Biblioteca Digital F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR FACULTAD DE CTENCTAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Grado

Dinámica acoplada de electrones y campos en un quantum ring excitado por vórtices ópticos

Care, Damian Ariel

2017

Este documento forma parte de las colecciones digitales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en bibliotecadigital.exactas.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the digital collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in bibliotecadigital.exactas.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Care, Damian Ariel. (2017). Dinámica acoplada de electrones y campos en un quantum ring excitado por vórtices ópticos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000008_Care

Cita tipo Chicago:

Care, Damian Ariel. "Dinámica acoplada de electrones y campos en un quantum ring excitado por vórtices ópticos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017. https://hdl.handle.net/20.500.12110/seminario_nFIS000008_Care

EXACTAS Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Contacto: bibliotecadigital.exactas.uba.ar Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Universidad de Buenos Aires



DINÁMICA ACOPLADA DE ELECTRONES Y CAMPOS EN UN *QUANTUM RING* EXCITADO POR VÓRTICES ÓPTICOS

TESIS

LICENCIATURA EN CS. FISICAS

DAMIAN ARIEL CARE

DIRECTOR: GUILLERMO FEDERICO QUINTEIRO

BUENOS AIRES, C.A.B.A.

2017

TEMA: Materia Condensada

ALUMNO: Damián Ariel Care

L.U. Nº: 875/02

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEyN, UBA.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Guillermo Federico Quinteiro

FECHA DE INICIACIAÓN: Agosto 2014

FECHA DE FINALIZACIAÓN: Mayo 2017

FECHA DEL EXAMEN: 12 de Mayo de 2017

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi familia, a Adriana y amigos por el apoyo incondicional. A la Universidad de Buenos Aires por permitirme recibir una educación de calidad. Y a mi director Guillermo Quinteiro por estar siempre a disposición y brindarme su conocimiento generosamenente.

Resumen

Los Quantum Rings son heteroestructuras que confinan los electrones en una región con forma de anillo y discretizan sus niveles de energía. En este trabajo se estudió en forma teórica la interacción entre un Quantum Ring y luz con momento angular orbital (twisted light) y con el campo inducido por esta. Sabemos del electromagnetismo básico que una espira que posee una corriente genera autoinducción. También sabemos de trabajos anteriores que la twisted light aplicada sobre estructuras en forma de anillo produce corrientes. Por lo tanto resulta relevante el estudio de los efectos de autoinducción sobre estas estructuras. Para esto se empezó por analizar cuál es la descripción mas adecuada para la función de onda de los electrones y para el campo externo. Luego se escribió el Hamiltoniano de interacción que contiene a su vez la interacción con la Twisted Light y con el campo autoinducido \mathbf{A}_d dependiente de la densidad de corriente, y se encontró la forma mas adecuada para este Hamiltoniano mediante transformaciones de gauge convenientes. Luego calculamos y analizamos los elementos de matriz correspondientes a estados de baja energía. A partir de esto escribimos las ecuaciones de Liouville para los elementos del operador matriz densidad en segunda cuantificación que resultan en un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. Posteriormente realizamos un análisis perturbativo en el régimen de baja excitación para estudiar la dinámica de los electrones fotoexcitados. De este análisis pudimos obtener un sistema lineal acoplado a primer

orden en la intensidad del campo de Twisted Light.

Índice

1	Intr	roducción	13
2	For	malismo Teórico	19
	2.1	Modelo de bandas	19
	2.2	Potencial débil	21
	2.3	Masa efectiva	22
	2.4	Estructura de banda de materiales compuestos III-V	22
		2.4.1 Bandas <i>heavy-hole</i> y <i>light-hole</i> en semiconductores	22
		2.4.2 Semiconductores <i>direct band gap</i> III-V y II-VI	23
	2.5	Función de onda en heteroestructuras	25
	2.6	Aproximación de la función envolvente	26
	2.7	TL y función de onda de los	
		portadores	29

		2.7.1	Representación matemática y campo eléctrico	
			asociado a la TL	29
	2.8	Rotatir	ng-Wave Approximation (RWA)	30
	2.9	Aproxi	mación MQS	32
	2.10	Transfo	ormaciones de $gauge$	33
	2.11	Segund	la cuantificación de fermiones y ecuaciones dinámicas	35
		2.11.1	Operadores lineales y bilineales	36
		2.11.2	Ecuaciones de movimiento	37
3	Cor: auto	rientes oinduci	sobre un QR excitadas por TL considerando el campo do	39
	3.1	Esquen	na de trabajo	39
	3.2	Hamilt	oniano total del sistema	40
	3.3	Térmir	no de interacción con la TL $(q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl})$	43
		3.3.1	Elementos de matriz del operador de interacción asociado a la TL $\langle b'm' \mid h_{tl} \mid bm \rangle$	43
	3.4	Térmir	no de interacción dinámica h_d	47
		3.4.1	Corriente eléctrica en un QR sin campo autoinducido	48
		3.4.2	Corriente de los portadores en términos de la matriz densidad	49
		3.4.3	Cálculo de la contribución parcial $\mathbf{a}_{m'm}^{(coh)(+)}$	54

	3.4.4	Cálculo de la contribución parcial $\mathbf{a}_{m'm}^{(pop)}$	56
	3.4.5	Elementos de matriz $\langle b'm' \mid h_d \mid bm \rangle$	58
4	Hamiltoni	ano en segunda cuatificación y ecuaciones dinámicas	63
	4.0.1	Acoplamiento entre espines debido a la interacción con las	66
		poblaciones	00
5	Régimen o	le baja excitación. Analisis pertubativo	69
6	Conclusio	nes	75
Bi	bliografía		76

Índice

Capítulo 1

Introducción

Heteroestructuras Las Heteroestructuras cuánticas son estructuras generadas sobre un sustrato semiconductor. El tamaño de estas estructuras restringe el movimiento de los portadores de carga confinándolos cuánticamente, esto produce un conjunto discreto de niveles de energía en los que los portadores pueden existir. Pueden producirse a través de varios procesos como el crecimiento epitaxial por haces moleculares (MBE) o deposición química de vapor (CVD).[11]

Una característica clave del crecimiento epitaxial de cristales es la posibilidad de crear superficies con diferentes propiedades morfológicas cuando se hace crecer un material sobre otro diferente (sustrato). Esto es causado en parte por la tensión resultante por falta de coincidencia entre las redes de cada material. Bajo las condiciones apropiadas la relajación elástica de la tensión puede conducir a la generación espontánea de islas coherentes tridimensionales con una pequeña dispersión de tamaño, aunque aún mayor al de la celda unidad de los materiales. Estas estructuras autoensambladas pueden incorporarse en el seno de materiales que posean un mayor *band gap* dando como resultado un confinamiento cuántico tridimensional dentro de esta isla autoensamblada. Es esto mismo lo que ocurre en la formación



Fig. 1.1: Imágenes obtenidas con AFM de *Quantum Dots* y *Quantum Rings*. El tamaño de las imágenes es de $1 \times 1 \mu m^2$. [31]

de Quantum Dots (QD). Tipicamente en InAs pero también se fabrican en GaSb y GaAs. Los QD son facilmente sintonizables, esta y otras características ópticas y electrónicas los vuelven muy interesantes para su aplicación técnica en transistores, celdas solares, LED's, diodos laser, generadores de segunda armónica, computación cuántica y generación de imágenes médicas. En aplicaciones tecnológicas los dispositivos basados en QD han conducido a mejorar la performance y funcionalidad.

Investigaciones [10] sobre el mecanismo de crecimiento epitaxial de estas estructuras con el uso de GaSb mostraron que es posible conseguir agregados en forma de anillos nanométricos generados espontáneamente sobre GaAs cuando ciertas condiciones son establecidas. Estas estructutas se conocen como quantum rings (QR). Se pueden obtener QRs de InGaAs sobre un sustrato de GaAs partiendo de QDs de InAs [12]. Se ha observado experimentalmente, luego, que por medio de MBE es posible hacer crecer directamente anillos de GaSb con diámetro interno y externo de al rededor de 20nm y 60nm respectivamente [9]. Posteriores investigaciones ha mostrado que es posible conseguir estructuras similares con un proceso autolimitante en Si sobre Si(100) con una excelente simetría rotacional y una mejor morfología comparada con la de aquellos QRs obtenidos por medio de la técnica de capado de QD en sistemas MBE. Estos QRs se realizan a través de un sitema de deposición química de vapor aumentada por plasma (PECVD). Tamaños típicos son alturas de 3nm a 10nm con diámetros de entre 150nm a 300nm y un ancho de 10nm. El tamaño y morfología puede ser bien controlado por medio del ajuste en los tiempos del proceso de formación [23]. Mas recientemente se ha demostrado experimentalmente que es posibe producir QR sobre películas ultra delgadas de $In_{0.1}Ga_{0.9}As$ teniendo 438nm y 736nm de diámetros interno y externo respectivamente utilizando quatum size effect [22].

Twisted Light En 1909 Poynting notó que la luz polarizada poseía momento angular de espín, la cual estaba asociada a la polarización circular y que para un fotón simple toma los valores $\pm\hbar$. La idea de luz con momento angular llegó mucho después cuando en 1992 un grupo de la universidad de Leiden en Holanda reconoció que haces de luz con dependencia de fase azimutal del tipo $e^{-i\ell\phi}$ llevan momento angular independiente del estado de polarización. El ángulo ϕ es la coordenada azimutal en la sección transversal del haz, y ℓ puede tomar cualquier valor entero positivo o negativo. El signo del momento angular orbital indica el sentido con respecto a la dirección del haz.

Estos son haces altamente no homogeneos que presentan una singularidad de fase en su eje de simetría, donde la intensidad del campo eléctrico o magnético pueden anularse. Ejemplos destacados son los haces paraxiales de luz con torsión (del inglés *twisted-light*) (*TL*) los cuales pueden poseer un perfil radial tipo Bessel o Laguerre-Gaussiano. Estos haces se caracterizan por tener momento angular orbital $\hbar \ell$ por cada fotón, donde ℓ es la llamada carga topológica. La investigación en luz con torsión abarca muchas áreas [2], como por ejemplo: la generación de haces, pinzas ópticas, interacción con átomos y moléculas, y el entrecruzamiento entre espín y momento angular orbital (OAM) con posibles aplicaciones a la información cuántica.

Las regiones de igual fase para la TL (frentes de onda), resultan formadas por ℓ hojas helicoidales entrelazadas como se muestra en la Fig. 1.2. Una característica de estos frentes de onda es que la singularidad de fase sobre el eje obliga que la intensidad sobre este sea nula y esto ocurre independiente de cuán enfocado este el haz.



Fig. 1.2: Momento angular orbital de un haz. [32]

Para frentes helicoidales el vector de Poynting tiene una componente azimutal

que produce un momento orbital paralelo al eje del haz. Puesto que el momento circula en torno al eje del haz tales haces se dice que contienen un vórtice óptico. La forma mas común de tales haces es el que se conoce como tipo Laguerre-Gaussian (LG). La magnitud y fase del campo eléctrico en diferentes posiciones de la sección transversal son descriptas por una función de modo. Los haces cilíndricos de tipo LG tienen un factor de fase explícito de la forma $e^{-i\ell\phi}$ que los hace la elección natural para la descripción de haces con moneto angular orbital [1]. La TL del tipo Bessel posee otras características que, de acuerdo a la situación estudiada, pueden resultar interesantes, por ejemplo estos haces son solución de la ecuación de onda de Hemholtz además los haces de este tipo resultan ser no difractivos.



Fig. 1.3: Dos lentes cilíndricas pueden utilizarse para convertir un haz Hermite Gauss en uno LG con OAM. [32]

Generación de haces de TL El grupo Leiden introdujo un ardid técnico utilizando lentes cilíndricas para transformar un haz HG sin momento angular en uno del tipo LG que tiene momento angular orbital Fig. 1.3. Aunque este proceso es muy eficiente cada modo LG requiere un modo particular de un haz HG, lo que limita el rango de los modo LG que se pueden producir. Por lo tanto el método mas común para crear haces helicoidales ha sido el uso de hologramas diseñados por computadora. Este holograma se puede lograr grabando, sobre una pelicula fotográfica, el patrón de interferencia entre una onda plana y el haz que uno quiere conseguir.

Heteroestructuras excitadas por TL Los efectos de los vórtices ópticos en materiales han sido parcialmente explorados en los últimos años, en gran medida por Quinteiro y sus colaboradores nacionales e internacionales. Ellos han descrito varios nuevos fenómenos que a continuación menciono brevemente. El primer trabajo estudió la absorción de TL en semiconductores volumétricos (bulk) usando la ecuación de Schrödinger, y predijo la generación de corrientes eléctricas circulares [17]. Un mejoramiento de ese modelo se hizo usando segunda cuantificación [19] y finalmente se introdujo la interacción de Coulomb [14]. La absorción de TL en nanoestructuras condujo a la predicción de nuevas reglas de selección en QD [18] y de oscilaciones de Rabi no-verticales con producción de corrientes eléctricas en QR's cuando un haz de luz incide normalmente en el centro de la muestra [15]; esta teoría se extendió, asimismo, para la interacción con haces de luz descentrados [16]. Otros trabajos han estudiado los efectos sobre el grafeno [6] y quantum well's [21].

Objetivos En este estudio se pretende describir el efecto de autoinducción de las corrientes fotoinducidas por *twisted light* sobre un *quantum ring*. Se espera obtener un sistema de ecuaciones para describir la evolución de los estados de los electrones en el QR en tales condiciones y analizar con un enfoque perturbativo el régimen de baja excitación.

Capítulo 2

Formalismo Teórico

2.1 Modelo de bandas

En un cristal perfecto los iones están arreglados en una red periódica. Podemos asumir, siguiendo la idea de una teoría de Hartree-Fock o campo medio, que la influencia de este arreglo periódico de iones sobre un dado electrón puede expresarse como un potencial de red efectivo que contenga el campo medio del núcleo y del resto de los electrones.

En un semiconductor el arreglo periódico de los iones es similar al de un cristal perfecto. Es por esto que para su estudio resulta útil considerar el problema idealizado de un electrón en un potencial $U(\mathbf{r})$ que tenga la periodicidad de la red de Bravais correspondiente a esta configuración:

$$U(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}) = U(\boldsymbol{r}) \tag{2.1}$$

donde R es cualquier vector perteneciente a la red de Bravais.

Puesto que las dimensiones características de esta red corresponden al tamaño típico de la longitud de onda de de Broglie de un electrón libre en el modelo de Sommerfeld ($\sim 10^{-8} cm$), es necesario recurrir a una descripción cuántica para que los efectos de la periodicidad en el movimiento electrónico sean considerados. Consecuentemente se analiza un Hamiltoniano de la forma:

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})\right]\psi = \epsilon\psi \qquad (2.2)$$

donde ya se ha tenido en cuenta el potencial periódico que representa a los iones de la red. Electrones libres que obedecen esta ecuación y sujetos a un potencial periódico se conocen como electrones de Bloch.

Teorema de Bloch Se pueden obtener autoestados ψ del Hamiltoniano de un electrón 2.2 formados por una onda plana multiplicada por una función que tenga la misma periodicidad de la red de Braivais:

$$\psi_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.3}$$

donde se cumple que:

$$u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}) = u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.4}$$

para todo R perteneciente a la red de Bravais. Mencionaremos algunas de las consecuencias de este teorema:

El teorema de Bloch introduce un vector k (momento cristalino) que juega un rol similar al del vector de onda para el electrón libre, sin embargo, en este caso k no es proporcional al momento electrónico P. Esto es natural puesto que el Hamiltoniano ha perdido la simetría traslacional debido al potencial.

- El momento cristalino puede restringirse a la primera zona de Brillouin, ya que si éste estuviera fuera de la primera zona siempre podría escribirse como $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{K}$, donde \mathbf{K} es un vector de la red recíproca y \mathbf{k} se encuentra en la primera zona. Como $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 1$ para cualquier vector de la red recíproca podemos tomar tanto \mathbf{k}' como \mathbf{k} al describir un electrón de Bloch.
- El índice n aparece en el teorema de Bloch debido a que para un dado k existen muchas soluciones de la ecuación de Schroedinger. Si sustituimos en la ecuación de Shroedinger el autoestado de Bloch para ese valor fijo de k, la función $u_k(r)$ resulta de resolver:

$$H_{\boldsymbol{k}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \left\{\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{k}\right]^2 + U(\boldsymbol{r})\right\} u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{\boldsymbol{k}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$$
(2.5)

con la condición de contorno:

$$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}). \tag{2.6}$$

Éste puede ser visto como un problema de autovalores en un volumen finito por lo tanto esperamos una familia infinita de soluciones con autovalores espaciados discretamente y que se denominarán con el índice de banda n.

2.2 Potencial débil

Un estado de Bloch $|n\mathbf{k}\rangle$ se etiqueta por un índice discreto de banda n y un vector de onda cristalino \mathbf{k} , el cual, como dijimos, puede estar restringido a la primera zona de Brillouin de la red recíproca. Las funciones de Bloch raramente son conocidas en forma explícita, sin embargo, en el punto de mayor simetría de la primera zona de Brillouin (punto Γ), la manera en la que las funciones de Bloch cambian bajo la acción de las operaciones de simetría puede ser estudiada utilizando argumentos de teoría de grupos.

2.3 Masa efectiva

La relación entre la energía y el vector de onda para los portadores generalmente se puede aproximar, en la vecindad de los puntos extremos de las banda, por una forma cuadrática:

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = \epsilon_b + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} k_\mu (\boldsymbol{M}^{-1})_{\mu\nu} k_\nu \qquad (2.7)$$

Aquí ϵ_b es la energía en el mínimo de la banda b y se ha tomado el origen del espacio de momentos en este punto. Puesto que el tensor M^{-1} es real y simétrico se puede encontrar un conjunto ortogonal de ejes principales para este punto mínimo y expresar la energía en términos de estos:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_b + \hbar^2 \left(\frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} \right)$$
(2.8)

Por lo tanto las superficies de energía constante alrededor del punto extremo tienen formas elipsoidales y generalmente se especifican dando sus ejes principales, las tres "masas efectivas" y la posición del elipsoide en el espacio de momentos.[3]

2.4 Estructura de banda de materiales compuestos III-V

2.4.1 Bandas *heavy-hole* y *light-hole* en semiconductores

La estructura de banda de estos materiales puede parecer compleja a primera vista, pero a las temperaturas típicas que nos interesan $(0^0 K - 300^0 K)$ el único fenómeno relevante, la excitación térmica de electrones y *holes* o la absorción óptica, ocurre cerca del máximo de la banda de valencia y del mínimo de la banda de conducción.

En general encontramos convergencia de los máximos de las bandas de valencia en el centro de la zona de Brillouin (punto - Γ). Estas bandas se conocen como bandas *heavy-hole* y *light-hole*; la mas plana, con un mayor valor de $(d^2E/dk^2)^{-1}$, es la banda *heavy-hole*, y la de mayor pendiente es la banda *light-hole*. Los *heavy-holes* tienden a dominar las propiedades del extremo de la banda de valencia; su mayor masa efectiva significa que su densidad de estados será mucho mayor que aquella de los *light-holes*.

2.4.2 Semiconductores direct band gap III-V y II-VI

Semiconductores compuestos, como el GaAs y el InSb, se conocen como semiconductores III-V porque son combinaciones de elementos de los grupos III y V de la tabla periódica. En forma similar semiconductores del tipo (Cd,Hg)Te son conocidos como II-VI. Muchos semiconductores III-V y II-VI tienen aplicaciones tecnológicas, usualmente como emisores o detectores de radiación electromagnética. Es importante examinar su estructura de bandas y sus propiedades para ver por qué son utilizados para estos propósitos. Una de las propiedades fundamentales es que la energía mínima de *gap* en estos materiales es directa, de manera tal que las transisiones ópticas con $\Delta k \approx 0$ pueden ocurrir.

Puntos Generales

La Fig. 2.1 muestra esquemáticamente la estructura de bandas de un típico semiconductor III-V de *band gap* directo, allí se pueden notar:

En el extremo de la banda de valencia están presentes las banda heavy – hole y la light – hole.



Fig. 2.1: Estructura de bandas de un semiconductor compuesto III-V cerca del centro de la BZ

Material	$E_{\rm g}$	$m_{ m c}^{*}$	$m_{ m lh}^*$	$m_{ m hh}^{st}$
GaAs	1.52	0.067	0.082	0.45
InAs	0.42	0.023	0.025	0.41
InSb	0.24	0.014	0.016	0.40

Fig. 2.2: Energías de gap (en eV) y masas efectivas (en unidades m_e) de un típico semiconductor III-V.

- El gap que separa el punto mas alto de la banda de valencia y el mas bajo de la de conducción es directo (ocurre para el mismo valor de k).
- Justo debajo del máximo de la banda de valencia hay otra banda conocida como la banda *spin-orbit split-off* designada como Γ₇ en el centro de la zona de Brillouin.
- Para la mayoría de las finalidades prácticas es necesario considerar solo las relaciones de dispersión electrónicas cercanas al máximo de la banda de valencia y el mínimo de la de conducción.



Fig. 2.3: Esquema de una heterojuntura entre dos redes perfectas

La tabla 2.2 muestra masas efectivas en los bordes de banda para tres ejemplos, observar que:

- La masa efectiva de los light hole cumple que es aproximadamente igual a la masa efectiva del electrón (banda de conduccion) o sea $m_{lh}^* \approx m_c^*$.
- m_c^* y m_{lh}^* son relativamente proporcionales a E_g .
- La masa efectiva de heavy hole, m_{hh}^* , es una cantidad prácticamente independiente del material.

El hecho de que semiconductores de mayor *band-gap* tengan mayores masas efectivas para la banda de conducción y para la banda *light-hole* es una característica bastante general de los semiconductores y aislantes.[26]

2.5 Función de onda en heteroestructuras

Es posible, experimentalmente, a través de métodos avanzados como el crecimiento epitaxial, obtener interfases entre dos semiconductores planos a una escala monoatómica. Este tipo de interfase puede representarse como un salto de potencial dependiente de la posición, como el de la Fig. 2.3, aquí el electrón situado a la izquierda experimenta un potencial (*one-electron potential*) correspondiente al material perfecto B, mientras que el que se encuentra a la derecha experimenta un potencia correspondiente a una muestra pura del tipo A. En la práctica a este tipo de estructuras se las denomina *Quantum Wells*, donde los electrones estan confinados y la traslación en el plano perpendicular a la dirección de confinamiento es libre.

De esta manera es posible realizar microestructuras cuyas caracteristicas electrónicas y ópticas se apartan significativamente de aquellas del *Bulk*. En estas estructuras lo electrones de energías mas bajas estan confinados en una o mas direcciones dentro de una región L_c , la cual continua siendo considerablemente mas grande que la constante de red pero suficientemente pequeña como para que la función de onda envolvente del electrón se cuantifique. Estas estructuras se llaman mesoscópicas ya que la longitud de confinamiento L_c es un valor intermedio entre la constante microscópica de la red y la extención del trozo de cristal.[4]

2.6 Aproximación de la función envolvente

Si en este tipo de materiales consideramos que el confinamiento es producido por una perturbación $W(\mathbf{r})$ del potencial periódico $U(\mathbf{r})$ y suponiendo resuelta la ecuación de Schrodinger para el cristal sin perturbar, buscamos resolver el problema perturbado:

$$[H + W(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$
(2.9)

si entonces introducimos en la última ecuación la expansión:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n,\mathbf{k}} F_n(\mathbf{k}) \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$
(2.10)

y luego multiplicamos por $\psi^*_{n' \pmb{k}'}(\pmb{r})$ e integramos sobre \pmb{r} obtenemos:

$$\sum_{n,\boldsymbol{k}} \left[\left(E_n(\boldsymbol{K}) - E \right) \delta_{n\boldsymbol{k},n'\boldsymbol{k}'} + W_{n\boldsymbol{k},n'\boldsymbol{k}'} \right] F_n(\boldsymbol{k}) = 0$$
(2.11)

donde $W_{n\mathbf{k},n'\mathbf{k}'}$ son los elementos de matriz de la perturbación. Podemos simplificar estos elementos utilizando la expansión de Fourier de $W(\mathbf{r})$ y obtener la expresión

$$W_{n\boldsymbol{k},n'\boldsymbol{k}'} = (2\pi)^3 \sum_{\boldsymbol{K}} W(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{K}) C_{n\boldsymbol{k}}^{n'\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{K})$$
(2.12)

con $C_{n\mathbf{k}}^{n'\mathbf{k}'} = \frac{1}{V_0} \int_{CU} d^3 r e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} u_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ conocida como integral de Bloch, donde la integración se realiza sobre la celda unidad cuyo volumen es V_0 .

Si asumimos que los coeficientes $F_n(\mathbf{k})$ solo toman valores significativos para pequeños valores de \mathbf{k} podemos considerar solo estados que esten cerca del mínimo no degenerado Γ -mínimo y por lo tanto los elementos de matriz del potencial quedan:

$$W_{n'\boldsymbol{k}',n\boldsymbol{k}} \approx W(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})\delta_{nn'}$$
(2.13)

Esto implica que dentro de esta aproximación la perturbación no mezcla estados de bandas vecinas sino solo estados de diferente \mathbf{k} cercanos al Γ -minimo. Con los resultados anteriores para los elementos de matriz la ecuación de movimiento 2.11 se puede escribir:

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \left[(E_n(\boldsymbol{k}) - E) \delta_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'} + W(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}) \right] F_n(\boldsymbol{k}) = 0$$
(2.14)

Simplificación de la función de onda Ahora la función de onda en el espacio real se puede escribir:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} F_n(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$$
(2.15)

Como el potencial perturbador es macroscópico solo vectores \boldsymbol{k} pequeños son importantes y podemos realizar la aproximación $u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \approx u_{n0}$ y obtener para la función de onda:

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}) = u_{n0}(\boldsymbol{r}) \sum_{\boldsymbol{k}} F_n(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = u_{n0}(\boldsymbol{r}) F_n(\boldsymbol{r})$$
(2.16)

donde en el último paso se interpretó la suma sobre \boldsymbol{k} como la serie de Fourier de la función en el espacio real $F_n(\boldsymbol{r})$. Esta función es macroscópica comparada con el período de la red y se llama función envolvente de la función de onda.

Aproximación de dispersión Aproximaremos la relación de dispersión asumiendo pequeños valores de \mathbf{k} . Cerca del Γ -mínimo tenemos $E_b(\mathbf{k}) = E_b + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ donde m^* es la masa efectiva definida en 2.2 para la banda b. Con esta simplificación la ecuación de movimiento para los electrones queda:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*}k^2F_b(\boldsymbol{k}) + \sum_{\boldsymbol{k}'}W(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')F_b(\boldsymbol{k}') = (E-E_b)F_b(\boldsymbol{k}).$$
(2.17)

Esta ecuación determina las componentes de Fourier de la función envolvente $F_b(\mathbf{r})$. Para transformar la ecuación al espacio real observamos que el primer término corresponde a la segunda derivada de la función envolvente en el espacio real y el segundo término es una integral de convolución que se transforma en el producto de las correspondientes funciones en el espacio real. Obtenemos, entonces, la siguiente ecuación diferencial para determinar la función envolvente $F_b(\mathbf{r})$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta + E_b + W(\boldsymbol{r})\right]F_b(\boldsymbol{r}) = EF_b(\boldsymbol{r})$$
(2.18)

que es la misma ecuación 2.9 pero aquí el potencial periódico de red oculto en H_0 ha desaparecido y la masa libre del electrón ha sido reemplazada por la masa efectiva de los electrones de conducción. Si introducimos la energía local del borde de banda $\tilde{E}_b(\mathbf{r}) = E_b + W(\mathbf{r})$ podemos considerar esta función como un potencial efectivo en el cual se mueven los electrones de la banda b.[8]

2.7 *TL* y función de onda de los portadores

Funciones de onda: Aplicando la aproximación de la función envolvente se puede determinar la función envolvente que corresponde a los estados de Bloch para los electrones cerca del punto Γ , que junto a las funciones de espín y microscópicas de Bloch forman los autoestados del Hamiltoniano libre \mathbf{H}_0 para los portadores en el QR:

$$\Psi_{bm}(\mathbf{r}) = \left[\Phi_m(\phi)R(\rho)Z(z)\right]u_b(\mathbf{r})\chi\tag{2.19}$$

En donde:

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} ,$$

$$R(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 d}} \sin\left[\frac{\pi}{d}(\rho - \rho_0 + \frac{d}{2})\right] ,$$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos\left[\frac{\pi}{h}(z - z_0)\right] ,$$
(2.20)

aquí $u_b(\mathbf{r})$ son las funciones microscópicas, bajo la aproximacción $u_{bm} \approx u_{b0}$, que llevan la misma periodicidad que el semiconductor y χ representa a las funciones de onda de espín.[24]

2.7.1 Representación matemática y campo eléctrico asociado a la TL

Como ya se dijo los haces de TL se puede encontrar con varios perfiles de intensidad gobernados por funciones del tipo Bessel o Lagerre. Nosotros trabajaremos con funciones del tipo Bessel pero facilmente se puede adaptar el análisis para otro tipo de funciones. El vector potencial para la TL de este tipo se escribe como:

$$A_{ql\pm}(r,t) = A_0 e^{i(q_z z - \omega t)} [\hat{\epsilon_{\pm}} J_\ell e^{i\ell\phi} \mp i\hat{z} \frac{q_r}{q_z} J_{\ell\pm 1} e^{i(\ell\pm 1)\phi}] + cc,$$

$$\boldsymbol{\epsilon_{\pm}} = \hat{x} + i\sigma\hat{y},$$

$$\frac{q_r}{q_z} = \alpha,$$

$$\sigma = 1, -1,$$

$$q_r \ll q_z,$$

$$(2.21)$$

llamo

•

$$F_{q_r\ell} = A_0 J_\ell(q_r r)$$
$$A_{q\ell}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\epsilon} F_\ell(q_r r) e^{i(q_z z - \omega t)} e^{i\ell\phi} + c.c.$$
(2.22)

donde se ha considerado $\alpha \ll 1$, esto corresponde a lo que se conoce como aproximación paraxial. Podemos a partir de esta expresión, y usando $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$, derivar el campo eléctrico de TL que será de utilidad luego:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = i\omega\boldsymbol{\epsilon}F_{\ell}(q_{r}r)e^{i(q_{z}z-\omega t)}e^{i\ell\phi} - i\omega\boldsymbol{\epsilon}^{*}F_{\ell}(q_{r}r)e^{-i(q_{z}z-\omega t)}e^{-i\ell\phi}$$

= $\mathbf{E}^{+} + \mathbf{E}^{-}.$ (2.23)

En coordenadas cartesianas tenemos el campo de TL queda:

$$E_x = -F_{\ell}(q_r r)\omega \sin(q_z z - \omega t + \ell \phi),$$

$$E_y = -F_{\ell}(q_r r)\omega\sigma \cos(q_z z - \omega t + \ell \phi),$$

$$E_z = F_{\ell+\sigma}(q_r r)\sigma\omega\alpha \cos[q_z z - \omega t + (\ell + \sigma)\phi].$$
(2.24)

2.8 Rotating-Wave Approximation (RWA)

El modelo mas sencillo de interacción entre luz y materia consiste en un Hamiltoniano de interacción formado por la energía potencial de un dipolo eléctrico cuando este está situado dentro del haz de luz. El dipolo en este modelo representa un átomo de la materia que interactua con el campo electromagnético. El correspondiente Hamiltoniano se escribe como:

$$H_I = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t). \tag{2.25}$$

este Hamiltoniano es real y de paridad impar entonces, si solo se consideran dos niveles de excitación a y b con energías ϵ_a y ϵ_b , respectivamente, tendremos:

$$\langle a|H_I|a\rangle = \langle b|H_I|b\rangle = 0 \tag{2.26}$$

y por lo que en general podemos escribir elementos no nulos del tipo:

$$\langle a|H_I|b\rangle = \mathbf{d}_{ab}\cos(\omega t) \tag{2.27}$$

el dipolo **d**, puramente no diagonal en la base $|a\rangle$, $|b\rangle$, se puede escribir:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{ab} |b\rangle \langle a| + \mathbf{d}_{ab}^* |a\rangle \langle b| = \mathbf{d}_+ + \mathbf{d}_-$$
(2.28)

 con

$$\mathbf{d}_{+} = \mathbf{d}_{ab} \wp_{+}$$

$$\mathbf{d}_{-} = \mathbf{d}_{ab}^{*} \wp_{-}$$

$$\wp_{+} = |b\rangle \langle a|$$

$$\wp_{-} = |a\rangle \langle b|.$$

$$(2.29)$$

Los operadores \wp_+ y \wp_- son, respectivamente, los operadores de subida y bajada de *a* hacia *b* y de *b* hacia *a*. Podemos reescribir el Hamiltoniano de interacción H_I como una función de \wp_+ , \wp_- y de las exponenciales $e^{-i\omega t}$ y $e^{+i\omega t}$. Estas exponenciales provienen del $\cos(\omega t)$ y estan asociadas a procesos de aniquilación y de creación de un fotón, respectivamente como se ve en teoría de campos:

$$-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\hbar\Omega(\wp_+ e^{-i\omega t} + \wp_- e^{i\omega t} + \wp_- e^{-i\omega t} + \wp_+ e^{i\omega t})$$
(2.30)

donde usamos $\Omega = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0/\hbar$, la frecuencia de Rabi que caracteriza la intensidad del acoplamiento entre el átomo y el campo electromagnético. Los primeros dos términos dentro de los paréntesis describen procesos donde el átomo pasa del nivel a al nivel, de mayor energía, b a través de la absorción de un fotón o pasa de b a aemitiendo un fotón. Estos procesos son resonantes cerca de $\omega = (\epsilon_b - \epsilon_a)/\hbar = \omega_0$ y mucho mas importantes que los procesos no resonantes asociados con los últimos dos términos de la ecuación 2.30. En la representación de interacción se puede notar que los últimos términos corresponden a variaciones temporales mucho mas rápidas que los primeros produciendo promedios nulos en períodos de tiempo cortos. Despreciar estos últimos términos es lo que se conoce como rotating wave approximation (RWA) [5].

2.9 Aproximación MQS

Aproximación cuasiestática

Para poder obtener una expresión para el vector potencial A_d utilizaremos la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}$$
(2.31)

las condiciones en donde podemos despreciar el término de desplazamiento son aquellas donde el sistema en cuestión tiene dimensiones despreciables frente a la longitud de onda asociada a las variaciones de los campos. Una forma alternativa es ver a la aproximación como el resultado de considerar que las variaciones en los campos no toman tiempo alguno en llegar a otro punto del sistema considerado ($c \to \infty$). Bajo esta aproximación los campos se propagan, entonces, instantáneamente. Ahora bien, como la obtención del potencial será a través de una integración de las distribuciones de corriente sobre el QR las dimensiones de interes aquí son las dimensiones del propio QR, a saber < 150nm. Por lo tanto para frecuencias ópticas la aproximación es válida si consideramos un QR cuyo radio satisface r << 500nm.

Dentro de este régimen es posible considerar tres modelos, electrocuasiestático (EQS), magnetocuasiestático (MQS), y el modelo de Darwin. El modelo EQS incluye efectos capacitivos pero no inductivos, el MQS incluye inductivos pero no capacitivos, mientras que el modelo de Darwin incluye ambos efectos. En nuestro estudio para el caso de las corrientes asociadas a las poblaciones tenemos valores de frecuencia del orden de $10^{14}s^{-1}$ (frecuencias de Rabi) [24], mientras que para las corrientes de coherencia tenemos frecuencias ópticas, con lo cual es posible aplicar la aproximación cuasiestática para una variedad de QRs que satisfacen las condiciones.

Como dijimos anteriormente queremos tener en cuenta los efectos inductivos que los campos secundarios producen sobre los portadores, es por esto que optamos por utilizar el modelo MQS para determinar los campos dinámicos.

2.10 Transformaciones de gauge

Potencial vector compuesto por términos con diferentes elecciones de gauge

Para clarificar si es legítimo o no trabajar con potenciales escritos en distintos gauges escribo las siguientes ecuaciones del electromagnetismo clásico que me permiten obtener los campos partiendo de los potenciales:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} \tag{2.32a}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.32b}$$

Consideremos ahora que estos potenciales se deben a distintas contribuciones, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ y $\phi = \phi_1 + \phi_2$, donde cada potencial vector esta asociado a un potencial escalar por conveniencia, por ejemplo a aquellos relacionados con cargas distantes que dan origen a la TL los llamamos \mathbf{A}_1 y ϕ_1 .

Si ahora consideramos que estos potenciales son la adición de diferentes fuentes (provenientes de diferentes corrientes o densidades de carga) podemos escribir

$$\mathbf{E} = -\nabla \left[\phi_1 + \phi_2\right] - \frac{1}{c} \partial_t \left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\right]$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\right]$$
(2.33)

si cada potencial se somete a una trasformación de gauge dominada por la función escalar χ_i asociando un par potencial escalar y vectorial con esta, podemos escribir

$$\mathbf{A}'_{i} = \mathbf{A}_{i} + \nabla \chi_{i}$$

$$\phi'_{i} = \phi_{i} - \frac{1}{c} \partial_{t} \chi_{i}$$
 (2.34)

reemplazando estas transformaciones en las expresiones de los campos obtenemos

$$\mathbf{E} = -\nabla \left[\phi_1 + \phi_2 - \frac{1}{c} \partial_t \chi_1 - \frac{1}{c} \partial_t \chi_2 \right] - \frac{1}{c} \partial_t \left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \nabla \chi_1 + \nabla \chi_2 \right]$$
$$= -\nabla \phi + \frac{1}{c} \nabla \partial_t \chi - \frac{1}{c} \partial_t \nabla \chi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \nabla \chi_1 + \nabla \chi_2 \right] = \nabla \times \left[\mathbf{A} + \nabla \chi \right] = \nabla \times \mathbf{A}$$
(2.35)

Lo que corresponde a una única transformación de gauge definida por la funcion $\sum_i \chi_i$. Esto nos autoriza a realizar transformaciones de gauge diferentes a distintas partes del potencial, siempre que provengan de fuentes independientes, puesto que será posible expresar estas transformaciones como una única transformación sobre el campo total.

2.11 Segunda cuantificación de fermiones y ecuaciones dinámicas

En segunda cuatificación se utiliza una descripción de los estados que incorpora mas naturalmente la indistinguibilidad de las partículas. En lugar de enfocarse en la función de onda de cada partícula individualmente, los estados se caracterizan por un conjunto de estados de una partícula $\{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$ que se encuentran ocupados mientras que el resto de los estados de una partícula de la base se encuentran desocupados. En el espacio de Fock se introducen los operadores de creación, para fermiones, que aumentan el número de particulas en un determinado estado (estados de una partícula) en 1.

$$a_{\lambda_1}^{\dagger}|0...0..1...0...1...0...(...)^{\lambda_N}\rangle = |0...1...0...1...0...(...)^{\lambda_N}\rangle, \qquad (2.36)$$

mientras que la creación en un estado de partícula simple que ya está ocupado da cero,

$$a_{\lambda_2}^{\dagger}|0...\overset{\lambda_1}{0}...0...\overset{\lambda_2}{1}...0...(...)\overset{\lambda_N}{1}\rangle = 0.$$
 (2.37)

El operador de aniquilación a_{λ} , que disminuye el número en 1, es el hermítico conjugado de a_{λ}^{\dagger} .

El complicado requerimiento de antisimetrización para la función de onda queda reducido a las simples relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación:

$$\{a_{\alpha}, a_{\beta}\} = a_{\alpha}a_{\beta} + a_{\beta}a_{\alpha} = 0 \qquad \left\{a_{\alpha}, a_{\beta}^{\dagger}\right\} = \delta_{\alpha,\beta} \qquad (2.38)$$

El producto $\hat{n}_{\lambda} = a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$ da como resultado el número de ocupación de los orbitales o espín-orbitales $|\lambda\rangle$:

$$a_{\lambda}^{\dagger}a_{\lambda}|\left\{n_{\alpha}\right\}\rangle = n_{\lambda}|\left\{n_{\alpha}\right\}\rangle \tag{2.39}$$
2.11.1 Operadores lineales y bilineales

En segunda cuantización los operadores se escriben en términos de operadores de creación y aniquilación. Los operadores lineales \mathbf{v}^{\dagger} tienen asociado un vector \mathbf{v} de componentes v_i de manera que:

$$\mathbf{v}^{\dagger} = \sum_{i} v_{i} a_{i}^{\dagger} \tag{2.40}$$

En cambio, todo operador bilineal \mathbf{A} tiene una matriz asociada de elementos A_{ij} de forma que:

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \sum_{i,j} a_i^{\dagger} A_{ij} a_j \tag{2.41}$$

Haciendo un cambio de base podemos definir al operador de campo que es un operador lineal, este es una combinación de los operadores de creación de los distintos estados de la base de una partícula:

$$\psi^{\dagger}(\mathbf{r},t) = \sum_{i} \lambda_{i}(\mathbf{r}) a_{i}^{\dagger}(t) \qquad (2.42)$$

Este operador, aplicado al vacío, crea una partícula en la posicíon \mathbf{r} a tiempo t. Se puede definir también al operador densidad a partir del operador de campo, cuya integral en el espacio es el operador número de partículas:

$$\rho(\mathbf{r}) = \psi^{\dagger}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \sum_{i,j} a_i^{\dagger} a_j \lambda_i^*(\mathbf{r})\lambda_j(\mathbf{r}), \qquad (2.43)$$

$$N = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) = \sum_i a_i^{\dagger} a_i. \qquad (2.44)$$

Un ejemplo de operador bilineal son los operadores de una partícula. Un Hamiltoniano de una partícula en presencia de un potencial externo $U(\mathbf{r})$ se escribe:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}). \qquad (2.45)$$

Para escribir este Hamiltoniano en segunda cuantificación se debe hacer la siguiente integral:

$$H = \int d^3 r \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) H_0 \psi(\mathbf{r}) = \sum_{i,j} a_i^{\dagger} a_j H_{ij}$$
(2.46)

con $H_{i,j} = \int d^3 \lambda_i^{\dagger}(\mathbf{r}) H_0 \lambda_j(\mathbf{r})$. Y este procedimiento puede emplearse para cualquier operador bilineal, que nos permite obtener un operador de un cuerpo en segunda cuantificación:

$$O = \int d^3 r \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) O \psi(\mathbf{r}) = \sum_{i,j} a_i^{\dagger} a_j O_{ij}.$$
 (2.47)

2.11.2 Ecuaciones de movimiento

En la representación de Heisenberg donde los estados son independientes del tiempo y los operadores cumplen con:

$$\hat{O}(t) = e^{(i\frac{\hat{H}t}{\hbar})}\hat{O}(0)e^{(-i\frac{\hat{H}t}{\hbar})},$$
(2.48)

la dinámica del sistema esta contenida en la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{O}(t)]$$
(2.49)

Se puede determinar la dinámica de cualquier observable a través del operador densidad. En particular, para observables asociados con operadores de un cuerpo la dinámica estará dada por el valor medio (tomado sobre un estado inicial constante puesto que estamos en la representación de Heisenberg) de la matriz densidad:

$$\rho_{i,j}(t) = \langle \lambda_0 | \hat{\rho}_{i,j} | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | \hat{a}_i^{\dagger}(t) \hat{a}_j(t) | \lambda_0 \rangle.$$
(2.50)

Utilizando la ecuación de Heisenberg con este operador obtenemos la llamada ecuación de Liouville.

Capítulo 3

Corrientes sobre un QR excitadas por TL considerando el campo autoinducido

3.1 Esquema de trabajo

En la Fig. 3.1 presentamos esquemáticamente el programa a seguir para estudiar el sistema QR-TL. Para describir la dinámica de los electrones en el anillo a través de la evolución del operador densidad primero habrá que contemplar en el Hamiltoniano el campo de TL y la interaccción con el campo autoinducido, que llamaremos campo dinámico A_d . Este último calculado en la aproximación MQSdependerá a su vez de los elementos de matriz del operador densidad ($\hat{\rho}$) mediante la expresión de la corriente presente en el anillo. Así finalmente haciendo uso de las ecuaciones de Heisemberg obtenemos las ecuaciones no lineales que describen la dinámica de los portadores en el sistema.



Fig. 3.1: Esquematización del plan de trabajo

3.2 Hamiltoniano total del sistema

Vamos a considerar transiciones entre las bandas de valencia heavy-hole y la de conducción. Para la banda de valencia el momento angular orbital (OAM) J = 1 de los estados tipo-p mas el espín del electrón dan como resultado un momento angular total $J_T = 3/2$ con proyeción $M = \pm 3/2$, estos estados se designan $|3/2, \pm 3/2\rangle$. Los estados de la banda de conducción, siendo estos tipo-s (OAM nulo) corresponden a $|1/2, \pm 1/2\rangle$. Vamos a considerar un modelo simplificado de dos bandas con el que podemos capturar las características principales de un semiconductor siempre que estemos bajo las siguientes dos condiciones: i) que tensiones internas, como las que ocurren en las heteroestructuras, separen las bandas de valencia heavy-hole y light-hole; ii) que se considere solo polarización circular para la luz de modo que esta producirá transiciones de solo un tipo de spin electrónico entre las bandas de valencia y conducción. Por ejemplo, luz circularmente polarizada con fotones de spin -1 inducirá transiciones entre los estados $|3/2, 3/2\rangle$ y $|1/2, 1/2\rangle$. Vamos a analizar el caso $\hbar \omega > E_g$ donde ω corresponde a la frecuencia angular de la luz. En este régimen la creación de excitones es despreciable y podemos considerar solamente los portadores libres transferidos por la excitación desde la banda de valencia a la de conducción. La contribución a orden mas bajo de la interacción entre luz, tratada clásicamente, y electrones tratados como objetos cuánticos, se determina utilizando el Hamiltoniano de acoplamiento mínimo correspondiente al sistema formado por el QR, el campo autoinducido \mathbf{A}_d y el campo electromagnético proveniente de la $TL \mathbf{A}_{tl}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m_e} \{ \mathbf{P} - q[\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_{tl}(\mathbf{r}, t)] \}^2 + \mathbf{V}(\mathbf{r})$$
(3.1)

donde m_e es la masa efectiva del electrón y q su carga de signo negativo. Este Hamiltoniano no tiene una única forma de ser escrito puesto que es una función de los potenciales electromagnéticos, los cuales pueden escribirse de diferentes maneras relacionadas por una transformación de *gauge*. En este punto parecería conveniente realizar una transformación que nos permita obtener un potencial vector transformado nulo para que el momento $\hat{\mathbf{p}}$ conjugado del operador posición \mathbf{r} resulte idéntico al momento mecánico de los electrones en el QR y así poder obtener los elementos de matriz del Hamiltoniano fácilmente. Sin embargo esto no es posible puesto que nos importa especialmente la contribución magnética de \mathbf{A}_d y si encontraramos una función χ cuyo gradiente fuera $-\mathbf{A}_d$ encontraríamos que el campo de autoinducción sería $\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \chi$ que por identidades de cálculo tiene resultado nulo. Por otro lado, lejos de la singularidad del haz, es posible realizar una transformación de *gauge* [21] que anule independientemente la parte del vector potencial proveniente de la TL con una función de transformación de la forma:

$$\chi(\mathbf{r},t) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_{tl}(\mathbf{r},t) \tag{3.2}$$

luego aplicando esta transformación de gauge a los campos de TL en 3.1 obtenemos:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m_e} \left[\mathbf{P} - q \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \right]^2 + \mathbf{V}(\mathbf{r}) - q \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl}(\mathbf{r}, t)$$
(3.3)

Aquí cabe hacer una observación importante, hemos realizado una transformación de gauge sobre uno de los campos manteniendo el campo \mathbf{A}_d en el gauge de Coulomb, en 2.10 vimos que tales transformaciones pueden ser consideradas como una transformación de gauge ordinaria sobre el campo total.

Como las funciones de onda de Bloch del material son conocidas, queremos una expresión del Hamiltoniano de interacción dinámica útil para poder trabajar, por lo que deseamos escribir el operador Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_I \tag{3.4}$$

donde hemos llamado \mathbf{h}_{I} a la parte del Hamiltoniano que contiene las interacciones con el campo electromagnético y \mathbf{H}_{0} al Hamiltoniano del material. Para obtener una expresión con esta forma debemos trabajar sobre el primer término de la Ec. 3.3:

$$[\mathbf{P} - q\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)]^2 = \mathbf{P}^2 - q\{\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)\} + q^2 \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)^2$$
(3.5)

si tenemos en cuenta que el conmutador de P con A cumple:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_x \hat{i} + \hat{P}_y \hat{j} + \hat{P}_z \hat{k}, \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{P}_x, \hat{A}_x(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{P}_y, \hat{A}_y(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{P}_z, \hat{A}_z(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix},$$

$$= -i\hbar\partial_x \hat{A}_x(\boldsymbol{r}) - i\hbar\partial_y \hat{A}_y(\boldsymbol{r}) - i\hbar\partial_z \hat{A}_z(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{r}), \qquad (3.6)$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es cualquier campo clásico, promovido a operador, que puede depender del tiempo. Si este campo se encuentra expresado en el *gauge* de Coulomb, el conmutador es nulo [27], entonces el término de la Ec. 3.5 puede escribirse como:

$$\mathbf{P}^2 - 2q\{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)\} + q^2 \mathbf{A}_d^2(\mathbf{r}, t).$$
(3.7)

Usando la Ec. 3.7 dentro de la Ec. 3.3 podemos escribir el Hamiltoniano completo de la siguiente manera:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} - \frac{q}{m_e} \left[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{q^2}{2m_e} \mathbf{A}_d^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{r}) - q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl}(\mathbf{r}, t)$$
(3.8)

Luego despreciando el término cuadrático, ya que para campos moderados esperamos que el término lineal en \mathbf{A}_d sea mucho mas significativo, podemos escribir este Hamiltoniano como:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} + \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \frac{q}{m_e} [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)] - q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl}(\mathbf{r}, t).$$
(3.9)

Esta expresión ya adquiere la forma buscada en 3.4 donde:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \tag{3.10}$$

$$\mathbf{h}_{I} = -\frac{q}{m_{e}} \{ \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_{d}(\mathbf{r}, t) \} - q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl}(\mathbf{r}, t)$$
(3.11)

ahora es posible identificar independientemente términos correspondientes a la interacción con el campo externo y el inducido, los que llemaremos \mathbf{h}_{tl} y \mathbf{h}_d respectivamente.

3.3 Término de interacción con la TL $(q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{tl})$

Escribimos este término convenientemente para luego poder aplicar la RWA:

$$h_{tl} = -q\mathbf{E}_{tl} \cdot \mathbf{r}$$

= $-q(\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-) \cdot \mathbf{r}$ (3.12)

3.3.1 Elementos de matriz del operador de interacción asociado a la TL $\langle b'm' | h_{tl} | bm \rangle$

Como se dijo anteriormente ya contamos con las autofunciones del Hamiltoniano asociado al QR cuando no existen campos externos ni dinámicos y utilizaremos estos estados como base del espacio de estados para representar a los operadores y poder finalmente determinar la dinámica del sistema,

$$\Psi_{bm}(\mathbf{r}) = \left[\Phi_m(\phi)R(\rho)Z(z)\right]u_b(\mathbf{r})\chi.$$
(3.13)

a continuación obtenemos los elementos de matriz del operador en cuestión en el espacio de Hilbert para esta base de estados:

$$\langle b'm' \mid h_{tl} \mid bm \rangle = -q \langle b'm' \mid \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \mid bm \rangle$$

$$= -q \int \Psi_{b'm'}^*(\mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})\Psi_{bm}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

$$= -q \sum_c \Phi_{m'}^*(\Phi_c)\Phi_m^*(\Phi_c) \mid R(R_c) \mid^2 \mid Z(z_c) \mid^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}_c, t)|_{\rho_{0}, z_{0}}$$

$$\cdot [\mathbf{R_c} \int_a dr'^3 u_{b'}^*(r')u_b(r') + \int_a dr'^3 u_{b'}^*(r')\mathbf{r}'u_b(r')]$$
(3.14)

aquí se hizo uso de un procedimiento estandar en materia condensada que consiste en reemplazar la integral por una sumatoria sobre celdas para las funciones que varian lentamente sobre estas y una integral dentro de la celda unidad para las que que varian rápidamente en ella teniendo en cuenta $u_b(\mathbf{r}) = u_b(\mathbf{R}_c + \mathbf{r}')$ donde \mathbf{R}_c y \mathbf{r}' son la posición de una celda unidad y la posición de un electrón dentro de esta, respectivamente, como se ilustra en la Fig. 3.2; R_c , z_c y Φ_c son las coordenadas correspondientes a la posición de la celda de posición \mathbf{R}_c . Debido a la paridad de las funciones periódicas $u_{0b'}$ en la integral de $\mathbf{r}_{bb'}$ solo son relevantes los procesos interbanda, los cuales sabemos que pueden ser excitados por la frecuencia elegida para la TL. En resumen solo vamos a considerar transiciones producidas directamente por la TL del tipo $v \to c$ and $c \to v$, por lo tanto el término con \mathbf{R}_c es descartado. Estamos suponiendo que $\mid m' - m \mid$ es pequeño y que la constante de celda unidad cumple $\frac{\alpha}{\rho_0} \ll 1 \operatorname{con} \rho_0$ el radio del QR. La parte angular de la función envolvente y la dependencia espacial del campo eléctrico de la TL pueden considerarse constante dentro de una celda, escribimos entonces la integral como una suma sobre celdas unidad multiplicada por la integral, dentro de la celda, de las funciones que varian rápidamente en el espacio y son periódicas.



Fig. 3.2: esquema de las coordenadas dentro de la celda unidad

Ahora considerando que la sumatoria se lleva a cabo sobre todas las celdas unidad del QR y dada la gran cantidad de estas podemos considerarla como una suma de Riemann y asi reescribirla nuevamente como una integral. Con estos resultados podemos expresar los elementos 3.14 como:

$$\langle b'm' \mid h_{tl} \mid bm \rangle = -q \int_{QR} \Phi_{m'}^*(\Phi_c) \Phi_m(\Phi_c) \mid R(R_c) \mid^2 \mid Z(z_c) \mid^2 \\ \times \left[\mathbf{E}^+(\mathbf{R}_c, t) + \mathbf{E}^-(\mathbf{R}_c, t) \right] \mid_{\rho_0, z_0} \cdot \mathbf{r}_{b'b} R_c d\Phi_c dR_c dZ_c \\ = -i\omega F_\ell(q_\ell \rho_0) \frac{q_e}{2\pi} \int_{QR} e^{i(m-m')\Phi_c} \mid R(R_c) \mid^2 \mid Z(z_c) \mid^2 \\ \times \left[\boldsymbol{\epsilon} e^{i(q_z z_0 - \omega t)} e^{i\ell\Phi_c} + \boldsymbol{\epsilon}^* e^{-i(q_z z_0 - \omega t)} e^{-i\ell\Phi_c} \right] \cdot \mathbf{r}_{b'b} R_c d\Phi_c dR_c dZ_c$$
(3.15)

También se definió el elemento de matriz interbanda del operador posición $\mathbf{r}_{b'b} = 1/a^3 \int_{a^3} dr^3 u_{b'}^*(r) \mathbf{r} u_b(r)$. En las transiciones que estamos considerando no hay cambio de estados en las variable z ni r por lo que las envolventes macroscópicas luego de la integración aportan un factor 1 gracias a la normalización de estas. Queda por hacer las integral sobre la posición angular de la celda Φ_c . Si aplicando la RWA y realizamos estas integrales tenemos para la fotoabsorsión:

$$\langle cm' \mid h_{tl}^+ \mid vm \rangle = -q_e \langle cm' \mid \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{r} \mid vm \rangle$$

$$= \xi \delta_{m-m',-\ell}$$

$$(3.16)$$

y para la fotoemisión:

$$\langle vm' \mid h_{tl}^{-} \mid cm \rangle = -q_e \langle vm' \mid \mathbf{E}^{-} \cdot \mathbf{r} \mid cm \rangle$$

$$= \xi^* \delta_{m-m',\ell}$$

$$(3.17)$$

donde $\xi = -i\omega F_{\ell(q_{\ell r})}q_e e^{-i\omega t} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}_{bb'}$, aquí hemos pensado al anillo situado en el plano $z_0 = 0.$

Espín

Hasta ahora habiamos dejado la discusión sobre el espín (spin) fuera del análisis en la Secc. 3.2 pero veremos que es posible, por el momento, expresar la interacción teniendo en cuenta solo una de las proyecciones de espín. Empezamos por expresar la siguiente igualdad:

$$[x, H_0] = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(x \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2} x \right) = \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{d}{dx} = \frac{i\hbar}{m_0} P_x$$
(3.18)

con esta expresión podemos ver que $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{P}_{\uparrow vc}$ es proporcional a $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}_{\uparrow vc}$, estos elementos de transición seran parte de los términos de interesacción. Ahora recordemos que la polarización de la TL es :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{x} + i\sigma\hat{y} \tag{3.19}$$

Si tenemos en cuenta los estados sobre las bandas de espín $\uparrow(up)$, las funciones microscópicas u_b se puden escribir como la proyección sobre el espacio de los estados $|3/2, 3/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |(X + iY) \uparrow \rangle$ (para la banda de valencia) y $|1/2, 1/2 \rangle = i|S \uparrow \rangle$ (para la banda de conducción), podemos calcular el elemento de matriz $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{P}_{\uparrow vc}$, observamos que:

$$\mathbf{P}_{\uparrow vc} = \int_{celda} \left[\{ \langle X | -i \langle Y | \} \otimes \langle \uparrow |] \mathbf{P} [i | S \rangle \otimes | \uparrow \rangle \right] d^{3}r \\ = i P_{xs} \hat{x} + P_{ys} \hat{y} = P_{0} (\hat{x} - i\hat{y})$$
(3.20)

donde $\langle S|P_x|X \rangle = \langle S|P_y|Y \rangle = \langle S|P_z|Z \rangle = iP_0$ donde P_0 es una constante independiente del material [4] y los otros elementos de matriz se anulan. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{P}_{\uparrow vc} = P_0 i (1 + \sigma) \tag{3.21}$$

Es por esto que si hacemos la elección de polarización de la TL con $\sigma = 1$ solo debemos concentrarnos en la evolución de las bandas up puesto que así el término h_{tl} será proporcional a $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{P}_{vc}$ resultando nulo para bandas down. Consecuentemente estas bandas no evolucionarán. Similarmente si obtamos por una polarización del tipo $\sigma = -1$ consideraremos solo las bandas down.

3.4 Término de interacción dinámica h_d

Aquí debemos considerar el término:

$$h_d = -\frac{q}{m_e} \mathbf{A}_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P} \tag{3.22}$$

del hamiltoniano total. Este término incluirá los efectos producidos por el campo autoinducido de las corrientes que circulan en el QR y determinará la dinámica acoplada de los electrones. Para esto habrá que previamente determinar el vector potencial magnético correspondiente al campo inducido \mathbf{A}_d , esto se llevará a cabo a partir de una integral que depende de la densidad de corriente total sobre el anillo. Veremos mas adelante que esta densidad de corriente puede expresarse en términos de los valores medios de los elementos de matriz del operador densidad arribando asi al acoplamiento buscado entre campos y portadores.



Fig. 3.3: Corriente eléctrica: contribución de poblaciones para $\ell = 1$ en linea punteada (azul) y para $\ell = 5$ en linea discontinua (negra), contribuciones de coherencias para $\ell = 1$ en line acontinua (rojo). Para un QR GaAs con $r_0 = 1\mu m$; para un haz pulsado de TL: $\lambda = 300nm$, $\omega = 2 \ 10^{15} s^{-1}$, campo eléctrico medio por pulso de $510^7 V/m$ desintonizado de 0.06 eV. La frecuencia de Rabi es $\Re \approx 10^{14} s^{-1}$. [24]

3.4.1 Corriente eléctrica en un QR sin campo autoinducido

Resolviendo el sistema de ecuaciones para el operador densidad pero sin considerar el término relacionado con los campos autoinducidos (h_d) podemos obtener información útil para el sistema completo. Se ha visto en estudios previos [24] que la acción del campo de TL es inducir transiciones alternadas entre las bandas de valencia y conducción conectando estados que difierenen en su OAM ($\hbar m$) en la cantidad $\hbar \ell$ que proviene del campo de TL. Esto resulta en que las coherencias interbanda tienen una componente de frecuencias lumínicas ω , mientras que las poblaciones oscilan a las frecuencias de Rabi que son mucho mas pequeñas que esta. En la Fig. ?? se muestra la respuesta del sistema sin autoinducción para una excitación débil.

De modo que las corrientes se pueden dividir en corrientes de población y de coherencia y las frecuencias de estas corrientes son las de las oscilaciones de Rabi, para unas, y la de la luz incidente, para la otra, respectivamente. Dado que los efectos inductivos van a ser forzados por estas mismas corrientes esperamos tener variaciones temporales del mismo orden.

Para las dependencias dominadas por frecuencias lumínicas, y también por las de Rabi, podemos utilizar la aproximación MQS ya que la longitud de onda es un orden de magnitud mayor, en el peor de los casos, que las dimensiones características del QR. Debido a esto no es necesario tomar en cuenta efectos debido a retardos en la influencia del campo inducido sobre diferentes puntos del QR. La expresión para el vector potencial en la aproximación MQS (gauge de Coulomb) es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r'$$
(3.23)

3.4.2 Corriente de los portadores en términos de la matriz densidad

Con el objetivo de escribir al campo autoinducido en términos de la evolución dinánica de los portadores de carga, recurrimos a la expresión general para la densidad de corriente en segunda cuantificación:

$$\mathbf{J}(x,t) = \frac{-iq\hbar}{(2m_e)} \lim_{x' \to x} (\nabla - \nabla')\psi^{\dagger}(x',t)\psi(x,t)$$
(3.24)

Luego teniendo en cuenta las funciones de onda en el material transcribimos la ecuación 3.24 en términos de los operadores de creación y de aniquilación a la vez que tomamos su valor medio sobre estados iniciales constantes. Luego renombramos a los pares de operadores de creación y aniquilación como los elementos de la matriz

densidad $(\rho_{b'm',bm})$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \frac{-iq\hbar}{(2m_e)} \sum_{m'm} \sum_{b'b} [\psi^*_{b'm'} \nabla \psi_{bm} - \psi_{bm} \nabla \psi^*_{b'm'}] \rho_{b'm',bm}$$
(3.25)

Ahora debemos aplicar el operador nabla sobre las envolventes macroscópicas y sobre la parte periódica microscópica de las funciones de Bloch:

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},t) = \frac{-iq\hbar}{(2m_e)} \sum_{m'm} \sum_{b'b} \left\{ e^{-im'\phi} u_{b'}^* \frac{R^*(r)Z^*(z)}{\sqrt{2\pi}} \nabla \left[u_b e^{im\phi} \frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] - e^{im\phi} u_b \frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \nabla \left[u_{b'}^* e^{-im'\phi} \frac{R^*(r)Z^*(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] \right\} \rho_{b'm',bm}$$
(3.26)

dependiendo del tipo de transiciones involucradas en cada término, luego de aplicar la regla de Leibniz sobre el producto de funciones, podremos identificar aportes correspondientes a coherencias intrabanda (incluyendo poblaciones) y también a coherencias interbanda. Sacamos fuera de la sumatoria las funciones envolventes de la parte radial y en z. El término correspondiente a aplicar el operador nabla sobre ellas no contribuirá significartivamente debido a que varían muy lentamente en la extensión del QR y a nosotros nos interesa describir procesos en el subespacio de estados con parte radial y z constante.

Corrientes de coherencia interbanda Debido a la ortogonalidad de las funciones microscópicas u_b cuando el operador gradiente opera sobre estas solo consideraremos términos donde $b' \neq b$, estas serán las contribuciones de las coherencias. Entonces podemos escribir para la densidad de corriente de coherencia:

$$\mathbf{J}^{(coh)}(\mathbf{r},t) = \frac{-iq\hbar}{(2m_e)} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \sum_{b'b} \left\{ e^{i\phi(m-m')} \left[u_{b'}^*(\mathbf{r}) \nabla u_b(\mathbf{r}) \right] \right\}
- e^{i\phi(m-m')} \left[u_b(\mathbf{r}) \nabla u_{b'}^*(\mathbf{r}) \right] \right\} \rho_{b'm',bm}
= \frac{q}{(2m_e)} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \sum_{b'b} \left\{ e^{i\phi(m-m')} \left[u_{b'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{P} u_b(\mathbf{r}) \right]
- e^{i\phi(m-m')} \left[u_b(\mathbf{r}) \mathbf{P} u_{b'}^*(\mathbf{r}) \right] \right\} \rho_{b'm',bm}$$
(3.27)

 $\operatorname{con} \mathbf{P} = -i\hbar\nabla.$

Ahora simplificamos la expresión realizando un promedio espacial dentro de cada celda unidad, ($\overline{A} = (1/a^3) \int_{celda} d^3 r A$), de manera de eliminar detalles microscópicos irrelevantes:

$$<\mathbf{J}^{(coh)}(\mathbf{r},t)> = \frac{q}{(2m_e)} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}}\right]^2 \sum_{m'm} \sum_{b'b} [e^{i\phi(m-m')} \boldsymbol{P}_{b'b} + e^{i\phi(m-m')} \boldsymbol{P}_{b'b}]\rho_{b'm',bm} \\ = \frac{q}{m_e} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}}\right]^2 \sum_{m'm} \sum_{b'b} \Re[e^{i\phi(m-m')} \boldsymbol{P}_{b'b}\rho_{b'm',bm}] \quad (3.28)$$

aquí se usó que $\frac{1}{a^3} \int_a [u_b P u_{b'}^* dr^3] = -P_{b'b}$ y se intercambiaron índices en el segundo término. A partir de ahora por simplicidad de notación se omitirán los corchetes que indican promedio pero se estará asumiendo una referencia a este salvo que se enuncie lo contrario, también debe tenerse en cuenta que una vez hecho este promedio las magnitudes que se obtengan de esta densidad de corriente promediada serán, en realidad, funciones de R_c aunque luego de pasar de una suma sobre celdas a integral hablaremos de **r**; finalmente:

$$\mathbf{J}^{(coh)}(\mathbf{r},t) = \frac{2q}{m_e} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \Re \left[\mathbf{P}_{vc} e^{i\phi(m-m')} \rho_{vm',cm}(t) \right]$$
(3.29)

donde se usó que $\mathbf{P}_{vc} = \mathbf{P}_{cv}^*$.

Corrientes de coherencia interbanda/población Por otro lado consideramos al operador nabla operando sobre las envolventes angulares dependientes de los autovalores de *OAM*. La componente de interes es $(\nabla f)_{\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi}$. Existen otras contribuciones pero debido al confinamiento espacial dentro del *QR* los estados de energía correspondientes a diferentes funciones radiales y en la dirección \hat{z} , se encuentran muy distanciados entre si para ser excitados por la *TL*. Esto respalda lo que podría intuirse por un razonamiento clásico sabiendo, al menos en el caso sin autoinducción, que las poblaciones son proporcionales a la intensidad del campo TLal cuadrado (E_0^2) y que a su vez es proporcional al OAM de la TL. La componente azimutal de la corriente de población queda:

$$J_{\phi}^{(pop)} = \frac{q\hbar}{(2m_e)r} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \left\{ me^{i\phi(m-m')} + m'e^{i\phi(m-m')} \right\} \rho_{vm',vm} + \frac{q\hbar}{(2m_e)r} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \left\{ me^{i\phi(m-m')} + m'e^{i\phi(m-m')} \right\} \rho_{cm',cm} = \frac{2q\hbar}{(2m_e)r} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \sum_{m'm} \Re \left\{ me^{i\phi(m-m')} [\rho_{vm',vm} + \rho_{cm',cm}] \right\} (3.30)$$

donde las funciones u_b han desaparecido al integrar en la celda unidad (el mismo promedio que se hizo en 3.28) debido a la normalización de las funciones microscópicas de Bloch.

En lo sucesivo, por brevedad, nos referiremos a las contribuciones relacionadas con las coherencias intrabanda/poblaciones y coherencias interbanda como contribuciones de "población" y "coherencia", respectivamente.

Resulta útil, en este punto, definir elementos de corriente para las poblaciones y coherencias que contribuirán llevando consigo la infomación de la distribución espacial y la dependencia con los autovalores m:

$$\mathbf{j}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{2q}{m_e} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}}\right]^2 \mathbf{P}_{vc} e^{i\phi(m-m')}$$
(3.31)

у

$$\mathbf{j}_{m'm}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{q\hbar}{rm_e} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}}\right]^2 m e^{i\phi(m-m')}\hat{\phi}$$
(3.32)

Estas contribuciones parciales a la corriente no llevan consigo la dependencia temporal la cual está contenida en los elementos de la matriz densidad $\rho_{b'm',bm}(t)$. Con estas definiciones podemos reescribir las corrientes como:

$$\mathbf{J}^{(coh)}(\mathbf{r},t) = \sum_{m'm} \mathbf{j}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r})\rho_{vm',cm}(t) + c.c.$$
(3.33)

53

$$\mathbf{J}_{\phi}^{(pop)}(\mathbf{r},t) = \sum_{m'm} \mathbf{j}_{m'm}^{(pop)(+)}(\phi) [\rho_{vm',vm} + \rho_{cm',cm}] + c.c.$$
(3.34)

Ahora con estas expresiónes y la Ec. 3.23 podemos obtener el vector potencial en la aproximación MQS y reemplazandolo en la Ec. 3.22 obtener el operador de interacción dinámica:

$$h_{d} = -\frac{q}{m_{e}} \sum_{m'm} \rho_{vm',cm}(t) \left[\frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right] \cdot \mathbf{P}$$
$$- \frac{q}{m_{e}} \sum_{m'm} [\rho_{vm',vm}(t) + \rho_{cm',cm}(t)] \left[\frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{m'm}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right] \cdot \mathbf{P} \qquad (3.35)$$

Para simplificar la expresión definiremos de manera análoga contribuciones parciales "mono modales" al potencial vector correspondientes a cada término de densidad de corriente:

$$\mathbf{a}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$
(3.36)

$$\mathbf{a}_{m'm}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{m'm}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$
(3.37)

por último con estas últimas expresiones es posible representar los vectores potencial magnético producidos por las coherencias y las poblaciones, respectivamente:

$$\mathbf{A}_{d}^{(coh)(+)}(\mathbf{r},t) = \sum_{m'm} \rho_{vm',cm}(t) \mathbf{a}_{m'm}^{(coh)(+)}$$
(3.38)

$$\mathbf{A}_{d}^{(pop)(+)}(\mathbf{r},t) = \sum_{m'm} \left[\rho_{v,m'm}(t) + \rho_{c,m'm}(t) \right] \mathbf{a}_{m'm}^{(pop)(+)}$$
(3.39)

reemplazando en la Ec. 3.35 obtenemos la expresión general en aproximación MQS del Hamiltoniano de interacción con el campo autoinducido:

$$h_{d} = -\sum_{m'm} \rho_{vm',cm}(t) \left[\frac{q}{m_{e}} \mathbf{a}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P} \right] + c.c.$$

$$- \sum_{m'm} \left[\rho_{vm',vm}(t) + \rho_{cm',cm}(t) \right] \left[\frac{q}{m_{e}} \mathbf{a}_{m'm}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} \right] + c.c., \qquad (3.40)$$

3.4.3 Cálculo de la contribución parcial $\mathbf{a}_{m'm}^{(coh)(+)}$

Las densidades de corriente parciales $(\mathbf{j}_{m'm})$ han de ser consideradas como distribuidas solamente sobre el QR. Garantizamos esto restringiendo el flujo de corriente a un anillo plano de radio interior r_1 y exterior r_2 de la siguiente manera:

$$\mathbf{j}_{m'm}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}') = \tilde{\mathbf{j}}_{m'm}^{(coh)(+)}(\phi')\sin(\theta')\delta(\cos(\theta'))[H(r'-r_1) - H(r'-r_2)]$$
(3.41)

donde H(x) es la función escalón de Heaviside. Aquí estamos haciendo otra aproximación que involucra las funciones envolventes R(r) y Z(z), convirtiendo la primera en una función cuadrada mientras que la otra pasa a ser una delta cuando consideramos chato al anillo. Estas aproximaciones son razonables si se considera la suavidad con que varían estas envolventes respecto de las otras funciones involucradas y que su forma es escencialmente la de una modulación que sigue la forma del QR delimitando el confinamiento espacial de los portadores. Ahora debemos obtener el vector potencial para esta contribución parcial a la corriente con la Ec. 3.36. Allí la integración debe realizarse sobre todo el espacio y luego hacemos uso de la expansión en armónicos esféricos de la función de Green para el espacio vacío:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell m}^{*}(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta') P_{\ell}^{m}(\cos\theta) e^{-im\phi'} e^{im\phi} \quad (3.42)$$

con $(r_{\leq} = \min\{r, r'\})$ y $(r_{\geq} = \max\{r, r'\})$. Al realizar las integrales asociadas a las deltas de Dirac obtenemos:

$$\mathbf{a}_{n'n}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{2q}{m_e} \mathbf{P}_{vc} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{\ell} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} [P_j^m(0)]^2 e^{im\phi} \\ \times \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r'^2 \frac{r_{<}^j}{r_{>}^{j+1}} e^{i[(n-n')-m]\phi'} d\phi' dr'$$
(3.43)

Como la serie converge podemos introducir el símbolo de integral y realizar la integración de aquellos factores que dependen solo de la variable primada, los cuales arrojan un factor $2\pi\delta_{n-n',m}$ anulando así los términos con $m \neq n - n'$:

$$\mathbf{a}_{n'n}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q}{m_e} e^{i(n-n')\phi} \mathbf{P}_{vc} \sum_{j=|n-n'|}^{\infty} \frac{(j-(n-n'))!}{(j+(n-n'))!} [P_j^{n-n'}(0)]^2 \\ \times \left(\int_{r_1}^r r'^2 \frac{r'^j}{r^{j+1}} dr' + \int_r^{r_2} r'^2 \frac{r^j}{r'^{j+1}} dr' \right) \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q}{m_e} e^{i(n-n')\phi} \mathbf{P}_{vc} I_{|n-n'|}(r_1, r_2; r)$$
(3.44)

donde $I_{n-n'}$ es un término que representa una serie de funciones que comprende las integrales radiales, estas integrales dependen del radio interno (r_1) y externo (r_2) del anillo y de la coordenada radial r. En la Fig. 3.4 vemos el cálculo de los j primeros términos hasta 3000 de la sucesión de sumas parciales de la serie dentro de I_8 , lo mismo se observó para otros valores de n - n'. Con esto vemos que la sucesión $I_{n-n'}$ presenta un comportamiento convergente y lo hace independientemente de los valores de |n - n'|.



Fig. 3.4: Sucesión de sumas parciales de la serie con 10 < j < 3000 junto con las integrales radiales, asumiendo |n - n'| = 8, $r_1 = 200nm$ y $\Delta r = 1 \times 10^{-6}m$.

3.4.4 Cálculo de la contribución parcial $\mathbf{a}_{m'm}^{(pop)}$

De la Ec. 3.37 y haciendo las mismas consideraciones respecto de las envolventes macroscópicas que en el paso anterior para coherencias, tenemos:

$$\mathbf{a}_{n'n}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{2q\hbar}{2m_e r'} n e^{i(n-n')\phi'} \hat{\phi}' d^3 r'$$
(3.45)

Utilizando la misma expasión que en la Ec. 3.42 y definiendo:

$$U_{mj}(r_1, r_2; r) = \frac{(j-m)!}{(j+m)!} [P_j^m(0)]^2 \left(\int_{r_1}^r r' \frac{r'^j}{r^{j+1}} dr' + \int_r^{r_2} r' \frac{r^j}{r'^{j+1}} dr' \right), \qquad (3.46)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n'n}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 q \hbar}{2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m]\phi'} d\phi' \hat{\phi}' \\ &= \frac{\mu_0 q \hbar}{2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m]\phi'} (-\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y}) d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 q \hbar}{2.2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \\ &\times \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m]\phi'} \left\{ e^{i\phi'}(i\hat{x} + \hat{y}) + e^{-i\phi'}(-i\hat{x} + \hat{y}) \right\} d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 q \hbar}{2.2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \\ &\times \left\{ \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m+1]\phi'}(i\hat{x} + \hat{y}) + \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m-1]\phi'}(-i\hat{x} + \hat{y}) \right\} d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 q \hbar}{2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \\ &\times \left\{ \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m+1]\phi'}(i\hat{x} + \hat{y}) + \int_{0}^{2\pi} e^{i[(n-n')-m-1]\phi'}(-i\hat{x} + \hat{y}) \right\} d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 q \hbar \pi}{2m_e} n \sum_{j}^{\infty} \sum_{m}^{\infty} U_{mj}(r_1, r_2; r) e^{im\phi} \\ &\times \left[\delta(n - n' + 1, m)(i\hat{x} + \hat{y}) + \delta(n - n' - 1, m)(-i\hat{x} + \hat{y}) \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{n'n}^{(pop)(+)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q \hbar \pi}{2m_e} n \sum_j U_{n-n'+1,j} e^{i(n-n'+1)\phi}(i)(\hat{x} - i\hat{y}) + \sum_j U_{n-n'-1,j} e^{i(n-n'-1)\phi}(-i)(\hat{x} + i\hat{y}) = in \frac{\mu_0 q \hbar \pi}{2m_e} \left[\sum_j U_{n-n'+1,j} e^{i(n-n'+1)\phi}(\hat{r} - i\hat{\phi}) e^{-i\phi} - \sum_j U_{n-n'-1,j} e^{i(n-n'-1)\phi}(\hat{r} + i\hat{\phi}) e^{i\phi} \right] = in \frac{\mu_0 q \hbar \pi}{2m_e} \left\{ \left[\sum_{j=|n-n'+1|} U_{n-n'+1,j} - \sum_{j=|n-n'-1|} U_{n-n'-1,j} \right] e^{i(n-n')\phi} \hat{r} - \left[\sum_{j=|n-n'+1|} U_{n-n'+1,j} + \sum_{j=|n-n'-1|} U_{n-n'-1,j} \right] e^{i(n-n')\phi} \hat{\phi} \right\}$$
(3.47)

En la Fig. 3.5 se calcula la relación entre la componente \hat{r} y la componente $\hat{\phi}$ de estos campos parciales de población para distintos valores de r_1 , entre 100nm y 400nm, notando como la dimensión del anillo afecta la importancia de la contribución azimutal. Podemos ver que eligiendo convenientemente las dimensiones del QR la componente radial es 5 veces menor que la azimutal.



Fig. 3.5: Término j = 5000 para valores de |n - n'| = 1 y $\Delta r = 0.5 \times 10^{-8} m$. El valor de la variable radial fue tomado en $r = \frac{2r_1 + \Delta r}{2}$.

3.4.5 Elementos de matriz $\langle b'm' \mid h_d \mid bm \rangle$

Aquí queremos calcular los elementos de matriz del operador h_d en la base de las funciones de Bloch del QR:

$$\langle b'm' \mid h_d \mid bm \rangle = \int_{QR} \Psi_{b'm'}^*(\mathbf{r}) h_d \Psi_{bm}(\mathbf{r}) d^3r = \frac{2.2}{\rho_0 dh} \cdot \int_{QR} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{-im'\phi} u_{b'}^*(\mathbf{r}) h_d u_b(\mathbf{r}) e^{im\phi} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] d^3r = -\frac{4q}{\rho_0 dhm_e} \int_{QR} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{-im'\phi} u_{b'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{P} u_b(\mathbf{r}) e^{im\phi} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] d^3r$$

Ahora operando con $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$ sobre las funciones, teniendo en cuenta la Ec. 3.6, obtenemos:

$$\langle b'm' \mid h_d \mid bm \rangle = -\frac{q}{m_e} \int_{QR} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{-im'\phi} u_{b'}^* \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \left(u_b e^{im\phi} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] \right) d^3r$$

$$= -\frac{q}{m_e} \int_{QR} e^{-im'\phi} u_{b'}^* e^{im\phi} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}} u_b d^3r$$

$$- \frac{q}{m_e} \int_{QR} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] e^{-im'\phi} u_{b'}^* u_b e^{im\phi} \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right] d^3r$$

$$- \frac{q}{m_e} \int_{QR} e^{-im'\phi} u_{b'}^* u_b \left[\frac{R(r)Z(z)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2 \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}} e^{im\phi} d^3r$$

$$(3.48)$$

En esta instancia vamos a considerar la velocidad con que varian espacialmente las funciones envolventes y el campo dinámico \mathbf{A}_d . Para esto recordemos que debido a las corrientes excitadas en el anillo vamos a tener contribuciones al potencial de dos tipos, una lenta (poblaciones) y otra rápida de frecuencias ópticas (coherencias), $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d^{(coh)} + \mathbf{A}_d^{(pop)}$. La frecuencia rápida de las coherencias se eligirá, típicamente, para poder excitar transiciones del orden del *band-gap* por lo tanto vamos a considerar transiciones interbanda para este término e intrabanda para el de las poblaciones.

Siguiendo el mismo procedimiento que se usó para la determinación de los elemetos de matriz del operador de interracción con la TL, hacemos una suma sobre celdas en las funciones que varian suavemente en el espacio y una integración dentro de la celda unidad del semiconductor para las funciones que varian rapidamente en el espacio. Luego teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones microscópicas $u_b(\mathbf{r})$ podemos decir que los dos últimos términos solo van a contribuir en transiciones del tipo intrabanda. Como dijimos estas transiciones estaran asociadas a la parte del campo correspondiente a las poblaciones $\mathbf{A}_d^{(pop)}$. Mientras que debido a la paridad de las funciones $u_b(\mathbf{r})$ y del operador \mathbf{P} , el primer término será nulo para las transiciones intrabanda y deberemos considerar aquí al campo dinámico de coherencia $\mathbf{A}_d^{(coh)}$. Separaremos al operador h_d en dos partes, una que tendrá elementos no nulos entre estados intrabanda $h_d^{(pop)}$ y otra que los tendrá para estados interbanda $h_d^{(coh)}$.

Contribución de las coherencias

Haciendo uso de las expresiones desarrolladas en la Ec. 3.44 para hallar los elementos de matriz:

$$\langle b'm' \mid h_d^{(coh)(+)} \mid bm \rangle = -\frac{q}{m_e} \sum_{celdas} \int_a d^3r \left[u_{b'}(\mathbf{r}) \mathbf{P} u_b(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{A}_d^{(coh)(+)}(\mathbf{R}_c, t)$$

$$\times e^{-i\Phi_c(m'-m)} \left[\frac{R(R_c)Z(z_c)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2$$

$$= -\frac{q}{m_e} \sum_{celdas} \left[\mathbf{P}_{b'b} \cdot \mathbf{A}_d^{(coh)(+)}(\mathbf{R}_c, t) \right] e^{-i(m'-m)\Phi_c} \left[\frac{R(R_c)Z(z_c)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2$$

$$= -\frac{q}{m_e} \sum_{n'n} \rho_{vn',cn}(t) \left[\langle m' \mid \mathbf{a}_{n'n}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) \mid m \rangle \cdot \mathbf{P}_{cv} \right]$$
(3.49)

donde b' = v(c), b = c(v) y $\int_a d^3 r u_v(\mathbf{r}) \mathbf{P} u_c(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{vc}$.

Las funciones envolventes $[R(r)Z(z)/\sqrt{2\pi}]$ se integran a uno. La integral angular del elemento de matriz $\langle m' | \mathbf{a}_{n'n}^{(coh)(+)}(\mathbf{r}) | m \rangle$ combina la función exponencial $e^{-i(m'-m)\phi}$ con la exponencial similar que aparece en la Ec. 3.44 para dar una delta $2\pi\delta_{m-m',n'-n}$. Es posible, ahora, realizar la suma sobre el índice n':

$$\langle b'm' \mid h_d^{(coh)(+)} \mid bm \rangle = -\frac{\mu_0 q^2}{2\pi m_e^2} |\mathbf{P}_{cv}|^2 I'_{m-m'}(r_1, r_2) \sum_n \rho_{v(m-m'+n),cn}(t)$$
(3.50)

donde $I'_{n-n'}(r_1, r_2)$ es la integral de $I_{n-n'}(r_1, r_2, r)$ sobre la coordenada r.

Contribuciones de las poblaciones

Para la contribución de las poblaciones, consideramos nuevamente que las envolventes son constantes en el anillo y por lo tanto podremos despreciar el segundo término de la Ec. 3.48, con lo cual el Hamiltoniano dinámico asociado a las poblaciones será:

$$\langle b'm' \mid h_d^{pop} \mid bm \rangle = -\frac{q}{m_e} \sum_{celdas} e^{-i\Phi_c m'} (\mathbf{A}_d^{(pop)(+)}(\mathbf{R}_c, t) \cdot \mathbf{P}) e^{im\Phi_c} \left[\frac{R(R_c)Z(z_c)}{\sqrt{2\pi}} \right]^2$$

+ c.c. (3.51)

donde b = v(c).

Esta vez no aplicaremos la *RWA* ya que para la corriente de población no se cumple que $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$, estos no son términos resonantes.

Ahora haciendo uso del resultado obtenido en la Secc. 3.4.4 despreciamos la

contribución en la dirección \hat{r} y escribimos la Ec. 3.51 de la siguiente manera:

$$\langle bm' \mid h_{d}^{pop} \mid bm \rangle = -\frac{4q}{\rho_{0}d\hbar m_{e}} \sum_{nn'} [\rho_{vn',vn}(t) + \rho_{cn',cn}(t)] \langle bm' \mid \mathbf{a}_{n'n}^{(pop)(+)} \cdot \mathbf{P} \mid bm \rangle + c.c.$$

$$= \frac{i\mu_{0}4q^{2}}{m_{e}^{2}2d} \sum_{nn'} n[\rho_{vn',vn}(t) + \rho_{cn',cn}(t)]$$

$$\times \langle m' \mid \left[I_{n-n'+1}^{(pop)}(r_{1},r_{2},r) + I_{n-n'-1}^{(pop)}(r_{1},r_{2},r) \right] \left(\frac{-i\hbar}{r} \right) \partial_{\phi} \mid m \rangle + c.c.$$

$$= \frac{i\mu_{0}4q^{2}}{m_{e}^{2}2d} m \sum_{n} n[\rho_{v(m-m'+n),vn}(t) + \rho_{c(m-m'+n),cn}(t)] \int_{QR} drdz \mid R(r) \mid^{2}$$

$$\times \mid Z(z) \mid^{2} \left[I_{(m'-m)+1}^{(pop)}(r_{1},r_{2},r) + I_{(m'-m)-1}^{(pop)}(r_{1},r_{2},r) \right] + c.c.$$

$$(3.52)$$

donde se definió $I_{n-n'\pm 1}^{(pop)} = \sum_{j=|n-n'\pm 1|} U_{n-n'\pm 1,j}.$

Capítulo 4

Hamiltoniano en segunda cuatificación y ecuaciones dinámicas

En este capítulo haremos uso de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para describir la evolución tempotal de las poblaciones y coherencias a medida que los portadores interactuan con los campos \mathbf{A}_d y \mathbf{A}_{tl} . Para determinar estas ecuaciones consideramos el Hamiltoniano total escrito en el formalismo de segunda cuantificación:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{0} + \mathbf{h}_{d} + \mathbf{h}_{tl} = \sum_{bm} \epsilon_{bm} a_{bm}^{\dagger} a_{bm} + \sum_{bmb'm'} \langle b'm' \mid \mathbf{h}_{d} \mid bm \rangle a_{b'm'}^{\dagger} a_{bm} + \sum_{bmb'm'} \langle b'm' \mid \mathbf{h}_{tl} \mid bm \rangle a_{b'm'}^{\dagger} a_{bm}$$

$$(4.1)$$

donde a_{bm}^{\dagger} (a_{bm}) crea (aniquila) una partícula en el orbital $\Psi_{bm}(\mathbf{r}) = <\mathbf{r} \mid bm >$, es decir, crea un electrón en el estado de Bloch m y de banda b. Dependiendo de si se trata de un proceso de absorción o de emisión vamos a considerar la parte h_{tl}^+ o h_{tl}^- del Hamiltoniano de interacción con la TL, conforme a la RWA (lo mismo haremos para h_d siempre que se reunan las condiciones necesarias de frecuencia). La ecuación que describe la dinámica del operador densidad es la ecuación de Liouville, la cual expresada en la base { Ψ_{bm} } tiene la forma:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a^{\dagger}_{b'm'} a_{bm} = \left[a^{\dagger}_{b'm'} a_{bm}, \mathbf{H} \right]$$
(4.2)

Vimos en el capítulo anterior que la interacción con el campo dinámico se compone de dos contribuciones capaces de producir transiciones intra e interbanda, las transiciones interbanda ($\langle b'm'|h_d|bm \rangle \operatorname{con} b' \neq b$) son significativamente mas intensas que las intrabanda ($\langle b'm'|h_d|bm \rangle \operatorname{con} b' = b$) debido a su proporcionalidad con las corrientes de frecuencias ópticas. Como ya se dijo, las mismas pueden ser ajustadas convenientemente para promover excitaciones del orden del *band gap*. El Hamiltoniano completo del sitema resulta:

$$\mathbf{H} = \sum_{bm} \epsilon_{bm} a_{bm}^{\dagger} a_{bm} + \sum_{mm'} \left(\langle cm' \mid \mathbf{h}_{d}^{(coh)} \mid vm > a_{cm'}^{\dagger} a_{vm} + \langle vm' \mid \mathbf{h}_{d}^{(coh)} \mid cm > a_{vm'}^{\dagger} a_{cm} + \langle vm' \mid \mathbf{h}_{d}^{(pop)} \mid vm > a_{vm'}^{\dagger} a_{vm} + \langle cm' \mid \mathbf{h}_{d}^{(pop)} \mid cm > a_{cm'}^{\dagger} a_{cm} + \langle cm' \mid \mathbf{h}_{tl} \mid vm > a_{cm'}^{\dagger} a_{vm} + \langle vm' \mid \mathbf{h}_{d} \mid cm > a_{vm'}^{\dagger} a_{cm} \right).$$
(4.3)

Queremos econtrar los valores de expectación correspondientes a $\rho_{vm',cm} = \langle a^{\dagger}_{vm'}a_{cm} \rangle$, $\rho_{vm',vm} = \langle a^{\dagger}_{vm'}a_{vm} \rangle$ y $\rho_{cm',cm} = \langle a^{\dagger}_{cm'}a_{cm} \rangle$ donde el promedio es tomado sobre el estado inicial del semiconductor. Estos valores de expectación representan poblaciones cuando tienen índices repetidos (elementos diagonales de la matriz densidad) y coherencias cuando son elementos fuera de la diagonal. Para poder representrar explicitamente estas ecuaciones necesitamos contar con los elementos de matriz del Hamiltoniano que ya obtuvimos.

Para calcular el conmutador presente en la ecuación de Liouville utilizamos la siguiente identidad, que resulta de las relaciones de anticonmutación de los operado-

res de creación y aniquilación correspondientes a fermiones:

$$[a_1^{\dagger}a_2, a_3^{\dagger}a_4] = a_1^{\dagger}a_4\delta_{23} - a_3^{\dagger}a_2\delta_{14}$$
(4.4)

para el término libre necesitamos conocer:

$$\begin{bmatrix} a_{b'm'}^{\dagger}a_{bm}, a_{cn}^{\dagger}a_{cn} \end{bmatrix} = a_{b'm'}^{\dagger}a_{cn}\delta_{bm,cn} - a_{cn}^{\dagger}a_{bm}\delta_{b'm',cn}$$
$$\begin{bmatrix} a_{b'm'}^{\dagger}a_{bm}, a_{vn}^{\dagger}a_{vn} \end{bmatrix} = a_{b'm'}^{\dagger}a_{vn}\delta_{bm,vn} - a_{vn}^{\dagger}a_{bm}\delta_{b'm',vn}$$
(4.5)

mientras que para el término de TL necesitamos:

$$[a^{\dagger}_{b'm'}a_{bm}, a^{\dagger}_{cn'}a_{vn}] = a^{\dagger}_{b'm'}a_{vn}\delta_{bm,cn'} - a^{\dagger}_{cn'}a_{bm}\delta_{b'm',vn} [a^{\dagger}_{b'm'}a_{bm}, a^{\dagger}_{vn'}a_{cn}] = a^{\dagger}_{b'm'}a_{cn}\delta_{bm,vn'} - a^{\dagger}_{vn'}a_{bm}\delta_{b'm',cn}$$
(4.6)

por último para el término dinámico es útil saber:

$$[a^{\dagger}_{b'm'}a_{bm}, a^{\dagger}_{cn'}a_{cn}] = a^{\dagger}_{b'm'}a_{cn}\delta_{bm,cn'} - a^{\dagger}_{cn'}a_{bm}\delta_{b'm',cn} [a^{\dagger}_{b'm'}a_{bm}, a^{\dagger}_{vn'}a_{vn}] = a^{\dagger}_{b'm'}a_{vn}\delta_{bm,vn'} - a^{\dagger}_{vn'}a_{bm}\delta_{b'm',vn}.$$
 (4.7)

Las ecuaciones de movimiento para los elementos de la matriz densidad del sistema

resultan:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',cm} = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm'})\rho_{vm',cm} + \sum_{n} \left(\langle cm|h_{d}^{(coh)}|vn\rangle + \langle cm|h_{tl}|vn\rangle \right) \rho_{vm',vn} \\ - \sum_{n'} \left(\langle cn'|h_{d}^{(coh)}|vm'\rangle + \langle cn'|h_{tl}|vm'\rangle \right) \rho_{cn',cm} \\ + \sum_{n} \left(\langle cm|h_{d}^{(pop)}|cn\rangle \rho_{vm',cn} - \langle vn|h_{d}^{(pop)}|vm'\rangle \rho_{vn,cm} \right)$$
(4.8a)
$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',vm} = (\epsilon_{vm} - \epsilon_{vm'}) \rho_{vm',vm} + \sum_{n} \left(\langle vm|h_{d}^{(coh)}|cn\rangle + \langle vm|h_{tl}|cn\rangle \right) \rho_{vm',cn} \\ - \sum_{n'} \left(\langle cn'|h_{d}^{(coh)}|vm'\rangle + \langle cn'|h_{tl}|vm'\rangle \right) \rho_{cn',vm} \\ + \sum_{n} \left(\langle vm|h_{d}^{(pop)}|vn\rangle \rho_{vm',vn} - \langle vn|h_{d}^{(pop)}|vm'\rangle \rho_{vn,vm} \right)$$
(4.8b)
$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{cm',cm} = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{cm'})\rho_{cm',cm} + \sum_{n} \left(\langle cm|h_{d}^{(coh)}|vn\rangle + \langle cm|h_{tl}|vn\rangle \right) \rho_{cm',vn} \\ - \sum_{n'} \left(\langle vn'|h_{d}^{(coh)}|cm'\rangle + \langle vn'|h_{tl}|cm'\rangle \right) \rho_{vn',cm} \\ + \sum_{n} \left(\langle cm|h_{d}^{(pop)}|cn\rangle \rho_{cm',cn} - \langle cn|h_{d}^{(pop)}|cm'\rangle \rho_{cn,cm} \right)$$
(4.8c)

4.0.1 Acoplamiento entre espines debido a la interacción con las poblaciones

Vimos que para la elección de polarización considerada, la interacción con la TL no involucra a los espines down y lo mismo ocurre para la interacción dinámica correspondiente a las corrientes de coherencias interbanda. Por otro lado, como la interacción con las poblaciones no es proporcional a \mathbf{P}_{vc} no podemos hacer el mismo razonamiento. Sin embargo, como el resto de los términos del Hamiltoniano no acoplan con los espines down, las ecuaciones para la evolución de los elementos de matriz correspondientes solo tendrán fuentes provenientes de las corrientes de población, que en el caso sin inducción es de orden cuadrático en la amplitud del

campo, y por lo tanto consideraremos que esta evolución es, al orden considerado en el trabajo, despreciable, consecuentemente la influencia de estos elementos de matriz sobre las corrientes de población también lo será.

Capítulo 5

Régimen de baja excitación. Analisis pertubativo

El objetivo de esta sección es utilizar teoría de perturbaciones para determinar la evolución de los elementos de la matriz densidad en el caso de baja excitación. Para esto estaremos considerando una expansión de los elementos de la matriz como una serie de potencias en E_0 , la amplitud del vector campo eléctrico, siendo también este el parámetro que rige la intensidad de la interacción en el Hamiltoniano. De trabajos anteriores [19] sabemos que los ordenes mas bajos del desarrollo para los elementos de la matriz densidad, en el caso sin autoinducción, cumplen:

$$\rho_{vm,vm}^{(0)} \propto (E_0)^0$$
(5.1)
$$\rho_{vm',vm}^{(2)} \propto (E_0)^2$$

$$\rho_{cm',cm}^{(2)} \propto (E_0)^2$$

$$\rho_{vm',cm}^{(1)} \propto (E_0)^1$$

Esperamos que esto también ocurra para el sistema que incluye autoinducción. Comenzamos el análisis de baja excitación escribiendo la ecuación de Liouville de la siguiente manera:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_0, \rho \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{h}_I(t), \rho \right]$$
(5.2)

Debemos ser cuidadosos aquí, cuando analicemos el término \mathbf{h}_I , puesto que la parte dinámica es una función de los elementos de la matriz densidad, recordemos:

$$\mathbf{h}_I = h_{tl} + h_d \tag{5.3}$$

donde $h_d \propto \rho$ y que, mas precisamente, teniendo en cuenta los resultados de la Secc. 3.4.5, sabemos que $h_d = h_d^{(pop)}(\rho^{(pop)}) + h_d^{(coh)}(\rho^{(coh)})$. Si además expandimos la matriz densidad como una serie de potencias en E_0 :

$$\rho = \rho^{(0)} + E_0 \rho^{(1)} + E_0^2 \rho^{(2)} + \dots$$
(5.4)

ahora designemos al término del operador h_d que depende estrictamente de $\rho^{(r)}$ como $h_d^{(r)}$, entonces sustituyendo la Ec. 5.4 en la Ec. 5.2, pasando a forma matricial y juntando términos del mismo orden en E_0 encontramos que:

• a orden cero,

$$\frac{d\rho^{(0)}}{dt} - \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_0, \rho^{(0)} \right] = 0$$
(5.5)

• a primer orden,

$$\frac{d\rho^{(1)}}{dt} - \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_0, \rho^{(1)} \right] = \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_I^{(1)}(t), \rho^{(0)} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_I^{(0)}(t), \rho^{(1)} \right]$$
(5.6)

• para orden r,

$$\frac{d\rho^{(r)}}{dt} - \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_{0}, \rho^{(r)} \right] = \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_{I}^{(1)}(t), \rho^{(r-1)} \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_{I}^{(2)}(t), \rho^{(r-2)} \right] + \dots + \frac{1}{i\hbar} \left[\mathbf{H}_{I}^{(r)}(t), \rho^{(0)} \right].$$
(5.7)

Orden cero

Para orden cero en E_0 y en la base de los autoestados de \mathbf{H}_0 la Ec. 5.5 conduce a las ecuaciones para las poblaciones, $\rho_{bm,bm}^{(0)}$ que son las poblaciones en ausencia de perturbación.

Por otro lado para las coherencias $\rho_{b'm',bm}^{(0)}$, según la Ec. 5.5, estarán dadas por:

$$\frac{d}{dt}\rho_{b'm',bm}^{(0)} + \frac{i}{\hbar}(\epsilon_{b'm'} - \epsilon_{bm})\rho_{b'm',bm}^{(0)} = 0$$
(5.8)

por lo tanto si todas las coherencias son inicialmente nulas $(\rho_{b'm',bm}^{(0)} = 0)$ continuarán siendolo a todo tiempo. Si asumimos que este es el caso podremos suponer que los únicos términos no nulos de $\rho^{(0)}$ son las poblaciones (independientes del tiempo) $\rho_{bm,bm}^{(0)}$. El estado inicial del sistema es entonces especificado por estas poblaciones que suponemos conocidas. De hecho para un sistema en cuasiequilibrio térmico estas poblaciones estarán distribuidas de acuerdo a una distribución de Fermi-Dirac. Si ademas suponemos :

$$\rho_{v,m'm}^{(0)} \equiv \delta_{m'm} f_{v,m} \tag{5.9}$$

$$\rho_{c,m'm}^{(0)} \equiv \delta_{m'm} f_{c,m} \tag{5.10}$$

donde $f_{\lambda,m}$ es la función de Fermi-Dirac para la banda λ . Si además consideramos que las temperaturas son bajas comparadas con la temperatura de Fermi del sistema
se tiene que a orden $E_0^{(0)}$ la banda de valencia está completamente llena y la banda de conducción completamente vacía, es decir, $f_{v,m} \equiv 1$ y $f_{c,m} \equiv 0$

Primer orden

Aplicamos la Ec. 5.6 primero a las poblaciones y obtenemos para las coherencias intrabanda/poblaciones:

$$\frac{d\rho_{b'm',b'm}^{(1)}}{dt} = (\epsilon_{b'm} - \epsilon_{b'm'})\rho_{b'm',b'm}^{(1)} + \frac{1}{i\hbar}\sum_{n} \left[\langle b'm | \mathbf{h}_{d}^{pop(0)}(t) | b'm' \rangle \rho_{b'm',b'n}^{(1)} - \rho_{b'n,bm}^{(1)} \langle b'n | \mathbf{h}_{d}^{pop(0)}(t) | b'm' \rangle \right] + \frac{1}{i\hbar}\sum_{n} \left[\langle b'm | \mathbf{h}_{d}^{pop(1)}(t) | bn \rangle \rho_{bm',b'n}^{(0)} - \rho_{b'n,bm}^{(0)} \langle bn | \mathbf{h}_{d}^{pop(1)}(t) | b'm \rangle \right]$$
(5.11)

Se puede ver en las Ec. 4.8b y 4.8c que los términos con h_{tl} son acompañados por coherencias; como estamos estudiando perturbaciones a primer orden y el término h_{tl} es cuanto menos de primer orden tenemos que tomar coherencias a orden cero, las cuales ya se vio que son nulas, por lo tanto estos términos no son tomados en cuenta cuando escribimos $\mathbf{H}_{I}^{(0)}$ de la Ec. 5.6 para este caso particular. En la Ec. 5.11 tenemos términos con $h_{d}^{(pop)(0)}$ que por Ec. 3.52 resultan proporcionales a $\sum_{n} n[\rho_{bn,bn}^{(0)}]$, si suponemos que las bandas ocupadas $(\rho_{vm,vm}^{(0)})$ tienen una distribución simétrica en *m* estos términos se anulan. Por último los términos de interacción con $h_{d}^{(pop)(1)}$ van acompañados de coherencias intrabanda que a orden cero se suponen nulas $\rho_{bm',bm}^{(0)} = 0$. Por lo tanto observamos que:

$$\rho_{b'm',b'm}^{(1)}(t) = 0 \tag{5.12}$$

a todo tiempo t, esto quiere decir que a primer orden las poblaciones no cambian.

Si ahora analizamos las coherencias al mismo orden en la intensidad del campo TL y consideramos, al igual que en el caso de las poblaciones, que el elemento de

matriz de $h_d^{(pop)(0)}$ es nulo debido a la distribución simétrica en m, tenemos, con los mismos estado iniciales dados del sistema:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',cm}^{(1)} = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm'}) \rho_{vm'cm}^{(1)} \\ + \sum_{n} \left(\langle cm | h_d^{(coh)(1)} | vn \rangle + \langle cm | h_{tl} | vn \rangle \right) \rho_{v,m'n}^{(0)} \\ + \sum_{n} \left(\langle cm | h_d^{(coh)(0)} | vn \rangle \rho_{vm'n}^{(1)} + \rho_{v,nm}^{(1)} \langle cn | h_d^{(coh)((0)} | vn \rangle \right)$$
(5.13)

El tercer término del miembro derecho tiene elementos de matriz del tipo $\langle cm \mid h_d^{(coh)(0)} \mid vn \rangle$ que por la Ec. 3.50 son proporcionales a $\sum_n \rho_{vn',cn}^{(0)}$ y como sabemos que las coherencias a orden cero son nulas este término no entra en la ecuación. Entonces la ecuación nos queda:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',cm}^{(1)} = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm}) \rho_{vm'cm}^{(1)} + \left(\langle cm | h_d^{(coh)(1)} | vm' \rangle + \langle cm | h_{tl} | vm' \rangle \right)$$
(5.14)

finalmente la ecuación a resolver es:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',cm}^{(1)}(t) = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm}) \rho_{vm'cm}^{(1)}(t) + \left(\alpha I'_{m'-m}(r_1, r_2) \sum_n \rho_{v(m'-m+n),cn}^{(1)}(t) + \xi' \delta_{m'-m,-\ell} e^{-i\omega t}\right) (5.15)$$

Podemos notar aquí que de acuerdo al elemento de matriz que estemos teniendo en cuenta la ecuación puede o no tener fuentes, esto es debido a que solo aquellos elementos de matriz $\rho_{vm',cm}$ con $m' - m = -\ell$ incomporarán el último término de la ecuación, este término lleva consigo la dependencia temporal de la TL. Motivados por esta observación separamos el sistema del primer orden perturbativo para coherencias en dos familias de ecuaciones una para elementos de matriz que cumplan $m' - m = -\ell$ y otra para aquellos que cumplan $m' - m \neq -\ell$. Elementos de matriz que cumpen $m'-m\neq -\ell$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{vm',cm}^{(1)}(t) = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm}) \rho_{vm'cm}^{(1)}(t) + \left(\alpha I'_{m'-m}(r_1, r_2) \sum_n \rho_{v(m'-m+n),cn}^{(1)}(t) \right)$$
(5.16)

En la suma del último término los índices de los elementos de matriz corren de manera tal que solo se suma sobre aquellos que cumplan con la condición $m' - m \neq$ $-\ell$ por lo tanto serán solo elementos de este tipo los que esten acoplados por el sistema, esto justifica haber separado el sistema completo, ahora es claro que una familia quedara acoplada a la TL mientras que la otra no. Recordando que asumimos $\rho_{vm',cm}(0) = 0$ como condición inicial para las coherencias, el sistema nos indica que estas no evolucionarán en el tiempo.

Elementos de matriz que cumplen $m' - m = -\ell$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{v(m-\ell),cm}^{(1)}(t) = (\epsilon_{cm} - \epsilon_{vm}) \rho_{v(m-\ell),cm}^{(1)}(t) + \left(\alpha I'_{-\ell}(r_1, r_2) \sum_n \rho_{v(n-\ell),cn}^{(1)}(t) + \xi' e^{-i\omega t} \right)$$
(5.17)

Para esta familia vemos, también, que el término de la suma se encarga de acoplar elementos del mismo tipo, esto arroja un sistema acoplado con fuentes que provienen de la interacción con el campo de TL.

Capítulo 6

Conclusiones

En el trabajo hemos incorporado a la descripción de la dinámica de portadores en un QR fotoexcitado por un campo de TL la interacción del campo autoinducido \mathbf{A}_d en el marco de la aproximación MQS. Se utilizó una descripción de la interacción entre campos y portadores de carga dominada por el Hamiltoniano de acoplamiento mínimo que corresponde a un análisis semiclásico del sistema despreciando scattering de electrones y fonones. Aquí la interacción buscada se incorpora mediante la inclusión del campo \mathbf{A}_d en el Hamiltoniano junto al ya presente campo \mathbf{A}_{tl} correspondiente a la TL. Para lograr esto hubo que estudiar las corrientes inducidas en su expresión de segunda cuantificación, separándolas en contribuciones de poblaciones y coherencias. Las contribuciones de coherencias interbanda a la corriente poseen una oscilación rápida a la frecuencia del haz de TL, y una oscilación lenta asociada con el detuning. Luego se pudo obtener expresiones para \mathbf{A}_d en términos de la matriz densidad a través de las corrientes inducidas. La dinámica de dicha interacción se estudió mediante la ecuación de Liouville para la matriz densidad en el formalismo de segunda cuantificación, de aquí pudimos obtener el sistema de ecuaciones acopladas para los valores de expectación de los elementos de matriz del operador densidad sobre los estados iniciales. Este sistema, a diferencia del caso sin autoinducción, es no lineal en los elementos de la matriz densidad. Luego hicimos un análisis bajo las condiciones de baja excitación (baja intensidad del campo de TL) que nos permitió tratar al sistema de ecuaciones obtenido con un método perturbativo. Encontramos que al igual que en el caso sin autoinducción las poblaciones resultan ser de orden par en la intensidad del campo y las coherencias de orden impar. Se obtuvieron luego las ecuaciones a orden cero y a primer orden para las poblaciones y coherencias interbanda. Vimos que, a diferencia del caso sin autoinducción, el análisis perturbativo a primer orden para cierta familia de los elementos de matriz del operador densidad arroja un sistema lineal de ecuaciones diferenciales acoplado con fuentes relativas al campo de TL. Este sistema guarda similitud con el que se obtiene en el estudio de polarizaciones interbanda inducidas por campos monocromáticos coherentes en un semiconductor cuando se incluye la contribución Coulombiana [28] y que puede ser resuelto dando lugar a la aparición de excitones. Asimismo hemos encontrado un acoplamiento (débil) entre espines inducido por las corrientes de población. Como resultado final de este trabajo hemos obtenido un sistema de ecuaciones que permite el estudio de la evolución temporal de las coherencias a primer orden en la intensidad del campo de TL.

Algunas perspectivas para el futuro son el cálculo de otras magnitudes físicas relevantes como por ejemplo la susceptibilidad, investigar si la similitud del sistema acoplado hallado para las coherencias a primer orden con aquel que describe las polarizaciones interbanda con excitones tiene un origen físico común. También seria interesante realizar el análisis numérico del sistema completo como así también incluir efectos de decaimiento y desfasaje. Como perspectiva a largo plazo se puede plantear la obtención de una descripción completa del campo en la región encerrada por el anillo y analizar sus aplicaciones tecnológicas como por ejemplo el control de un espín ubicado en el centro del QR.

Bibliografía

- L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw and J. P. Woerdman, Phys. Rev. A 45, 8185, (1992).
- [2] Andrews D L, Structured light and its applications: An introduction to phasestructured beams and nanoscale optical forces Academic Press, (2008).
- [3] N. Ashcroft and N. Mermin Solid State Physics Saunders College, Philadelphia, PA, (1976).
- [4] Gerald Bastard Wave mechanics applied to semiconductos heterostructures, les éditions de physique, France, (1970).
- [5] Claude Cohen-Tannoudji, Vacques Dupont-Roc, Gilbert Grynberg Atom-Photon Interactions,
 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Germany, (2004).
- [6] M. B. Farias, G. F. Quinteiro and P. I. Tamborenea, The European Physical Journal B 86 (10), 432, (2013).
- [7] Gilbert Grynberg Introduction to Q uantum Optics, Cambridge University Press, UK, (2010).
- [8] Thomas Ihn, Semiconductor Nanostructures Oxford University Press (2011).

- [9] Shigeki KOBAYASHI, Chao JIANG, Takuya KAWAZU and Hiroyuki SAKAKI, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro, Tokyo 153-8505, Japan, (2004).
- [10] Shigeki Kobayashi, Chao Jiang, Takuya Kawazu and Hiroyuki Sakaki. The Japan Society of Applied Phisycs. Vol. 43, No. 5B, pp. L662-L664, (2004).
- [11] Ed T. Kuech. Handbook of Crystal Growth Vol. 3. 2nd Edition, Elsevier, pp1057–1099, (2015).
- [12] Axel Lorke, R. Johannes Luyken, Jorge M. Garcia and Pierre M. Petroff, Japanese Journal of Applied Physics, Volume 40, Part 1, Number 3B, (2001).
- [13] R.J. Nicholas Band Theory and Electronic Properties of Solids MT, (2011).
- [14] G. F. Quinteiro, EPL, 91, 27002, (2010).
- [15] G. F. Quinteiro and J. Berakdar, Opt. Express 17, 20465-20475, (2009).
- [16] G. F. Quinteiro, A. O. Lucero and P. I. Tamborenea, J. Phys. Condens. Matter 22, (2010).
- [17] G. F. Quinteiro, and P. I. Tamborenea, Europhys. Lett. 85 47001, (2009).
- [18] G. F. Quinteiro and P. I. Tamborenea, Phys. Rev. B 79, 155450, (2009).
- [19] G. F. Quinteiro and P. I. Tamborenea, Phys. Rev. B 82, 125207, (2010).
- [20] G. F. Quinteiro, D. E. Reiter, and T. Kuhn, Phys. Rev. A 91, 033808, (2015).
- [21] B. Sbierski, G.F. Quinteiro ,P.I. Tamborenea , Journal of Physics Condensed Matter 25 (38), 385301, (2013).
- [22] Tong et al. Nanoscale Research Letters, 7:520
 http://www.nanoscalereslett.com/content/7/1/520, (2012).

- [23] L.W. Yu, K.J. Chen,* J. Song, J. Xu, W. Li, X.F. Li, J.M. Wang, and X.F. Huang, National Laboratory of Solid State Microstructures and Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China, (2007).
- [24] G. F. Quinteiro and J. Berakdar, Vol. 17, No. 22, OPTICS EXPRESS 20465, (2009).
- [25] J. Courtial and K. O'Holleran, Eur. Phys. J. Special Topics 145 35, (2007).
- [26] R.J. Nicholas Band Theory and Electronic Properties of Solids MT, (2011).
- [27] David J. Jackson Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons Inc., USA, (1999).
- [28] Hartmut Haug, Stephan W. Koch Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors, World Scientific, Singapore, (2004).
- [29] Suhare Toshiaki Semiconductor Laser Fundamentals, Marcel Dekker, Inc., New York, (2004).
- [30] Harmut Haug, Antti-Pekka Jauho Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors, Springer Series in Solid-State Sciences, (1996).
- [31] Ferran Suarez, Daniel Granados, María Luisa Dotor and Jorge M García, Nanotechnology 15 S126–S130 PII: S0957-4484(04)69693-0 (2004)
- [32] Miles Padgett, Johannes Courtial, and Les Allen, Physics Today Vol. 57, Issue 5, 10.1063/1.1768672 (2004)