Tesis de Licenciatura

Un ejemplo de un número computable absolutamente normal

Santiago Figueira

Dirección: Verónica Becher
Jurado: Guillermo Martínez y Joos Heintz

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

15 de diciembre de 2000

1. Introducción

Un número real se dice *normal* en base q si para todo natural $n \geq 1$, toda secuencia de n dígitos aparece en el desarrollo fraccionario del número escrito en la base q con probabilidad q^{-n}. Por ejemplo, si un número es normal en la base 2 entonces la probabilidad de encontrar la cadena "0" y la cadena "1" en su desarrollo fraccionario será 2^{-1}, la probabilidad de encontrar las cadenas "00", "01", "10" y "11" será 2^{-2} y así sucesivamente. De esta manera, el número racional

$$0{,}1010101010101010101010101010...$$

no es normal en base 2 porque si bien la probabilidad de encontrar un "1" o un "0" es 2^{-1}, no es cierto que la probabilidad de encontrar la cadena "10" sea 2^{-2}. De hecho, en este ejemplo la probabilidad de encontrar tanto la cadena "10" como la cadena "01" es 2^{-1} y la probabilidad de encontrar la cadena "11", así como la cadena "00" es 0. Existen números irracionales que tampoco son normales en cierta base. Por ejemplo el número irracional

$$0{,}1010010001000010000010000001...$$

no es normal en base 2 ya que, por ejemplo, la probabilidad de encontrar la cadena "1" en el desarrollo fraccionario es 0 y la probabilidad de encontrar la cadena "0" es 1. Otro ejemplo es el número de Champernowne

$$0{,}12345678910111213141516171819...$$

que tiene la concatenación de todos los números naturales escritos en base 10. Se puede demostrar que este número es normal en base 10, pero no es normal en otras bases.

Un número real se dice *absolutamente normal* si es normal en toda base $q \geq 2$. Borel [1] demostró la existencia de números absolutamente normales. Más aún, probó que en el sentido de teoría de la medida, "casi todos" los números reales son absolutamente normales. Sin embargo, a pesar de que la probabilidad de que un número real sea absolutamente normal es 1, exhibir ejemplos de este tipo de números no ha sido fácil. Notemos que ningún número racional es absolutamente normal ya que $\frac{a}{b}$ con $a < b$, se escribe en la base b como

$$0.a000000000000000000000000000...$$

El primer ejemplo de número absolutamente normal fue dado por Sierpinski en 1916 [3], cuando el concepto de computabilidad aún no había sido dado (este último concepto data recién de 1936).

Un número real es *aleatorio* en el sentido de Chaitin si los dígitos de su expansión fraccionaria crecen de patrón, son impredecibles. Chaitin formaliza esta idea diciendo que los números reales aleatorios son aquellos en los que cada uno de los prefijos de la secuencia requieren una descripción casi tan larga como el prefijo mismo [2]. En suma, la noción de aleatoriedad de Chaitin (que coincide con la de Martin Löf y Solovay) es máxima incompresibilidad. Los ejemplos de números aleatorios son también ejemplos de números absolutamente normales. Esto se debe a que la propiedad de normalidad absoluta es una condición necesaria, aunque no suficiente, de aleatoriedad.

Recordemos que un número real es *computable* si existe una función computable que calcula cada uno de sus dígitos fraccionarios. Es decir, si existe $f : N \to N$ computable tal que para todo n, $f(n)$ devuelve el n-ésimo dígito fraccionario del número expresado en cierta base.

Chaitin [2] define Ω como la probabilidad de detención de una máquina universal y prueba que es aleatorio. Aunque la definición de Ω es conocida y sabemos que es un número real en el intervalo $(0, 1)$, no existe ningún procedimiento computable que nos permita exhibir sus dígitos fraccionarios. Es decir, Ω no es computable.

Las constantes fundamentales como π, $\sqrt{2}$, e y los números algebraicos irracionales son todos computables y se conjetura que son absolutamente normales. Pero no se ha podido probar que sean normales en base 10 y menos aún en todas las bases. Carecemos de un procedimiento efectivo que decida la absoluta normalidad.

En este trabajo daremos un ejemplo de un número computable y absolutamente normal. Nuestra definición se basa en la ingeniosa construcción que Sierpinski utilizó para definir su ejemplo de número absolutamente normal [3]. Sin embargo, Sierpinski no contempló cuestiones de finitud y computabilidad: su definición se basa en conjuntos infinitos y utiliza la noción de mínimo de un conjunto no numerable de puntos. El procedimiento en líneas generales es como sigue. Sierpinski define un conjunto Δ de ciertos intervalos del tipo (a, b) con a y b racionales. Estos intervalos están elegidos de manera que cubran a todos los números que no son normales en alguna base. Aunque el conjunto Δ tiene una cantidad infinita numerable de intervalos, éstos no cubren todo el intervalo $(0, 1)$. Más aún, prueba que todo número real del intervalo $(0, 1)$ que cae fuera de todos los intervalos de Δ es absolutamente normal.

¿Por qué no podemos utilizar directamente el número definido por Sierpinski? En su trabajo, este número ξ está definido como el mínimo número real del intervalo $(0, 1)$ que no pertenece a ningún intervalo de Δ. Aunque esta es una determinación efectiva de un número absolutamente normal, no queda dicho si ξ es computable o no. Lo que Sierpinski llamó *determinación efectiva* no coincide con la noción actual de computabilidad.

Nuestro trabajo parte del cubrimiento de Sierpinski: definiremos también nosotros un número real en $(0, 1)$ que no pertenezca a ninguno de los intervalos de Δ. Nuestra estrategia será aproximar Δ por medio de conjuntos finitos y usar una función de selección computable en vez del mínimo. Es decir, definiremos una sucesión computable Δ_k de conjuntos de intervalos que converge a Δ. Cada Δ_k estará formado por una cantidad finita de intervalos de Δ. De esta manera, la medida de cada Δ_k resulta computable. Definiremos el número ν en base 2, determinando cada uno de los dígitos de su expansión binaria,

$$\nu = 0.b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$$

y probaremos que ν no pertenece a Δ. El n-ésimo dígito de ν quedará determinado por un sencillo cálculo sobre el conjunto Δ_{p_n} apropiado, donde el índice p_n se obtendrá computablemente a partir de n.

Veamos brevemente como será el procedimiento para determinar los primeros dos dígitos de ν. Para determinar el primer dígito de ν, dividimos el intervalo $[0, 1]$ a la mitad y definimos los intervalos

$$c_0^1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ y } c_1^1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

de medida $\frac{1}{2}$ cada uno. Notar que, pensando en base 2, en c_0^1 existen sólo números cuyo primer dígito fraccionario es 0 y en c_1^1 existen sólo números cuyo primer dígito fraccionario es 1. Sabemos que ni Δ (ni ninguno de los Δ_k) cubren todo el intervalo $[0, 1]$. Por supuesto, todos los números del $[0, 1]$ que no pertenecen a los intervalos de Δ deben caer en los intervalos c_0^1 o c_1^1. La idea ahora es determinar un subconjunto de Δ, llamémoslo Δ_{p_1}, suficientemente grande (es decir, suficientemente parecido a Δ) como para asegurar que si Δ_{p_1} no cubre completamente un cierto intervalo entonces Δ tampoco lo hará. En la construcción, Δ_{p_1} deja sin cubrir un conjunto de medida mayor que cero en el intervalo $[0, 1]$. Deducimos que o bien la medida de Δ_{p_1} restringido a c_0^1 es menor que $\frac{1}{2}$ o bien la medida de Δ_{p_1} restringido a c_1^1 es menor que $\frac{1}{2}$ o bien se cumplen ambas a la vez. Por la forma en que elegimos p_1, con solo analizar la medida de Δ_{p_1} restringido a cada uno de los intervalos podemos identificar cuál de los dos intervalos, c_0^1 o c_1^1, es el que contiene un conjunto de medida mayor que cero no cubierto por Δ_{p_1} y, por lo tanto, no cubierto por Δ. Si el intervalo identificado es c_0^1 entonces existirán números reales no pertenecientes a los intervalos de Δ cuyo primer dígito fraccionario es 0 y por lo tanto definimos $b_1 = 0$. Si el intervalo identificado es c_1^1, definimos $b_1 = 1$.

Describamos ahora la determinación del segundo dígito de ν. La idea es la misma que la del paso anterior. Dividimos el intervalo identificado del paso anterior en dos mitades y definimos c_0^2 y c_1^2. Si por ejemplo $b_1 = 0$, dividimos el intervalo c_0^1 en dos y definimos

$$c_0^2 = \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ y } c_1^2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

En cualquier caso, los nuevos intervalos definidos serán de medida $\frac{1}{4}$. Por ejemplo, supongamos que ya hemos definido el primer dígito, $b_1 = 0$. Entonces todos los números reales del intervalo c_0^2 tienen la forma binaria " 0,00...", mientras que todos los del intervalo c_1^2 tienen forma " 0,01... ". Al igual que en el paso anterior, sabemos que es imposible que Δ cubra todo c_0^2 y todo c_1^2. Entonces, deben quedar números de esta porción de la recta real no pertenecientes a Δ, que deben caer en c_0^2 o en c_1^2. Nuevamente, determinamos un índice apropiado p_2 y calculamos Δ_{p_2}. Comparamos la medida de Δ_{p_2} restringido a c_0^2 con la medida de Δ_{p_2} restringido a c_1^2, y elegimos el intervalo que corresponde a la medida menor (si las medidas coinciden elegimos el de la izquierda). Si el intervalo elegido fue c_0^2 entonces existirán números reales no pertenecientes a Δ cuyo segundo dígito será 0. En este caso, definimos $b_2 = 0$. Si el intervalo elegido fue c_1^2 entonces existirán números reales no pertenecientes a Δ cuyo segundo dígito será 1, por lo que definimos $b_2 = 1$.

En general la determinación del n-ésimo dígito de ν dependerá de la definición del dígito anterior. Dividiremos $c_{b_{n-1}}^{n-1}$ a la mitad y definiremos los intervalos c_0^n y c_1^n, de medida $\frac{1}{2^n}$ cada uno. Al menos uno de los dos no estará completamente cubierto por Δ y siempre podremos decidir cual es. En el caso de que sea c_0^n, entonces b_n será 0, sino b_n será 1.

Enfaticemos que la definición de cada b_n se basa en la definición de b_{n-1} y en la comparación de la medida del conjunto Δ_{p_n} restringido a los intervalos c_0^n y c_1^n. Debido a que estas magnitudes son computables, habremos obtenido un procedimiento computable que nos permite definir dígito a dígito nuestro número real ν que no pertenecerá a Δ. Aplicando el resultado de Sierpinski, ν será absolutamente normal.

2. Resultado de Sierpinski de 1916

Utilizaremos la noción clásica de medida. La medida del intervalo $I = (a, b)$, con $a < b$ será notada como $\mu(I)$, y su valor será la longitud del segmento (a, b), o sea $b - a$. Usaremos también la noción de medida de un conjunto de intervalos J, notado como $\mu(J)$. Intuitivamente, la medida de J es la suma de las longitudes de los segmentos cubiertos por J. Por ejemplo, la medida del conjunto $J = \{(0, 2), (1, 4), (6, 9)\}$ es 7 pues los dos primeros intervalos cubren al $(0, 4)$, de medida 4 y el tercer intervalo cubre el $(6, 9)$, de medida 3.

Veamos ahora en detalle cual es la construcción dada por Sierpinski en su demostración [3]. En primer lugar, define $\Delta_{q,m,n,p}$ como el conjunto de todos los intervalos de la forma

$$\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}, \frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right) \tag{1}$$

tales que

$$\left|\frac{c_p(b_1, b_2, ..., b_n)}{n} - \frac{1}{q}\right| \geq \frac{1}{m} \tag{2}$$

en donde $0 \leq b_i \leq q - 1$ para $1 \leq i \leq n$ y donde $c_p(b_1, b_2, ..., b_n)$ representa la cantidad de veces que figura p entre los números $b_1, b_2, ..., b_n$. Por ejemplo si tomamos a $q = 2$, $m = 2$, $n = 2$ y $p = 0$, entonces resulta

$$\begin{aligned}\Delta_{q,m,n,p} &= \left\{\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{4} - \frac{1}{4}, \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{2}{4}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right)\right\} = \\ &= \left\{\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

porque de las cuatro combinaciones posibles de b_1 y b_2, las únicas que satisfacen

$$\left|\frac{c_p(b_1,\, b_2)}{n} - \frac{1}{q}\right| \geq \frac{1}{m}$$

son “00” y “11”. En efecto, la condición anterior sólo se verifica si $c_p(b_1, b_2) = 2$ o si $c_p(b_1, b_2) = 0$.

Notemos que para q, m, n y p fijos, existre una cantidad finita de intervalos de la forma (1) y por lo tanto $\Delta_{q,m,n,p}$ es un conjunto finito. Además la medida de cualquier intervalo perteneciente a $\Delta_{q,m,n,p}$ es igual a $\frac{3}{q^n}$ y este hecho es usado fuertemente en la demostración de Sierpinski. Cada intervalo (1) está definido de manera tal de incluir a todos los números que escritos en base q comienzan como $0.b_1b_2...b_n$. Es por eso que en el extremo derecho se suma $\frac{2}{q^n}$: haber sumado $\frac{1}{q^n}$ como en el extremo izquierdo no hubiera alcanzado.

Sierpinski define el conjunto de intervalos $\Delta(\varepsilon)$ como una unión de infinitos $\Delta_{q,m,n,p}$. Este conjunto depende de ε, un número del intervalo $(0, 1]$

que servirá para acotar la medida de $\Delta(\varepsilon)$. El conjunto $\Delta(\varepsilon)$ se define de la siguiente manera:

$$\Delta(\varepsilon) = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p}.$$

De la demostración de Sierpinski se sigue que $n_{m,q}(\varepsilon)$ debe ser un número suficientemente grande como para que $\mu(\Delta(\varepsilon)) < \varepsilon$:

$$n_{m,q}(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{24m^6q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 2.$$

Como ε aparece en el denominador, cuanto menor se quiera hacer $\mu(\Delta(\varepsilon))$, más grande deberá ser $n_{m,q}(\varepsilon)$.

Queremos que los intervalos de Δ cubran a los números del intervalo $(0,1)$ que no sean absolutamente normales. Esta voluntad se manifiesta en la condición (2). Intuitivamente, lo que esta condición pide es que el dígito p aparezca en *desproporción* dentro del desarrollo fraccionario del número $0.b_1b_2...b_n$ escrito en la base q. Esta desproporción significa que el dígito p aparece o bien menos o bien más de lo esperado para que el número sea normal en base q. En efecto, si el número es normal en base q, esperamos que el cociente entre la cantidad de veces que aparece el dígito p en el prefijo $0.b_1b_2...b_n$ (escrito en base q) y la longitud del prefijo sea lo más parecido posible a $\frac{1}{q}$. Pero Sierpinski define $\Delta_{q,m,n,p}$ de forma de cubrir los números que no son normales en bse q y por lo tento fuerza, mediante la condición (2) a cubrir números a los que no les pasa esto último. Así se entiende mejor la defuinición de $\Delta(\varepsilon)$: la variable q indica la base que se usa, la variable n indica la longitud de los prefijos en base q se se examinan y la variable m da una idea del grado de desproporción. Por último la variable p representa el dígito sobre el que se observa la desproporción.

Observemos que aunque la medida de $\Delta(\varepsilon)$ es menor que ε, ningún intervalo $J = (c,d)$ con $c < d$, incluido en el $(0,1)$ puede quedar sin cubrir por $\Delta(\varepsilon)$. En efecto, si esto ocurriera, entonces habría infinitos racionales pertenecientes a J que caerían fuera de todo intervalo de $\Delta(\varepsilon)$. Luego, no debemos pensar a $\Delta(\varepsilon)$ como un conjunto que deja sin cubrir intervalos del tipo J dentro del $(0,1)$. Más bien debemos pensarlo como un conjunto que deja sin cubrir una cantidad infinita no numerable de puntos irracionales aislados.

Notemos ni el 0 ni el 1 pertenecen a $\Delta(\varepsilon)$. En efecto, tomemos $q = 2$, $m = 2$ y $n = n_{m,q}(\varepsilon)$. Si $p = 0$ y $b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces el 0 cae en el intervalo $\left(\frac{-1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, que pertenece a $\Delta_{q,m,n,p}$. De la misma manera, si $p = 1$ y $b_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces el 1 pertenece al intervalo $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 + \frac{1}{2^n}\right)$, que pertenece a $\Delta_{q,m,n,p}$.

Para acotar la medida de $\Delta(\varepsilon)$, Sierpinski trabaja con la suma de las medidas de cada uno de los intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$ que aparecen en $\Delta(\varepsilon)$:

$$s(\varepsilon) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I \in \Delta_{q,m,n,p}} \mu(I)$$

y prueba que $s(\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1]$.

Sierpinski define $E(\varepsilon)$ como el conjunto de todos los reales del intervalo $(0,1)$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos contenidos en $\Delta(\varepsilon)$. Prueba que para todo $\varepsilon \in (0,1]$, todo real perteneciente a $E(\varepsilon)$ es absolutamente normal. Notar que como $s(\varepsilon)$ es una cota superior de $\mu(\Delta(\varepsilon))$, lo que se está probando es que $\mu(\Delta(\varepsilon))$ se puede hacer tan chica como se quiera. Pero entonces la medida de $E(\varepsilon)$ (que obviamente es mayor que $1-\varepsilon$) se puede hacer tan cercana a 1 como se quiera. Esto quiere decir que la probabilidad de que un número perteneciente al intervalo $(0,1)$ sea absolutamente normal es 1.

Para terminar con su demostración, Sierpinski define ξ como el mínimo número real perteneciente a $E(1)$ y de esta forma ha determinado efectivamente un número absolutamente normal.

3. Un algoritmo para un número absolutamente normal

Nuestra construcción se basa en una observación esencial: el conjunto $\Delta(\varepsilon)$ es recursivamente enumerable. Trabajamos con los mismos conjuntos de intervalos definidos por Sierpinski pero, para simplificar la notación, dejamos fijo un $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ racional (o más generalmente computable) y renombramos:

$$\Delta = \Delta(\varepsilon)\,;\; s = s(\varepsilon)\,;\; n_{m,q} = n_{m,q}(\varepsilon)\,.$$

Definimos la sucesión computable Δ_k:

$$\Delta_k = \bigcup_{q=2}^{k+1} \bigcup_{m=1}^{k} \bigcup_{n=n_{m,q}}^{k \cdot n_{m,q}} \bigcup_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p}.$$

Definimos también las correspondientes cotas de la medida de cada término de la sucesión:

$$s_k = \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=n_{m,q}}^{k \cdot n_{m,q}} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I \in \Delta_{q,m,n,p}} \mu(I)\,.$$

Al aumentar k, Δ_k incluye más conjuntos $\Delta_{q,m,n,p}$ y s_k adiciona la medida de más intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$. Es evidente que $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ y que

$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \Delta$. Como s_k suma las medidas de todos los intervalos que aparecen en Δ_k, resulta $\mu(\Delta_k) \leq s_k$, e idénticamente resulta $\mu(\Delta) \leq s$. Además, se cumple que $s_k \leq s$ para todo natural k. Observemos por último que para todo par de naturales k y l tal que $k \leq l$ se verifica que $\Delta_k \subseteq \Delta_l$ y además cualquiera sea k se cumple que $\Delta_k \subseteq \Delta$.

Por último, definimos el error de aproximar a s por s_k:

$$r_k = s - s_k.$$

Datemos ahora una cota para r_k. Este resultado es crucial para nuestra construcción computable.

Teorema 1. *Sea k un número natural cualquiera. Entonces se verifica que* $r_k < \frac{5\varepsilon}{2k}$

Demostración. Definamos

$$S_{q,m,n} = \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}} \mu\left(I\right).$$

Veamos primero cual es la forma de r_k. Separando las sumatorias de la definición de s obtenemos

$$\begin{aligned} s \quad = \quad & \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}} S_{q,m,n} + \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} + \\ & + \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} + \sum_{q=k+2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pero el primer término de (3) es justamente s_k y por la definición de r_k resulta

$$\begin{aligned} r_k \quad = \quad & \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} + \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} + \\ & + \sum_{q=k+2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Veamos ahora cómo acotar cada uno de los tres términos que aparecen en la ecuación (5). De la demostración de Sierpinski [3] sabemos que

$$S_{q,m,n} < \frac{12m^4}{n^2}.$$

El tercer término de la ecuación (5) se puede acotar como

$$\sum_{q=k+2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} < 12 \sum_{q=k+2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m^4 \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right). \tag{5}$$

Ahora acotaremos $\sum\limits_{n=n_{m,q}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Para cualquier natural $i \geq 1$ se verifica

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{i} \tag{6}$$

y por la definición de $n_{m,q}$ resulta

$$n_{m,q} - 1 = \left\lfloor \frac{24m^6q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{24m^6q^2}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Por (6) y (7) resulta

$$\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{24m^6q^2}. \tag{8}$$

De (5) y (8) tenemos

$$\sum_{q=k+2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} < \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{q=k+2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) < \frac{\varepsilon}{k+1} < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{9}$$

De la misma manera, el segundo término de la ecuación (5) se puede acotar como

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}}^{\infty} S_{q,m,n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \right) \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2k}. \end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente, el primer término de la ecuación (5) se puede acotar como

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=k \cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=k \cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} \\ &< 12 \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^4 \sum_{n=k \cdot n_{m,q}+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Pero por la definición de $n_{m,q}$ tenemos que

$$kn_{m,q} = k \left(\left\lfloor \frac{24m^6q^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 2 \right) > \frac{24km^6q^2}{\varepsilon}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{kn_{m,q}} < \frac{\varepsilon}{24km^6q^2}. \tag{12}$$

Aplicando (6) en (11) y teniendo en cuenta la cota encontrada en (12), obtenemos la desigualdad

$$\sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k\cdot n_{m,q}+1}^{\infty} S_{q,m,n} < \frac{\varepsilon}{2k}\left(\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right) < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{13}$$

Finalmente, reemplazando en (5) las cotas encontradas en (9),(10) y (13) resulta

$$r_k < \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{k} = \frac{5\varepsilon}{2k}.$$

□

La cota hallada en el Teorema 1 nos permite afirmar lo siguiente:

Corolario 2. *El número real s es computable.*

Demostración. Definamos la secuencia de racionales en base 2 $a_n = s_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}}$. Por el Teorema 1 tenemos que

$$|s - a_n| = s - s_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}} = r_{5\varepsilon\cdot 2^{n-1}} < 2^{-n}.$$

Esto quiere decir que es posible aproximar a s por medio de una secuencia computable de racionales a_n tal que los primeros n dígitos de a_n coinciden con los primeros n dígitos de s. Por lo tanto, s es computable. □

La siguiente proposición nos da una cota de la medida de los conjuntos que no han sido enumerados en el paso k.

Proposición 3. *Para cualquier k natural se verifica*

$$\mu\left(\Delta - \Delta_k\right) \leq r_k.$$

Demostración. Como sabemos, Δ_k está incluido en Δ. Entonces, $\Delta - \Delta_k$ será un conjunto de intervalos cuya medida será menor o igual que la suma de las medidas de aquellos intervalos que pertenezcan a Δ y que no pertenezcan a Δ_k. Por lo tanto tenemos

$$\mu\left(\Delta - \Delta_k\right) \leq \sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}} \mu\left(I\right). \tag{14}$$

Por otro lado, la suma de los intervalos que pertenecen a $\Delta_{q,m,n,p}$ y a la vez no pertenecen a Δ_k se puede calcular como la suma de todos los intervalos de $\Delta_{q,m,n,p}$ menos la suma de aquellos que además pertenezcan a Δ_k:

$$\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}} \mu\left(I\right) = \sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}} \mu\left(I\right) - \sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}} \mu\left(I\right). \tag{15}$$

De (14) y (15) obtenemos

$$\mu\left(\Delta-\Delta_k\right)\leq s-\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right).$$

Pero

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_{m,q}}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right) &\geq \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)=\\ &= \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}}\mu\left(I\right)=s_k\end{aligned}$$

y por lo tanto deducimos que

$$\mu\left(\Delta-\Delta_k\right)\leq s-s_k=r_k.$$

$\square$

También podemos acotar la medida de la diferencia entre dos conjuntos enumerados en distintos pasos.

Proposición 4. *Para cualquier k y l naturales tales que $k\leq l$ se verifica*

$$\mu\left(\Delta_l-\Delta_k\right)\leq r_k-r_l.$$

Demostración. Siguiendo la misma idea de la Proposición 3 vemos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\Delta_l-\Delta_k\right) &\leq \sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\notin\Delta_k}}\mu\left(I\right)=\\ &= s_l-\sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)\end{aligned}$$

y que por ser $k\leq l$

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{l+1}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=n_{m,q}}^{l\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right) &\geq \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{\substack{I\in\Delta_{q,m,n,p}\\ I\in\Delta_k}}\mu\left(I\right)=\\ &= \sum_{q=2}^{k+1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=n_{m,q}}^{k\cdot n_{m,q}}\sum_{p=0}^{q-1}\sum_{I\in\Delta_{q,m,n,p}}\mu\left(I\right)=s_k.\end{aligned}$$

Así, deducimos que

$$\mu\left(\Delta_l - \Delta_k\right) \leq s_l - s_k = s - s_k - (s - s_l) = r_k - r_l.$$

$\square$

En numerosas ocasiones utilizaremos la noción de conjuntos restringidos. Si c es un intervalo y J es un conjunto de intervalos, notaremos como $J \cap c$ al conjunto J restringido a c, es decir, a los reales que caen dentro de algún intervalo de J que también caen dentro de c. Más precisamente:

$$J \cap c = \{x \in \mathrm{R} : x \in c \wedge (\exists j \in J : x \in j)\}$$

Por ejemplo, si definimos $c = (0, 7)$ y consideramos el conjunto de intervalos $J = \{(0, 2), (1, 4), (6, 9)\}$, resulta $J \cap c = \{(0, 4), (6, 7)\}$. Esto se debe a que c cubre todo el $(0, 4)$ definido por los intervalos $(0, 2)$ y $(1, 4)$, pero cubre solo el $(6, 7)$ del subintervalo $(6, 9)$. En este caso, resulta $\mu\left(J \cap c\right) = 5$.

Lema 5. *Sea c un intervalo cualquiera y sea k un natural. Entonces se verifica que*

$$\mu\left(\Delta \cap c\right) \leq \mu\left(\Delta_k \cap c\right) + r_k.$$

Demostración. En primer lugar, veamos que

$$\Delta = \Delta_k \cup (\Delta - \Delta_k)$$

pues $\Delta_k \subseteq \Delta$ para cualquier k natural. Luego

$$\Delta \cap c = \left(\Delta_k \cup (\Delta - \Delta_k)\right) \cap c = (\Delta_k \cap c) \cup ((\Delta - \Delta_k) \cap c)$$

y por lo tanto

$$\Delta \cap c \subseteq (\Delta_k \cap c) \cup (\Delta - \Delta_k).$$

Tomando medida obtenemos

$$\mu\left(\Delta \cap c\right) \leq \mu\left(\Delta_k \cap c\right) + \mu\left(\Delta - \Delta_k\right).$$

Pero por la Proposición 3 tenemos que

$$\mu\left(\Delta \cap c\right) \leq \mu\left(\Delta_k \cap c\right) + r_k.$$

$\square$

Lema 6. *Sea un c intervalo cualquiera y sean k y l naturales tales que $k \leq l$. Entonces se verifica que*

$$\mu\left(\Delta_l \cap c\right) \leq \mu\left(\Delta_k \cap c\right) + r_k - r_l.$$

Demostración. Como $k \leq l$ resulta $\Delta_k \subseteq \Delta_l$ y entonces

$$\Delta_l = \Delta_k \cup (\Delta_l - \Delta_k) \, .$$

Luego

$$\Delta_l \cap c = (\Delta_k \cup (\Delta_l - \Delta_k)) \cap c = (\Delta_k \cap c) \cup ((\Delta_l - \Delta_k) \cap c)$$

y por lo tanto

$$\Delta_l \cap c \subseteq (\Delta_k \cap c) \cup (\Delta_l - \Delta_k) \, .$$

Tomando medida obtenemos

$$\mu (\Delta_l \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + \mu (\Delta_l - \Delta_k)$$

y de la Proposición 4 deducimos

$$\mu (\Delta_l \cap c) \leq \mu (\Delta_k \cap c) + r_k - r_l.$$

□

Lema 7. *$\mu (\Delta_k)$ es computable para cualquier k, y $\mu (\Delta_k \cap c)$ es computable para cualquier k y para cualquier intervalo $c = (a, b)$ con a y b racionales.*

Demostración. Δ_k es un conjunto finito de intervalos conocidos con extremos racionales. Se puede probar fácilmente que existe un algoritmo que calcula la medida de Δ_k y la medida de $\Delta_k \cap c$. □

Ahora sí podemos presentar la construcción para determinar dígito a dígito, en notación binaria, nuestro número absolutamente normal:

$$\nu = 0.b_1 \, b_2 \, b_3 ....$$

3.1. Determinación del primer dígito

Veamos cómo se puede calcular b_1. Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en dos intervalos c_0^1 y c_1^1 de medida $\frac{1}{2}$ cada uno, dónde

$$c_0^1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ y } c_1^1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Sea $p_1 = 5$. Por el Teorema 1 obtenemos

$$r_{p_1} < \frac{5\varepsilon}{2p_1} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

Como c_0^1 y c_1^1 son disjuntos es evidente que

$$\mu \left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + \mu \left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) \leq \mu \left(\Delta_{p_1}\right) \leq s_{p_1}. \tag{17}$$

Sumando $r_{p_1} + r_{p_1}$ en ambos lados de la desigualdad (17) y de la definición de r_{p_1} resulta

$$\begin{aligned}\left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1}\right) + \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}\right) &\leq s_{p_1} + r_{p_1} + r_{p_1} = \\ &= s + r_{p_1} < \varepsilon + r_{p_1}.\end{aligned} \tag{18}$$

Ahora bien, es imposible que ambos términos

$$\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1} \quad \text{y} \quad \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}$$

de la ecuación (19) sean mayores o iguales que $\frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2}$, porque de ser así, tendríamos el siguiente absurdo:

$$\begin{aligned}\varepsilon + r_{p_1} &= \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} + \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} \leq \\ &\leq \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) + r_{p_1}\right) + \left(\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) + r_{p_1}\right) < \varepsilon + r_{p_1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Entonces al menos uno de los términos $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_i^1\right) + r_{p_1}$ debe ser menor que $\frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2}$. Es decir, sabemos que la siguiente proposición es verdadera:

$$\left[\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} - r_{p_1}\right] \vee \left[\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} - r_{p_1}\right]$$

Si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) = \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirán las dos condiciones simultáneamente, si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) < \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirá la primera y, por último, si $\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) > \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right)$, se cumplirá la segunda. De esta manera, definimos b_1 como:

$$b_1 = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_0^1\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_1^1\right) \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

De lo dicho anteriormente y de (16) tenemos que

$$\mu\left(\Delta_{p_1} \cap c_{b_1}^1\right) + r_{p_1} < \frac{\varepsilon + r_{p_1}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

y aplicando el Lema 5 obtenemos

$$\mu\left(\Delta \cap c_{b_1}^1\right) < \frac{1}{2} = \mu\left(c_{b_1}^1\right).$$

Esto quiere decir que la unión de todos los intervalos pertenecientes a Δ nunca podrá cubrir todo el intervalo $c_{b_1}^1$, cuya medida es justamente $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, existirán números reales del intervalo $c_{b_1}^1$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos de Δ. Debido a la definición del intervalo $c_{b_1}^1$, todos estos números reales tendrán como primer dígito binario a b_1.

3.2. Determinación del n-ésimo dígito, para $n > 1$

Asumamos que hemos calculado $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ y que en cada paso m $(1 \leq m < n)$ hemos elegido a p_m como

$$p_m = 5 \cdot 2^{2m-2}. \tag{20}$$

Asumamos también que

$$\mu\left(\Delta_{p_{n-1}} \cap c_{b_{n-1}}^{n-1}\right) + r_{p_{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right). \tag{21}$$

Probemos que si elegimos a p_n como $p_n = 5 \cdot 2^{2n-2}$, podemos garantizar que

$$\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_{b_n}^{n}\right) + r_{p_n} < \frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right)$$

y que podemos determinar computablemente a b_n.

Dividamos el intervalo $c_{b_{n-1}}^{n-1}$ en dos partes iguales de longitud $\frac{1}{2^n}$ cada una:

$$c_0^n = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}, \frac{1}{2^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}\right] \text{ y } c_1^n = \left[\frac{1}{2^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}, \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{2^j}\right].$$

Notar que estos intervalos escritos en binario no son otra cosa que

$$\begin{aligned} c_0^n &= [0.b_1 \ b_2 \ ... \ b_{n-1} \ , \ 0.b_1 \ b_2 \ ... \ b_{n-1} \ 1] \text{ y} \\ c_1^n &= [0.b_1 \ b_2 \ ... \ b_{n-1} \ 1 \ , \ 0.b_1 \ b_2 \ ... \ b_{n-1} 111111...]. \end{aligned}$$

Definamos

$$p_n = 5 \cdot 2^{2n-2}. \tag{22}$$

Al ser c_0^n y c_1^n dos intervalos disjuntos que cubren exactamente el intervalo $c_{b_{n-1}}^{n-1}$, resulta

$$\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_0^n\right) + \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_1^n\right) = \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_{b_{n-1}}^{n-1}\right).$$

Teniendo en cuenta que $p_n \geq p_{n-1}$ y aplicando el Lema 6 obtenemos

$$\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_0^n\right) + \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_1^n\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_{n-1}} \cap c_{b_{n-1}}^{n-1}\right) + r_{p_{n-1}} - r_{p_n}. \tag{23}$$

Luego, sumando $r_{p_n} + r_{p_n}$ en ambos lados de la desigualdad (23) tenemos

$$\left(\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_0^n\right) + r_{p_n}\right) + \left(\mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_1^n\right) + r_{p_n}\right) \leq \mu\left(\Delta_{p_{n-1}} \cap c_{p_{n-1}}^{n-1}\right) + r_{p_{n-1}} + r_{p_n}$$

y por (21) resulta

$$\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+r_{p_n}\right)+\left(\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)+r_{p_n}\right)<\frac{\varepsilon+h_n}{2^{n-1}}. \tag{24}$$

donde $h_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}\cdot r_{p_j}$. Para evitar un absurdo en la desigualdad (24), alguno de los términos $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)+r_{p_n}$ o $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)+r_{p_n}$ debe ser menor que $\frac{\varepsilon+h_n}{2^n}$. Esto quiere decir que la siguiente proposición es verdadera:

$$\left[\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)<\frac{\varepsilon+h_n}{2^n}-r_{p_n}\right]\vee\left[\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)<\frac{\varepsilon+h_n}{2^n}-r_{p_n}\right]$$

Si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)=\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$, se cumplirán las dos condiciones simultáneamente, si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)<\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$ se cumplirá la primera y, por último, si $\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)>\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)$, se cumplirá la segunda. Teniendo esto en cuenta, definimos b_n como el primer índice i correspondiente al intervalo c_i^n que esté menos cubierto por Δ_{p_n}, es decir

$$b_n=\begin{cases}0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_0^n\right)\le\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_1^n\right)\\ 1 \text{ en caso contrario}\end{cases}$$

Por (20), (22) y el Teorema 1 tenemos

$$\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}<\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{j-1}}{2^{2j-1}}=\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{n}2^{-j}<\varepsilon$$

pues la sumatoria $\sum_{j=1}^{n}2^{-j}$ es menor que 1 para todo natural n. De esto último y de la definición de b_n obtenemos

$$\mu\left(\Delta_{p_n}\cap c_{b_n}^n\right)+r_{p_n}<\frac{1}{2^n}\left(\varepsilon+\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}\cdot r_{p_j}\right)<\frac{2\varepsilon}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$$

y aplicando el Lema 5 deducimos

$$\mu\left(\Delta\cap c_{b_n}^n\right)<\frac{1}{2^n}=\mu\left(c_{b_n}^n\right).$$

Esto significa que es imposible que el conjunto Δ cubra todo el intervalo $c_{b_n}^n$. Entonces deben existir números reales del intervalo $c_{b_n}^n$ que no pertenecen a ninguno de los intervalos de Δ.

Teorema 8. *El número ν es computable y absolutamente normal.*

Demostración. Como los únicos cálculos que se deben tener en cuenta en la construcción anterior son las medidas de los conjuntos $\Delta_{p_n} \cap c^n_{b_n}$, por el Lema 7 deducimos que este mecansimo decide efectivamente en una cantidad finita de pasos cada uno de los dígitos b_n. Así, ν resulta computable.

Probemos ahora que $\nu \notin \Delta$. Por el absurdo, supongamos que $\nu \in \Delta$. Como Δ es un conjunto de intervalos abiertos, debe existir un intervalo abierto $I \in \Delta$ tal que $\nu \in I$. Consideremos los intervalos

$$c^1_{b_1}, c^2_{b_2}, c^2_{b_3}, ... \tag{25}$$

Por nuestra construcción, ν pertenece a todo $c^n_{b_n}$. Llamemos c al primer intervalo $c^n_{b_n}$ de la secuencia (25) tal que $c^n_{b_n} \subset I$. Se puede asegurar la existencia de tal intervalo pues I es un intervalo abierto y la medida de $c^n_{b_n}$ tiende a cero a medida que aumentamos n. Pero entonces el intervalo c queda cubierto por Δ y esto se contradice con nuestra construcción. Efectivamente, en cada paso n sea segura la elección de un intervalo $c^n_{b_n}$ que no queda totalmente cubierto por Δ. El absurdo vino de suponer que $\nu \in \Delta$. Por lo tanto ν no pertenece a Δ y aplicando el resultado de Sierpinski, ν resulta absolutamente normal. $\square$

En la sección 5 daremos un algoritmo para computar ν fijando $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Distintos ε del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ pueden dar lugar a distintos números ν, pero todos serán absolutamente normales.

3.3. Acerca del número ξ de Sierpinski

Terminamos esta sección con algunas observaciones acerca de ξ, el número absolutamente normal definido por Sierpinski:

$$\xi = \text{mín}\left\{x \in \mathbb{R} : x \in (0,1) \wedge (\forall I \in \Delta(1) : x \notin I)\right\}.$$

Como vemos, Sierpinski define ξ fijando $\varepsilon = 1$. En nuestra construcción, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ y por lo tanto no construimos $\Delta(1)$. El número ξ se nos escapa. Sin embargo, la idea del número de Sierpinski se puede generalizar a:

$$\xi = \text{mín}\left\{x \in \text{R} : x \in (0,1) \wedge (\forall I \in \Delta(\varepsilon) : x \notin I)\right\}$$

y nosotros podríamos modificar nuestra construcción para elegir a ε en el intervalo $(0,1)$ definiendo

$$p_n = \left\lfloor \frac{5 \cdot 2^{2n-2}\varepsilon}{1-\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Si ahora restringimos ε a cualquier real computable del intervalo $(0,1)$, esta última definición de ξ equivale en nuestra construcción a definir cada uno de sus dígitos fraccionarios binarios del siguiente modo:

$$b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu\left(\Delta_{p_n} \cap c_0^n\right) < \frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right) - r_{p_n} \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases} \tag{26}$$

Efectivamente, en cada paso n nos fijamos si ξ cae en c_0^n o en c_1^n y de esta manera logramos definir cada dígito de su desarrollo binario. Supongamos que el número

$$\frac{1}{2^n}\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j}\right) - r_{p_n}$$

fuese computable e irracional. Utilizando la definición de b_n dada en (26), podríamos afirmar que ξ es computable. Sin esta hipótesis, podemos afirmar una propiedad más débil: ξ es *computable enumerable*.

Un número real es computable enumerable si existe una secuencia computable no decreciente de racionales que converge a dicho número. Si un número es computable entonces es computable enumerable, pero el recíproco no es cierto. Puede ocurrir que un número real sea aproximable desde abajo por una secuencia no decreciente de racionales pero que no exista una función computable que devuelva uno por uno sus dígitos fraccionarios. Esto último ocurre cuando no es posible acotar el error que cometemos al aproximar el número por la secuencia de racionales.

Veamos como se puede probar que ξ es computable enumerable, para cualquier real computable $\varepsilon \in (0, 1]$. Como Δ contiene una cantidad numerable de intervalos, entonces podemos recorrerlos uno por uno y en cada paso quedarnos con el primer racional del intervalo $[0, 1]$ que esté afuera de todos los intervalos vistos hasta el momento. Este procedimiento es claramente computable y determina una secuencia de racionales no decreciente que converge justamente a ξ. Esto prueba que ξ es computable enumerable. Sin embargo, debido a la forma de los intervalos de Δ, no parece sencillo acotar el error que cometemos al aproximar a ξ de la forma descripta, y por lo tanto no podemos asegurar que este método sea capaz de calcular uno por uno sus dígitos fraccionarios.

4. Otros números computables absolutamente normales

La construcción dada en la sección anterior define ν, un número real expresado en base 2. Siguiendo la misma idea podríamos definir números en otras bases. Para computar un número en base $q \geq 2$, debemos dividir los intervalos en q partes iguales. Así, para determinar el n-ésimo dígito definiremos los intervalos $c_0^n, c_1^n, ..., c_{q-1}^n$ de medida $\frac{1}{q^n}$ cada uno, en dónde

$$c_i^n = \left(\frac{i}{q^n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{q^j}, \frac{i+1}{q^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{q^j} \right)$$

para $0 \leq i \leq q-1$. Elegiremos p_n como $p_n = 5 \cdot (q-1) \cdot 2^{2n-2}$ y repitiendo los mismos pasos de la demostración anterior llegaremos a que debe existir un i tal que

$$\mu \left(\Delta_{p_n} \cap c_i^n \right) < \frac{1}{q^n} \left(\varepsilon + (q-1) \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \cdot r_{p_j} \right) - r_{p_n}.$$

Al igual que antes, definimos b_n como el primer índice correspondiente al intervalo menos cubierto por Δ_{p_n}. Es decir, definimos b_n como

$$b_n = \min_{0 \leq i \leq q-1} \left\{ i : \left(\forall j : 0 \leq j \leq q-1 : \mu \left(\Delta_{p_n} \cap c_i^n \right) \leq \mu \left(\Delta_{p_n} \cap c_j^n \right) \right) \right\}.$$

De esta manera, es posible modificar la construcción para computar números absolutamente normales en bases dadas cualesquiera. En principio estos números serán distintos entre sí y también serán ejemplos de números computables absolutamente normales.

Veamos ahora como hacer para obtener números absolutamente normales que comiencen con una cadena finita arbitraria de dígitos. Supongamos que queremos computar un número absolutamente normal que comience con los dígitos $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ escritos en alguna base. Se debe definir al principio la cadena $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ y a continuación computar los dígitos ya conocidos de ν. Obviamente esto último se puede hacer cuando el prefijo está escrito en binario, pero se generaliza para cualquier base q si, en lugar de computar ν, computamos algún número en base q (siguiendo lo explicado más arriba). Este nuevo número será absolutamente normal porque la inclusión de una cantidad finita de dígitos no afecta lo asintótico de la definición de absoluta normalidad. Sin embargo, es posible que este número así definido caiga dentro de algún intervalo de Δ. Esto no es una contradicción, recordemos que Δ deja sin cubrir números absolutamente normales pero cubre infinitos otros que también lo son.

Para terminar, mencionemos que si tomamos un número computable absolutamente normal y fijamos un intercambio de sus dígitos, entonces el nuevo número obtenido también resulta computable y absolutamente normal. Es decir, si sabemos que el número escrito en la base q

$$0.b_1\ b_2\ b_3\ ...$$

es absolutamente normal y tenemos una función $f : \{0, 1, ..., q-1\} \to \{0, 1, ..., q-1\}$ biyectiva, entonces

$$0.f(b_1)\ f(b_2)\ f(b_3)\ ...$$

también es absolutamente normal. Sin embargo, es posible que este número pertenezca a algún intervalo de Δ.

5. Una codificación del algoritmo

Damos a continuación un algoritmo (no necesariamente eficiente) que computa ν siguiendo la misma estrategia que vimos en la construcción de la sección 3.

```
Procedure AbsNorm ()
   var n, pn: integer
   var c0, c1, sel: Interval
   var Delta: ListOfIntervals
   var e: rational
   e:=1/2
   n:=1
   c0:=CreateInterval(0,1/2)
   c1:=CreateInterval(1/2,1)
   repeat forever
      pn:=5*2^(2*n-2)
      Delta:=ComputeDelta(pn,e)
      if Measure(Delta,c0)<=Measure(Delta,c1) then
         write(``0'')
         sel:=c0
      else
         write(``1'')
         sel:=c1
      end if
      c0:=CreateInterval(Left(sel),(Left(sel)+Right(sel))/2)
      c1:=CreateInterval((Left(sel)+Right(sel))/2,Right(sel))
      n:=n+1
   end repeat
end procedure

Function ComputeDelta (pn: integer, e: rational): ListOfIntervals
   var b: Sequence
   var l: ListOfIntervals
   var I: Interval
   for q:=2 to pn do
      for m:=1 to pn do
         for n:=n(m,q,e) to pn*n(m,q,e) do
            for p:=0 to q-1 do
               b:=CreateSequence(n,q)
```

```
            First(b)
            for i:=1 to 2^n do
               if abs(c(b,p)/n-1/q)>=1/m then
                  I:=SequenceToInterval(b)
                  Insert(l,I)
               end if
               Next(b)
            next i
         next p
      next n
   next m
 next q
 return (l)
end function
```

El procedimiento `AbsNorm` escribe (con el comando `write`) dígito a dígito el desarrollo fraccionario de ν en binario. En este algoritmo se fija $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pero recordemos que podemos utilizar cualquier ε del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ y en cualquier caso obtendremos un número absolutamente normal. La función `ComputeDelta` recibe como parámetro a p_n y calcula el conjunto Δ_{p_n} (implementado como una lista de intervalos).

A continuación incluimos algunas funciones auxiliares que se usan en el algoritmo. La función `Measure` recibe como parámetros un conjunto de intervalos Δ_k y un intervalo c y computa la medida de Δ_k restringido a c (o sea $\mu\left(\Delta_k \cap c\right)$). Las funciones `Intersection` y `Union` computan la intersección y unión entre dos intervalos e `IntervalMeasure(b)` devuelve la medida del intervalo `b`. Por último la función `n(m,q,e)` computa $n_{m,q}(\varepsilon)$.

```
Function Measure (l: ListOfIntervals, c: Interval): rational
   var i, j: integer
   var m: rational
   var stop: boolean
   i:=1
   while i<=Length(l)
      j:=i+1
      stop:=false
      while j<=Length(l) and not stop
         if IntervalMeasure(Intersection(l[i],l[j]))>0 then
            l[i]:=Union(l[i],l[j])
            Remove(l,j)
            stop:=true
         end If
         j:=j+1
```

```
      end while
      if not stop and j>Length(l) then i:=i+1
   end while
   m:=0
   for i:=1 to Length(l)
      m:=m+IntervalMeasure(Intersection(l[i],c))
   next i
   Return (m)
end function

Function Intersection (a: interval, b:interval): Interval
   var r as Interval
   if Left(a)<=Left(b) then
      if Right(a)<Left(b) then
         r:=CreateInterval(0,0)
      else
         if Right(a)>Right(b) then
            r:=CreateInterval(Left(b),Right(b))
         else
            r:=CreateInterval(Left(b),Right(a))
         end if
      end If
   else
      m:=Intersection(b,a)
   end if
   return (r)
end function

Function Union (a: Interval, b:Interval): Interval
   return (CreateInterval(min(Left(a),Left(b)),
           max(Right(a),Right(b))))
end function

Function IntervalMeasure(a: interval): rational
   return (Right(a)-Left(a))
end function

Function n(m:integer, q:integer, e:rational): rational
   return (Trunc(24*m^6*q^2/e)+2)
end function
```

Utilizamos el tipo `Interval` para representar a los intervalos abiertos de la forma (a, b) con a y b racionales y el tipo `ListOfIntervals` para representar a los conjuntos de intervalos. Asumimos que el tipo `Interval` tiene el constructor `CreateInterval` (que recibe como parámetros el extremo inferior y el extremo superior del intervalo que se quiere construir) y que si `c` es una variable de tipo `Interval`, entonces `Left(c)` devuelve el extremo inferior de `c` y `Right(c)` devuelve el extremo superior de `c`. Asumimos también que si `l` es de tipo `ListOfIntervals` entonces `Length(l)` devuelve la cantidad de elementos de la lista `l`; `l[i]` devuelve el elemento de la posición `i` dentro de la lista `l`; `Insert(l,c)` inserta el elemento `c` en la lista `l` y `Remove(l,i)` elimina de la lista `l` al elemento de la posición `i`. También utilizamos el tipo `Sequence` para representar secuencias finitas escritas distintas bases. El constructor `CreateSequence` recibe como parámetros la cantidad de dígitos de la secuencia y la base que se usará. La función `C(b,p)` devuelve la cantidad de ocurrencias del dígito `p` en la secuencia `b`. Si `b` es de tipo `Sequence`, entonces `First(b)` inicializa todos sus dígitos en 0 y `Next(b)` devuelve la siguiente secuencia en el orden normal. Por ejemplo, si `b` es la secuencia creada por `CreateSequence(5,2)` entonces el comando `First(b)` dejará `b` = 00000 y a medida que apliquemos `Next(b)` iremos obteniendo las secuencias 00000, 00001, 00010, 00011, 00100, ... Finalmente, la función `SequenceToInterval` toma una secuencia (de tipo `Sequence`) y la transforma en intervalos (de tipo `Interval`) de la siguiente manera: si `b` es la secuencia $b_1\ b_2\ ...\ b_n$ con base q, -y por lo tanto fue creada por `CreateInterval(n,q)`- entonces `SequenceToInterval(b)` devuelve el intervalo $\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}\, , \frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + ... + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right)$.

Agradecimientos

Hace un tiempo, Guillermo Martínez encontró en *Elementary Theory of Numbers*, de M. W. Sierpinski (1964), el siguiente párrafo:

> A number which is normal in any scale is called absolutely normal. The existence of absolutely normal numbers was proved by E. Borel. His proof is based on the measure theory and, being purely existential, it does not provide any method for constructing such a number. The first effective example of an absolutely normal number was given by me in the year 1916. As was proved by Borel almost all (in the sense of measure theory) real numbers are absolutely normal. However, as regards most of the commonly used numbers, we either know them not to be normal or we are unable to decide whether they are normal or not. For example we do not know whether the numbers $\sqrt{2}$, π, e are normal in the scale of 10. Therefore, though according to the theorem of Borel almost all numbers are absolutely normal, it was by no means easy to construct an example of an absolutely normal number. Examples of such numbers are fairly complicated.

Su inquietud y la dedicación de Verónica Becher fueron esenciales para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arthmetiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27:247–271, 1909.

[2] G. J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. *Assoc. Comput. Mach.*, 22:329–340, 1975.

[3] M. W. Sierpinski. Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective dún tel nombre. *Bull. Soc. Math. France*, 45:127–132, 1917.