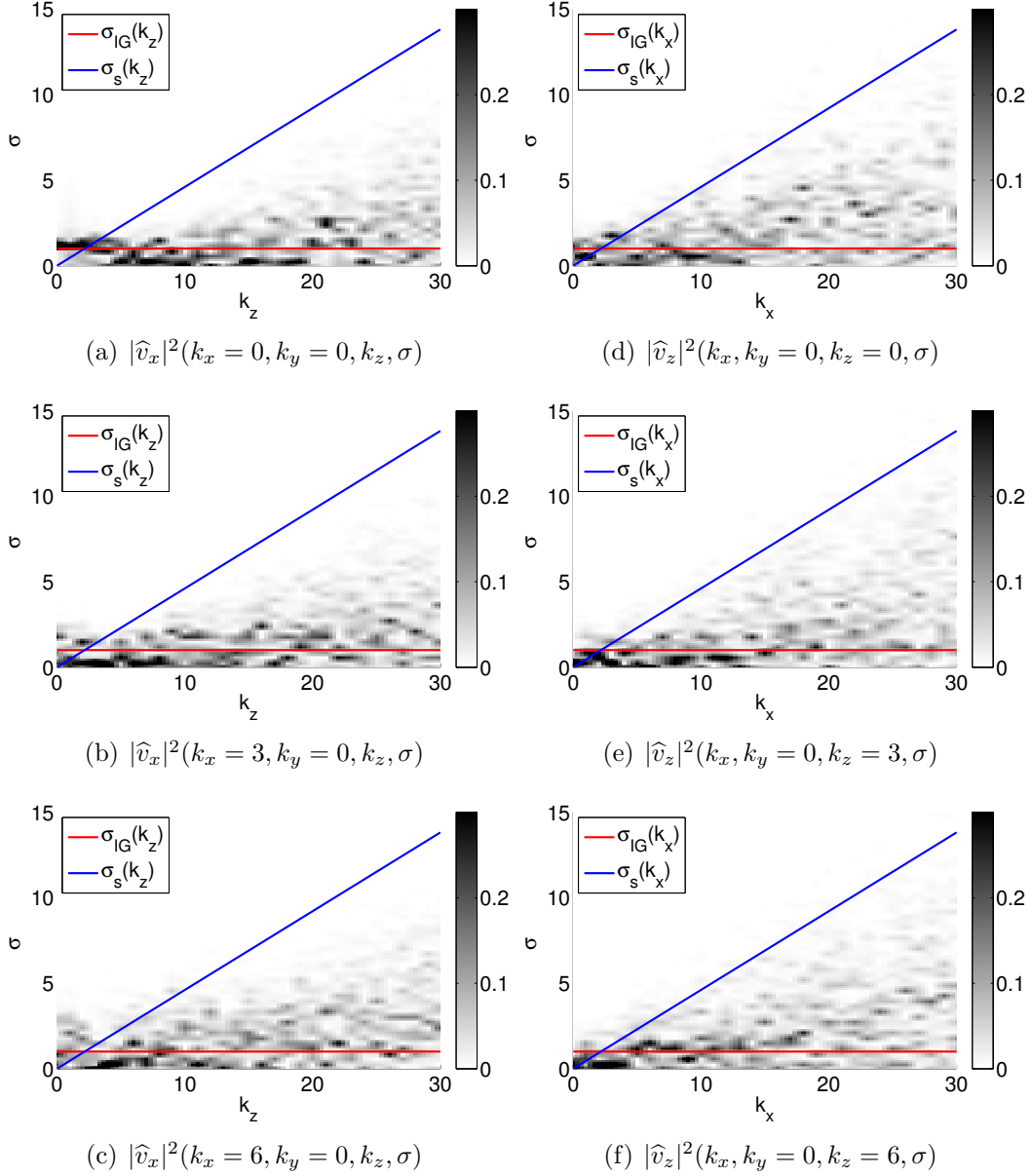


Figura 4.21: Espectro de potencia espacio-temporal de la velocidad en x (a-c) y en z (d-f) para la simulación B5 con $N_{bv}/f = 1$ y $f = 1$: $|\widehat{v}_x|^2(k_x = k_0, k_y = 0, k_z, \sigma)$ y $|\widehat{v}_z|^2(k_x, k_y = 0, k_z = k_0, \sigma)$ respectivamente, donde en (a) y (d) $k_0 = 0$; en (b) y (e) $k_0 = 3$; y en (c) y (f) $k_0 = 6$. La curva roja muestra la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales (2.82) que predice la teoría de ondas lineales. En azul, la “relación de dispersión” del barrido dada por la ecuación (2.94).

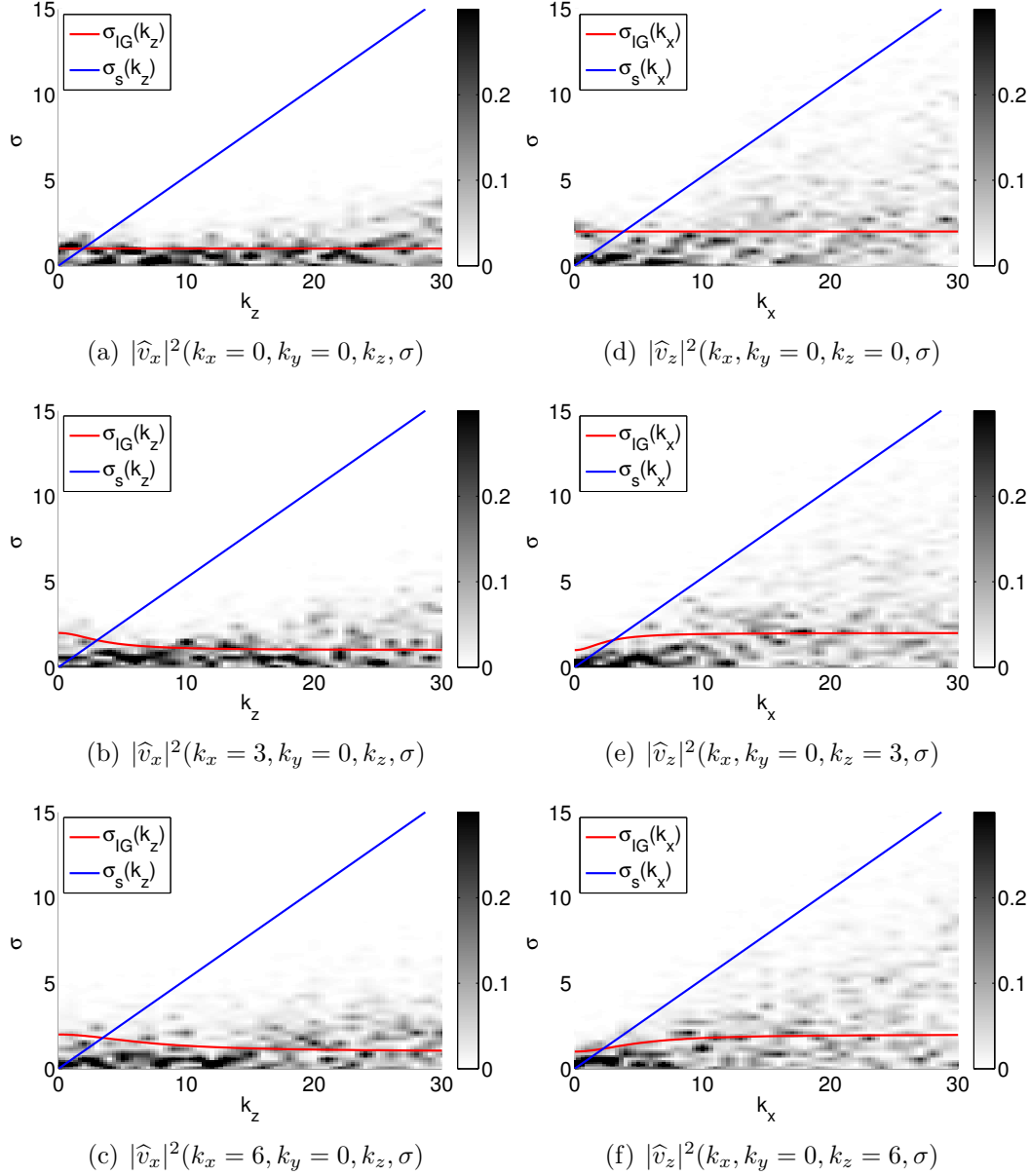


Figura 4.22: Espectro de potencia espacio-temporal de la velocidad en x (a-c) y en z (d-f) para la simulación B6 con $N_{bv}/f = 2$ y $f = 1$: $|\widehat{v}_x|^2(k_x = k_0, k_y = 0, k_z, \sigma)$ y $|\widehat{v}_z|^2(k_x, k_y = 0, k_z = k_0, \sigma)$ respectivamente, donde en (a) y (d) $k_0 = 0$; en (b) y (e) $k_0 = 3$; y en (c) y (f) $k_0 = 6$. La curva roja muestra la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales (2.82) que predice la teoría de ondas lineales. En azul, la “relación de dispersión” del barrido dada por la ecuación (2.94).

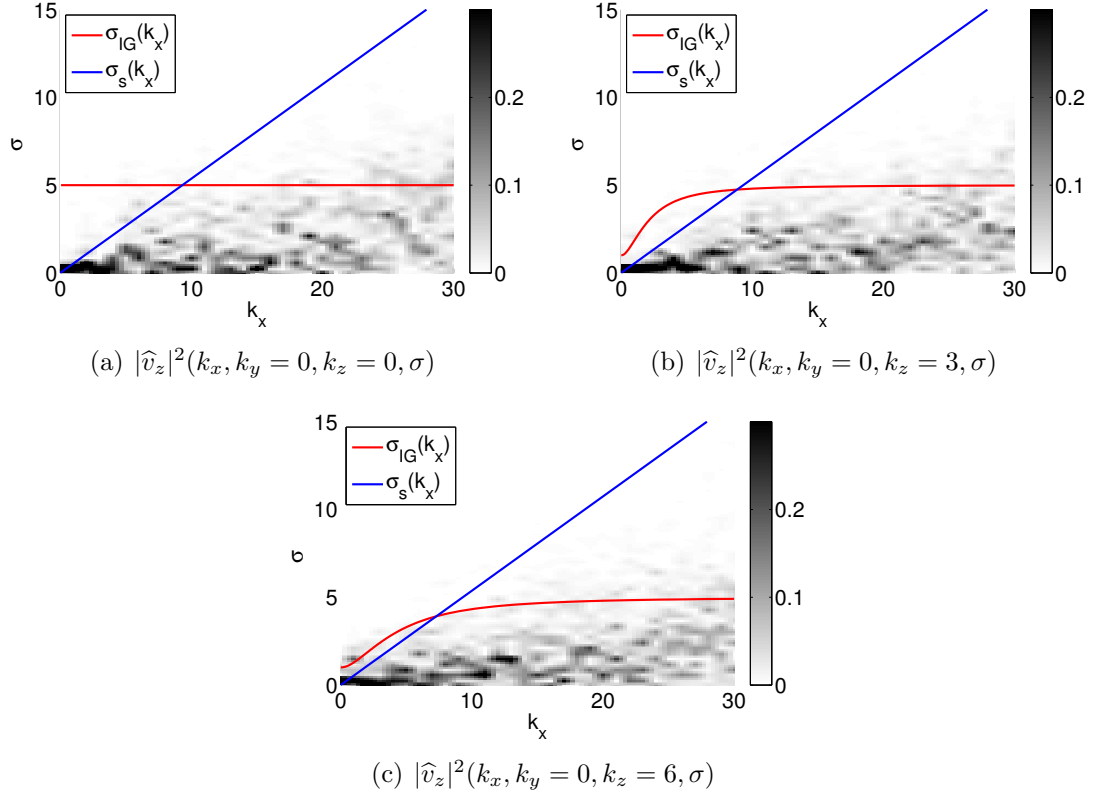


Figura 4.23: Espectro de potencia espacio-temporal de la velocidad en x para la simulación B8 con $N_{bv}/f = 5$ y $f = 1$: $|\widehat{v}_z|^2(k_x, k_y = 0, k_z = k_0, \sigma)$, donde en (a) $k_0 = 0$, (b) $k_0 = 3$, y (c) $k_0 = 6$. La curva roja muestra la relación de dispersión de ondas de gravedad-inerciales (2.82) que predice la teoría de ondas lineales. En azul, la “relación de dispersión” del barrido dada por la ecuación (2.94).

$k < k_s$. En el resto del espectro espacio-temporal, en las figuras 4.23(a)-4.23(c) se vuelve a observar preferentemente el efecto de barrido de frecuencias para $k > k_s$. Sin embargo, a diferencia de los espectros dentro de la región no-resonante (figs. 4.20-4.22), se vuelve evidente que para $k < k_s$, las excitaciones se ubican predominantemente debajo de la curva $\sigma_{IG}(k_x)$ y no se extienden hasta $\sigma_s(k_x)$.

Con el fin de cuantificar el acuerdo o desacuerdo entre los espectros presentados en esta sección y las relaciones de dispersión de las ondas resonantes, en la figura 4.24 se grafican las diferencias cuadráticas medias entre la curva $\sigma_{IG}(k_i)$ y los datos σ_{k_i} , pesadas por la amplitud espectral al cuadrado. Es decir

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{\sum_{\beta} (\sigma_{IG} - \sigma_{\beta})^2 \widehat{v}_j^2(k_{\beta}^{(i)})}{\sum_{\beta} \widehat{v}_j^2(k_{\beta}^{(i)})}, \quad (4.3)$$

donde la sumatoria sobre β es sobre todos los puntos en el plano $k_{\beta}^{(i)}, \sigma_{\beta}$, para $i = x, z$ y $j = z, x$ respectivamente, restringiendo los números de onda k al intervalo

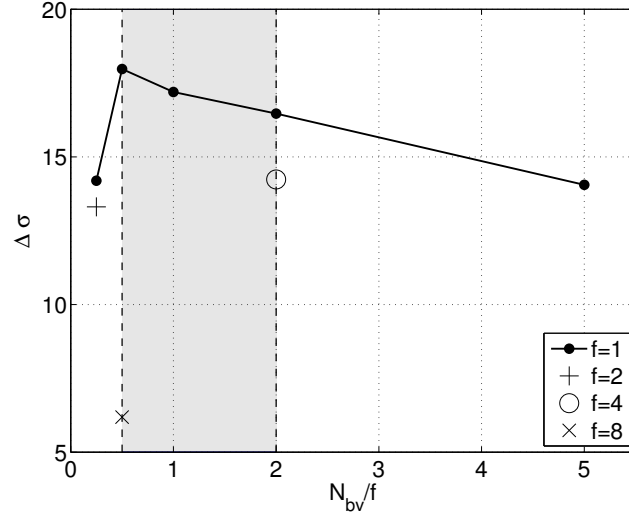


Figura 4.24: Diferencias cuadráticas medias pesadas por la amplitud espectral (en unidades arbitrarias), definidas en la ecuación (4.3). La región grisácea indica los valores de N_{bv}/f para los que las interacciones resonantes están prohibidas.

$[0, k_{\max}]$, y las frecuencias σ al intervalo $[0, 100]$. En la figura 4.24 se observa una mayor diferencia cuadrática en la región de anulación de tríadas resonantes (pintada de gris), lo que indicaría un menor comportamiento ondulatorio en comparación con la región de parámetros complementaria.

4.3.4. Modos cuasi-geostróficos

En el rango no-resonante, a partir de la teoría de ondas resonantes [90] y de resultados de simulaciones numéricas previas [90, 57, 58, 102], se espera que dominen los modos CG de frecuencia nula (ver §2.6.2). Para estimar la energía en estos modos lentos, se estudió cómo, al variar N_{bv}/f , varía la proporción entre la energía total en modos con frecuencia nula $E(\sigma = 0)$ y la energía total en todas las frecuencias promediada a lo largo del tiempo, E (ver fig. 4.25).

En la figura 4.25, se observa un crecimiento local en la proporción de energía en modos con frecuencia nula dentro de la región de anulación de tríadas resonantes. La serie de datos con $N = 256$ y con $f = 1$ fijo presenta un máximo de esta razón en $N_{bv}/f = 1$, decreciendo a medida que se reduce N_{bv}/f ; a medida que incrementa N_{bv}/f hacia la derecha se observa una recuperación en la proporción de energía en modos con $\sigma = 0$ para $N_{bv}/f \gg 2$, sin llegar a sobrepasar el máximo valor de la serie de datos (88% para $N_{bv}/f = 1$). Cambiando el valor fijo de f por $f = 2$, parecería haber un corrimiento de la curva hacia la derecha (el valor máximo pasa a darse en $N_{bv}/f = 2$ en lugar de $N_{bv}/f = 1$), lo que podría llegar a indicar un cambio de régimen, a medida que se aumenta f . Sin embargo, sería necesario realizar más simulaciones con $f = 2$ para poder confirmar esta observación. No se observan

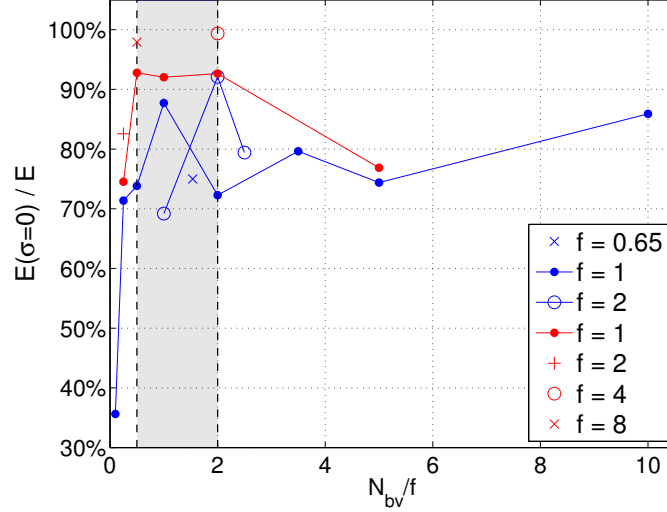


Figura 4.25: Proporción de energía en modos CG con $\sigma = 0$ sobre la energía total para distintos valores de N_{bv}/f , N_{bv} y f , a partir de simulaciones con $N = 256$ (azul) y $N = 512$ (rojo). Se observa una mayor proporción de energía en modos cuasi-geostróficos dentro del rango no-resonante ($1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$).

variaciones importantes en la proporción $E(\sigma = 0)/E$ excepto por la simulación con $N_{bv}/f = 0,1$ que presenta tan solo 36 % de su energía en modos con $\sigma = 0$.

En [102] Waite & Bartello observan, para $Ro \lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$, un crecimiento en la energía vortical a medida que se reduce Ro , manteniendo N_{bv} fijo en $N_{bv} = 4, 8$ y 16 . Con estos tres valores de N_{bv} , para $Ro \gtrsim \mathcal{O}(1)$ notan una independencia entre la energía vortical y el número de Rossby. Sin embargo, para $Ro \lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$, la energía vortical pasa a ser dependiente de Ro , debilitándose la dependencia de esta energía con N_{bv} . Aquí se consideró $Ro \lesssim 0,1$, luego la poca variación de $E(\sigma = 0)/E$ observada en las simulaciones con $N = 256$ es consistente con el comportamiento observado por Waite & Bartello para $Ro \lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$. En este último trabajo citado no consideran N_{bv} más bajos que 4, con lo cual el comportamiento de $N_{bv}/f = 0,1$ con $N_{bv} = 0,1$ observado en esta tesis no estaría contemplado. Por lo tanto, para la serie con $N = 512$ y $f = 1$ sí se observa un claro crecimiento de la energía cuasi-geostrófica dentro del rango no-resonante; confirmando la preponderancia de modos CG en este rango, pero contradiciendo la independencia con N_{bv} publicada por Waite & Bartello para $Ro \lesssim \mathcal{O}(10^{-1})$.

Los resultados presentados en este capítulo muestran a partir de mediciones realizadas en forma directa, que efectivamente el rol de las interacciones resonantes y de las ondas en el rango $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ es menor, resultando en una preponderancia de los modos CG y de dinámica de tipo cuasi-geostrófica. Así, la relación lineal entre L_{\perp}/L_{\parallel} y el parámetro N_{bv}/f en este rango puede efectivamente atribuirse a este efecto.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se ha estudiado la distribución anisótropa de energía en flujos rotantes y estratificados, en un régimen de turbulencia con ondas. Se observó una unidimensionalización de los flujos en los que domina la estratificación, y una bidimensionalización en el caso de rotación dominante. Para realizar la caracterización, se realizó un barrido de la frecuencia de Brunt-Väisälä (N_{bv}), parámetro que cuantifica la intensidad de la estratificación, fijando el parámetro de Coriols (f), que corresponde a la frecuencia de rotación de cuerpo rígido del flujo.

Se llevaron a cabo simulaciones numéricas de flujos hidrodinámicos tridimensionales integrando las ecuaciones de Boussinesq en un sistema de referencia rotante, con eje de rotación alineado a la fuerza de gravedad. A todos los sistemas se les aplicó un forzado mecánico de Taylor-Green en escalas grandes. Las resoluciones espaciales utilizadas fueron de 256^3 y 512^3 puntos, usando los estados finales de las simulaciones con 256^3 puntos como condición inicial para las simulaciones con 512^3 puntos con el fin de ahorrar tiempo de cómputo y permitir la exploración del espacio de parámetros.

A medida que se incrementa el grado de estratificación frente a la rotación, se observó que las escalas integrales en el plano horizontal crecen frente a las escalas verticales. El cociente entre estas escalas es compatible con una relación lineal en el rango de parámetros donde se anulan las tríadas resonantes ($1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$), verificando una predicción de la teoría cuasi-geostrófica de Charney [22]. La linealidad se ve saturada afuera de este rango.

La anisotropía en el espacio real descrita anteriormente es consistente con los resultados del análisis espectral: En flujos fuertemente estratificados, para escalas mayores a las del forzado la energía tiende a acumularse en el plano horizontal en el espacio de Fourier, mientras que para escalas más pequeñas la energía se acumula a lo largo del eje vertical. La distribución anisótropa de energía se invierte cuando domina la rotación frente a la estratificación. Los flujos de energía reducidos

perpendiculares y paralelos confirman estos fenómenos.

Consistentemente con estos resultados, el espectro de energía axisimétrico muestra diferentes comportamientos según el caso. El espectro de energía axisimétrico $E(k_{\perp}, k_{\parallel})$ en un flujo isótropo y homogéneo consiste de curvas de nivel circulares en el plano k_{\perp}, k_{\parallel} . Esta distribución de energía fue observada para flujos con estratificación equilibrada por la rotación ($N_{bv} = f$). Al aumentar el grado de estratificación del sistema, se evidenció una acumulación de energía sobre el eje con $k_{\perp} = 0$. El fenómeno opuesto, la acumulación de energía sobre los modos con $k_{\parallel} = 0$ para flujos predominantemente rotantes es relativamente más débil, lo cual es esperable ya que la mayor parte del análisis se centró en simulaciones con $f = 1$ y por lo tanto la rotación no es muy intensa.

Se analizó la posible existencia de leyes de escalas para el espectro isótropo de energía total en el rango inercial. En ese rango los espectros son compatibles con las relaciones de auto-similaridad $E(k) \sim k^{-\alpha}$, con exponentes $2 \lesssim \alpha \lesssim 3$, siendo la cota inferior, $\alpha = 2$, el exponente característico esperado para flujos rotantes, y $\alpha = 3$ el esperado para flujos estratificados.

Se calcularon también los espectros espacio-temporales de determinadas componentes del campo de velocidades, fijando dos de las tres componentes del número de onda para registrar o descartar la concentración de amplitud espectral sobre la relación de dispersión ondulatoria. Se registró un acuerdo con algunas de las relaciones de dispersión, aún dentro del rango de anulación de tríadas resonantes, en el que a priori no se esperaba encontrar la presencia de ondas. Sin embargo, al cuantificar sistemáticamente la contribución de las ondas a la energía total, se pudo confirmar que en el rango $1/2 \leq N_{bv}/f \leq 2$ la concentración de energía alrededor de la relación de dispersión lineal es mínima comparada con el resto del espacio de parámetros explorado. Se observó también que el efecto de barrido de vórtices produce la dispersión de todas las frecuencias menores a la relación de dispersión característica del barrido cada vez que su tiempo característico se vuelve más rápido que el período de las ondas.

Finalmente, se estimó la energía en los modos lentos, o cuasi-geostróficos, como la energía de los modos con frecuencia nula ($\sigma = 0$). Para las simulaciones con parámetro de Coriolis fijo en $f = 1$ se observó una mayor proporción de energía cuasi-geostrófica para N_{bv}/f dentro del rango no-resonante. Esta mayor proporción de energía cuasi-geostrófica se observó en las simulaciones con 256^3 y 512^3 puntos. La mayor concentración de energía en modos lentos refleja la inhibición de modos ondulatorios en el rango no-resonante, como predice la teoría de ondas resonantes [90].

Bibliografía

- [1] ALEXAKIS, A. 2015 Rotating Taylor-Green flow *J. Fluid Mech.* **769** 46-78
- [2] ASCHER, U. M. & PETZOLD, L. R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia 1998
- [3] BABIN, A., MAHALOV, A. & NICOLAENKO, B. 1996 *Eur. J. Mech. B* **15** 291
- [4] BABIN, A., MAHALOV, A. & NICOLAENKO, B. 1998 On nonlinear baroclinic waves and adjustment of pancake dynamics. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **11** 215–35
- [5] BARTELLO, P. 1995 Geostrophic Adjustment and Inverse Cascades in Rotating and Stratified Turbulence. *J. Atm. Sci.* **52** 4410-28
- [6] BARTELLO, P. & TOBIAS, S. M. 2013 Sensitivity of stratified turbulence to the buoyancy Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **725** 1–22
- [7] BATCHELOR, G. K. 1969 *Phys. Fluids* **12**, II-233
- [8] BATCHELOR, G. K. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, Cambridge 2000
- [9] BELLET F., GODEFERD, F. S. & SCOTT, F. S. 2006 Wave turbulence in rapidly rotating flows. *J. Fluid Mech.* **562** 83
- [10] BILLANT, P. & AND CHOMAZ, J. M. 2001 Self-similarity of strongly stratified inviscid flows. *Phys. Fluids* **13** 1645
- [11] BOFFETA, G. & ECKE R. 2012 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **44** 427
- [12] BORUE, V. 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 3967
- [13] BORUE, V. 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1475
- [14] BOUSSINESQ, J. Theorie Analytique de la Chaleur, Vol. 2. *Gauthier-Villars*, 1903, p. 172

- [15] BRACHET, M. E., BUSTAMANTE, M. D., KRSTULOVIC, G., MININNI, P. D., POUQUET A. & ROSENBERG D. Ideal evolution of magnetohydrodynamic turbulence when imposing Taylor-Green symmetries. *Phys. Rev. E* **87** 013110
- [16] BRETHER, G., BILLANT, P., LINDBORG, E. & CHOMAZ J. M. 2007 Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **585**, 343–68
- [17] CAMBON, C. & JACQUIN, L. 1989 Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.* **202** 295
- [18] CAMBON, C., MANSOUR, N. N. & GODEFERD, F. S. 1997 Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **337** 303
- [19] CAMBON, C. 2001 Turbulence and vortex structures in rotating and stratified flows. *Eur. J. Mech. B* **20** 489–510
- [20] CANUTO, C. HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. *Springer*, New York 1988
- [21] CAVALERI, L. *et. al.*, *Bull. Am. Met. Soc.* **1651**
- [22] CHARNEY, J. G. 1971 Geostrophic Turbulence. *J. Atmos Sci.* **28** 1087-95
- [23] CHEN S. & KRAICHNAN, R. H. 1989 Sweeping decorrelation in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A* **1**, 2019
- [24] CHO, J. Y. N., ZHU, Y., NEWELL, Y., ANDERSON, R. E., BARRICK, J. D., GREGORY, G. L., SACHSE, G. W., CARROLL, M. A. & ALBERCOOK, G. M. 1999 Horizontal wavenumber spectra of winds, temperature, and trace gases during the Pacific Exploratory Missions: 1. Climatology. *J. Geophys. Res.* **104** 5697–716.
- [25] CLARK DI LEONI, P., COBELLI, P. J., MININNI, P. D., DMITRUK, P. & MATTHAEUS W. H. 2014 Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow. *Phys. Fluids* **26** 035106; doi: 10.1063/1.4868280
- [26] CLARK DI LEONI & MININNI, P. D. 2015 Absorption of waves by large-scale winds in stratified turbulence. *Phys. Rev. E* **91** 033015.
- [27] CLARK DI LEONI, P., COBELLI, P. J. & MININNI, P. D. 2015 The spatio-temporal spectrum of turbulent flows. *EPJ E Soft Matt.* **38** (12) 136
- [28] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. & LEWY, H. 1928 Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* **100** (1) 32–74

- [29] DAVIDSON, P. A. Turbulence in Rotating Stratified and Electrically Conducting Fluids. *Cambridge University Press*, Cambridge 2013
- [30] EMANUEL, K. A. Overview and definition of mesoscale meteorology. In *Mesoscale Meteorology and Forecasting ed. P. S. Ray*, 1986, pp. 1–17
- [31] EYINK, G. & SREENIVASAN, K. 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 87
- [32] FOX-KEMPER, B. *et. al.*, 2011 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39** 61
- [33] *FFTW* Extraído el 20 de Diciembre del 2016, de <http://www.fftw.org>
- [34] FRIGO, M., & JOHNSON, S. G. JOHNSON 1998 FFTW: An Adaptive Software Architecture for the FFT *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* **3** 1381-84.
- [35] FRISCH, U., SULEM, P. L. & NELKIN, M. 1978 A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.* **87** No. 4, 719-736
- [36] FRISCH, U. & ORSZAG, S. A. Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. *Cambridge University Press*, Cambridge 1995
- [37] GÓMEZ, D. O., MININNI, P. D. & DMITRUK, P. 2005 MHD simulations and astrophysical applications. *Advances in Space Research* **35** 899–907
- [38] GÓMEZ, D. O., MININNI, P. D. & DMITRUK, P. 2005 Parallel Simulations in Turbulent MHD. *Physica Scripta* **T116** 123
- [39] GREENSPAN, H. P. The Theory of Rotating Fluids. *Cambridge University Press*, Cambridge 1968
- [40] HEÁS, P. 2012 *Tellus A* **64** 10962
- [41] HORNE, E. 2012 Exponente de cancelación en flujos turbulentos rotantes. Tesis de Licenciatura *FCEyN, Universidad de Buenos Aires*, 2012
- [42] HOSSAIN, M., MATTHAEUS, W. & MONTGOMERY, D. 1983 *J. Plasma Phys.* **30** 479
- [43] HUSSAINI, M. Y. & ORSZAG, S. A. Spectral Methods for Partial Differential Equations. *Springer*, 1984
- [44] IVEY, G. *et. al.*, 2008 *Annu. Rev Fluid Mech.* **40** 169
- [45] KARMAN, T. & HOWARTH, L. 1938 On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* **164** 192-215

- [46] KOLMOGOROV, A. N. 1941 The local structure of turbulence in incompressible visocous fluids at very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30** 299-303
- [47] KOLMOGOROV, A. N. 1941 On the degeneration of isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **31**, 538-541
- [48] KOLMOGOROV, A. N. 1941 Dissipation of energy in isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **32** 19-21
- [49] KRAICHNAN, R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **5** 497
- [50] KRAICHNAN, R. H. 1967 *Phys. Fluids* **10** 1417
- [51] KRAICHNAN, R. H. & MONTGOMERY D. 1980 Two-dimensional Turbulence. *Rep. Prog. Phys* **43** 547
- [52] LAVAL, J.-P., MCWILLIAMS, J. C. & DUBRULLE, B. 2003 Forced stratified turbulence: successive transitions with Reynolds number. *Phys. Rev. E* **68** 036308.
- [53] LEITH, C. E. 1968 *Phys. Fluids* **11** 671
- [54] LIECHTENSTEIN, L., GODEFERD, G. & CAMBON, C. 2005 Nonlinear formation of structures in rotating, stratified turbulence. *J. Turbulence* **6** 1-18
- [55] LILLY, D. K. 1983 Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **40** 749–61.
- [56] LILLY, D. K. 1989 Two-dimensional turbulence generated by energy sources at two scales. *J. Atmos. Sci.* **46** 2026–30.
- [57] LINDBORG, E. 2005 The effect of rotation on the mesoscale energy cascade in the free atmosphere. *Geophys. Res. Lett.* **32** L010809.
- [58] LINDBORG, E. 2006 The energy cascade in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **550** 207–242.
- [59] MARINO, R., MININNI, P. D., ROSENBERG, D. & POUQUET, A. 2013 Inverse cascades of rotating stratified turbulence. *EPL* **102** 44006
- [60] MARINO, R., MININNI, P. D., ROSENBERG, D. L. & POUQUET, A. 2014 Large-scale anisotropy in stably stratified rotating flows. *Phys. Fluid Dyn.* **90** 023018

- [61] MARINO, R., ROSENBERG, D., HERBERT, C. & POUQUET, A. 2015 Interplay of waves and eddies in rotating stratified turbulence and the link with kinetic-potential energy partition. *EPL* **112**, 49001; doi: 10.1209/0295-5075/112/49001
- [62] MALTRUD, M. E. & VALLIS, G. K. 1991 Energy spectra and coherent vortices in force two-dimensional and β -plane turbulence. *J. Fluid Mech.* **228** 321–42.
- [63] MATHIEU, J. & SCOTT, J. An introduction to turbulent flow. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2000
- [64] MCDONOUGH, J. M. Introductory Lectures on Turbulence - Physics, Mathematics and Modeling. *Depts. of Mechanical Engineering and Mathematics - Univ. of Kentucky*, Kentucky 2004
- [65] MCWILLIAMS, J. C., WEISS, J. B. & YAVNEH, I. 1994 Anisotropy and coherent vortex structures in planetary turbulence. *Science* **264** 410–13.
- [66] MININNI, P. D., ALEXAKIS, A. & POUQUET, A. 2008 Nonlocal interactions in hydrodynamic turbulence at high Reynolds numbers: The slow emergence of scaling laws. *Phys. Rev. E.* **77** 036306
- [67] MININNI, P. D., ALEXAKIS, A. & POUQUET A. 2009 *Phys. Fluids* **21** 015108
- [68] MININNI, P. D. & POUQUET, A. 2010, *Phys. Fluids* **22**, 035105 y 035106
- [69] MININNI, P. D., ROSENBERG D., REDDY, R., & POUQUET, A. 2011 A hybrid MPI–OpenMP scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence. *Parallel Computing.* **37** Issue 6, 316-26
- [70] MININNI, P. D. 2011 Scale Interactions in Magnetohydrodynamic Turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43** 377–397.
- [71] MININNI, P. D., ROSENBERG D. & POUQUET A. 2012 Isotropization at small scales of rotating helically driven turbulence. *J. Fluid Mech.* **699** 263-79
- [72] MOFFAT, H., KIDA, S. & OHKITANI, H. 1994 Stretched vortices - the sinews of turbulence; large-Reynolds-number-asymptotics. *J. Fluid Mech.* **259** 241
- [73] MÜLLER, W. C. & THIELE, M. 2007 Scaling and energy transfer in rotating turbulence. *Europhys. Lett.* **77**, 34003
- [74] 2004 NASTROM, G. D., & GAGE, K. S. 1985 A climatology of atmospheric wavenumber spectra observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.* **42** 950-60

- [75] NAVIER, C. L. M. H. 1823 Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mém. Acad. Roy Sci.* **6** 389-440
- [76] NELKIN, M. & TABOR, M. 1990 Time correlations and random sweeping in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A* **2** 81
- [77] ONSAGER, L. 1949 *Supplemento al vol. VI, Serie IX del Nuovo-Cimento.* **2** 279
- [78] ORSZAG, S. A. On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components *J. of Atm. Sci.* **28** 1074
- [79] PATTERSON, G. & ORSZAG, A. 1971 Spectral calculations of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing interactions. *Phys. Fluids* **14** 2538-41
- [80] POLZIN, K. & LVOV, Y. 2011 *Rev. Geophys.* **49** RG4003
- [81] POUQUET, A. & MININNI, P. D. 2010 The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics. *Phil. Trans. R. Soc. A* **368**; doi: 10.1098/rsta.2009.0284.
- [82] REINHAUD, J. N., DRITSCHEL, D. G. & KOUDELLA, C. K. 2003 The shape of vortices in quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.* **474** 175-92
- [83] RICHARDSON, L. F. *Weather Prediction by Numerical Process.* Cambridge University Press, Cambridge 1922
- [84] RILEY, J. J., METCALFE, R. W. & WEISSMAN M. A. Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids. In *Nonlinear Properties of Internal Waves.* ed. B. J. West, 1981, pp. 79-112
- [85] 2003 RILEY, J. J. & DEBRUYNKOPS, S. M. Dynamics of turbulence strongly influenced by buoyancy. *Phys. Fluids* **15** 2047-59
- [86] ROSENBERG, D., POUQUET, A., MARINO, R. & MININNI, P. D. 2015 Evidence for Bolgiano-Obukhov scaling in rotating stratified turbulence using high-resolution direct numerical simulations. *Phys. Fluids* **27** 055105; doi: 10.1063/1.4921076
- [87] SALMON, R. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics.* Oxford University Press, New York, 1998
- [88] SANADA, T. & SHANMUGASUNDARAM, V. 1992 Random sweeping effect in isotropic numerical turbulence. *Phys. Fluids A* **5** 1245

- [89] SMITH, L., CHASNOV, J. & WALEFFE F. 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2467
- [90] SMITH, L. M. & WALEFFE, F. 2001 Generation of Slow, Large Scales in Forced Rotating, Stratified Turbulence. *J. Fluid Mech.* **A5** 677–85.
- [91] SMYTH, W. D. & MOUM, J. N. 2000 Anisotropy of turbulence in stably stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **12**, 1343–62
- [92] SOMMERIA, J. 1986 *J. Fluid Mech.* **170**, 139
- [93] SREENIVASAN, K. R. 1995 On the universality of the Kolmogorov constant *Phys. Fluids* Vol. **7** No. 11, 2278-84
- [94] TABELING, P. 2002 *Phys. Rep.* **362** 1
- [95] TAYLOR, G. I. 1935 Statistical theory of turbulence *Proc. R. Soc. Lond. A* **151** 421-78
- [96] TAYLOR, G. I. & GREEN, A. E. 1937 Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. *Proc. R. Soc. Lond. A* **158** 499–521
- [97] TAYLOR, G. I. 1938 The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **164**, 476-490
- [98] TENNEKES, H. 1975 Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **67**561–567
- [99] VERMA, M. 2011 Variable enstrophy flux and energy spectrum in two-dimensional turbulence with Ekman friction. *EPL* **98** 14003
- [100] VINCENT, D. G. & SCHLATTER, T. W. 1979 Evidence of deep convection as a source of synoptic-scale kinetic energy. *Tellus* **31** 493–504.
- [101] WAITE, M. L. & BARTELLO, P. 2004 Stratified turbulence dominated by vortical motion. *J. Fluid Mech.* **517** 281-308.
- [102] WAITE, M. L. & BARTELLO, P. 2006 The transition from geostrophic to stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **568** 89-108
- [103] WALEFFE, F. 1992 The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids A* **4** (2), 350-63
- [104] WALEFFE, F. 1993 Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids A* **5** (3), 677
- [105] ZHOU, Y. 1995 A phenomenological treatment of rotating turbulence. *Phys. Fluids* **7**, 2092