Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Grado

Cotas temporales de evolución, para sistemas cuánticos abiertos

Mirkin, Nicolás

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Mirkin, Nicolás. (2017). Cotas temporales de evolución, para sistemas cuánticos abiertos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000024_Mirkin

Cita tipo Chicago:
Mirkin, Nicolás. "Cotas temporales de evolución, para sistemas cuánticos abiertos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017.
https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000024_Mirkin

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. **Contacto:** bibliotecadigital.exactas.uba.ar
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Cotas temporales de evolución para sistemas cuánticos abiertos

Nicolás Mirkin

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Director: Diego Wisniacki

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Argentina

Marzo, 2017

TEMA: Cotas temporales de evolución, sistemas cuánticos abiertos.

ALUMNO: Nicolás Mirkin

LU N°: 353/11

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEyN - UBA

DIRECTOR DE TRABAJO: Diego Wisniacki

FECHA DE INICIACIÓN: Marzo 2016

FECHA DE FINALIZACIÓN: Marzo 2017

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor	Jurado
Director: Dr. Diego Wisniacki	Jurado
Profesora: Dra. Victoria Bekeris	Jurado
Profesora: Dra. Mirta Gil	

Cotas temporales de evolución para sistemas cuánticos abiertos

Nicolás Mirkin

Resumen

La mecánica cuántica establece límites en el tiempo mínimo que requiere un sistema cuántico para evolucionar de un estado inicial a otro estado final. Estas cotas son denominadas bajo el nombre de 'Quantum Speed Limit' (QSL) y han sido derivadas con distintos enfoques tanto para dinámicas unitarias como no unitarias. En este trabajo, se ha realizado un análisis sistemático de las cotas más comunes para sistemas cuánticos abiertos en el modelo de Jaynes-Cummings tanto en el régimen Markoviano como el no-Markoviano. Se muestra que sólo una de las cotas estudiadas cumple la esencia y sigue en la misma línea desarrollada por los trabajos pioneros de Mandelstam-Tamm [1] y Margolus-Levitin [2] en el marco de evoluciones unitarias, ya que es la única que brinda resultados consistentes a la hora de estimar el tiempo mínimo de evolución para ir de un estado inicial a otro final. En este sentido, la presente tesis ha puesto en evidencia la invalidez de otros resultados provistos en la literatura, logrando un mayor entendimiento respecto a la consistencia y a la aparente multiplicidad de las cotas temporales para la evolución en sistemas abiertos. Dentro del mismo análisis, también se observa cómo todas las cotas reflejan el hecho que los efectos no-Markovianos aceleran la evolución cuántica del sistema. Sin embargo, estudiando únicamente las cotas temporales para la evolución se verá que no es posible inferir el comportamiento Markoviano o no-Markoviano de la dinámica.

Agradecimientos

He aquí la sección de la tesis que más premedité y dibujé en el aire, confieso. En vano esbocé mil versiones, queriendo capturar con precisión matemática esa vasta e interminable red de causas y efectos que me hicieron ser quien soy al día de la fecha, elegir este camino llamado 'licenciatura en física', peregrinarlo y sudarlo hasta el final. Vaya si lo sudé, por cierto, considerando que como bien dictamina la sabiduría ancestral de nuestros antiguos y olvidados hermanos griegos: 'si uno sube a Delfos en helicóptero, la ninfa no te da bola'. Así que no me quedó otra, supongo, como a la montaña o a la vida misma, a la física la debí peregrinar.

Ahora bien, si hube de llegar hasta el punto de recibirme ciertamente ni fue por obra de la casualidad ni tampoco por obra de mi pura voluntad. De hecho, si uno quiere ser absolutamente honesto y exacto, lo cierto es que el Universo entero conspiró para que lo logre. Desde el primer motor hace 13 mil millones de años hasta la improbabilidad de la vida en la Tierra, desde el origen del hombre hasta mi propio nacimiento, la elección de mi primaria, mi secundaria, mis amigos, mis vivencias, en fin, enumerar e identificar cada una de las infinitas causas posiblemente sea una de las empresas más fútiles y pueriles que pueda emprender, como si acaso fuera posible atrapar una ballena con una simple y vetusta caña de pescar. En consecuencia, dada la imposibilidad del asunto, encuentro al acto de agradecer como un acto necesariamente injusto. 'Agradecer a' será un 'olvidarse de', mencionar a 'fulano' posiblemente sea un ofender a 'mengano', y etc. A raíz de ello, entiendo que se me abren dos posibles acciones: o bien me quedo callado y le rindo culto al silencio, o bien establezco un orden jerárquico y me centro en las causas que considero realmente determinantes en mi camino. En esta ocasión, elijo esta última opción.

Bajo este marco, en primer lugar deseo agradecer profundamente a Diego. El primer mail que mandé hurgando por una tesis fue hacia él y lo cierto es que me cautivó de inmediato; no sólo me ofreció exactamente el tema que sin saberlo buscaba, sino que por obra de una gran coincidencia cósmica resultó que compartíamos el mismo apellido. De esta manera, elegir tema y director me resultó una de las decisiones más sencillas de la carrera, considerando que como bien dice Juarroz: 'son las cosas las que algunas veces aciertan totalmente en nosotros'. Lejos de equivocarme, encontré en él un enorme referente, por supuesto que en la física, pero por sobre todo en términos humanos. Sin su motivación y sus ganas de trabajar, ciertamente esta tesis no hubiera sido posible. En la misma línea, eu quero agradecer e dizer muito obrigado a Fabricio, sin sus valiosos aportes, su paciencia y sus llamadas por Skype desde Río, esta tesis tampoco hubiera llegado hasta el puerto que llegó.

Mi eterno agradecimiento también hacia mis padres, por haberme dado la vida y por ser el arco desde el que, como una flecha viviente, fui impulsado hacia lo lejos. Gracias por guiar mi movimiento sin buscar condicionarlo y por su confianza plena en cada uno de mis pasos.

En cuanto a Amistades, mi más pura gratitud para con Gabi, Guido, Ana y Uli, mis cuatro mejores amigos de lo profundo, que han sido los pilares fundamentales e incondicionales en los que me apoyo desde hace años. Gracias también a Lian Mattei y a Mati Pergo, dos hermanos, compañeros de viaje y probablemente los mejores conversadores que conozco, por haberme estimulado con incesantes y electrizantes charlas acerca de todo; gracias a Fede Piaggio por introducirme en el mundo; y a Auric de Grey por ser un mentor y guía del Camino. En lo que atañe a mis demás amistades, no sería justo olvidarme de ellas... pero son y han sido tantas que me resulta imposible nombrar una por una; simplemente gracias a todos ellos por dejarme entrar a su vida y formar parte de la mía.

Respecto a las diversas sectas en las que me vi envuelto a lo largo de la carrera, gracias a Rumbo al Despertar por ser el inicio de lo que nos cambiaría la vida a tantos; al círculo de luz por oficiar como una confluencia de personas verdaderamente admirables; al cono de la obscuridad por aparecer en oposición al círculo y mantener

la dualidad en el cosmos; al Ningunismo que, pese a la paradoja de nunca existir, me rescató de la anorexia mental imperante y fue un punto de inflexión en mi visión del mundo; a los encuentros literarios en la FCEyN y a los cofrades de la Zapallería, por devenir en un espacio ecológico y de sanidad mental que tanto necesitaba Exactas; y gracias también a las otras.

Tampoco quisiera olvidarme de mis queridos compañeros del centro cultural de la ciencia, verdaderas gemas humanas, porque han sabido transformar mi trabajo allí en una tarea realmente orgiástica y revitalizante. Infinitas gracias por toda su entrega y por funcionar como un soporte psíquico, emocional y social que me mantuvo vivo y encendido el último año y medio de la carrera.

Así también, gracias a Macedonio Fernández por enseñarme que el Zapallo es mucho más que una verdura; a Korzybski por explicarme que 'el mapa no es el territorio'; a Robert Anton Wilson por convertirme en Papa; y a Schrödinger, Pauli, Bohr, Bell, Bohm, Capra, Wheeler, por dejarse leer y señalarme que lo místico no necesariamente es una mala palabra.

Finalmente, entre tanto tonto intento de agradecimiento, quisiera citar a modo de síntesis a una de las personalidades más excéntricas y originales que dio a luz nuestro país. Me refiero al prodigioso pintor, escritor y multifacético inventor Xul Solar, de quien curiosamente la Secretaría del Departamento de Física guarda con recelo un cuadro en su oficina. Me basta con transcribir tan sólo una palabra de Xul, la cual es tan inmensa y profunda que resulta suficiente como para hacerme quedar bien y envolverlo todo. Lisa y llanamente, quiero terminar diciendo: PANGRACIAS ('pan' viene del prefijo griego '$\pi\alpha\nu$', que significa 'todo' - 'en su totalidad'). O en forma análoga, en su versión más posmoderna y chic, GRACIAS TOTALES.

"Que Dios nos libre de la visión única y del sueño de Newton"

William Blake (1757-1827)

Índice general

1. Introducción **1**

2. Sistemas cuánticos abiertos y decoherencia **7**

2.1. Ecuación maestra Markoviana 12

2.2. Ecuación maestra no-Markoviana 13

3. Cotas temporales para la evolución cuántica **16**

3.1. Cotas para sistemas aislados 16

3.1.1. Cota de Mandelstam y Tamm 17

3.1.2. Cota de Margolus y Levitin 20

3.2. Cotas para sistemas abiertos 22

3.2.1. Cota en base a la información cuántica de Fisher 23

3.2.2. Cota en base a distintos operadores norma 26

3.2.3. Cota en base a la noción de la 'cuanticosidad' 28

4. Modelo de Jaynes-Cummings **31**

4.1. Decaimiento espontáneo de un sistema de dos niveles 32

4.2. Modelo de Jaynes-Cummings en resonancia 36

4.3. Modelo de Jaynes-Cummings no resonante 37

4.4. Evolución temporal de Jaynes-Cummings 38

4.5. No-Markovianidad y Jaynes-Cummings 40

5. Cotas temporales para el modelo de Jaynes-Cummings 45

5.1. Consistencia de las cotas temporales para la evolución 46

5.2. Cotas temporales y la no-Markovianidad 49

5.3. Cotas temporales y condiciones iniciales 54

6. Conclusiones 57

Bibliografía 60

Apéndice 64

A. Información cuántica de Fisher 64

B. La esfera de Bloch 69

Capítulo 1

Introducción

"Una red de mirada mantiene unido al mundo, no lo deja caerse."

Roberto Juarroz

Desde su aparición hace más de un siglo hasta el día de hoy, la mecánica cuántica ha demostrado, una otra y vez, ser una teoría cuyas predicciones se corresponden de manera sorprendente con los experimentos. Sin ella, no podríamos explicar adecuadamente el comportamiento de los sólidos, la estructura y función del ADN, el color de las estrellas, la función de los láseres, las propiedades de los superfluidos, así como un largo y vasto etcétera [3]. Sin embargo, pese a su enorme capacidad de predicción, la relación entre la mecánica cuántica y nuestro familiar mundo físico de todos los días es un debate que aún está lejos de apaciguarse. El principal problema de la mecánica cuántica, quizás, no sea intrínseco sino extrínseco y esté relacionado con nuestra incapacidad de adaptar nuestros prejuicios filosóficos sobre el comportamiento del Universo a las consecuencias que se desprenden de la teoría. En particular, uno de los resultados que nos resulta más difícil de reconciliar, es el llamado 'principio de superposición'. El mismo surge a raíz de que los estados de un sistema cuántico evolucionan de acuerdo a la ecuación lineal de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle , \tag{1.0.1}$$

en donde H representa al Hamiltoniano y $|\psi\rangle$ al estado del sistema. Debido a la linealidad en la ecuación, el principio de superposición asegura que cualquier

superposición lineal de estados cuánticos es, asimismo, un estado aceptable para la teoría. De esta manera, dada una condición inicial, el hecho que el Universo descripto por $|\psi\rangle$ evolucione en un estado conteniendo varias alternativas que nunca se observan coexistiendo en nuestro mundo clásico, ha sido motivo de gran controversia. Sin embargo, pese a la profunda naturaleza de este problema, los trabajos efectuados en los últimos cuarenta años concernientes a explicar de qué modo emerge la realidad clásica en un mundo gobernado por las leyes de la mecánica cuántica, parecen haber esbozado una posible explicación: los sistemas macroscópicos nunca están aislados del entorno. Por lo tanto, como se ha sugerido en la Ref. [4], estos sistemas no deberían seguir la ecuación lineal de Schrödinger, que únicamente se aplica para sistemas aislados. Así, los sistemas usualmente considerados como clásicos, son clásicos en tanto sufren de una pérdida natural de su coherencia cuántica, la cual se fuga inevitablemente hacia el entorno. Bajo el contexto de este proceso, conocido en la literatura con el nombre de 'decoherencia', el concepto de clasicalidad de los sistemas es considerado simplemente como una propiedad emergente, inducida en el sistema debido a su interacción con el entorno [5–7].

Ahora bien, dicho principio de superposición, si bien ha sido causa de grandes revuelos en la interpretación de la mecánica cuántica, hoy en día es uno de los responsables indiscutidos que ha permitido el auge de una nueva ciencia emergente, a saber, el procesamiento de la información cuántica. Esta aplicación de la física cuántica al procesamiento de la información, a su vez ha transformado el interés en el proceso de la decoherencia. Bajo este nuevo marco, la decoherencia ya no es sólo vista como una explicación del límite cuántico-clásico sino que ahora también es considerada como una amenaza para la preservación de las propiedades cuánticas de un dado sistema. Esto es así ya que la misma invalida el principio de superposición, el cual representa la base fundamental en el poderío de cualquier algoritmo cuántico [8].

En el contexto del auge recién mencionado, en los últimos años se han producido grandes avances experimentales en la manipulación de sistemas cuánticos de varios cuerpos a niveles fundamentales, principalmente en sistemas de átomos fríos [9, 10]. Esto ha permitido enormes progresos en la información y computación cuántica (por

ejemplo en trampas de iones [11]), en simulaciones analógicas de sistemas cuánticos complejos [12] o en la evolución temporal controlada de sistemas cuánticos fuera del equilibrio [13]. Asimismo, la habilidad de producir una variedad de dinámicas cuánticas ha realzado la importancia y el desafío de poder controlar eficientemente, mediante algunos parámetros, la probabilidad de obtener un estado final determinado o un cierto valor de un observable físico. Para lograr esto es necesario desarrollar técnicas sofisticadas que se conocen con el nombre genérico de 'control cuántico' [14].

Una herramienta que ha resultado muy adecuada para dicha tarea es la llamada teoría del control óptimo [15]. El problema consiste en derivar la forma de un campo de control óptimo $\lambda(t)$, requerido con el fin de optimizar un proceso dinámico particular para un sistema descripto por un Hamiltoniano $H(\lambda)$ (λ pueden ser varios parámetros de control). Por ejemplo, un objetivo típico es llevar a cabo una transición desde un estado inicial dado a otro estado final. En una situación realista, es muy importante cumplimentar el control de la tarea de la forma más rápida posible, con el fin de evitar los efectos del entorno que pueden destruir las propiedades de coherencia del sistema [16, 17].

Sin embargo, uno no puede realizar una dada evolución de forma arbitrariamente rápida puesto que la mecánica cuántica establece límites temporales mínimos para los cuales se puede realizar un determinado proceso. Usualmente llamadas 'Quantum Speed Limit' (QSL), estas cotas han sido cuantiosamente estudiadas desde hace varios años ya que su entendimiento ofrece una ruta de acción en pos de diseñar dispositivos para el procesamiento de información más rápidos y optimizados [18, 19]. Esto ha devenido en un interés considerable en la teoría de control óptimo, o en ramas como la comunicación cuántica [20], la computación cuántica [21], o incluso la metrología cuántica [22].

Uno de los trabajos pioneros relacionados al límite de la velocidad en un sistema cuántico fue realizado por Mandelstam y Tamm (MT) [1], quienes derivaron una cota para el tiempo mínimo de evolución en un sistema que evolucionaba entre dos estados puros distinguibles a través de una dinámica unitaria generada por un Hamiltoniano independiente del tiempo. Varios años después, Anandan y Aharanov [23] extendieron

el límite MT a Hamiltonianos dependientes del tiempo mediante el uso de un enfoque geométrico que se basaba en el hecho que la longitud de la geodésica entre dos estados puros distinguibles, definida según el ángulo de Bures, es un límite inferior a la longitud de cualquier otra ruta de conexión entre esos mismos estados. Así también, más de medio siglo después del resultado MT, Margolus y Levitin (ML) [2] abordaron el mismo problema que Mandelstam y Tamm, aunque con un enfoque distinto, y llegaron a una cota cuantitativamente diferente para el tiempo mínimo de evolución. A raíz de ello, a partir de entonces, el límite temporal establecido por la mecánica cuántica para evolucionar unitariamente de un estado inicial puro a otro estado final ortogonal se da combinando ambas cotas de manera que la óptima debe cumplir $\tau \geq max\{\tau_{MT}, \tau_{ML}\}$, de acuerdo a cada problema particular que se analiza [24].

Ahora bien, dado que cualquier dispositivo de procesamiento de información está inevitablemente sujeto a ruido proveniente del ambiente, estas cotas también han sido investigadas para dinámicas no unitarias. Taddei *et al.* [25] y del Campo *et al.* [26] fueron los primeros en extender el límite MT vinculado a cualquier proceso físico, ya sea éste unitario o no. Específicamente, la Ref. [25] se vale de la métrica dada por la información cuántica de Fisher sobre todo el espacio de estados cuánticos y representa una extensión natural de la idea utilizada en la Ref. [23], mientras que la Ref. [26] utiliza un enfoque basado en la pureza relativa. Luego, por otro camino, Deffner y Lutz [27] extendieron el límite ML a sistemas cuánticos abiertos adoptando nuevamente un enfoque pseudo-geométrico utilizando el ángulo de Bures. Finalmente, otra derivación del tiempo mínimo de evolución para un sistema cuántico abierto fue obtenido en la Ref. [28], en donde se usó un novedoso concepto relacionado con la no conmutatividad entre los estados cuánticos.

De este modo, resulta importante aclarar que al igual que sucedía en el caso unitario, el tiempo mínimo para evolucionar en sistemas cuánticos abiertos parecería no ser único, en tanto que se obtienen resultados distintos de acuerdo al enfoque particular que se utilice en la derivación. En este contexto de múltiples cotas, resulta llamativo que hasta el momento todos estos tiempos mínimos han sido estudiados

de forma inconexa, es decir, no ha habido ningún trabajo que haya analizado a todos juntos en el marco de un problema particular. Por esta razón, si además entendemos al concepto de información como *la diferencia que hace la diferencia*, resulta imperioso un análisis comparativo de todos estos tiempos mínimos en pos de establecer similitudes y las diferencias entre los mismos.

A raíz de lo anterior, la presente tesis posee por objetivo principal buscar entender cuáles son las diferencias que hacen la diferencia entre las distintas cotas para sistemas cuánticos abiertos, de manera de establecer una interpretación clara y precisa para cada una de ellas. Con tal fin, se realizará un análisis sistemático de las mismas, aplicando todas a un sistema particular, a saber, el modelo de dos niveles de Jaynes-Cummings [29]. De esta manera, en el trabajo aquí presentado, se obrará sobre un modelo sencillo que sirva como base para echar luz y entendimiento sobre qué implica el hecho que estos tiempos mínimos no sean únicos y por sobre todo cuál de ellos resulta ser el óptimo. Bajo esta directiva, se mostrará que, de todas las cotas estudiadas, sólo una se encuentra en la misma línea desarrollada por los trabajos pioneros de Mandelstam-Tamm y Margolus-Levitin en el marco de evoluciones unitarias, puesto que es la única que brinda resultados consistentes a la hora de estimar el tiempo mínimo necesario para evolucionar de un dado estado inicial a un dado estado final. El resto de los tiempos mínimos resultarán inconsistentes, tal como se constatará en el cuerpo del trabajo.

En paralelo, también se utilizará el modelo de Jaynes-Cummings como marco para estudiar tanto el régimen Markoviano como el no-Markoviano. La noción aceptada de Markovianidad que se utilizará aquí está basada en la idea que para procesos Markovianos cualquier par de estados se vuelven menos y menos distinguibles a lo largo de la dinámica, llevando a una continua pérdida de información hacia el entorno. Contrariamente, el concepto de no-Markovianidad da cuenta de los efectos de memoria que permiten el flujo de información desde el ambiente de vuelta hacia el sistema y por ende está relacionado con un aumento en la distinguibilidad [30]. De esta forma, teniendo en cuenta que las cotas temporales para la evolución también se encuentran íntimamente relacionadas con el concepto de distinguibilidad entre

estados, en la presente tesis se aspirará a encontrar una relación entre las cotas correspondientes a los tiempos mínimos y distintas medidas de no-Markovianidad. En este sentido, se mostrará cómo todas las cotas temporales reflejan el hecho que los efectos no-Markovianos aceleran la evolución cuántica del sistema.

El trabajo aquí presentado está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2, introducimos los lineamientos matemáticos generales que son necesarios a la hora de tratar con sistemas cuánticos abiertos, haciendo particular énfasis en las ecuaciones maestras Markovianas y no-Markovianas. A continuación, en el Capítulo 3, resumimos la historia concerniente a las cotas temporales para la evolución y exponemos aquellas que analizamos en este trabajo para sistemas cuánticos abiertos. Luego, en el Capítulo 4, revisamos el modelo que servirá como plataforma para probar nuestras ideas: el modelo de Jaynes-Cummings para un reservorio a temperatura cero en la aproximación de onda rotante, cuya dinámica puede ser tanto Markoviana como no-Markoviana. En el Capítulo 5, aplicamos todas las cotas temporales para la evolución al modelo de Jaynes-Cummings y extraemos nuestros principales resultados. Finalmente, en el Capítulo 6, presentamos las conclusiones del trabajo y nuestras perspectivas a futuro.

Capítulo 2

Sistemas cuánticos abiertos y decoherencia

"El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos ni merecemos"

Eugene Wigner

En este capítulo se exhiben algunos elementos del lenguaje de las matemáticas para lidiar con la física de los sistemas cuánticos abiertos. Estos elementos del formalismo serán los pilares sobre los cuales sentaremos nuestro estudio referente a las cotas temporales de evolución, tema que desarrollaremos en el capítulo siguiente.

Un sistema cuántico abierto S es aquel que está acoplado a otro sistema cuántico E, llamado entorno. Visto así, S puede ser considerado como un subsistema del sistema total S+E, es decir, la suma del sistema abierto con su entorno. Si denotamos los espacios de Hilbert de S y E como $\mathcal{H}_S$ y $\mathcal{H}_E$, respectivamente, el espacio de Hilbert del sistema total estará dado por el producto tensorial

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E. \tag{2.0.1}$$

Una representación esquemática de cómo se puede vislumbrar un sistema cuántico abierto se muestra en la Figura 2.1. Si una considera el sistema total, los estados

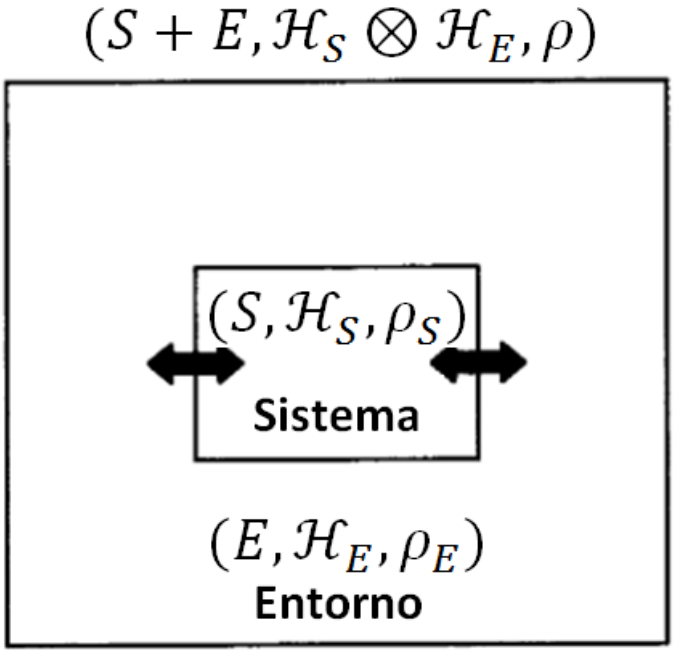

Figura 2.1: Imagen pictórica de un sistema cuántico abierto.

físicos del mismo estarán descriptos por matrices densidad ρ, en donde $\rho \geq 0$ y además $Tr(\rho) = 1$. Por su parte, los correspondientes estados reducidos asociados a los subsistemas S y E se podrán calcular trazando parcialmente sobre $\mathcal{H}_E$ y $\mathcal{H}_S$, respectivamente,

$$\rho_S = Tr_E(\rho) \qquad \rho_E = Tr_S(\rho). \tag{2.0.2}$$

Si ahora uno asume que el sistema total S+E es cerrado, entonces el mismo debe seguir una dinámica unitaria descripta por algún operador unitario de evolución

$$U(t) = \exp[-iHt] \qquad (\hbar = 1) \tag{2.0.3}$$

utilizando un Hamiltoniano de lo más general

$$H = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_I, \tag{2.0.4}$$

donde H_S y H_E son los Hamiltonianos propios del sistema y el entorno, respectivamente, mientras que H_I representa cualquier Hamiltoniano de interacción. De este modo, si ahora estamos interesados en la dependencia temporal de los estados del sistema total deberemos valernos de la ecuación de Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)], \tag{2.0.5}$$

la cual tiene solución

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t). \tag{2.0.6}$$

Formalmente esto es adecuado, aunque resulta que en los casos de interés práctico obtener una solución exacta para las ecuaciones de movimiento del sistema total microscópico resulta imposible. Sucede que la matriz densidad total contiene demasiada información en tanto que el problema relevante se centra en la dinámica del sistema S y en cómo el entorno influye sobre ella, más que en la dinámica propia del entorno. Además, considerando que el entorno está compuesto por una gran cantidad de grados de libertad, estos difícilmente sean accesibles a la hora de ser medidos. Por estas razones, una de las principales metas en la teoría de sistemas cuánticos abiertos [17] reside en una formulación factible, ya sea en forma analítica o numérica, del comportamiento dinámico de un reducido número de variables que forman al subsistema S. Dada una cierta división del sistema total en un sistema abierto S y el entorno E, lo que se intenta es derivar ecuaciones efectivas de movimiento (ecuaciones maestras) para el estado reducido $\rho_S(t)$ a través de una eliminación de las variables del entorno de las ecuaciones dinámicas. Considerando la naturaleza del problema, es razonable esperar que la ecuación maestra tenga una parte unitaria similar en forma a la ecuación de Liouville que describa la evolución unitaria de $\rho_S(t)$, y además una parte que dé cuenta de aquellos efectos no unitarios producidos por el entorno, como la decoherencia y la disipación, que emergen al trazar los grados de libertad externos. En términos formales, se espera encontrar una expresión de la forma

$$\dot{\rho}_S(t) = \mathcal{L}\left\{\rho_S(t)\right\} = -i[H'_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}\left\{\rho_S(t)\right\}, \tag{2.0.7}$$

donde $\mathcal{L}$ resulta un *superoperador*, es decir, un operador que actúa sobre el operador densidad. Este operador densidad se reduce al conmutador usual de la ecuación de Liouville (2.0.5) cuando el sistema se encuentra efectivamente aislado, mientras que en el caso general está compuesto por un conmutador similar al mencionado pero donde interviene un Hamiltoniano modificado por el entorno (H'_S), además del término $\mathcal{D}$ responsable de la dinámica no unitaria.

Para tratar con la dinámica del sistema reducido recién descripto, una herramienta fundamental utilizada en la teoría de sistemas cuánticos abiertos está basada en los

llamados 'mapas dinámicos' [17]. En aras de introducir este concepto, necesitaremos presuponer que la dinámica del sistema total está dada por una evolución unitaria (2.0.6) y que tanto el sistema S como el E son estadísticamente independientes al tiempo inicial, es decir,

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0), \tag{2.0.8}$$

donde $\rho_S(0)$ corresponde al estado inicial del sistema reducido S y $\rho_E(0)$ representa algún estado de referencia del entorno, por ejemplo, un estado térmico en el equilibrio. En base a estas suposiciones, el estado del sistema abierto a tiempo $t \geq 0$ se escribe como

$$\rho_S(t) = Tr_E \left(U(t)\rho_S(0) \otimes \rho_E(0)U^\dagger(t) \right). \tag{2.0.9}$$

A continuación, si uno considera el estado inicial del entorno $\rho_E(0)$ como fijo, se tiene que para cada fijo $t \geq 0$, la ecuación (2.0.9) representa un mapa lineal en el espacio de estados del sistema abierto $S(\mathcal{H}_\mathcal{S})$,

$$V(t,0): \quad S(\mathcal{H}_\mathcal{S}) \to S(\mathcal{H}_\mathcal{S}), \tag{2.0.10}$$

el cual mapea cualquier estado inicial del sistema abierto al correspondiente estado evolucionado del sistema abierto a tiempo t

$$\rho_S(0) \mapsto \rho_S(t) = V(t,0)\rho_S(0). \tag{2.0.11}$$

Este mapa, el cual describe la evolución del estado del sistema abierto a tiempo t, recibe el nombre de *mapa dinámico* (ver Figura 2.2). Un mapa dinámico puede

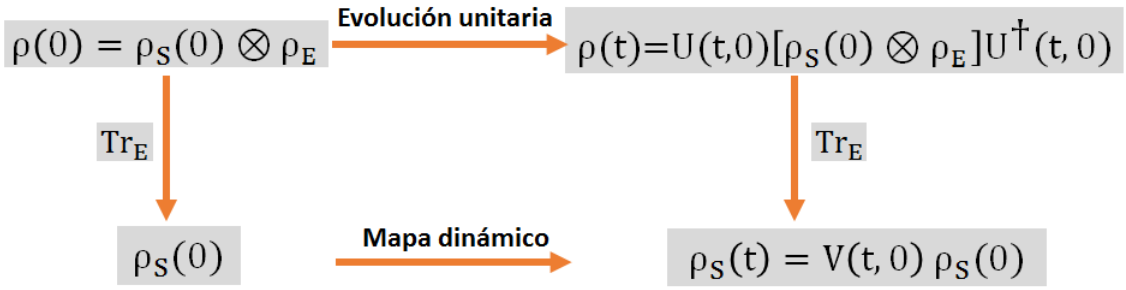

Figura 2.2: Diagrama conmutativo que muestra la acción de un mapa dinámico V(t,0).

caracterizarse completamente en términos de operadores pertenecientes al espacio de

Hilbert del sistema abierto $\mathcal{H}_S$. Para ello se utiliza la descomposición espectral de la matriz densidad del entorno ρ_E ,

$$\rho_E = \sum_\alpha \lambda_\alpha \left|\varphi_\alpha\right\rangle \left\langle\varphi_\alpha\right| . \tag{2.0.12}$$

Aquí, los $|\varphi_\alpha\rangle$ forman una base ortonormal en $\mathcal{H}_E$ y los λ_α son números reales no negativos que satisfacen $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$. Las definiciones (2.0.9) y (2.0.11) inmediatamente llevan a la siguiente representación

$$V(t,0)\rho_S = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S W^\dagger_{\alpha\beta}(t), \tag{2.0.13}$$

donde $W_{\alpha\beta}$ resultan operadores en $\mathcal{H}_S$ y están definidos como

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_\beta}\left\langle\varphi_\alpha\right| U(t,0) \left|\varphi_\beta\right\rangle . \tag{2.0.14}$$

A su vez, estos operadores $W_{\alpha\beta}(t)$ satisfacen la condición

$$\sum_{\alpha,\beta} W^\dagger_{\alpha\beta}(t) W_{\alpha\beta}(t) = I_S, \tag{2.0.15}$$

desde lo cual se deduce que

$$Tr_S\{V(t,0)\rho_S\} = Tr_S\{\rho_S\} = 1. \tag{2.0.16}$$

En el mismo sentido, es sencillo chequear que el mapa preserva la hermiticidad y la traza de los operadores, ya que se tiene

$$Tr_S\left(V(t,0)A\right) = Tr_S(A) \tag{2.0.17}$$

y

$$\left(V(t,0)A\right)^\dagger = V(t,0)A^\dagger. \tag{2.0.18}$$

Más aún, $V(t,0)$ resulta un mapa positivo, es decir, mapea operadores positivos en operadores positivos:

$$A \geq 0 \Rightarrow V(t,0)A \geq 0. \tag{2.0.19}$$

Otra propiedad adicional importante de los mapas dinámicos es que no son sólo positivos sino también completamente positivos. Dichos mapas también reciben el nombre de canales cuánticos en la teoría de información y comunicación cuántica [31].

Un mapa lineal V se dice completamente positivo si y sólo si admite una representación de Kraus, es decir, si existen operadores Ω_i en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ tal que se cumpla

$$VA = \sum_i \Omega_i A \Omega_i^\dagger. \tag{2.0.20}$$

Ahora bien, hasta el momento hemos introducido un mapa dinámico $V(t,0)$ para un tiempo fijo $t \geq 0$. Si ahora se permite que el parámetro tiempo t varíe (manteniendo el estado inicial del entorno $\rho_E(0)$ fijo), se obtiene una familia de mapas de un parámetro

$$\{V(t,0) | t \geq 0, V(0,0) = I\}, \tag{2.0.21}$$

que contiene la información completa de la dinámica de la evolución de todos los posibles estados iniciales del sistema. Entonces, formalmente hablando, un proceso cuántico de un sistema abierto está dado por esta familia de mapas dinámicos de un parámetro, completamente positivos y preservadores de traza [30].

2.1. Ecuación maestra Markoviana

El ejemplo más sencillo de un proceso cuántico está provisto por un semigrupo de mapas completamente positivos, el cual es considerado como el ejemplo prototípico de un proceso cuántico Markoviano. En este caso, lo que se hace es despreciar los efectos de memoria en la dinámica reducida del sistema, para lo cual se necesita que la escala de tiempo característica en la que la función de correlación del entorno decae sea mucho más pequeña que la escala de tiempo característica de la evolución del sistema. Esto último puede formalizarse asumiendo que (2.0.21) tiene la propiedad adicional

$$V(t,0)V(s,0) = V(t+s,0) \tag{2.1.22}$$

para todo $t, s \geq 0$. Bajo condiciones matemáticas muy generales [17], se puede afirmar que dicho semigrupo posee un generador infinitesimal $\mathcal{L}$, el cual nos permite escribir el mapa dinámico como

$$V(t,0) = \exp[\mathcal{L}t]. \tag{2.1.23}$$

De este modo, el estado reducido del sistema $\rho_S(t)$ obedece la ecuación maestra Markoviana

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t), \tag{2.1.24}$$

donde se reconoce en $\mathcal{L}$ al superoperador introducido para la ecuación maestra en (2.0.7). Se puede demostrar [32, 33] que este generador $\mathcal{L}$ es el generador de un semigrupo completamente positivo de mapas dinámicos cuánticos si y sólo si tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H_S, \rho_S] + \sum_i \gamma_i \left[A_i \rho_S A_i^\dagger - \frac{1}{2}\{A_i^\dagger A_i, \rho_S\} \right], \tag{2.1.25}$$

en donde el primer término del generador representa la parte unitaria de la dinámica dado por un Hamiltoniano del sistema H_S (que no necesariamente debe coincidir con el Hamiltoniano del sistema microscópico H_S de la ecuación (2.0.4)). Por otra parte, los operadores A_i son usualmente llamados operadores de Lindblad, que describen los diversos modos de decaimiento del sistema, y las γ_i son cantidades positivas que juegan el papel de tasas de relajación para los diferentes modos de decaimiento del sistema abierto.

2.2. Ecuación maestra no-Markoviana

La presunción (2.1.22) es en general difícil de justificar rigurosamente y por lo tanto no siempre se puede derivar una ecuación maestra de la forma (2.1.24). Semejante derivación requiere, como se dijo, la validación de la llamada aproximación de Markov. La misma presupone casos en los que las autocorrelaciones que se generan en el entorno debido a la interacción con el sistema decaen muy rápido en relación a la escala de tiempo en la cual el estado del sistema varía notablemente. Esto provoca que la ecuación que rige la evolución de $\rho_S(t)$ sea local en el tiempo [8]. Más precisamente, si τ_E describe el ancho temporal de estas correlaciones y τ_R es el tiempo de relajación o decoherencia del sistema, la aproximación de Markov exige que

$$\tau_E \ll \tau_R. \tag{2.2.26}$$

La aproximación de Markov está justificada para varios casos físicos de interés, sin embargo, grandes acoplamientos o interacciones con reservorios a baja temperatura pueden llevar a grandes correlaciones que resultan en tiempos de memoria largos y en una falla de la aproximación. Usualmente se espera que la formulación matemática de los procesos cuánticos que describen estos efectos de memoria necesariamente involucre ecuaciones de movimiento no locales en el tiempo. Sin embargo, como podrá ser deducido del siguiente argumento, la presencia de fuertes efectos de memoria no excluye la descripción de la dinámica en términos de una ecuación maestra local en el tiempo. De acuerdo a la ecuación (2.0.11), se tiene $\rho_S(t) = V(t,0)\rho_S(0)$. Asumiendo al mismo tiempo una dependencia temporal suave, se puede derivar la relación anterior y se obtiene

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \dot{V}(t,0)\rho_S(0). \tag{2.2.27}$$

Con el fin conseguir una ecuación maestra local en el tiempo, se puede invertir (2.0.11), expresando $\rho_S(0)$ en términos de $\rho_S(t)$, lo que lleva a

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \dot{V}(t,0)V^{-1}(t,0)\rho_S(t). \tag{2.2.28}$$

De esta manera, se puede ver que el mapa lineal $\mathcal{K}(t) = \dot{V}(t,0)V^{-1}(t,0)$ representa un generador de la dinámica dependiente del tiempo. Con dicho generador se obtiene una ecuación maestra, local en el tiempo, la cual provee una ecuación diferencial de primer orden para el estado del sistema abierto

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{K}(t)\rho_S(t). \tag{2.2.29}$$

Es importante notar que lo anterior implica que la inversa $V^{-1}(t,0)$ del mapa $V(t,0)$ necesariamente tiene que existir [30]. Además, el generador $\mathcal{K}(t)$ de la ecuación maestra local debe preservar la hermiticidad y la traza, por lo que se tiene

$$[\mathcal{K}(t)A]^\dagger = \mathcal{K}(t)A^\dagger \tag{2.2.30}$$

y

$$Tr_S[\mathcal{K}(t)A] = 0. \tag{2.2.31}$$

De estas condiciones, se sigue que el generador debe tener la siguiente forma general

$$\mathcal{K}(t)\rho_S = -i[H_S(t),\rho_S] + \sum_i \gamma_i(t)\left[A_i(t)\rho_S A_i^\dagger(t) - \frac{1}{2}A_i^\dagger(t)A_i(t),\rho_S\right], \tag{2.2.32}$$

cuya estructura provee una generalización natural de la estructura de Lindblad, en la cual el Hamiltoniano $H_S(t)$, los operadores de Lindblad $A_i(t)$ así como las tasas de decaimiento $\gamma_i(t)$ pueden depender del tiempo. De todos modos, si bien la estructura de la ecuación (2.2.32) toma en consideración la hermiticidad y la preservación de la traza en la dinámica, la misma no es garantía de una completa positividad. La formulación de las condiciones necesarias y suficientes para la completa positividad de la dinámica de este generador es un problema importante aún no resuelto [30]. Sin embargo, en el caso que las tasas sean positivas para todo tiempo

$$\gamma_i(t) \geq 0, \tag{2.2.33}$$

la dinámica resultante es de hecho completamente positiva, en tanto que el generador está en la forma de Lindblad para cada $t \geq 0$ fijo.

Con estos resultados, en el presente capítulo se han trazado algunos lineamientos generales del formalismo para lidiar con sistemas cuánticos abiertos, los cuales serán utilizados en los capítulos subsiguientes para estudiar tanto la derivación de los tiempos mínimos como para introducir el modelo amortiguado de Jaynes-Cummings, telón sobre el cual desplegaremos nuestros principales cálculos.

Capítulo 3

Cotas temporales para la evolución cuántica

"Hombres y cosas, suben, bajan, se alejan, se acercan.
Todo es una comedia de distancias."
Antonio Porchia

3.1. Cotas para sistemas aislados

Tal como se indicó en la introducción de la tesis, el origen de las cotas temporales para la evolución que impone la teoría cuántica está relacionado profundamente con la distinguibilidad entre los estados. Dos estados cuánticos no son perfectamente distinguibles, salvo en el caso particular en que ambos estados sean ortogonales. Esto provoca que los estados que se encuentran próximos en el espacio de Hilbert sean menos distinguibles, por lo que la distancia entre los estados también fija el grado de distinguibilidad entre ellos. De esta manera, si uno desea conectar mediante una evolución física dos estados con algún grado fijo de distinguibilidad, es necesario avanzar por lo menos la misma distancia que separa estos dos estados. En este contexto, la teoría del límite de la velocidad cuántica tiene por objetivo establecer límites inferiores de este tiempo mínimo de evolución y su origen se

remonta a los trabajos pioneros realizados por Mandelstam-Tamm y Margolus-Levitin para evoluciones unitarias conectando estados puros ortogonales. Asimismo, resulta importante señalar que la pérdida de la distinguibilidad entre estados vecinos en la mecánica cuántica es intrínseca a la teoría y no tiene nada que ver con la precisión del aparato de medida utilizado para distinguirlos. Esto contrasta con el caso clásico en el que los estados del sistema están dados por puntos en el espacio de fases y su distinguibilidad no está relacionada con la distancia entre los mismos.

Si bien el presente trabajo se centrará en las cotas temporales de evolución para sistemas cuánticos abiertos, a modo de preludio, en esta primer sección, esbozaremos dos de las cotas que fueron derivadas para sistemas cuánticos aislados, a saber, la cota correspondiente al trabajo de Mandelstam-Tamm (MT) y la referente al de Margolus-Levitin (ML). Veremos que, de acuerdo al enfoque que utilicemos, llegaremos a distintos resultados independientes entre sí.

3.1.1. Cota de Mandelstam y Tamm

El trabajo pionero en este asunto fue realizado por Mandelstam y Tamm (MT) [1], quienes derivaron una cota para un sistema que evolucionaba entre dos estados puros distinguibles a través de una dinámica unitaria generada por un Hamiltoniano independiente del tiempo. La resultante cota inferior para el tiempo de la evolución está dada por

$$t \geq \tau^{MT} \equiv \frac{\hbar\pi}{2\Delta E}, \tag{3.1.1}$$

en donde ΔE representa la varianza de la energía del sistema. Este límite inferior para la evolución temporal del sistema fue obtenido a partir de la relación de incerteza existente entre el tiempo y la energía. Recordemos que las relaciones de incerteza que Heisenberg propuso en uno de sus trabajos fundacionales de la mecánica cuántica [34] surgen como consecuencia de la relación de conjugación entre pares de variables físicas [35], tal como la posición y el momento o incluso también el tiempo y la energía. En cada caso, las variables están relacionadas a través de la transformada

de Fourier, y por lo tanto la interpretación de las desigualdades

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.1.2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.1.3}$$

resulta evidente al visualizar a un estado de un sistema cuántico a través de su función de onda $\psi(x,t)$, siendo las cantidades en (3.1.2) y (3.1.3) medidas de las desviaciones de los observables en un paquete de ondas. Del mismo modo, si uno quiere generalizar el resultado para dos operadores arbitrarios que no conmuten, se tiene la siguiente desigualdad

$$\Delta_\psi A . \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | \left[A, B \right] | \psi \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|, \tag{3.1.4}$$

en donde $\Delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}$ y $\Delta_\psi B = \sqrt{\langle B^2 \rangle_\psi - \langle B \rangle_\psi^2}$. En el caso que $[A, B] = i\hbar$, se obtiene

$$\Delta_\psi A . \Delta_\psi B \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{3.1.5}$$

tal como sucede para los operadores del momento y la posición. Sin embargo, deducir a partir de (3.1.4) la relación de indeterminación entre la energía y el tiempo supone un serio inconveniente, en tanto que el tiempo no es un operador en mecánica cuántica sino un parámetro [35]. Por dicha razón, resulta deseable el encontrar una relación general que exprese la incerteza asociada a la energía y el tiempo como variables conjugadas. Mostramos aquí, en parte, la deducción efectuada por Mandelstam y Tamm [1], la cual nos permitirá avanzar sobre el concepto del límite cuántico para las velocidades en sistemas aislados. Partimos de considerar un operador cualquiera A y su correspondiente ecuación de Heisenberg

$$\frac{dA}{dT} = -\frac{i}{\hbar}[A, H]. \tag{3.1.6}$$

Tomando el valor de expectación con respecto a un estado particular en la expresión anterior, se obtiene la reconocida ecuación de Ehrenfest

$$\langle \frac{dA}{dT} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle. \tag{3.1.7}$$

Eligiendo el operador B como el Hamiltoniano en (3.1.4) y combinando esta expresión con (3.1.7), se puede escribir

$$\Delta E \Delta A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|. \tag{3.1.8}$$

De esta manera, si se define la cantidad

$$\Delta t_A = \frac{\Delta A}{\left|\frac{d\langle A\rangle}{dt}\right|}. \tag{3.1.9}$$

se verá que la misma posee unidades de tiempo y que por lo tanto (3.1.8) tiene ahora una forma similar a (3.1.3). Notemos que la expresión Δt_A se puede interpretar como el tiempo en el cual la cantidad $\langle A\rangle$ se encuentra confinada en un intervalo de incerteza ΔA en torno a su valor medio (temporal) [35]. Usando esta definición, entonces, llegamos a partir de (3.1.8) a la desigualdad de Mandelstam y Tamm, la cual brinda una cota inferior para Δt_A

$$\Delta t_A \geq \frac{\hbar}{2\Delta E}. \tag{3.1.10}$$

Sin embargo, Bhattacharyya [36] argumentó que Δt_A, si bien corresponde a un tiempo característico del operador A, no se corresponde estrictamente con el tiempo físico de evolución del sistema. Por esta razón, seguiremos su deducción de una nueva desigualdad aquí. Sabemos que un sistema cuántico, preparado a $t = 0$ en algún estado no estacionario $|\phi\rangle$, evoluciona de acuerdo a

$$|\phi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\phi\rangle\,. \tag{3.1.11}$$

La probabilidad que el estado evolucionado ϕ_t sea igual al inicial ϕ se denomina probabilidad de no-decaimiento

$$P_t = |\langle\phi|\phi_t\rangle|^2\,. \tag{3.1.12}$$

Con el objetivo de relacionar esta cantidad con la desigualdad (3.1.3), tomamos la desigualdad de Mandelstam (3.1.10) y la evaluamos para $A = |\phi\rangle\langle\phi|$, es decir, el operador que proyecta sobre el estado inicial. Tomando los valores de expectación sobre ϕ_t, es simple verificar que

$$\langle A\rangle = \langle A^2\rangle = P_t \quad \rightarrow \quad \Delta A = \sqrt{P_t(1-P_t)}, \tag{3.1.13}$$

y por lo tanto (3.1.10) toma la forma

$$\frac{\sqrt{P_t(1-P_t)}}{\left|\frac{dP_t}{dt}\right|} \geq \frac{\hbar}{2\Delta E}. \tag{3.1.14}$$

Finalmente, recordando que $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -(1-x^2)^{-1/2}$, llegamos a la expresión central del trabajo de Bhattacharyya

$$\frac{d}{dt}\arccos\left(\sqrt{P_t}\right) \leq \frac{\Delta E}{\hbar}, \tag{3.1.15}$$

en la cual ΔE se interpreta como la varianza del Hamiltoniano evaluado bajo el estado evolucionado (3.1.11). Integrando (3.1.15) de manera directa obtenemos que

$$\arccos\left(\sqrt{P_t}\right) \leq \frac{\Delta t \Delta E}{\hbar}, \tag{3.1.16}$$

donde ahora Δt tiene un significado unívoco, al ser simplemente el tiempo transcurrido desde el instante inicial (considerado como 0) hasta t. De esta manera, dicho tiempo de evolución tiene una cota inferior que depende de P_t pero no es absoluta, ya que $0 \leq \arccos(x) \leq \pi/2$ para $0 \leq x \leq 1$. La expresión (3.1.16) posee una forma similar a la famosa (3.1.3), si bien es evidente que ambas tienen significados distintos. Llegados a este punto, si ahora nos situamos en el contexto de la teoría de control de sistemas cuánticos y suponemos que el estado evolucionado es cierto estado fijo deseado $|\psi_t\rangle$, tenemos que la relación (3.1.16) nos indica cuál es el tiempo mínimo necesario para que el estado evolucione de $|\phi\rangle$ a $|\psi_t\rangle$

$$t \geq \tau^{MT} = \frac{\hbar}{\Delta E}\arccos(\langle\phi|\psi_t\rangle). \tag{3.1.17}$$

El caso más extremo de (3.1.17) corresponde al caso en que la evolución se da entre dos estados ortogonales $\langle\phi|\psi_t\rangle = 0$, donde se obtiene que $t \geq \tau^{MT} = \frac{\hbar\pi}{2\Delta E}$, tal como se indicó al comienzo de esta subsección en la ecuación (3.1.1).

3.1.2. Cota de Margolus y Levitin

Varios años después, Margolus y Levitin (ML) [2] estudiaron el mismo problema para una evolución entre dos estados ortogonales y arribaron a una cota diferente

$$t \geq \tau^{ML} \equiv \frac{\pi\hbar}{2E}, \tag{3.1.18}$$

en donde E corresponde al valor medio de la energía y no a la varianza de la energía como predecía su antecesora τ^{MT}. Mostramos aquí parte de su desarrollo.

Comenzamos la deducción observando que un estado arbitrario $|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle$ evolucionado a cierto tiempo t resulta

$$|\psi_t\rangle = \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle . \tag{3.1.19}$$

A continuación, utilizando la amplitud de la probabilidad de no decaimiento, es decir, la raíz cuadrada de la relación (3.1.12) se tiene

$$S(t) = \langle\psi_0|\psi_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}, \tag{3.1.20}$$

y buscaremos el mínimo valor de t tal que S(t)=0 de manera que ambos estados devengan ortogonales. Con este fin, notemos que

$$\begin{aligned} Re(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \cos\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{E_n t}{\hbar} + \sin\left(\frac{E_n t}{\hbar}\right)\right)\right) \\ &= 1 - \frac{2E}{\pi\hbar}t + \frac{2}{\pi} Im(S), \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

donde se ha usado la desigualdad $\cos(x) \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin(x))$, válida para $x \geq 0$. Ahora bien, para cualquier valor de t en el que S(t)=0 también resultará Re(S)=0 e Im(S)=0, y por lo tanto la ecuación (3.1.21) se vuelve

$$0 \geq 1 - \frac{2Et}{\pi\hbar}. \tag{3.1.22}$$

De esta modo, tal como han sugerido Margolus y Levitin, el tiempo mínimo necesario para que S(t) llegue a cero y ambos estados devengan ortogonales resulta ser $\tau^{ML} \equiv \frac{\pi\hbar}{2E}$, lo cual prueba la ecuación (3.1.18) al comienzo de esta subsección.

Por lo tanto, ya que hemos obtenido distintos resultados de acuerdo a si utilizamos el enfoque de Mandelstam-Tamm o el de Margolus-Levitin, podemos afirmar que para dinámicas unitarias que conectan dos estados puros ortogonales, la cota concerniente al tiempo mínimo de evolución no es única en el caso que $\Delta E \neq E$. Debido a lo anterior, usualmente dicha cota se presenta combinando estos dos resultados independientes y viendo cuál es el más cercano al tiempo real de la evolución:

$t \geq max\left[\tau^{MT}; \tau^{ML}\right]$ [37]. A su vez, tal como se desprende de ambas expresiones, puede verse que este tiempo mínimo de evolución corresponde a un efecto puramente cuántico, el cual desaparece en la medida que hacemos tender $h \to 0$.

Sin embargo, considerando que cualquier dispositivo de procesamiento de información está inevitablemente sujeto a ruido proveniente del ambiente, estas cotas temporales para la evolución también han sido investigadas para dinámicas no unitarias [25–28]. De esto mismo nos ocuparemos en la sección siguiente.

3.2. Cotas para sistemas abiertos

En el apartado anterior, se han mostrado las derivaciones de límites temporales que dan cuenta del mínimo tiempo de evolución que requiere un sistema cuántico para ir de un dado estado inicial ρ_0 a otro dado estado final ρ_t. Para ello, se ha supuesto una evolución unitaria y en consecuencia se ha ignorado la influencia del entorno sobre el sistema. Sin embargo, si se tiene en cuenta que en última instancia todos los sistemas están acoplados a un entorno [17, 38], resulta fundamental derivar estos límites en situaciones más realistas en las que el sistema evoluciona según dinámicas no unitarias. Por este motivo, en la presente sección nos ocuparemos de resumir las principales derivaciones de estas cotas para sistemas cuánticos abiertos [25, 27, 28]. Tal como sucedía para el caso unitario, se verá cómo a partir de distintos enfoques se llegará a resultados independientes y diferentes entre sí. Indefectiblemente, esto nos llevará a cuestionarnos la naturaleza y la interpretación de estos tiempos mínimos, tema difuso que no queda claro en la literatura y que es el motor principal que pone en movimiento a nuestro trabajo. De esta manera, los resultados que presentaremos en este apartado serán la plataforma principal sobre la cual desplegaremos nuestro posterior análisis. En paralelo, también en esta sección se analizarán brevemente las condiciones que deben darse para la saturación de estas cotas, particularmente en si existe o no una evolución que para todo tiempo sature el límite. Para las cotas derivadas en [27, 28] lo anterior no fue estudiado en la literatura y resulta una característica deseable para cualquier cota temporal de evolución por varias razones.

En primer lugar, el hecho que exista una evolución que para todo tiempo sature el límite nos habla acerca de que nuestro estado físico está evolucionando en el menor tiempo físico posible. En segundo lugar, el tener cotas temporales que saturen o que se acerquen lo máximo posible al tiempo real de la evolución, nos permite valernos de una herramienta fundamental a la hora de estimar el tiempo real de la evolución, sin la necesidad de conocer previamente la totalidad de la dinámica del sistema. A continuación, entonces, se resumen los principales enfoques para derivar cotas temporales de evolución en sistemas cuánticos abiertos.

3.2.1. Cota en base a la información cuántica de Fisher

Debido a que estamos interesados en el tiempo mínimo necesario para que el sistema vaya de un estado a otro, debemos definir una noción de distancia entre estados cuánticos. Una opción, la utilizada en la Ref. [25], está basada en la fidelidad de Bures [31] entre el estado inicial y el final,

$$F_B(\rho_0, \rho_t) = Tr\left(\sqrt{\sqrt{\rho_0}\rho_t\sqrt{\rho_0}}\right). \tag{3.2.23}$$

Los autores prueban que, entre todas las métricas basadas en la fidelidad de Bures, la mejor cota para la longitud de Bures [39], $\int_0^t \sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t')/4}dt'$, está dada por el ángulo de Bures, $\arccos\left(F_B[\rho_0, \rho_t]\right)$ [40, 41],

$$\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) \equiv \arccos\left(\sqrt{F_B[\rho_0, \rho_t]}\right) \leq \int_0^\tau \sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t')/4}\, dt'. \tag{3.2.24}$$

Aquí, $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t)$, representa a la información cuántica de Fisher a lo largo del camino seguido por el sistema y su raíz cuadrada es proporcional a la velocidad instantánea de separación entre dos estados vecinos [1]. La ecuación (3.2.24) implica que la longitud de la geodésica que conecta $\rho(0)$ con $\rho(t)$ es siempre menor a la longitud correspondiente al camino actual.

La interpretación geométrica que se desprende de la ecuación (3.2.24), permite definir dos tipos distintos de cotas temporales para la evolución entre dos estados

[1] Un mayor detalle respecto a información sobre la información cuántica de Fisher se adjunta en el Apéndice del trabajo.

cuánticos separados por una dada distancia. El primero, que llamaremos τ_t^{min}, corresponde al tiempo que le lleva al sistema recorrer (a través del camino actual) la misma longitud que el camino dado por la geodésica entre los dos estados, es decir,

$$\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) = \int_0^{\tau_t^{min}} \sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t')/4}\, dt'. \tag{3.2.25}$$

Es importante percatarse que en orden de conocer $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t)$ a lo largo del camino, en principio, requiere menos información que el conocer de manera exacta la dinámica actual del sistema. En este sentido, esta cota para el tiempo mínimo de evolución sigue la esencia de la teoría original para sistemas aislados porque, sabiendo el estado inicial y el final aunque desconociendo el tiempo real de evolución t, uno puede estimar un límite inferior para dicho tiempo de evolución. Esto está bien ilustrado, por ejemplo, para cualquier evolución unitaria generada por un Hamiltoniano independiente del tiempo, en el que $\mathcal{F}_Q(t) = 4\langle(\Delta H)^2\rangle_{\rho_0}/\hbar^2$ para todo tiempo (ver Apéndice). Así, en este caso sólo necesitamos conocer la varianza de la energía del sistema en orden de estimar la cota,

$$\tau_t^{min} = \hbar\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)/\sqrt{\langle(\Delta H)^2\rangle_{\rho_0}}, \tag{3.2.26}$$

que para estados puros ortogonales, en donde $\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) = \pi/2$, es igual a τ^{MT}. Esta cota temporal τ_t^{min}, permite definir a su vez una cota para la velocidad límite (en unidades de frecuencia) como

$$\mathcal{V}_t^{min} \equiv \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)}{\tau_t^{min}}, \tag{3.2.27}$$

la cual depende en t sólo implícitamente a través del estado final ρ_t.

La segunda cota para la evolución temporal viene directamente de reordenar la ecuación (3.2.24),

$$t \geq \frac{\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)}{\mathcal{V}_t^{av}} \equiv \tau_t^{av}, \tag{3.2.28}$$

donde hemos definido una 'velocidad promedio de la evolución' como:

$$\mathcal{V}_t^{av} \equiv (1/t)\int_0^t \sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t')/4}\, dt'. \tag{3.2.29}$$

En el caso de evoluciones unitarias generadas por un Hamiltoniano independiente del tiempo, se tiene que $\mathcal{V}_t^{av} = \sqrt{\langle(\Delta H)^2\rangle_{\rho_0}}/\hbar$, lo cual no depende del tiempo actual

de evolución t y además resulta que $\tau_\tau^{av} = \tau_t^{min}$. Sin embargo, para evoluciones no unitarias, los tiempos τ_t^{av} y τ_t^{min} no necesariamente coinciden y, en general, se tiene que la velocidad $\mathcal{V}_t^{av}$ depende explícitamente de t, contrario a la velocidad en $\mathcal{V}_t^{min}$. Luego mostraremos, en un sistema específico, no sólo que $\tau_t^{min} < \tau_t^{av}$ sino que la explícita dependencia de $\mathcal{V}_t^{av}$ en t, hace que τ_t^{av} resulte una herramienta inconsistente a la hora de estimar el tiempo mínimo de evolución entre los estados ρ_0 y ρ_t.

Saturación del límite.— Del carácter geométrico de la desigualdad en la ecuación (3.2.24), es claro que la saturación $\tau = \tau_t^{min}$ o $\tau = \tau_t^{av}$ es sólo posible en la medida que la evolución del sistema sea a través de una geodésica, de manera que en este caso tendremos $\tau = \tau_t^{min} = \tau_t^{av}$ para todo valor de t. En la Figura 3.1 se puede ver la ilustración geométrica de lo dicho.

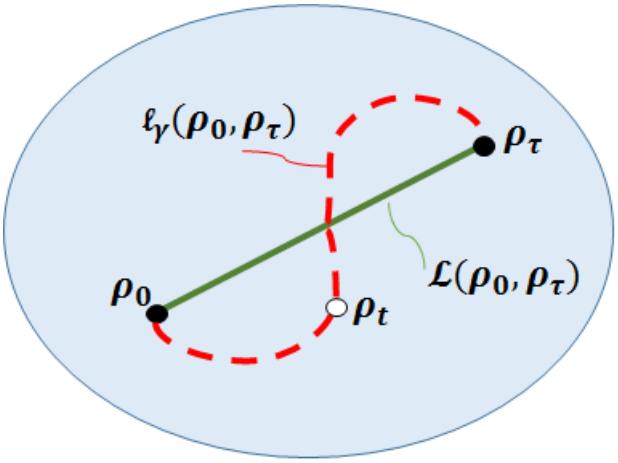

Figura 3.1: Imagen pictórica representando el carácter geométrico de estos tiempos mínimos de evolución. La línea roja punteada, cuya longitud se denota $\ell_\gamma(\rho_0, \rho_\tau)$, refiere al camino actual seguido en el espacio de estados representando una evolución entre el estado inicial ρ_0 y el estado final ρ_τ, parametrizado por el tiempo $t \in [0, \tau]$. La línea verde continua representa la geodésica que conecta ρ_0 con ρ_τ, cuya longitud está dada por $\mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)$. Esta interpretación proporciona un criterio claro para la saturación del límite inferior en el tiempo de evolución, es decir, cuando el camino seguido por la evolución dinámica coincide con una geodésica de la métrica considerada.

3.2.2. Cota en base a distintos operadores norma

Deffner y Lutz [27] derivaron tres cotas distintas para el mínimo tiempo de evolución para un estado puro inicial $\rho_0 = |\psi_0\rangle \langle\psi_0|$ empleando la desigualdad de von-Neumann para operadores. Tal como en el trabajo [25], su enfoque también hace uso del ángulo de Bures, $\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t) = \arccos(\sqrt{\langle\psi_0|\rho_t|\psi_0\rangle})$, en orden de cuantificar la distancia dada entre el estado inicial y el final. La derivación puede ser resumida como sigue. En primer lugar, de la derivada temporal para el ángulo de Bures y usando que $x \leq |x|$, se puede llegar a

$$2\cos(\mathcal{L})\sin(\mathcal{L})\dot{\mathcal{L}} \leq |\langle\psi_0|\dot{\rho}_t|\psi_0\rangle| = |\mathrm{Tr}(\rho_0\dot{\rho}_t)|. \tag{3.2.30}$$

A continuación, se usa la desigualdad de von-Neumann para la traza de operadores clase Hilbert-Schmidt[2],

$$|\mathrm{Tr}(\rho_0\dot{\rho}_t)| \leq \sigma_1(t) = \|\dot{\rho}_t\|_{op}, \tag{3.2.31}$$

donde $\sigma_1(t)$ es el mayor valor singular de $\dot{\rho}_t$, y debido a que este operador es hermítico, $\sigma_1(t)$ es igual a su operador norma denotado por $\|\ldots\|_{op}$. Junto con la desigualdad (3.2.31), se usa el set de desigualdades para los operadores,

$$\|A\|_{op} \leq \|A\|_{hs} \leq \|A\|_{tr}, \tag{3.2.32}$$

donde $\|A\|_{tr} \equiv \mathrm{Tr}\left(\sqrt{A^\dagger A}\right) = \sum_i \sigma_i$ es la norma traza y $\|A\|_{hs} \equiv \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\dagger A)} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$ es la norma Hilbert-Schmidt. Haciendo uso de todas las desigualdades, se llega a

$$2\cos(\mathcal{L})\sin(\mathcal{L})\dot{\mathcal{L}} \leq \|\dot{\rho}_t\|_{op} \leq \|\dot{\rho}_t\|_{hs} \leq \|\dot{\rho}_t\|_{tr}, \tag{3.2.33}$$

e integrando a lo largo del tiempo finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \sin^2(\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)) &\leq \int_0^t \|\dot{\rho}_{t'}\|_{op}\, dt' \leq \\ &\leq \int_0^t \|\dot{\rho}_{t'}\|_{hs}\, dt' \leq \int_0^t dt\, \|\dot{\rho}_t\|_{tr}. \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

[2]Para dos operadores clase Schmidt A y B la desigualdad de von Neumann para la traza es $\mathrm{Tr}(AB) \leq \sum_i \sigma_i\lambda_i$, donde la suma es sobre los valores singulares, σ_i y λ_i, de los operadores, A y B, respectivamente, en orden descendiente, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ [42].

Estas desigualdades son válidas para cualquier operador densidad de evolución y, en el mismo sentido que la ecuación (3.2.24), la (3.2.34) también sirve como el punto de partida para derivar cotas temporales si definimos

$$\mathcal{V}_t^{op,tr,hs} \equiv (1/t) \int_0^t ||L_t(\rho_{t'})||_{op,tr,hs}\, dt', \tag{3.2.35}$$

con $L_t(\rho_{t'})$ el generador no unitario de la evolución. De esta forma, las tres cotas para el tiempo mínimo de evolución en [27] son:

$$t \geq \tau_t^{op,tr,hs} = \frac{\sin^2\left[\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)\right]}{\mathcal{V}_t^{op,tr,hs}}. \tag{3.2.36}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que $\mathcal{V}_t^{op} \leq \mathcal{V}_t^{hs} \leq \mathcal{V}_t^{tr}$, la mejor cota temporal resulta ser τ_t^{op}. Más adelante mostraremos en un sistema específico que $\tau_t^{op} > \tau_t^{min}$ y la explícita dependencia de $\mathcal{V}_t^{op}$ en t, hace que τ_t^{op} también resulte una estimación inconsistente del tiempo mínimo de evolución entre ρ_0 y ρ_t.

Saturación del límite.— La saturación de estos tiempos mínimos no fue estudiada en la Ref. [27], por lo que su análisis resulta original de esta tesis. De las desigualdades en (3.2.34) se puede notar que las mismas no poseen una clara interpretación geométrica, por lo que sus condiciones para la saturación (que llevan a la saturación de las cotas temporales en la ecuación (3.2.36)) no son tan evidentes. En el caso de τ_t^{op}, la saturación corresponde a

$$\sin^2(\mathcal{L}(\rho_0, \rho_t)) = \int_0^t dt\, \|\dot{\rho}_t\|_{op}. \tag{3.2.37}$$

En orden de tener una saturación a lo largo de cierto camino de evolución, necesitamos satisfacer las igualdades en (3.2.30) y (3.2.31) para todo tiempo t. Entonces, el valor medio $\langle\psi_0|\dot{\rho}_t|\psi_0\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_0\dot{\rho}_t)$ debería ser positivo a lo largo del camino. Supongamos que sea este el caso, por lo que ahora queremos ver si es posible saturar la ecuación (3.2.31) para todo tiempo t, es decir, $\mathrm{Tr}(\rho_0\dot{\rho}_t) = \sigma_1(t) \equiv \|\dot{\rho}_t\|_{op} > 0$ a lo largo de algún camino de evolución. En aras de ver que esto no es posible, primero observemos que la desigualdad de von-Neumann para la traza $\mathrm{Tr}(\rho_0\dot{\rho}_t) \leq \sigma_1(t)$ se satura a lo largo de una evolución si y sólo si ρ_0 y $\dot{\rho}_t$ son diagonalizables de forma unitaria y simultánea para todo tiempo de evolución. Esto quiere decir que $\sigma_1(t)$

debe ser el autovalor de $\dot{\rho}_t$ asociado al común autovector independiente del tiempo, $|\psi_0\rangle$, de $\dot{\rho}_t$ y ρ_0. Por lo tanto, la estructura del estado evolucionado debería ser

$$\rho_t = \left(1 + \int_0^t \sigma_1(t')\, dt'\right) \rho_0 + A_t, \tag{3.2.38}$$

donde A_t tiene un soporte en el subespacio ortogonal al subespacio abarcado por $\rho_0 \equiv |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Pero ya que asumimos que la ecuación (3.2.30) está saturada para todo tiempo, tenemos $\sigma_1(t) > 0$ para todo tiempo. Entonces, ρ_t en la ecuacion (3.2.38) no es un estado físico para todo $t > 0$, porque de otro modo deberíamos tener para la probabilidad de encontrar el estado evolucionado en el estado inicial:

$$Tr(\rho_0 \rho_t) = 1 + \int_0^t \sigma_1(t')\, dt' > 1, \tag{3.2.39}$$

donde usamos que $\rho_0 A_t = 0$ para todo tiempo. De esta manera, no es posible encontrar una evolución donde la ecuación (3.2.31) esté saturada para todo tiempo si la ecuación (3.2.30) está también saturada para todo tiempo. La saturación $t = \tau_t^{op}$ puede ser posible únicamente para ciertos tiempos t a través de cierta evolución del sistema. Esto contrasta claramente con $t = \tau_t^{av} = \tau_t^{min}$, que corresponde a una saturación continua en el tiempo a través de una geodésica.

3.2.3. Cota en base a la noción de la 'cuanticosidad'

La derivación para el mínimo tiempo de evolución seguido en [28] está basado en un enfoque muy distinto a los anteriores, relacionado al novedoso concepto llamado 'cuanticosidad'. La cuantificación del carácter no clásico de un sistema cuántico recientemente ha atraído mucha atención [43, 44]. En particular, se ha definido la noción de la cuanticosidad asociada a la no conmutatividad del álgebra de observables [43, 44] como,

$$\begin{aligned} Q(\rho_a, \rho_b) &= 2\|[\rho_a, \rho_b]\|_{hs}^2 \\ &= -4Tr\left[(\rho_a \rho_b)^2 - \rho_a^2 \rho_a^2\right], \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

tal que $0 \leq Q(\rho_a, \rho_b) \leq 1$. Notemos que $Q(\rho_a, \rho_b) = 0$ si y sólo si $[\rho_a, \rho_b] = 0$ [43, 44], que significa que ρ_a y ρ_b son diagonales en la misma base. En este sentido, $Q(\rho_a, \rho_b)$ es

un testigo de las coherencias que el estado ρ_b tiene en la base de autoestados de ρ_a y viceversa. Por lo tanto, en una evolución del sistema, la cuanticosidad, $Q(\rho_0, \rho_t)$, como función del tiempo, monitorea la generación de coherencias en el estado evolucionado ρ_t en la base de autoestados del estado inicial ρ_0.

Contrariamente a los enfoques descriptos en las anteriores subsecciones, en orden de obtener un tiempo mínimo de evolución, el enfoque seguido en [28] no usa ninguna definición explícita distancia entre el estado inicial y el final. En cambio, de la definición de la cuanticosidad, $Q(\rho_0, \rho_t)$, los autores utilizan la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\operatorname{Tr}(A^\dagger B)| \leq \|A\|_{hs}\|B\|_{hs}$, para obtener

$$\frac{|\dot{Q}(\rho_0, \rho_t)|}{\sqrt{Q(\rho_0, \rho_t)}} \leq 2\sqrt{2}\, \|[\rho_0, \dot{\rho}_t]\|_{hs}, \tag{3.2.41}$$

donde $\dot{Q}(\rho_0, \rho_t) = 4\operatorname{Tr}\left(A_t^\dagger B_t\right)$ con $A_t \equiv [\rho_0, \rho_t]$ y $B_t \equiv [\rho_0, \dot{\rho}_t]$. Ahora, para la integración en el tiempo del lado izquierdo de la ecuación (3.2.41), se usa que

$$\int_0^t \frac{|\dot{Q}(\rho_0, \rho_{t'})|}{\sqrt{Q(\rho_0, \rho_{t'})}}\, dt' \geq \left| \int_0^Q \frac{dQ'}{\sqrt{Q'}} \right| = 2\sqrt{Q(\rho_0, \rho_t)}. \tag{3.2.42}$$

De esta manera, se obtiene que

$$\sqrt{Q(\rho_0, \rho_t)/2} \leq \int_0^t \|[\rho_0, \dot{\rho}_{t'}]\|_{hs}\, dt'. \tag{3.2.43}$$

Una cota temporal para la evolución, τ_t^{quant}, puede ser lograda a través de la desigualdad en (3.2.43), en el mismo sentido que τ_t^{av} había sido obtenida de (3.2.24) y los límites $\tau_t^{op,tr,hs}$ de las desigualdades en (3.2.34). Por ende, se tiene

$$t \geq \tau_t^{quant} = \frac{\sqrt{Q(\rho_0, \rho_t)/2}}{\mathcal{V}_t^{quant}}, \tag{3.2.44}$$

donde hemos definido el 'promedio temporal en la velocidad' con unidades de frecuencia como

$$\mathcal{V}_t^{quant} \equiv \frac{1}{t}\int_0^t \|[\rho_0, \dot{\rho}_{t'}]\|_{hs}\, dt'. \tag{3.2.45}$$

Saturación del límite.— La saturación de este tiempo mínimo no fue estudiada en la Ref. [28], por lo que su análisis también resulta original de esta tesis. Con tal de tener una saturación en la ecuación (3.2.43), de manera que $t = \tau_t^{quant}$ para todo tiempo a través de una evolución, necesitamos satisfacer las igualdades en

(3.2.41) y (3.2.42) para todo tiempo t. Supongamos que la tasa de cambio de la cuanticosidad, $\dot{Q}(\rho_0, \rho_t)$, es positiva a lo largo de la evolución, tal que la igualdad (3.2.42) esté saturada a lo largo del camino. Esto quiere decir que la tasa de cambio de las coherencias en ρ_t, en la base de autoestados de ρ_0, es positiva para todo tiempo; algo que puede pasar. En orden de saturar la ecuación (3.2.41) para todo tiempo a lo largo de alguna evolución, necesitamos que

$$B_t = \xi_t A_t, \tag{3.2.46}$$

con ξ_t una función real del tiempo. Debido a que hemos asumido $\dot{Q}(\rho_0, \rho_t) = 4\xi_t \operatorname{Tr}\left(A_t^\dagger A_t\right) \geq 0$ tenemos que $\xi_t \geq 0$ para todo tiempo. Esto quiere decir que: *(i)* $\dot{\rho}_t = \xi_t \rho_t$, o que *(ii)* ρ_0 y $\dot{\rho}_t - \xi_t \rho_t$ son diagonales en la misma base para todo tiempo a lo largo de alguna evolución. La opción *(i)* no es posible porque imponiendo la condición de normalización en el estado evolucionado llegamos a $\int_0^t \xi_{t'}\, dt' = 0$ para todo tiempo, condición que no se puede satisfacer a menos que $\xi_t = 0$ para todo tiempo. Pero $\xi_t = 0$ para todo tiempo corresponde a la evolución trivial en la que el estado evolucionado se queda igual a ρ_0 indefinidamente. Sin embargo, la condición *(ii)* puede ser satisfecha, por ejemplo, en los casos de modelos semiclásicos que consisten en estados evolucionados que para todo tiempo son diagonales en la base del estado inicial ρ_0, teniendo sólo sus autovalores cambiando a lo largo de la evolución [45]. En consecuencia, el límite temporal τ_t^{av}, en principio, puede ser saturado continuamente a lo largo de alguna evolución.

Capítulo 4

Modelo de Jaynes-Cummings

"Ir derecho acorta las distancias,
pero también acorta la vida."
Antonio Porchia

En la presente sección, presentamos un modelo físico sencillo que servirá como plataforma para estudiar todas las cotas temporales para sistemas cuánticos abiertos que se han analizado previamente en el Capítulo 3. Para comenzar, primero se introducirá como ejemplo el caso de un decaimiento espontáneo de un sistema de dos niveles (qubit) acoplado a un reservorio con una densidad espectral arbitraria. Luego, dentro de este marco general, se tratará el caso particular del modelo de Jaynes-Cummings amortiguado, el cual es resoluble de forma exacta y consiste en un sistema de dos niveles que interactúa con un reservorio bosónico a temperatura cero. El análisis del mismo se centrará tanto en el régimen resonante como en el no resonante, es decir, considerando la frecuencia central de la cavidad desfasada con una cierta cantidad δ respecto a la frecuencia de transición atómica [17, 46–51].

4.1. Decaimiento espontáneo de un sistema de dos niveles

El sistema cuántico más simple que se puede considerar consiste en un sistema de dos niveles cuyo espacio de Hilbert está ocupado por sólo dos estados, un estado excitado $|e\rangle$ y un estado fundamental $|g\rangle$. El espacio de Hilbert de tal sistema es equivalente al de un sistema de spin $\frac{1}{2}$ y puede ser representado geométricamente a través de la esfera de Bloch, lo cual se muestra desarrollado con mayor detalle en el apéndice de la tesis. En este contexto, se pueden definir los operadores de Pauli

$$\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \quad \sigma_y = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|, \quad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (4.1.1)$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (4.1.2)$$

así como las relaciones de anticonmutación

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{i,j}. \quad (4.1.3)$$

Asimismo, resulta conveniente definir los siguientes operadores de subida y bajada

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e| = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y). \quad (4.1.4)$$

La correspondiente representación matricial de estos operadores en la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ toma la forma

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

y

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

En este panorama general, un problema particular que se puede analizar consiste en el decaimiento espontáneo de un sistema de dos niveles, acoplado a un reservorio

de osciladores armónicos. En dicho caso el Hamiltoniano total del sistema está dado por

$$H = H_S + H_E + H_I = H_0 + H_I, \tag{4.1.7}$$

donde

$$H_0 = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \tag{4.1.8}$$

y

$$H_I = \sigma_+ \otimes B + \sigma_- \otimes B^\dagger \quad con \quad B = \sum_k g_k b_k. \tag{4.1.9}$$

La frecuencia de transición entre los dos niveles está dada por ω_0, mientras que el índice k denota los diferentes modos del campo del reservorio con frecuencia ω_k, operadores creación y destrucción $b_k^\dagger$, b_k y constantes de acoplamiento g_k.

En orden de derivar una ecuación maestra exacta, será necesario introducir los siguientes estados [17]

$$\psi_0 = |g\rangle_S \otimes |0\rangle_E , \tag{4.1.10}$$

$$\psi_1 = |e\rangle_S \otimes |0\rangle_E , \tag{4.1.11}$$

$$\psi_k = |g\rangle_S \otimes |k\rangle_E , \tag{4.1.12}$$

donde $|g\rangle_S = \sigma_- |e\rangle_S$ y $|e\rangle_S = \sigma_+ |g\rangle_S$ indican el estado fundamental y excitado del sistema, respectivamente, el estado $|0\rangle_E$ denota el estado vacío del reservorio y $|k\rangle_E = b_k^\dagger |0\rangle_E$ da cuenta del estado con un fotón en el modo k. En la representación de interacción, el estado $\phi(t)$ del sistema total sigue la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -iH_I(t)\phi(t), \tag{4.1.13}$$

donde

$$H_I(t) = \sigma_+(t)B(t) + \sigma_-(t)B^\dagger(t) \tag{4.1.14}$$

es el Hamiltoniano en la representación interacción con

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm \exp(\pm i\omega_0 t), \tag{4.1.15}$$

y

$$B(t) = \sum_k g_k b_k \exp(-i\omega_k t). \tag{4.1.16}$$

Por otro lado, se puede chequear con facilidad que el Hamiltoniano total del sistema (4.1.7) conmuta con el operador número, definido como

$$N = \sigma_+\sigma_- + \sum_k b_k^\dagger b_k, \tag{4.1.17}$$

por lo que se tiene

$$[H, N] = 0. \tag{4.1.18}$$

Por dicho motivo, puede afirmarse que N resulta una cantidad conservada. Respecto a los estados iniciales, se sigue que cualquiera de la forma

$$\phi(0) = c_0\psi_0 + c_1(0)\psi_1 + \sum_k c_k(0)\psi_k \tag{4.1.19}$$

evoluciona luego de un tiempo t en el estado

$$\phi(t) = c_0\psi_0 + c_1(t)\psi_1 + \sum_k c_k(t)\psi_k. \tag{4.1.20}$$

El hecho que c_0 resulte constante es consecuencia de $H_I(t)\psi_0 = 0$, mientras que las amplitudes $c_1(t)$ y $c_k(t)$ dependen indefectiblemente del tiempo. La evolución temporal de estas amplitudes está gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales que pueden ser fácilmente derivadas a partir de la ecuación de Schrödinger (4.1.13),

$$\dot{c}_1(t) = -i\sum_k g_k \exp[i(\omega_0 - \omega_k)t]c_k(t) \tag{4.1.21}$$

$$\dot{c}_k(t) = -ig_k^* \exp[-i(\omega_0 - \omega_k)t]c_1(t). \tag{4.1.22}$$

Asumiendo que $c_k(0) = 0$, es decir, que no existen fotones en el estado inicial, se puede resolver la segunda ecuación e insertar la solución en la primera en aras de obtener una ecuación cerrada para $c_1(t)$,

$$\dot{c}_1(t) = -\int_0^t dt_1 f(t - t_1)c_1(t_1). \tag{4.1.23}$$

El núcleo $f(t - t_1)$ está dado por la función de correlación

$$f(t - t_1) = Tr_E\{B(t)B^\dagger(t_1)\rho_E\} \exp[i\omega_0(t - t_1], \tag{4.1.24}$$

donde $\rho_E = (|0\rangle \langle 0|)_E$ corresponde al estado vacío del reservorio. Este núcleo en general es expresado en términos de la densidad espectral del reservorio $J(\omega)$ como sigue

$$f(t - t_1) = \int d\omega J(\omega) \exp[i(\omega_0 - \omega)(t - t_1)]. \tag{4.1.25}$$

De este modo, la ecuación exacta (4.1.23) puede ser resuelta mediante una transformación de Laplace de acuerdo a la densidad espectral $J(\omega)$ que se tenga en cada caso particular.

Por otro lado, con la ayuda de las amplitudes de probabilidad c_0, $c_1(t)$ y $c_k(t)$ se puede expresar la matriz densidad reducida $\rho_S(t)$ del sistema de dos niveles como

$$\rho_S(t) = Tr_E\{|\phi(t)\rangle \langle\phi(t)|\} = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 & c_0^* c_1(t) \\ c_0 c_1^*(t) & 1-|c_1(t)|^2 \end{pmatrix}. \tag{4.1.26}$$

Diferenciando esta expresión con respecto al tiempo y recordando que $\dot{c}_0 = 0$ se llega a la siguiente ecuación exacta

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}|c_1(t)|^2 & c_0^*\dot{c}_1(t) \\ c_0\dot{c}_1^*(t) & -\frac{d}{dt}|c_1(t)|^2 \end{pmatrix}. \tag{4.1.27}$$

Introduciendo las cantidades

$$S(t) = -2\mathbb{I}m\left\{\frac{\dot{c}_1(t)}{c_1(t)}\right\}, \tag{4.1.28}$$

$$\gamma(t) = -2\mathbb{R}e\left\{\frac{\dot{c}_1(t)}{c_1(t)}\right\}, \tag{4.1.29}$$

se puede reescribir la ecuación (4.1.27) como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) = &-\frac{i}{2}S(t)[\sigma_+\sigma_-, \rho_S(t)] \\ &+ \gamma(t)\left\{\sigma_-\rho_S(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho_S(t) - \frac{1}{2}\rho_S(t)\sigma_+\sigma_-\right\}.\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

Esta última ecuación corresponde a una ecuación maestra exacta de la dinámica reducida del sistema. La función $S(t)$ juega el rol de Lamb shift y $\gamma(t)$ de tasa de decaimiento, ambas funciones dependientes del tiempo. Algo sorprendente de la ecuación maestra (4.1.30) es que tiene la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{K}_S(t)\rho_S(t), \tag{4.1.31}$$

en donde la estructura de $\mathcal{K}_S(t)$ es similar al generador de Lindblad aunque con una dependencia temporal en los coeficientes $S(t)$ y $\gamma(t)$, símil a como se había mostrado a finales del Capítulo 2.

4.2. Modelo de Jaynes-Cummings en resonancia

Como ya se expresó al comienzo del capítulo, el modelo amortiguado de Jaynes-Cummings describe el acoplamiento de un átomo de dos niveles a un modo de cavidad única que a su vez está acoplado a un reservorio constituido por osciladores armónicos en el estado de vacío. Si uno se restringe al caso de una única excitación en el sistema átomo-cavidad, el modo de la cavidad puede ser eliminado en favor de una densidad espectral eficaz de la forma [17]

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_0\lambda^2}{(\omega_0-\omega)^2+\lambda^2}, \tag{4.2.32}$$

donde ω_0 nuevamente representa la frecuencia de transición entre los dos niveles, γ_0 una constante efectiva de acoplamiento y el parámetro λ define el ancho espectral del acoplamiento, el cual está relacionado al tiempo de correlación del reservorio τ_E por la relación $\tau_E = \lambda^{-1}$, mientras que la escala temporal τ_R en la cual el estado del sistema cambia está dada por $\tau_R = \gamma_0^{-1}$. En este sentido, la aproximación Markoviana esbozada en la sección 2.1 del Capítulo 2 sólo será válida en la medida que $\gamma_0 \ll \lambda$.

Teniendo la densidad espectral de este caso particular (ec. (4.2.32)), en orden de derivar la amplitud de probabilidad exacta $c_1(t)$, lo que se hace es evaluar la función de correlación del entorno (ec. (4.1.25)) con dicha $J(\omega)$, obteniendo de esta forma

$$f(t) = \frac{1}{2}\gamma_0\lambda\exp(-\lambda|t|). \tag{4.2.33}$$

Para esta $f(t)$ particular, la ecuación diferencial para la amplitud de probabilidad $c_1(t)$ puede ser fácilmente resuelta, dando lugar a la solución

$$c_1(t) = c_1(0)e^{-\lambda t/2}\left[\cosh\left(\frac{dt}{2}\right)+\frac{\lambda}{d}\sinh\left(\frac{dt}{2}\right)\right], \tag{4.2.34}$$

en donde $d = \sqrt{\lambda^2-2\gamma_0\lambda}$. Esto lleva a la siguiente población para el estado excitado

$$\rho_{ee}(t) = \rho_{ee}(0)e^{-\lambda t}\left[\cosh\left(\frac{dt}{2}\right)+\frac{\lambda}{d}\sinh\left(\frac{dt}{2}\right)\right]^2. \tag{4.2.35}$$

De igual manera, utilizando las ecuaciones (4.1.28) y (4.1.29) puede verse que se obtiene un Lamb shift nulo ($S(t) = 0$) y una tasa de decaimiento

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0\lambda\sinh(dt/2)}{d\cosh(dt/2)+\lambda\sinh(dt/2)}. \tag{4.2.36}$$

4.3. Modelo de Jaynes-Cummings no resonante

Otra manera en la que se puede abordar el modelo amortiguado de Jaynes-Cummings es considerando un *detuning*, es decir, utilizar la misma configuración que en la sección anterior, aunque con la frecuencia central de la cavidad desfasada por una cantidad δ respecto a la frecuencia de transición atómica ω_0. En este caso, la densidad espectral toma la forma

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_0\lambda^2}{(\omega_0-\delta-\omega)^2+\lambda^2}. \tag{4.3.37}$$

La solución de la ecuación maestra, tal como se mostró previamente (4.1.26), está dada por [17, 50]:

$$\rho_S(t) = \begin{bmatrix} |c_1(t)|^2\rho_{ee} & c_1(t)\rho_{eg} \\ c_1^*(t)\rho_{eg}^* & 1-|c_1(t)|^2\rho_{ee} \end{bmatrix}, \tag{4.3.38}$$

donde el estado inicial del qubit es

$$\rho_S(0) = \begin{bmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{eg}^* & 1-\rho_{ee} \end{bmatrix}, \tag{4.3.39}$$

en la base, $|z;\pm\rangle$, de autoestados del Hamiltoniano libre del qubit. Nuevamente, la función $c_1(t)$ introducida aquí es la solución de la ecuación $\dot{c}_1(t) = -\int_0^t dt_1 f(t-t_1)c_1(t_1)$, con la condición inicial $c_1(0) = 1$ y donde $f(t-t_1)$ es la función de correlación de dos puntos del reservorio, es decir, la transformada de Fourier de la densidad espectral $J(\omega)$. Resolviendo para nuestra densidad espectral Lorenziana (ec. (4.3.37)), se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2}\gamma_0\lambda e^{-\lambda|t|(1-i\delta/\lambda)}, \tag{4.3.40}$$

siendo el caso resonante el correspondiente a $\delta = 0$. Por lo tanto, si uno resuelve de igual manera al caso anterior, se llega a la siguiente amplitud exacta de probabilidad

$$\begin{aligned} c_1(t) &= e^{-\frac{\lambda t}{2}\left(1-i\frac{\delta}{\lambda}\right)}\left[\frac{\lambda}{\Omega}\left(1-i\frac{\delta}{\lambda}\right)\sinh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)+\right. \\ &\quad \left.+\cosh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

en donde se ha definido $\Omega = \lambda\sqrt{(1-i\delta/\lambda)^2-2\gamma_0/\lambda}$ y en donde la tasa de decaimiento resulta

$$\gamma(t) = \gamma_0\ \mathbb{R}e\left(\frac{2\sinh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\frac{\Omega}{\lambda}\cosh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)+\left(1-i\frac{\delta}{\lambda}\right)\sinh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}\right). \tag{4.3.42}$$

De este modo, si bien en principio parecería que el problema está absolutamente determinado fijando tres parámetros fundamentales (a saber: γ_0, δ y λ), es útil notar que en el caso de medir el tiempo en unidades de $1/\lambda$, la función $c_1(t)$ y por ende la tasa de decaimiento $\gamma(t)$, dependen únicamente de la fijación de dos parámetros fundamentales, a saber, γ_0/λ y δ/λ. Sobre estos dos parámetros nos detendremos tanto en la sección siguiente como en el Capítulo 5, cuando estudiemos cómo influyen las distintas regiones en el espacio de parámetros sobre el comportamiento del sistema.

4.4. Evolución temporal de Jaynes-Cummings

Tal como se muestra en el apéndice del presente trabajo, cualquier sistema de dos niveles puede representarse pictóricamente a través de la esfera de Bloch. En este contexto, cualquier matriz densidad ρ de dos niveles puede ser expandida utilizando la matriz identidad I y las matrices hermíticas de Pauli $\vec{\sigma}$ como

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(I + \vec{r}.\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix}, \tag{4.4.43}$$

donde $\vec{r} \in \mathcal{R}^3$ se conoce como el vector de Bloch del sistema y está dado por $\vec{r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = (r_x, r_y, r_z)$ con $\theta \in (0, \pi)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$. De esta manera, dicha representación resulta un marco útil e intuitivo para estudiar el modelo de Jaynes-Cummings. Por esta razón, si igualamos cada componente de (4.4.43) con la evolución temporal del modelo, dada por la ecuación (4.3.38), es una tarea algebraica sencilla demostrar que cada componente del vector de la esfera de Bloch tiene la siguiente forma

$$r_x(t) = \frac{\sin\theta}{2}\left(c_1(t)e^{-i\varphi} + c_1^*(t)e^{i\varphi}\right), \tag{4.4.44}$$

$$r_y(t) = \frac{i\sin\theta}{2}\left(c_1(t)e^{-i\varphi} - c_1^*(t)e^{i\varphi}\right), \tag{4.4.45}$$

$$r_z(t) = -1 + |c_1(t)|^2(1+\cos\theta). \tag{4.4.46}$$

Observando dichas expresiones, resulta importante notar que la evolución reducida del qubit para el modelo de Jaynes-Cummings posee el mismo estado estacionario

para cualquier valor de los parámetros δ/λ y γ_0/λ. De hecho, no importa cuál sea el estado inicial ya que al tener $\lim_{t\to\infty} c_1(t) = 0$, el estado final asintóticamente siempre resultará $r_x(t_f) = r_y(t_f) = 0$ y $r_z(t_f) = -1$, lo que denotaremos como $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$. Esto mismo queda ejemplificado en la Figura 4.1, en donde se grafican dos condiciones iniciales distintas para dos entornos de parámetros distintos.

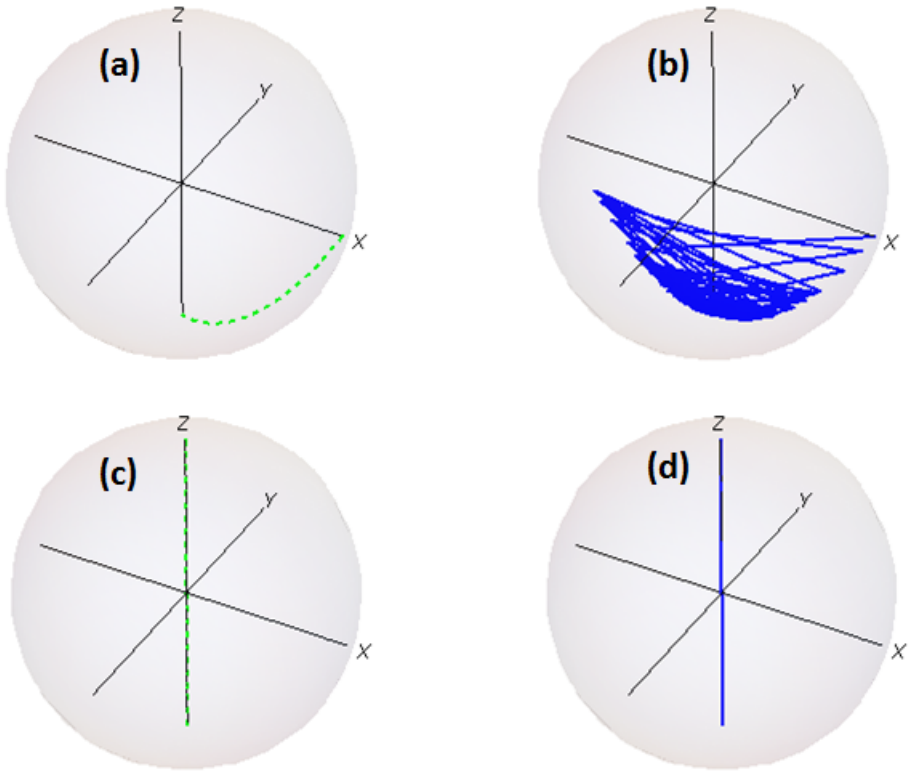

Figura 4.1: Evolución temporal del modelo de Jaynes-Cummings representado en la esfera de Bloch. Los paneles **(a)** y **(b)** corresponden al estado inicial $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$, mientras que los paneles **(c)** y **(d)** al estado inicial excitado $\rho_i = |z;+\rangle\langle z;+|$. Asimismo, la línea verde punteada denota un régimen con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, mientras que la línea continua azul el régimen con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$. En todos los casos, la evolución se realizó hasta $\lambda t = 100$.

De dicha Figura 4.1 se desprenden varias observaciones. En primer lugar, queda en evidencia un comportamiento cualitativo radicalmente distinto de acuerdo al régimen de parámetros que uno esté analizando. Mientras que en el régimen con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$ (paneles **(a)** y **(c)**), el qubit evoluciona de forma directa y sin presentar oscilaciones hacia el estado $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$, esto último no sucede para el régimen

$\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$ (paneles **(b)** y **(d)**). Estas oscilaciones en la esfera de Bloch tienen que ver con un aumento de la población del estado excitado y ocurren debido a que los fotones que han sido emitidos por el átomo se reabsorben en un momento posterior. Dicho fenómeno está íntimamente relacionado con la no-Markovianidad de la dinámica, tema del cual nos ocuparemos en la sección siguiente.

En segundo lugar, se puede ver que la trayectoria de la evolución está fuertemente vinculada a la condición inicial desde la cual uno comience la dinámica. En particular, comenzando desde el estado excitado $\rho_i = |z;+\rangle\langle z;+|$ se tiene una evolución hacia el estado estacionario $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$ sin generar coherencias a lo largo de todo el camino (paneles **(c)** y **(d)**). Esto último no ocurre en el caso de comenzar con un estado inicial con coherencias, por ejemplo con $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$, tal como constatan los paneles **(a)** y **(b)**. Este hecho resultará significativo a la hora de estudiar el tiempo mínimo dado por τ_t^{quant}, ya que el mismo requiere de la generación de coherencias en aras de dar un resultado bien determinado. En este sentido, al final del Capítulo 5, se dará un análisis más exhaustivo respecto a la dependencia de las cotas temporales frente a las condiciones iniciales.

4.5. No-Markovianidad y Jaynes-Cummings

Tal como se introdujo en la sección anterior, una importante característica del modelo de Jaynes Cummings es que posee distintos regímenes de acuerdo a la relación que se fije entre los parámetros γ_0/λ y δ/λ. Mostraremos aquí que estos regímenes pueden ser asociados con efectos Markovianos o no-Markovianos de la evolución. Por ejemplo, estudiando el límite $\gamma_0/\lambda \ll 1$ y $\delta/\lambda \ll 1$, se obtiene para la tasa de decaimiento

$$\gamma(t) = 2\gamma_0/(1 + \coth(\lambda t/2)), \tag{4.5.47}$$

la cual es una función estrictamente positiva del tiempo, que cuando $\lambda t \gg 1$ se corresponde con $\gamma(t) \sim \gamma_0$. Ahora bien, ya que la ecuación (4.5.47) es una función positiva para todo tiempo, por lo dicho en la sección 2.2 del Capítulo 2, la ecuación (4.1.30) se corresponde con una ecuación maestra Markoviana [51] en este régimen de

$\gamma_0/\lambda \ll 1$ y $\delta/\lambda \ll 1$. Sin embargo, fuera de este régimen de parámetros, por ejemplo a grandes acoplamientos, la tasa de decaimiento oscila con una gran amplitud e incluso puede tomar valores negativos, tal como pone de relieve la Figura 4.2.

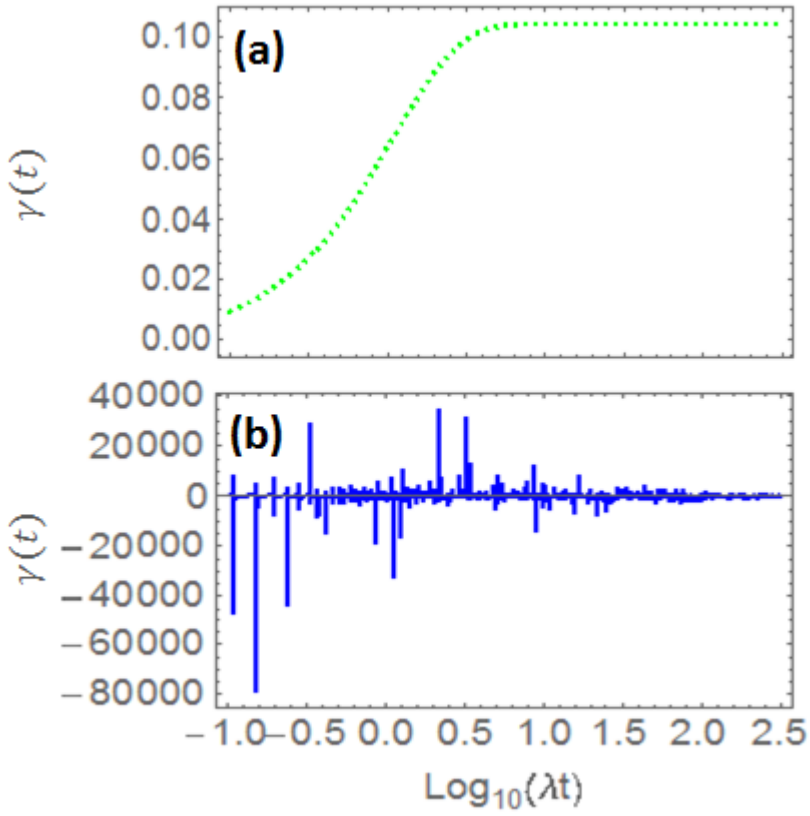

Figura 4.2: Tasa de decaimiento $\gamma(t)$ para el estado inicial del qubit $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$, como función del tiempo escaleado λt. El panel **(a)** corresponde a un régimen con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, mientras que el panel **(b)** al régimen con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$.

La oscilación negativa que se observa en el panel **(b)** de esta figura conduce a un aumento de la población del estado excitado y, tal como sucedía en la Figura 4.1, esto es consecuencia de que los fotones que han sido emitidos por el átomo se reabsorben en un momento posterior. Por esta razón, al igual que se había afirmado para las oscilaciones en la esfera de Bloch, este hecho está vinculado con la no-Markovianidad de la dinámica, es decir, con efectos de memoria que provocan un flujo de información desde el entorno de vuelta hacia el sistema.

Ahora bien, en orden de verificar la Markovianidad o la no-Markovianidad de la dinámica en todo el espacio de parámetros del sistema, es necesario monitorear

la distinguibilidad entre dos estados a lo largo de la evolución. Esto es así debido a que la noción aceptada de Markovianidad que se utilizará aquí está basada en la idea que para procesos Markovianos cualquier par de estados se vuelven menos y menos distinguibles a lo largo de la dinámica, llevando a una continua pérdida de información hacia el entorno [51].

En vistas de ello, se utilizará la norma traza de la diferencia entre ρ_1 y ρ_2, y definiremos la distancia traza como

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}||\rho_1 - \rho_2||_{tr} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,|\rho_1 - \rho_2|, \tag{4.5.48}$$

la cual es una medida de la distancia entre dos estados cuánticos [31]. Esta medida tiene la interesante propiedad que puede ser interpretada como una medida de distinguibilidad entre ρ_1 y ρ_2 [30]. De esta manera, la no-Markovianidad en un proceso cuántico, dado por el mapa $\rho(t) = \Lambda_t[\rho_0]$, puede ser definida como sigue: un mapa cuántico $\rho(t) = \Lambda_t[\rho_0]$ es no-Markoviano si y sólo sí existe un par de estados iniciales, $\rho_{0,1}$ y $\rho_{0,2}$, tal que la distancia traza entre los correspondientes estados evolucionados se incremente a cierto tiempo t, es decir,

$$\sigma(t, \rho_{0,1}, \rho_{0,2}) \equiv \frac{d}{dt} D(\Lambda_t[\rho_{0,1}], \Lambda_t[\rho_{0,2}]) > 0, \tag{4.5.49}$$

donde $\sigma(t, \rho_{0,1}, \rho_{0,2})$ denota la tasa de cambio de la distancia traza a tiempo t entre el par de estados iniciales [30]. Para un proceso no-Markoviano, la información debe fluir desde al ambiente al sistema para cierto intervalo de tiempo, y entonces se debe tener $\sigma > 0$ para dicho intervalo. Una buena medida de no-Markovianidad del canal debería ser testigo del total incremento de la distinguibilidad a lo largo de toda la evolución, dando cuenta de la totalidad de la información fluyendo del ambiente de vuelta hacia el sistema. Esto sugiere definir la medida $\mathcal{N}(\Lambda_t)$ para la no-Markovianidad de un proceso cuántico a través de [51]:

$$\mathcal{N}(\Lambda_t) = max_{\{\rho_{0,1}, \rho_{0,2}\}}\, \mathcal{N}(\Lambda_t, \rho_{0,1}, \rho_{0,2}), \tag{4.5.50}$$

con

$$\mathcal{N}(\Lambda_t, \rho_{0,1}, \rho_{0,2}) = \int_{\sigma>0} dt\; \sigma(t, \rho_{0,1}, \rho_{0,2}). \tag{4.5.51}$$

Para un proceso general, la maximización sobre estados iniciales, $\rho_{0,1}$ y $\rho_{0,2}$, en $\mathcal{N}(\Lambda_t)$, resulta una tarea difícil. Sin embargo, para el modelo de Jaynes-Cummings considerado aquí, cuando $\delta \neq 0$, ha sido mostrado en [30] que $\mathcal{N}(\Lambda_t) = \mathcal{N}(\Lambda_t, \rho_e, \rho_g)$ donde $\rho_e = |x;+\rangle\langle x;+|$ y $\rho_g = |x;-\rangle\langle x;-|$, con $|x;\pm\rangle$ los autoestados del operador de Pauli σ_x. En la Figura 4.3 se muestra el comportamiento de la medida $\mathcal{N}(\Lambda_t)$ como función de los parámetros γ_0/λ y δ/λ que controlan a nuestro modelo.

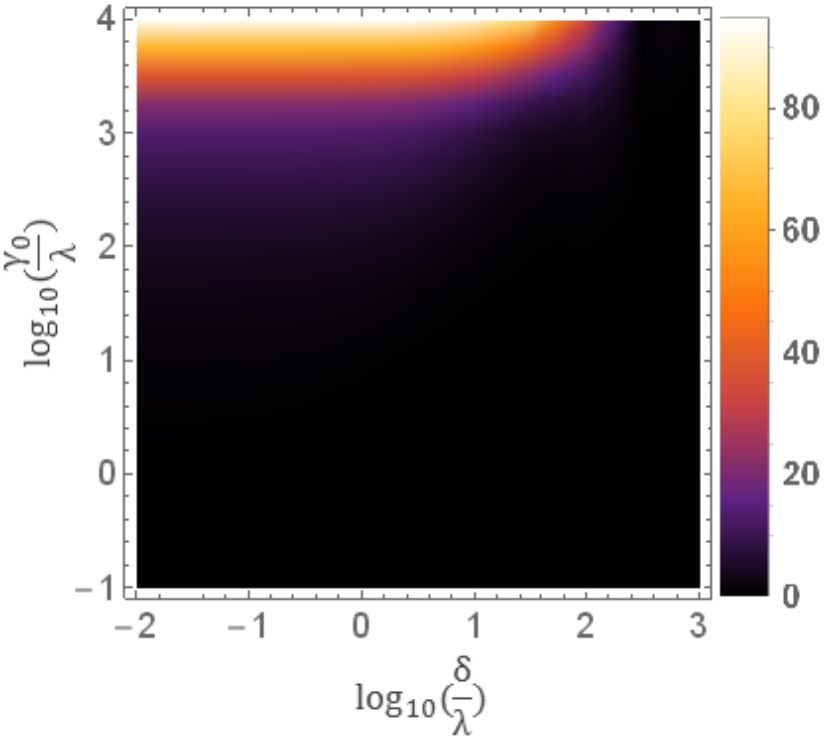

Figura 4.3: No-Markovianidad del canal correspondiente al modelo de Jaynes Cummings, medida por la expresión en la ecuación (4.5.50) para los estados iniciales $\rho_e = |x;+\rangle\langle x;+|$ y $\rho_g = |x;-\rangle\langle x;-|$, en un tiempo total de evolución $\lambda t = 1000$. Ver texto principal para los detalles.

Sin embargo, pese a que la medida $\mathcal{N}(\Lambda_t)$ presentada en la ecuación (4.5.50) es una herramienta adecuada para caracterizar el grado de no-Markovianidad de un mapa cuántico Λ_t, en orden de establecer una posible conexión entre las cotas temporales que hemos estudiado y los efectos no-Markovianos de la dinámica, resulta más apropiado definir una medida de la no-Markovianidad sobre la actual trayectoria del sistema, desde el estado inicial ρ_0 al final ρ_t, lo cual se corresponde mejor con las definiciones de los tiempos mínimos. En este sentido, se puede definir la siguiente

medida alternativa para la no-Markovianidad

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}}(t;\Lambda_t,\rho_0) &= \int_{0,\tilde{\sigma}>0}^{t} \tilde{\sigma}(t',\rho_0,\rho_{t'})\,dt' = \\ &= \int_0^t \frac{|\tilde{\sigma}(t',\rho_0,\rho_{t'})| + \tilde{\sigma}(t',\rho_0,\rho_{t'})}{2}\,dt', \end{aligned} \tag{4.5.52}$$

la cual depende del tiempo final t, y en donde

$$\tilde{\sigma}(t,\rho_0,\rho_t) \equiv \frac{d}{dt} D(\rho_0,\Lambda_t[\rho_0]). \tag{4.5.53}$$

Utilizaremos esta medida en el capítulo siguiente con el objetivo de contrastarla con todas las cotas temporales de evolución presentadas.

Capítulo 5

Cotas temporales para el modelo de Jaynes-Cummings

"La partícula subatómica anda donde quiere. Prefiere lo más corto como usted cruzando un parque, pero puede apartarse como usted a leer un periódico en un banco, o desviarse al vendedor de helado, al grifo de agua, o adentrarse más hasta el rincón donde copula una pareja."

Ernesto Cardenal

Debido a su sencillez y por ser completamente resoluble analíticamente, el modelo de Jaynes-Cummings provee un marco adecuado para analizar los tiempos mínimos de evolución presentados previamente en el Capítulo 3. Por esta razón, en el presente capítulo, nuestra meta principal consiste en examinar cuál de todas las cotas para sistemas cuánticos abiertos proporciona resultados consistentes a la hora de estimar el tiempo mínimo necesario para evolucionar de un determinado estado inicial hacia un determinado estado final. Asimismo, como complemento, buscaremos establecer una relación entre estos tiempos mínimos de evolución y la no-Markovianidad del sistema, como así también analizaremos la dependencia de estas cotas respecto a las condiciones iniciales.

5.1. Consistencia de las cotas temporales para la evolución

En primer lugar, tal como se advirtió en el capítulo anterior, es importante resaltar que la evolución reducida del qubit para el modelo de Jaynes-Cummings posee el mismo estado estacionario para cualquier valor de los parámetros δ/λ y γ_0/λ, siendo el mismo siempre $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$. En segundo lugar, también resulta significativo advertir que la velocidad con la cual un estado evolucionado se aproxima a dicho estado estacionario es distinta de acuerdo a si uno está en el régimen Markoviano o en el no-Markoviano. Esto se observa con claridad en la Figura 5.1, en donde se grafica la distancia traza $D(\rho_t, \rho_f)$ entre el estado evolucionado del qubit, ρ_t, y su estado estacionario, ρ_f, como función del tiempo para distintas relaciones entre los parámetros que controlan el entorno y su interacción con el qubit.

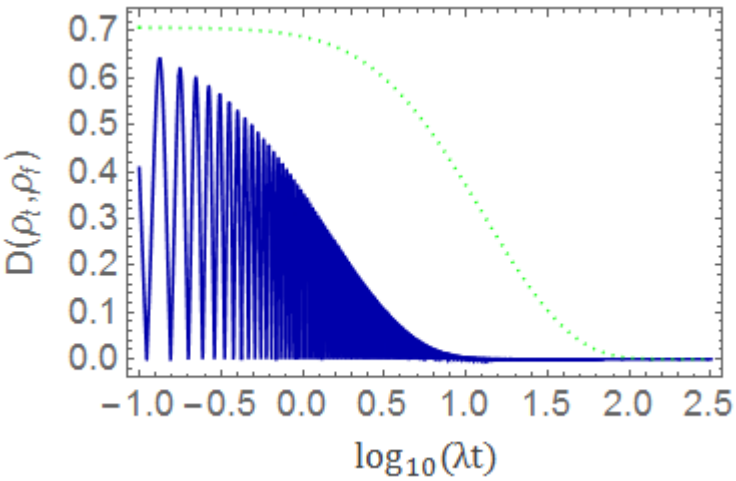

Figura 5.1: Distancia traza $D(\rho_t, \rho_f)$ entre el estado final estacionario $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$ y el estado evolucionado ρ_t del qubit en el modelo de Jaynes-Cummings, como función del tiempo escaleado λt. La línea verde punteada corresponde al régimen Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, y la línea azul continua al régimen no-Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$. En ambos casos el estado inicial de la evolución es $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$.

El estado inicial utilizado es $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$, aunque resultados análogos son obtenidos para cualquier otro ρ_i. La única diferencia radica en si se generan o no coherencias a lo largo de la evolución del sistema, en tanto que si uno comienza

con $\rho_i = |z;+\rangle\langle z;+|$ la evolución es a través de un camino que resulta ser siempre diagonal en la misma base que el estado estacionario, tal como se mostró en la Figura 4.1 del capítulo anterior. Sin embargo, la razón por la cual aquí se trabaja con el estado inicial $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$ es para poder estudiar a continuación la cota τ_t^{quant}, la cual requiere de la generación de coherencias en orden de estimar un tiempo mínimo de evolución. Ahora bien, retomando la Figura 5.1, puede verse que en el régimen Markoviano el estado estacionario es alcanzado para tiempos $\lambda t \approx 100$, mientras que en el régimen no-Markoviano el estado final se alcanza para tiempos menores ($\lambda t \approx 16$). Este hecho resulta una evidencia de la aceleración de la evolución en el régimen no-Markoviano.

De esta manera, habiendo visto en demasía cómo es la dinámica general del modelo para una dada condición inicial en ambos regímenes, ahora vamos a focalizarnos en cómo es el comportamiento de los distintos tiempos mínimos como función del tiempo final de la evolución λt. Dicho análisis está presentado para una única condición inicial en la Figura 5.2, aunque nuevamente se remarca que resultados equivalentes fueron obtenidos para cualquier otro estado inicial puro.

Lo que resulta más llamativo de apreciar en la Figura 5.2 es que para tiempos $\lambda t > 100$, cuando el qubit ya alcanzó el estado estacionario ρ_f (ver Figura 5.1), ya sea en el régimen Markoviano o en el no-Markoviano, sólo la cota τ_t^{min} se mantiene constante. Las otras cotas crecen aproximadamente lineales. Este comportamiento se debe al hecho que en el denominador de las definiciones de τ_t^{av}, τ_t^{op} y τ_t^{quant} (ecuaciones (3.2.28), (3.2.36), (3.2.44) respectivamente), aparecen velocidades promedio, $\mathcal{V}_t^{av}$, $\mathcal{V}_t^{op}$ y $\mathcal{V}_t^{quant}$, las cuales dependen todas del tiempo actual de la evolución t. Estas velocidades promedio se aproximan a cero cuando el estado estacionario es alcanzado, mientras que las cantidades en el numerador de las definiciones de dichas cotas se mantienen constantes. Esto mismo queda evidenciado en la Figura 5.3, en donde se grafica $\mathcal{V}_t^{av}$, $\mathcal{V}_t^{op}$ y $\mathcal{V}_t^{quant}$ como función del tiempo actual de la evolución λt, como así también la velocidad $\mathcal{V}_t^{min}$ que fue definida en la ecuación (3.2.27).

Los resultados mostrados tanto en la Figura 5.2 como en la Figura 5.3 ponen de relieve que ninguna de las cotas τ_t^{av}, τ_t^{op} y τ_t^{quant} dan estimaciones consistentes del

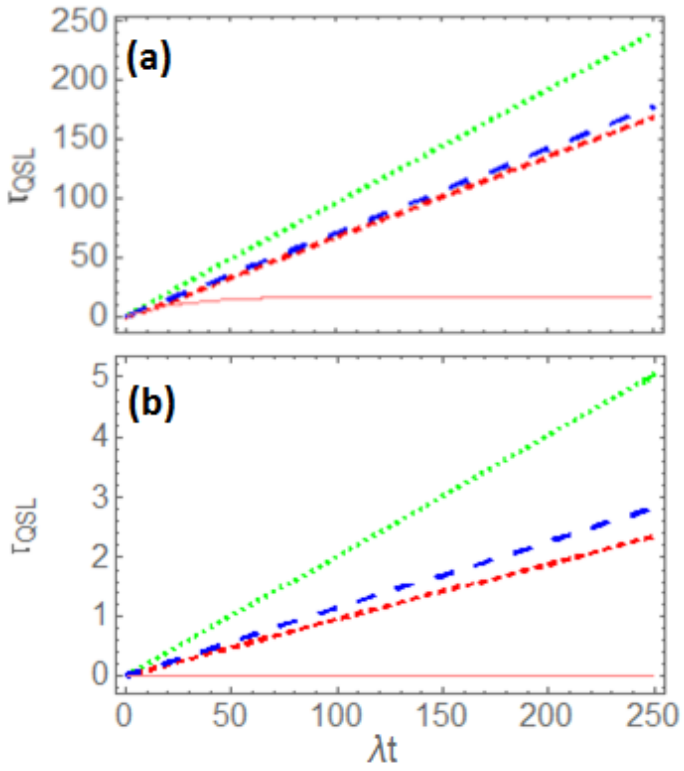

Figura 5.2: Cotas temporales de evolución como función del tiempo final, comenzando con el estado inicial del qubit $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$. En **(a)** se muestra un ejemplo en el régimen Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, mientras que **(b)** corresponde al régimen no-Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$. La línea verde punteada es para τ_t^{quant}, la línea roja con guiones es para τ_t^{op}, la línea azul con guiones largos es para τ_t^{av} y la línea roja continua para τ_τ^{min}.

tiempo mínimo de evolución necesario para llegar al estado final $\rho_f = |z;-\rangle\langle z;-|$ habiendo provenido desde el estado inicial $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$. Más aún, las velocidades promedio $\mathcal{V}_t^{av}$, $\mathcal{V}_t^{op}$ y $\mathcal{V}_t^{quant}$, tienen el mismo comportamiento asintótico que la velocidad instantánea de evolución, dada por $\sqrt{\mathcal{F}_Q(\tau)/4}$, la cual para $\lambda t > 100$ también tiende a cero. Este hecho va en contra de la esencia de la teoría del *quantum speed limit*, la cual busca la estimación de un límite en la velocidad de la evolución entre los estados. Por su parte, la cota temporal τ_t^{min} sí brinda una estimación que resulta consistente con el tiempo mínimo de evolución entre ρ_i y ρ_f, mientras que también provee una velocidad límite de la evolución.

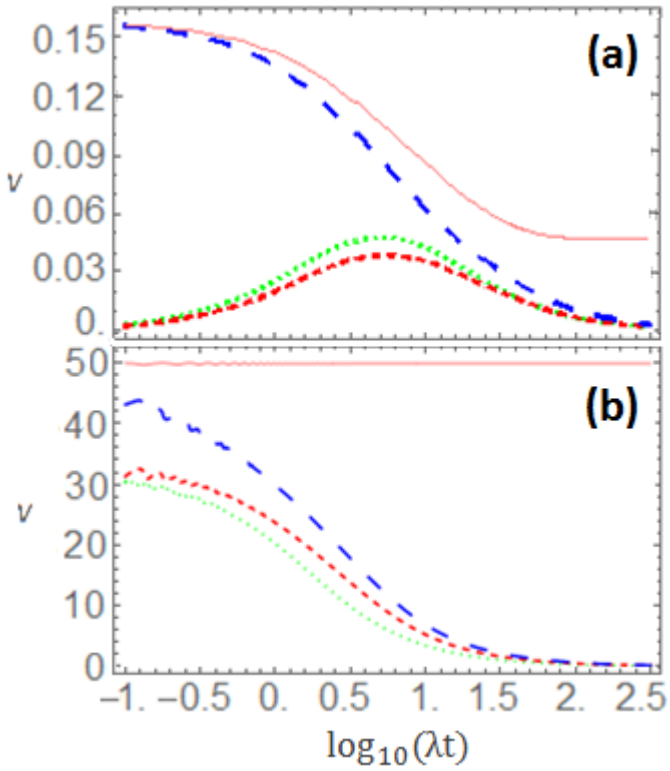

Figura 5.3: La velocidad promedio como función del tiempo final de la evolución, con el estado inicial del qubit $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$. En **(a)** se muestra un ejemplo en el régimen Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, mientras que **(b)** corresponde al régimen no-Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$. La línea verde punteada es para $\mathcal{V}_t^{quant}$ (Ec.(3.2.45)), la línea roja con guiones es para $\mathcal{V}_t^{op}$ (Ec.(3.2.35)), la línea azul con guiones largos es para $\mathcal{V}_t^{av}$ (Ec.(3.2.28)) y la línea roja continua para $\mathcal{V}_t^{min}$ (Ec.(3.2.27)).

5.2. Cotas temporales y la no-Markovianidad

Pese a que hemos mostrado que sólo una de las cotas temporales presentadas en el Capítulo 3 da una estimación consistente del tiempo mínimo de evolución en un sistema cuántico abierto, a continuación se estudiará la conexión de todos estos tiempos mínimos con el carácter no-Markoviano de la dinámica. Para ello, nos valdremos de la medida de no-Markovianidad sobre la trayectoria que hemos definido en la sección 4.5 del capítulo anterior. De este modo, en la Figura 5.4 se puede ver un gráfico de $\tilde{\mathcal{N}}(t;\Lambda_t,\rho_0)$ como función de los parámetros γ_0/λ y δ/λ para el estado inicial $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$ y dos tiempos finales de evolución: $\lambda t = 1$ (panel **(a)**) y

$\lambda t = 100$ (panel **(b)**). De esta manera, si uno compara las dos medidas diferentes de la no-Markovianidad como función de los dos parámetros que controlan la dinámica del mapa, según se ha expuesto en la Figura 4.3 y en la Figura 5.4, se pueden advertir comportamientos cualitativos similares en ambas medidas.

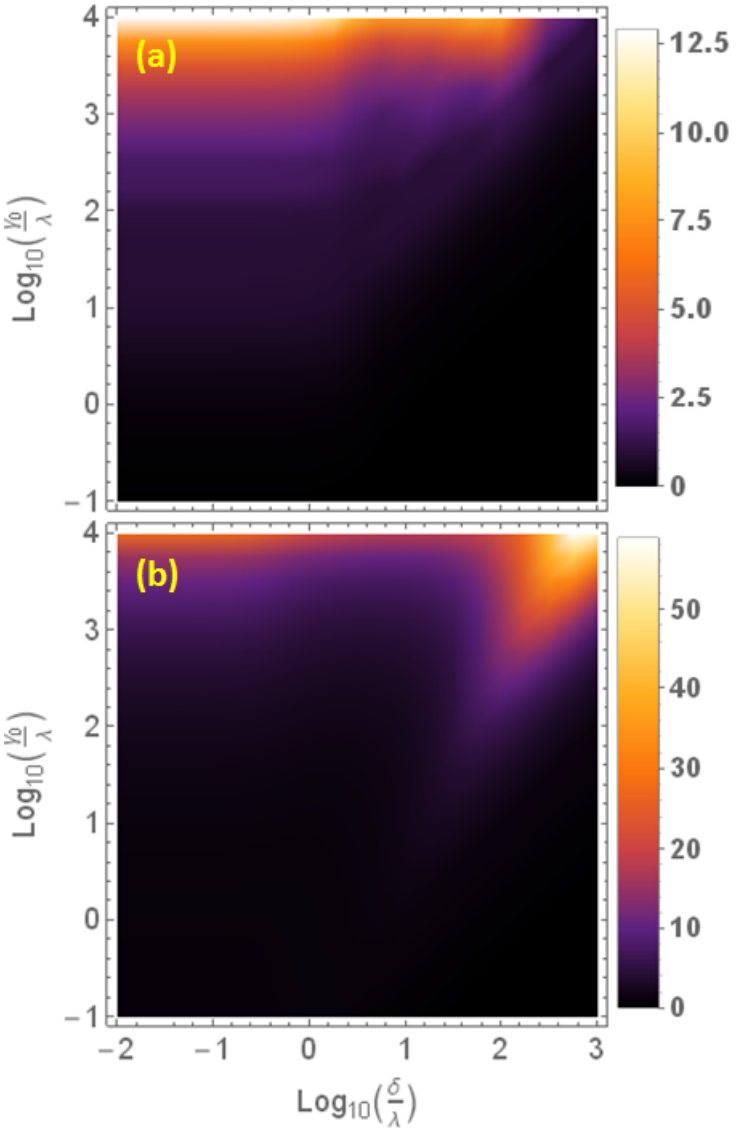

Figura 5.4: Gráfico de la no-Markovianidad a través de un camino de evolución en el modelo de Jaynes-Cummings, medido por la expresión en la Ec.(4.5.52), calculada para el estado inicial $\rho_e = |x;+\rangle\langle x;+|$. El tiempo de evolución es $\lambda t = 1$ en **(a)** y $\lambda t = 100$ en **(b)**.

Ahora bien, con el objetivo de comparar la medida de no-Markovianidad que hemos definido sobre la trayectoria (ec. (4.5.52)) con las cotas temporales de evolución, se pueden computar estas últimas en la misma región de parámetros γ_0/λ y δ/λ,

considerando por supuesto el mismo estado inicial $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$. En la Figura 5.5 se muestran las cotas calculadas para el estado final a tiempo $\lambda t = 1$ y en la Figura 5.6 para un estado final a $\lambda t = 100$.

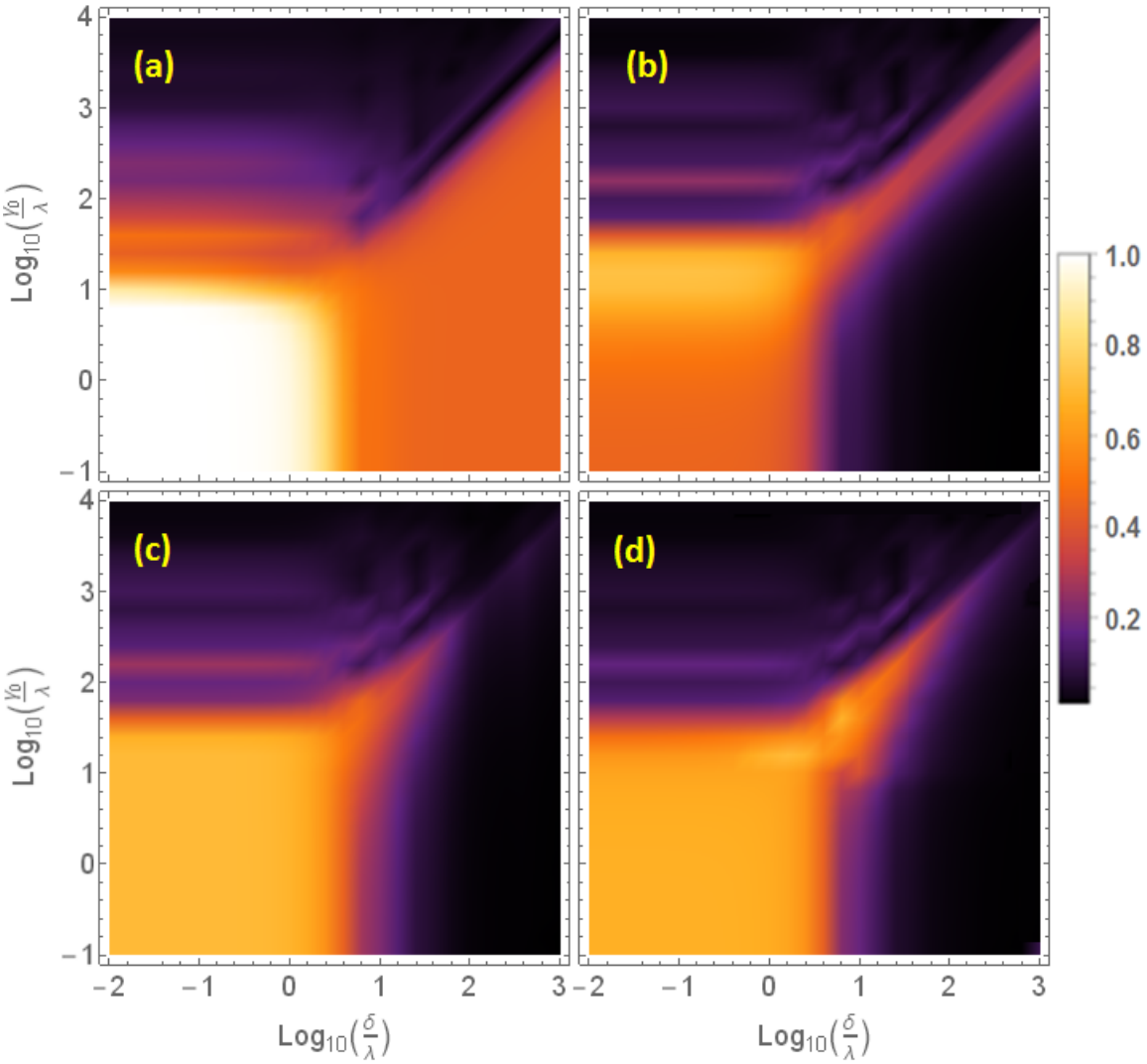

Figura 5.5: Gráfico de los tiempos mínimos como función de los parámetros γ_0/λ y δ/λ. El estado inicial es $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$ y el tiempo final de la evolución es $\lambda t = 1$. En **(a)** se muestra τ_t^{quant}, en **(b)** τ_t^{op}, en **(c)** τ_t^{av} y en **(d)** τ_t^{min}. Ver texto para detalles.

Como se puede advertir, la región de alta $\tilde{\mathcal{N}}$ en la Figura 5.4 **(a)** se corresponde con una región de bajos valores para todas las cotas en la Figura 5.5. El mismo resultado puede ser observado al comparar la Figura 5.4 **(b)** con la Figura 5.6. En este sentido, altos valores de no-Markovianidad implican bajos tiempos mínimos de evolución. Esto resulta una manifestación de la aceleración en la evolución cuántica

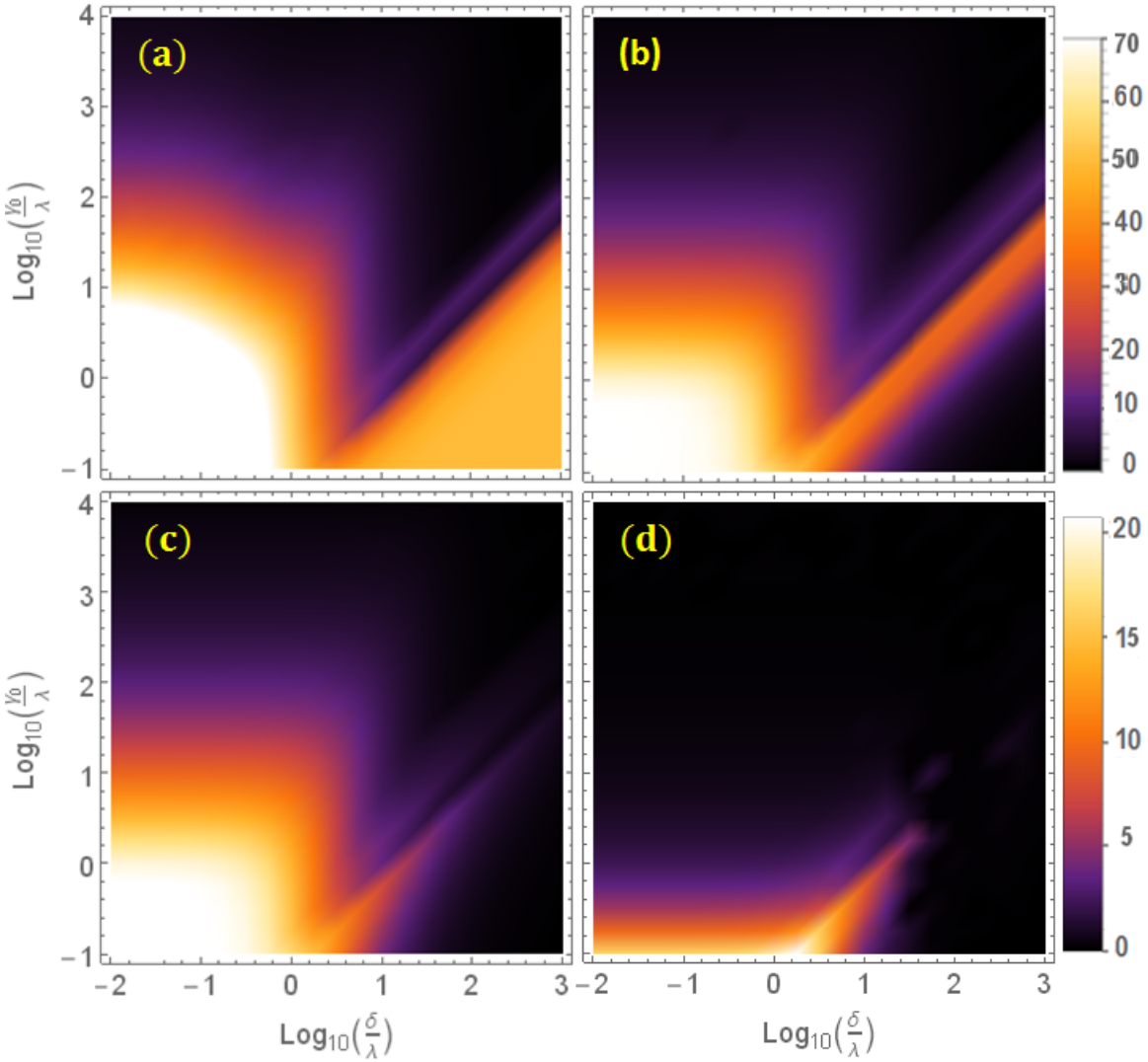

Figura 5.6: Gráfico de los tiempos mínimos como función de los parámetros γ_0/λ y δ/λ. El estado inicial es $\rho_i = |x;+\rangle\langle x;+|$ y el tiempo final de evolución es $\lambda t = 100$. En **(a)** se muestra τ_t^{quant}, en **(b)** τ_t^{op}, en **(c)** τ_t^{av} y en **(d)** τ_t^{min}. La escala de color en el rango $0-70$ corresponde a los paneles **(a)**, **(b)** y **(c)**, mientras que la del rango $0-20$ es para el panel **(d)**. Esto evidencia que τ_t^{min} resulta una mejor estimación del tiemo mínimo de evolución entre los estados ρ_i y $\rho_{\lambda t=100}$.

en el régimen no-Markoviano, del cual hemos hablado al presentar la Figura 5.1. De todas maneras, mirando únicamente en los valores de los tiempos mínimos para distintos valores de los parámetros γ_0/λ y δ/λ, no es posible inferir cuáles son las regiones en donde el mapa presenta comportamientos no-Markovianos. Por ejemplo, la región de valores en donde los tiempos mínimos son pequeños, tal como en la esquina inferior derecha de los paneles **(b)**, **(c)**, **(d)** de la Figura 5.5 o en donde

hay valores intermedios como en el panel **(a)**, no se corresponde con regiones de parámetros en donde existen altos valores de la medida $\tilde{\mathcal{N}}$ en la Figura 5.4 **(a)**. Exactamente el mismo análisis puede ser realizado para el caso de $\lambda t = 100$, el cual ha sido ploteado en el panel **(b)** de la Figura 5.4 y en la Figura 5.6, respectivamente.

Por otro lado, si ahora nos olvidamos por un momento de la no-Markovianidad y nos enfocamos en comparar únicamente las cotas temporales entre sí, veremos que presentan comportamientos cualitativos por demás similares en todo el espacio de parámetros estudiado, a excepción del panel **(d)** de la Figura 5.6, el cual desentona significativamente con los demás. Esto no es sorprendente ya que se corresponde con el análisis que hemos realizado previamente en cuanto a la consistencia de las cotas. En particular, si uno considera tiempos cortos de evolución, tal como en el caso de la Figura 5.5 en donde se fijó $\lambda t = 1$ (tiempo en el cual el qubit todavía no arribó a su estado estacionario en ningún régimen de parámetros analizado), todas las cotas son similares por lo que todas parecen estimar bien el tiempo de evolución entre el estado inicial y el final (no estacionario). En este caso, por ejemplo, resulta curioso el hecho que la cota τ_t^{quant} sature el límite en el régimen Markoviano, tal como se desprende de observar el panel **(a)** de la Figura 5.5. Sin embargo, esto no se sostiene al considerar tiempos largos de evolución, tal como se ha hecho en la Figura 5.6, en donde se ha fijado el tiempo final en $\lambda t = 100$ y la estimación dada por τ_t^{quant} ya no es consistente. Aquí, es claro que la cota τ_t^{min} (representada en el panel **(d)**) debe desentonar de las demás puesto que se está considerando un tiempo mayor al que necesita el qubit para llegar al estado estacionario en determinadas regiones de parámetros. En este caso, tal como ya se indicó, esta cota es la única que resulta consistente a la hora de estimar el tiempo mínimo de evolución entre los estados. Por dicho motivo, también, se han tenido que usar distintas escalas para los respectivos paneles.

5.3. Cotas temporales y condiciones iniciales

Otra de las características que se puede analizar en el marco de estos tiempos mínimos de evolución es su dependencia respecto a las condiciones iniciales. Como puede verse de las expresiones derivadas en el Capítulo 3, en particular aquella referida a la noción de la cuanticosidad en la ecuación (3.2.43), todas parecen ser extremadamente sensibles a la condición inicial desde la cual se parte. En el caso de esta última cota resulta claro, pues si ρ_0 es una matriz densidad diagonal en una dada base y la evolución temporal sólo altera los pesos de la distribución sin generar coherencias, entonces la cuanticosidad entre el estado inicial y el estado evolucionado $Q(\rho_0, \rho_t)$ es cero y la cota deja de ser eficiente para estimar tiempos mínimos.

Por lo tanto, con el objetivo de mostrar la dependencia recién descripta, se puede parametrizar el estado inicial con los ángulos de la esfera de Bloch y luego analizar el mismo sistema amortiguado de Jaynes-Cummings, variando la condición inicial pero esta vez manteniendo tanto los parámetros del entorno como el tiempo final de la evolución fijos. Utilizando la parametrización mostrada en el apéndice del trabajo, tal como hemos hecho también en la sección 4.4, podemos escribir los elementos de matriz de la función densidad inicial como

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \tag{5.3.1}$$

$$\rho_{eg} = \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}, \tag{5.3.2}$$

e introduciendo esto en las expresiones para las cotas, es sencillo demostrar de forma analítica que todos los tiempos mínimos aquí analizados (τ_t^{quant}, τ_t^{op}, τ_t^{av} y τ_t^{min}) son independientes del ángulo φ. Sin embargo, aún se puede estudiar la dependencia de los tiempos mínimos respecto al ángulo θ, tal como se ejemplifica en la Figura 5.7.

Como puede inferirse de observar la Figura 5.7, el valor de todos los tiempos mínimos varía de forma significativa de acuerdo a en qué punto en la superficie de Bloch uno comienza la evolución. En particular, todos los tiempos mínimos tienden a cero en el caso de empezar con la condición inicial $\theta = \pi$, lo que significa comenzar

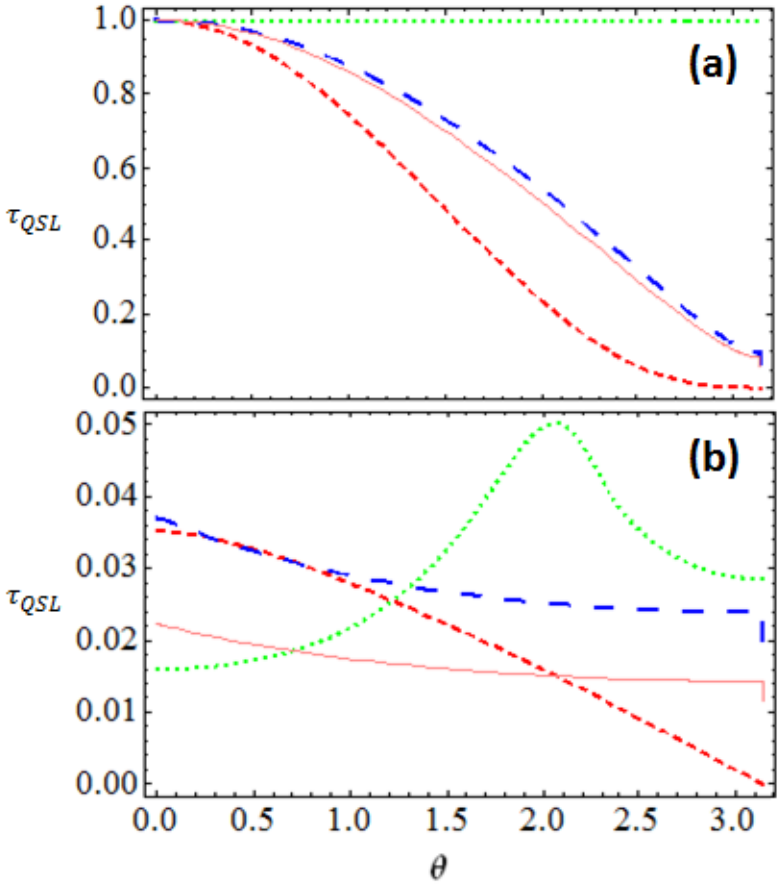

Figura 5.7: Gráfico de los tiempos mínimos como función de la condición inicial, modificando el ángulo θ de la esfera de Bloch. El tiempo final de evolución es $\lambda t = 1$. En el panel **(a)** se muestra un ejemplo en el régimen Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 0{,}1$, mientras que el panel **(b)** corresponde al régimen no-Markoviano con $\delta/\lambda = 0{,}1$ y $\gamma_0/\lambda = 10^4$. La línea verde punteada es para τ_t^{quant}, la línea roja con guiones es para τ_t^{op}, la línea azul con guiones largos es para τ_t^{av} y la línea roja continua para τ_τ^{min}.

directamente desde el estado estacionario. Esto último quizás no puede afirmarse para el caso particular de τ_t^{quant}, puesto que tanto para la condición inicial $\theta = 0$ como para $\theta = \pi$, el límite posee una indeterminación matemática (la línea verde punteada de la Fig. 5.7 no deja ver esto, pero resulta claro de la expresión analítica para τ_t^{quant}). De todas maneras, resulta curioso el hecho que para el régimen Markoviano y para tiempos cortos (en este caso $\lambda t = 1$, es decir, cuando el qubit aún no llegó al estado estacionario en ningún régimen) esta última cota, τ_t^{quant}, no sólo no depende de la condición inicial desde la cual se parte sino que además satura el límite y por ende resulta un excelente estimador del tiempo de evolución, más allá de las

discontinuidades que hemos mencionado. De todas formas, como ya se ha manifestado, esta cota como así también τ_t^{op} y τ_t^{av}, falla al considerar tiempos mayores al tiempo que tarda el qubit en llegar al estado estacionario. Por dicho motivo, ninguna de estas cotas sirven para estimar el tiempo mínimo necesario para evolucionar entre estados cuánticos, sino que lo que hacen es acotar el tiempo real de la evolución, independientemente de que el estado estacionario ya se haya alcanzado.

Capítulo 6

Conclusiones

"La clave del camino, más que en sus bifurcaciones, su sospechoso comienzo o su dudoso final, está en el cáustico humor de su doble sentido. Siempre se llega, pero a otra parte."

Roberto Juarroz

El trabajo desarrollado en esta tesis se centró en el estudio de los tiempos mínimos que establece la mecánica cuántica para la evolución de sistemas cuánticos abiertos. El origen de este límite temporal que fija la teoría está relacionado con la distinguibilidad entre los estados, de manera que si uno desea conectar mediante una evolución física dos estados con algún grado fijo de distinguibilidad, es necesario avanzar por lo menos la misma distancia que separa estos dos estados. En este contexto, la teoría del límite de la velocidad cuántica tiene por objetivo establecer límites inferiores de este tiempo mínimo de evolución y su origen se remonta a los trabajos pioneros realizados por Mandelstam-Tamm y Margolus-Levitin para evoluciones unitarias conectando estados puros ortogonales.

Ahora bien, un requisito básico que cualquier cota razonable ligada al tiempo mínimo de evolución entre dos estados debe satisfacer es que si se aplica la fórmula en el contexto de una dinámica dada, el resultado debe estar próximo del tiempo mínimo de evolución entre estos dos estados y no al tiempo actual de evolución (a menos que el límite haya sido saturado). En este sentido, en el trabajo aquí expuesto,

se analizaron los límites para el tiempo mínimo de evolución en sistemas cuánticos abiertos (derivados previamente en las Ref. [25, 27, 28]) y se ha demostrado que sólo uno, dado en la Ref. [25], verifica efectivamente este requisito básico. La diferencia que hace la diferencia de esta cota respecto a las demás es que la misma no depende explícitamente del tiempo actual de la evolución, sino únicamente del estado inicial y el final. Se sostiene que en dicho hallazgo radica la principal contribución de la presente tesis, en tanto que se ha conseguido invalidar los resultados provistos en [27, 28], logrando echar luz y entendimiento sobre la consistencia y la falsa multiplicidad de las cotas temporales para la evolución presentes en la literatura.

El resultado anterior fue posible gracias a la utilización del modelo de Jaynes-Cummings amortiguado, el cual para cualquier estado inicial posee el mismo estado estacionario. Bajo este marco, el trabajo aquí presentado, ha revelado que los límites referentes a los tiempos mínimos en las Ref. [27, 28] crecen indefinidamente con el tiempo de evolución real, independientemente que el estado estacionario haya sido alcanzado para tiempos finitos. Por el contrario, la cota temporal esbozada en la Ref. [25] permanece constante durante cualquier tiempo mayor que el tiempo en el que el estado estacionario es alcanzado. De aquí se desprende que esta última cota es la única que resulta consistente en aras de estimar el tiempo mínimo de evolución entre dos estados. Asimismo, contrariamente a los límites de las Ref. [25, 28], también se ha demostrado que el límite desarrollado en la Ref. [27] no puede saturarse de manera continua en el tiempo a lo largo de ningún camino de la evolución cuántica.

En relación con la posible correspondencia entre los efectos no-Markovianos de la dinámica y el comportamiento de los tiempos mínimos, se encontró que todas las cotas analizadas tienen valores pequeños en una región de parámetros que coincide con la región donde tiene lugar la aceleración de la evolución cuántica debido a los efectos no-Markovianos del sistema. Sin embargo, también se ha observado que existe una región de parámetros en donde los tiempos mínimos presentan valores bajos pero que la misma no se corresponde con la región de efectos no-Markovianos en la evolución. En este sentido, mediante un contraejemplo, se ha puesto en evidencia que la afirmación referente a que los efectos no-Markovianos sobre una evolución

cuántica pueden ser estudiados a través de estos límites temporales es falsa.

Se afirma que esta tesis, junto con el trabajo desarrollado a partir de ella en la Ref. [52], representa un punto de partida para estudiar la relación entre la única cota que presenta tiempos mínimos consistentes en sistemas abiertos, según se ha mostrado, y la teoría de control óptimo. Teniendo en cuenta que dada una evolución cuántica arbitraria, en general siempre se llega (pero a otra parte), una posible idea que se desprende de aquí consiste en la búsqueda de métodos de control que logren evolucionar un sistema cuántico abierto de un estado inicial a un estado objetivo en el menor tiempo que resulte físicamente posible. Este tiempo mínimo podrá ser estimado previamente a partir de la única cota existente que en este trabajo ha mostrado ser válida.

Bibliografía

[1] L. Mandelstam and I. Tamm, J. Phys. USSR 9, 249 (1945).

[2] N. Margolus and L. B. Levitin, Physica (Amsterdam) 120D, 188 (1998).

[3] W.H. Zurek, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical (Revisited), Los Alamos Science 27 (2002).

[4] H. D. Zeh, Found. Phys. 1, 69 (1970).

[5] W. H. Zurek, Phys. Rev. D 24, 1516 (1981).

[6] W. H. Zurek, Phys. Rev. D 26, 1862 (1982).

[7] J. P. Paz, W. H. Zurek, Environment-Induced Decoherence and the Transition From Quantum to Classical, 72nd Les Houches Summer School on "Coherent Matter Waves", (1999)

[8] G. Benenti et al., Principles of Quantum Computation and Information, Vol. II, (World Scientific Publishing, Singapore, 2007)

[9] I. Bloch, Nature Phys. 1, 23 (2005).

[10] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod Phys. 80, 885 (2008).

[11] Leibfried, D. and Blatt, R. and Monroe, C. and Wineland, D. Rev. Mod. Phys 75, 281 (2003).

[12] R. Gerritsma, et al., Nature 463, 68 (2010) ;R. Blatt & C. F. Roos, Nature Physics 8, 277–284 (2012); F. Serwane, et al. Science 332, 336-338 (2011); S. Korenblit, et al., New J. Phys. 14, 095024 (2012).

[13] Paredes, et al., Nature 429, 277 (2004); Kinoshita, et al., Nature 440, 900-903 (2006); S. Hofferberth, Nature 449, 324–327 (2007).

[14] M. Shapiro and P. Brumer, Quantum Control of Molecular Processes, (Wiley-VCH, Berlin, 2011)

[15] Ian Walmsley, Herschel Rabitz, Physics Today 56 (2003).

[16] M. Schosshauer, *Decoherence and quantum to classical transition*, Springer, Berlin/Heidelberg (2007).

[17] Breuer H-P and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Oxford, UK, (2007).

[18] T. Caneva,M. Murphy, T. Calarco, R. Fazio, S. Montangero, V. Giovannetti, and G. E. Santoro, Phys. Rev. Lett. 103, 240501 (2009).

[19] S. Deffner,J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 47, 145502 (2014).

[20] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. Lett. 46, 623 (1981).

[21] S. Lloyd, Nature (London) 406, 1047 (2000).

[22] V. Giovanetti, S. Lloyd, and L. Maccone, Nat. Photonics 5, 222 (2011).

[23] J. Anandan and Y. Aharonov, Phys. Rev. Lett. 65, 1697 (1990).

[24] L. B. Levitin and T. Toffoli, Phys. Rev. Lett. 103, 160502 (2009).

[25] M. M. Taddei, B. M. Escher, L. Davidovich, and R. L. de Matos Filho, Phys. Rev. Lett. 110, 050402 (2013).

[26] A. del Campo, I. L. Egusquiza, M. B. Plenio and S. F. Huelga Phys. Rev. Lett. 110, 050403 (2013).

[27] S. Deffner, E. Lutz, Phys. Rev. Lett. 111, 010402 (2013).

[28] J. Jing, L. A. Wu, A. del Campo, arXiv:1510.01106.

[29] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).

[30] P. Breuer, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 45, 154001 (2012). A. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, Rep. Prog. Phys. 77, 094001 (2014).

[31] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. 2011. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition (10th ed.). Cambridge University Press, New York, NY, USA.

[32] Gorini V, Kossakowski A and Sudarshan E C G, 1976 J. Math. Phys. 17 821

[33] Lindblad G, Commun. Math. Phys. 48 119, (1976).

[34] W. Heisenberg, Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z. Phys. 43, 172 (1927).

[35] G. Giribet, Sobre las relaciones de Incerteza de Heisenberg entre tiempo y energía: Una nota didáctica, arXiv:physics/0506001 (2005).

[36] K. Bhattacharyya, Quantum decay and the Mandelstam-Tamm time-energy inequality, J. Phys. A 16, 2993 (1983).

[37] V. Giovanetti, S. Lloyd and L. Maccone, Phys. Rev. A 67, 052109 (2003).

[38] A. Rivas and S. F. Huelga, Open Quantum Systems. An Introduction (Springer, Heidelberg, 2011).

[39] A. Uhlmann, in Quantum Groups and Related Topics: Proceedings of the First Max Born Symposium, edited by R. Gielerak, J. Lukierski, and Z. Popowicz (Kluwer Academic, Dordrecht, 1992), p. 267.

[40] D. J. C. Bures, Trans. Am. Math. Soc. 135, 199 (1969).

[41] R. Jozsa, J. Mod. Opt. 41, 2315 (1994).

[42] R. D. Grigorieff, Math. Nachr. 151, 327, (1991).

[43] P. Iyengar, G. N. Chandan, and R. Srikanth, arXiv:1312.1329v1.

[44] L. Ferro, P. Facchi, R. Fazio, F. Illuminati, G. Marmo, V. Vedral, and S. Pascazio, arXiv:1501.03099v1.

[45] M. Sarovar and G. J. Milburn, J. Phys. A: Math. Gen., v. 39, 8487, 2006.

[46] Breuer H-P, B. Kappler, and F. Petruccione, Phys. Rev. A 59, 1633 (1999).

[47] B. M. Garraway, Phys. Rev. A 55, 2290 (1997).

[48] B. Bylicka, D. Chruściński, and S. Maniscalco, Scientific Reports 4, (2014).

[49] C. Pineda, T. Gorin, D. Davalos, D. A. Wisniacki, and I. García-Mata, Phys. Rev. A 93, 022117 (2016).

[50] Z. He, J. Zou, L. Li, and B. Shao, Phys Rev A (2011).

[51] Breuer H-P, Laine E-M and Piilo J, Phys. Rev. Lett. 103 210401, (2009).

[52] N. Mirkin, F. Toscano, and D. Wisniacki, Phys. Rev. A 94, 052125 (2016).

[53] B. M. Escher, Estimação de parâmetros em sistemas quânticos abertos, Ph.D. thesis (2011).

[54] C. W. Helstrom, Phys. Lett. 25A, 101 (1967); C. W. Helstrom, Quantum Detection and Estimation Theory, New York, Academic (1976).

[55] A. S. Holevo, Probabilistic and statistical aspects of quantum theory, Amsterdam, North-Holland (1982).

[56] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich, Nature Phys. 7, 406 (2011).

Apéndice A

Información cuántica de Fisher

En mecánica cuántica, los errores se originan adicionalmente debido a la naturaleza probabilística de los estados cuánticos. Incluso con mediciones ideales, en general no se puede obtener información completa sobre un parámetro del que depende un estado cuántico, porque en general no es posible distinguir entre dos estados cuánticos no ortogonales. En este contexto, la información cuántica de Fisher tiene como objetivo cuantificar cuánto acerca de un determinado parámetro puede ser aprendido a partir de un estado cuántico que depende de él, asumiendo las mejores mediciones posibles. La contrapartida clásica de esta cantidad sería trivialmente infinita. Una expresión para la información cuántica de Fisher puede ser obtenida a partir de la derivada logarítmica simétrica $L(x)$ [54, 55]. Para un dado parámetro x y un dado estado $\rho(x)$, $L(x)$ es el operador hermítico definido implícitamente por

$$\frac{d}{dx}\rho(x) = \frac{\rho(x)L(x) + L(x)\rho(x)}{2}. \tag{A.1}$$

No lo haremos en el presente anexo, pero se puede demostrar [53] que la información cuántica de Fisher $\mathcal{F}_Q(x)$ y el operador $L(x)$, están relacionados de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_Q(x) = Tr[\rho(x)L^2(x)]. \tag{A.2}$$

Aunque originalmente se definió en metrología cuántica, la información cuántica de Fisher para la estimación del tiempo está estrechamente relacionada con la dinámica del sistema. Esto es así ya que puede considerarse el parámetro x de las expresiones

anteriores como el parámetro tiempo, tanto en

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t) = Tr[\rho(t)L^2(t)] \tag{A.3}$$

como en

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{2}[\rho(t)L(t) + L(t)\rho(t)]. \tag{A.4}$$

Veamos a qué nos lleva lo anterior en el caso de considerar una evolución unitaria para la dinámica. Cualquier evolución unitaria puede ser escrita como

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t), \tag{A.5}$$

en donde $U(t)U^{\dagger}(t) = \mathbb{1} = U^{\dagger}(t)U(t)$, y equivalentemente se tiene entonces

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[i\hbar\dot{U}(t)U^{\dagger}(t), \rho(t)\right] = \frac{1}{i\hbar}[H(t), \rho(t)], \tag{A.6}$$

con $H(t) = i\hbar\dot{U}(t)U^{\dagger}(t)$, siendo el Hamiltoaniano que gobierna la evolución, $i\hbar\dot{U} = HU$. Para un sistema en estados siempre puros, la relación $\rho^2(t) = \rho(t)$ puede ser derivada respecto al tiempo teniendo

$$\dot{\rho}\rho + \rho\dot{\rho} = \dot{\rho} \tag{A.7}$$

$$\rho L\rho + L\rho\rho + \rho L\rho + \rho\rho L = \rho L + L\rho \tag{A.8}$$

$$\rho L\rho = 0, \tag{A.9}$$

de manera que

$$\rho\dot{\rho} = \frac{1}{2}[\rho\rho L + \rho L\rho] = \frac{\rho L}{2}; \tag{A.10}$$

$$\dot{\rho}\rho = \frac{1}{2}[\rho L\rho + L\rho\rho] = \frac{L\rho}{2}. \tag{A.11}$$

Las últimas dos ecuaciones, junto a $\rho^2(t) = \rho(t)$, nos permiten escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(t) = Tr(\rho L^2) = Tr(\rho LL\rho) = 4Tr(\rho\dot{\rho}\dot{\rho}\rho) = 4Tr(\rho\dot{\rho}^2) = \\ = -\frac{4}{\hbar^2}Tr(\rho[H,\rho]^2) = \frac{4}{\hbar^2}[\Delta H]^2,\end{aligned} \tag{A.12}$$

en donde $[\Delta H]^2$ es la varianza de H(t). Vemos así que, para evoluciones unitarias de un estado puro, la información cuántica de Fisher para la estimación del tiempo resulta simplemente la varianza de la energía del sistema. Sustituyendo este resultado

en la cota general, dada en la ecuación (3.2.24), recuperamos exactamente el límite de Mandelstam-Tamm para evoluciones unitarias.

De todas maneras, en el caso más general, el hecho que la ecuación (A.2) resulte tan concisa no implica que la información cuántica de Fisher sea fácil de calcular ya que la derivada logarítmica simétrica es a menudo engorrosa de obtener. Por esta razón, a continuación se muestra un método más sencillo para calcular la información cuántica de Fisher para otros casos de interés basado en el método de purificaciones [56]. La idea básica es que la evolución no unitaria de un sistema dado puede ser descripta por la evolución unitaria de su correspondiente purificación. Hemos visto en la ec. (A.12) que la información cuántica de Fisher de una evolución unitaria es fácil de evaluar. Entonces, veamos cómo se relacionan la información cuántica de Fisher del sistema original respecto a la de su purificación. Consideremos un sistema S en un estado $\rho(t)$ evolucionando de forma no unitaria. Una purificación de $\rho(t)$ requiere de un sistema auxiliar, denotado E (por entorno), y será dado por un estado conjunto $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$ tal que

$$Tr_E\left(|\Psi_{S,E}(t)\rangle\langle\Psi_{S,E}(t)|\right) = \rho(t) \quad \forall t. \tag{A.13}$$

Consideremos al estado $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$ como una purificación arbitraria de $\rho(t)$ entre las muchas posibles. Debido a que $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$ contiene toda la información acerca de $\rho(t)$, resulta físicamente razonable que la información cuántica de Fisher de este último sea al menos igual de grande respecto a la del sistema original. De hecho, la información cuántica de Fisher de $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$, denotada como $\mathcal{C}_Q(t)$, debe actuar como un límite superior de la información cuántica de Fisher de $\rho(t)$.

El estado $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$ permanece puro a lo largo de la evolución, la cual debe entonces ser descripta por un operador unitario $U_{S,E}(t)$. El Hamiltoniano gobernando la evolución puede ser siempre obtenido como $H_{S,E}(t) = i\hbar\dot{U}_{S,E}(t)U^{\dagger}_{S,E}(t)$, y sabemos entonces que la información cuántica de Fisher de una evolución unitaria es proporcional a la varianza del Hamiltoniano, tal que

$$\mathcal{C}_Q(t) = \frac{4}{\hbar^2}[\Delta H_{S,E}]^2. \tag{A.14}$$

Juntando todos estos resultados, podemos entonces hallar una cota para el tiempo

mínimo de evolución dado en la ecuación (3.2.24) como

$$\arccos\left(\sqrt{F_B[\rho_0,\rho_t]}\right) \leq \int_0^\tau \sqrt{\frac{\mathcal{F}_Q(t')}{4}}\, dt' \leq \int_0^\tau \sqrt{\frac{\mathcal{C}_Q(t')}{4}}\, dt' = \frac{1}{\hbar}\int_0^\tau \Delta H_{S,E}\, dt'. \tag{A.15}$$

Escrito de esta forma, en términos de cualquier purificación de $\rho(t)$, el límite puede o no estar saturado, pues vemos que la elección de la purificación puede afectar precisamente la saturación del límite.

Consideremos ahora el caso particular de un canal no unitario. Necesitamos la varianza del Hamiltoniano $H_{S,E}(t)$. Esta varianza, en principio, debe ser evaluada a tiempo t, es decir, sobre el estado $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$. Sin embargo, existe una táctica que facilita esta evaluación: el valor de expectación de un operador en el estado $|\Psi_{S,E}(t)\rangle$ puede ser calculado como un valor de expectación en el estado inicial $|\Psi_{S,E}(0)\rangle$, si los operadores evolución son absorbidos por $H_{S,E}(t)$. Para un operador que satisface

$$\mathfrak{h}_{S,E}(t) = U^\dagger_{S,E}(t) H_{S,E}(t) U_{S,E}(t), \tag{A.16}$$

su promedio debe obedecer

$$\langle\Psi_{S,E}(0)|\, \mathfrak{h}_{S,E}(t)\, |\Psi_{S,E}(0)\rangle = \langle\Psi_{S,E}(t)|\, H_{S,E}(t)\, |\Psi_{S,E}(t)\rangle \tag{A.17}$$

Esta definición presenta una ventaja práctica: se simplifica la forma del estado en el que se toman los valores de expectación porque ya no hay dependencia temporal, aunque el operador mantiene un nivel similar de complejidad en tanto que

$$\mathfrak{h}_{S,E}(t) = i\hbar U^\dagger_{S,E}(t)\dot{U}_{S,E}(t). \tag{A.18}$$

Si nos enfocamos ahora en el sistema de nuestro verdadero interés en este trabajo, uno tiene un sistema qubit que puede estar inicialmente en el estado excitado $|e\rangle$ y que puede decaer al estado fundamental $|g\rangle$. Suponemos que existe una probabilidad $P(t)$ de que el estado $|e\rangle$ no decaiga al estado $|g\rangle$ en el intervalo $[0,t]$, por lo que la probabilidad de sí decaer debe estar dada por $1-P(t)$. Esta evolución del sistema S está dada por

$$\rho_S(t) = \begin{bmatrix} P(t)\rho_{ee} & \sqrt{P(t)}\rho_{eg} \\ \sqrt{P(t)}\rho^*_{eg} & 1-P(t)\rho_{ee} \end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

Ahora bien, con el propósito de calcular la información cuántica de Fisher, necesitamos escribir la evolución de S en la forma de una purificación, que explícitamente incluye un sistema auxiliar E. El sistema E únicamente necesita ser un qubit, por lo que cuando el estado inicial de S resulta ser puro el canal puede ser descripto por

$$|g\rangle\,|0\rangle_E \to |g\rangle\,|0\rangle_E\,, \tag{A.20}$$

$$|e\rangle\,|0\rangle_E \to \sqrt{P(t)}\,|e\rangle\,|0\rangle_E + \sqrt{1-P(t)}\,|g\rangle\,|1\rangle_E\,. \tag{A.21}$$

La evolución de esta purificación está dada por el operador unitario que actúa sobre S+E

$$U_{S,E}(t) = \exp\Big\{-i\left(\arccos\sqrt{P(t)}\right)(\sigma_+\sigma_-^{(E)} + \sigma_-\sigma_+^{(E)})\Big\}, \tag{A.22}$$

donde $\sigma_\pm$ son los operadores subida y bajada del qubit S, mientras que análogamente los operadores $\sigma_\pm^{(E)}$ lo son para E. El Hamiltoniano para esta evolución (corregido para el estado inicial) resulta ser

$$\mathfrak{h}_{S,E}(t) = i\hbar U_{S,E}^\dagger(t)\dot{U}_{S,E}(t) = \hbar\frac{d\ \arccos\sqrt{P(t)}}{dt}\left(\sigma_+\sigma_-^{(E)} + \sigma_-\sigma_+^{(E)}\right), \tag{A.23}$$

desde lo cual obtenemos la cota $\mathcal{C}_Q(t)$ para la información cuántica de Fisher

$$\frac{\mathcal{C}_Q(t)}{4} = \frac{1}{\hbar^2}[\Delta\mathfrak{h}_{S,E}(t)]^2 = \langle\sigma_+\sigma_-\rangle\left(\frac{d\ \arccos\sqrt{P(t)}}{dt}\right)^2, \tag{A.24}$$

en donde la varianza se calcula sobre el estado inicial de S+E, por lo que el valor medio $\langle\sigma_+\sigma_-\rangle$ debe calcularse sobre el estado inicial de S. Por lo tanto, el limite correspondiente para el tiempo mínimo de evolución está dado por

$$\mathcal{L}(\rho_0,\rho_\tau) \le \sqrt{\langle\sigma_+\sigma_-\rangle}\int_0^\tau\left|\frac{d\arccos\sqrt{P(t)}}{dt}\right|\,dt. \tag{A.25}$$

Apéndice B

La esfera de Bloch

La esfera de Bloch consiste en una representación geométrica del espacio de estados de un sistema cuántico de dos niveles [12]. En este apéndice introduciremos algunas de sus características más destacadas. Consideremos un estado puro del sistema, cuya expresión más general es la siguiente:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|e\rangle + \beta\,|g\rangle\,, \tag{B.1}$$

donde $\{|e\rangle\,, |g\rangle\}$ es base del espacio de Hilbert del sistema y α, $\beta \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, también se puede escribir como

$$|\psi\rangle = |\alpha| e^{i\varphi_\alpha}\,|e\rangle + |\beta| e^{i\varphi_\beta}\,|g\rangle\,, \tag{B.2}$$

y, al descartar un factor de fase global (irrelevante físicamente), la expresión anterior queda

$$|\psi\rangle = |\alpha|\,|e\rangle + |\beta| e^{i\varphi}\,|g\rangle\,, \tag{B.3}$$

donde $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$. Por otro lado, la condición de normalización $|\,\langle\psi|\psi\rangle\,|^2 = 1$ implica $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, con lo que el estado general puro siempre se podrá parametrizar como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}\,|g\rangle\,, \tag{B.4}$$

donde $0 < \varphi < 2\pi$ y $0 < \theta < \pi$. Esta expresión permite ahora visualizar el estado general puro de un sistema de dos niveles (llamado qubit, en el contexto de la computación cuántica) como un punto de coordenadas $(\varphi;\, \theta)$ en una esfera unitaria,

tal como se observa en la Fig. B.1. En particular, los estados de la base $|e\rangle$ y $|g\rangle$ corresponden a los polos norte y sur, respectivamente, de la esfera.

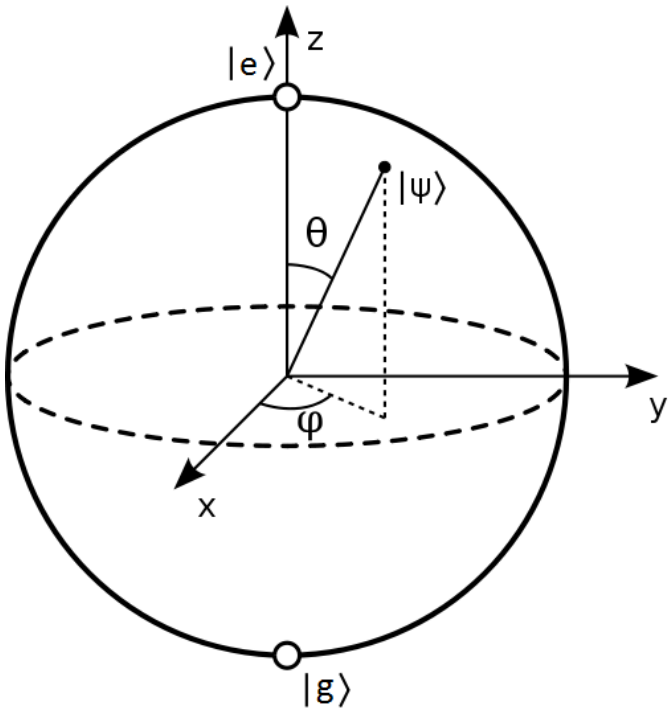

Figura B.1: La esfera de Bloch como representación del espacio de estados de un sistema de dos niveles. Si el estado se encuentra sobre la superficie de la esfera, se dice que dicho estado representa un estado puro. En caso contrario, se dice que el estado es mixto.

La esfera de Bloch permite también visualizar estados mixtos de un sistema de dos niveles. En este caso, el elemento adecuado dentro del formalismo para representar dichos estados es el operador densidad

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| , \tag{B.5}$$

donde los $\{p_i\}$ son números positivos que representan las probabilidades (clásicas) de encontrar al sistema en el estado puro $|\psi_i\rangle$. Ésta definición implica que ρ es un operador hermítico, definido positivo (pues sus autovalores representan probabilidades y por lo tanto deben ser positivos) y de traza unitaria. Para un estado puro $|\psi\rangle$, el operador densidad es simplemente el proyector

$$\rho = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| , \tag{B.6}$$

por lo que en este caso ρ tiene un solo autovalor no nulo, el cual vale 1. Asimismo, se tiene que $\rho^2 = \rho$.

La representación matricial del operador densidad correspondiente a un estado arbitrario de un sistema de dos niveles puede

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

Sin embargo, las condiciones de hermiticidad, sumado a $\rho > 0$ y $Tr(\rho) = 1$ determinan que la manera más general de parametrizar (B.7) sea

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r}.\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli y $\vec{r}$ es un vector de componentes reales. Se pueden calcular fácilmente los autovalores de la matriz en (B.8), obteniendo la expresión

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\right), \tag{B.9}$$

de la cual se puede observar que, para satisfacer la condición $\rho > 0$, las componentes de $\vec{r}$ deben necesariamente satisfacer

$$||\vec{r}|| \leq 1, \tag{B.10}$$

donde la igualdad implica, por (B.9), que ρ representa un estado puro. La condición (B.10) nos remite entonces a la ecuación de una esfera unitaria, donde la superficie corresponde al conjunto de los estados puros del sistema, mientras que el interior corresponde a los estados mixtos (ver Fig. A.1). El centro de la esfera representa el estado

$$\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{B.11}$$

es decir, el estado máximamente mixto, donde la probabilidad de encontrar al sistema en cualesquiera dos estados ortogonales es la misma. Asimismo, notemos que las componentes del vector de Bloch tienen un significado físico directo, en tanto que cada una representa (en un instante dado) el valor de expectación del operador de

Pauli correspondiente

$$\langle \sigma_k \rangle = Tr(\rho\sigma_k) = \frac{1}{2}\left(Tr(\mathbb{1}\sigma_k) + \sum_i r_i Tr(\sigma_i\sigma_k) \right) = r_k, \tag{B.12}$$

mientras que la dispersión de dicho operador alrededor del valor de expectación también puede expresarse en función de las componentes de $\vec{r}$

$$var(\sigma_k) = \langle (\sigma_k - \langle \sigma_k \rangle)^2 \rangle = \langle \sigma_k^2 \rangle - \langle \sigma_k \rangle^2 = 1 - r_k^2. \tag{B.13}$$