



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Modelos computacionales demográficos comparados

Tesis de Licenciatura en
Ciencias de la Computación

Martín Sigal

L.U. 95/00

msigal@dc.uba.ar

Director

Dr. Pablo M. Jacovkis

Resumen

El interés por los modelos demográficos y, en general, por la dinámica poblacional, es tan antiguo como la civilización. Los estados organizados, desde su aparición, querían saber con cuántos habitantes contaban, para tener idea de cuántos se podían incorporar a los ejércitos y cuántos podían pagar impuestos. Yendo ya a los modelos matemáticos de población, en última instancia, la famosa serie de Fibonacci (de ocho siglos de antigüedad) se puede interpretar como un modelo demográfico sencillo, independientemente de otras características muy interesantes que tiene. Y hace dos siglos Malthus planteó desde una perspectiva matemática sus dudas sobre la viabilidad futura de la sociedad humana. Ya entrado el siglo XX, podemos mencionar las ecuaciones logística y de Lotka y Volterra y sobre todo (para este proyecto) las matrices de Leslie, que son una herramienta importante para la modelización computacional de la evolución de una población en el tiempo, y además gozan de interesantes propiedades teóricas.

En este proyecto se propone la implementación de modelos matemáticos de evolución de una población humana en el tiempo, clasificada por edades o grupos de edades, y ubicación geográfica, incluyendo o no inmigración y emigración. Los modelos estarán basados en generalizaciones de matrices de Leslie, y se aplicarán al análisis de diversos escenarios de evolución futura de la población de Argentina y otros países (del nivel de desarrollo de Argentina, de menor nivel de desarrollo y de mayor nivel de desarrollo). Se usarán datos de organismos nacionales competentes de los diferentes países, y se tendrá en cuenta la influencia en y de las necesidades y metas educativas y económicas. También se obtendrá la cantidad de docentes necesarios en Argentina luego de un período de 25 años, se analizarán los escenarios posibles luego de una epidemia o a partir de modificaciones en las tasas de crecimiento vegetativo. La comparación se llevará a cabo no solamente entre los países involucrados en el estudio sino también entre modelos de distinta complejidad, para medir la sensibilidad de los mismos (por ejemplo, considerando evolución anual de pirámides poblacionales por edad o por grupos de edades). Se analizará también, en los diversos escenarios, la eventual evolución, tanto computacional como teórica, hacia situaciones de equilibrio. El análisis se propone como un aporte al análisis de los posibles escenarios de futuro argentino a un horizonte a mediano y largo plazo (digamos entre 25 y 50 años, por lo menos).

Abstract

Interest in demographic models and, in general, in population dynamics, is as old as civilization. Organized states, from their appearance, wanted to know how many people lived in them, to have an idea of how many could be incorporated into the army and how many could pay taxes. In the mathematical models of population, ultimately, the famous Fibonacci series (eight centuries old) can be interpreted as a simple demographic model, independently of other characteristics that are very interesting. Two centuries ago, Malthus proposed from a mathematical perspective his doubts about the future viability of human society. In the twentieth century, we can mention the logistic and Lotka and Volterra's equations, and above all (for this project) Leslie matrices, which are an important tool for computer modeling of the evolution of a population over time, and also have interesting theoretical properties.

This project proposes the implementation of mathematical models of evolution of a human population over time, classified by age or age groups, and geographical location, including or not immigration and emigration. The models will be based on generalization of Leslie matrices, and they will be applied to the analysis of different scenarios of future evolution of the population of Argentina and other countries (with the level of development of Argentina, lower level of development and higher level of development). Data of competent national organisms of the different countries will be used, and we will consider the influence in and of the necessities and educational and economic goals. We shall also obtain the number of teachers needed in Argentina after a period of 25 years; the possible scenarios after an epidemic or from modifications in the rates of vegetative growth will be analyzed. The comparison will be not only carried out between the countries involved in the study but also between models of different complexity, to measure the sensitivity of them (for example, considering annual evolution of population pyramids by age or age groups). The likely evolution will also be analyzed, in the different scenarios, both computationally and theoretically, towards situations of equilibrium. The study proposes a contribution to the analysis of the possible scenarios of future of Argentina in a medium and long term (between 25 and 50 years, at least).

Agradecimientos

Quiero dedicar este trabajo a mi familia: Pablo, Marta y Nacho. Esta tesis es el final de un camino en el cual crecí como persona y profesional, donde tuve muchas alegrías y tristezas, pero en cualquiera de los casos siempre estuvieron conmigo, alegrándose (incluso mas que yo) con una materia aprobada y dándome fuerzas si las cosas no resultaban como las imaginaba. Sin ustedes no hubiera podido llegar hasta acá. Gracias.

Gracias Yuyi por el esfuerzo que pusiste en mí cuando mas lo necesitaba, y a Naty por acompañarme y apoyarme todos estos años.

Pablo Jacovkis, solo tengo palabras de agradecimiento ante el interés puesto sobre este trabajo y guiarme a lo largo de su desarrollo.

Índice

1	Introducción general	7
2	Objetivo	8
3	Modelos demográficos	9
3.1	Modelo exponencial (versión continua)	9
4	Implementación del modelo exponencial con estructura de edad	11
4.1	Introducción	11
4.2	Condiciones iniciales	12
4.3	Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad	12
5	Implementación del modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables	16
5.1	Introducción	16
5.2	Restricciones en el uso de las tasas de fecundidad y mortalidad variables (TFV y TMV)	17
5.3	Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables	19
6	Implementación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración	22
6.1	Introducción	22
6.2	Tasas de migración fija	22
6.2.1	Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración fija	24
6.3	Tasas de migración variable por edad	26
6.3.1	Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración variable por edad	26
7	Estimación de la población futura para cuatro países	29
7.1	Argentina	30
7.2	Bolivia	33
7.3	Brasil	35
7.4	EEUU	38
7.5	Conclusiones	40
8	Matrices de Leslie	42
8.1	Introducción	42
8.2	Descripción del modelo	42
8.3	Modelo exponencial con estructura de edad vs. matrices de Leslie	46
8.4	Distribución estable de edades y dinámica de crecimiento	47
8.5	Autovalor	50
8.6	Autovector	52
9	Caso Práctico: Reducción anual de las tasas de mortalidad móvil	56
9.1	Reducción de la tasa de mortalidad al nacer	56
9.2	Reducción de la tasa de mortalidad de personas de edad adulta	57
9.3	Conclusiones	59
10	Caso Práctico: Cantidad de docentes para el ciclo primario	60
11	Caso Práctico: Epidemia	63
11.1	Modelo SIR (discreto)	63
11.2	Fase 1	64
11.2.1	Resultados	65
11.3	Fase 2	67
11.3.1	Comparación de la población total original, Escenario 1 y Escenario 2 ...	70
11.4	Fase 3	70
12	Conclusiones y trabajo a futuro	74

12.1	Conclusiones.....	74
12.2	Trabajo a futuro	75
13	Datos.....	76
14	Información técnica	78
14.1	Descripción.....	78
14.2	Requerimientos.....	78
14.3	Archivos fuente	78
15	Glosario de términos.....	80
16	Referencias	81
17	Bibliografía adicional	83

1 Introducción general

A lo largo de la historia el tamaño de la población humana sufrió constantes cambios. Las pestes, epidemias, hambrunas, guerras, etc. redujeron en varias oportunidades la población mundial. Por otro lado, llegó un momento en el cual la tasa de natalidad fue muy superior a la de mortalidad, y de esta manera se generó una explosión demográfica mundial.

Desde los orígenes de la humanidad hasta el siglo XVIII los índices de mortalidad fueron muy altos, por lo cual se necesitó que los índices de natalidad fueran también elevados para evitar la extinción de la especie humana. Este equilibrio permitió, a lo largo de muchos siglos, un reducido crecimiento vegetativo.

Los índices de mortalidad (especialmente infantil) se redujeron sensiblemente en Europa, durante los siglos XVIII, XIX y primera mitad del XX, con la revolución industrial y el incremento de la urbanización. El avance científico y médico, las mejoras en las condiciones de higiene de la población, gracias a las nuevas infraestructuras sanitarias, el mejoramiento en el nivel alimenticio, tuvieron un papel fundamental en dicha reducción. Durante un largo período, denominado la “transición demográfica”, la natalidad no disminuyó con igual ritmo, lo que hizo que la población europea se cuadruplicara y la esperanza de vida se incrementara en 30 años^{1, 2}. Diferente fue el escenario para los países menos industrializados, donde las tasas de mortalidad se mantuvieron altas. Recién entre 1950 y 1990 se observa este proceso en los países en vías de desarrollo, pero la brecha entre natalidad y mortalidad fue superior a la del Viejo Continente o los Estados Unidos. De esta manera la población mundial se duplicó en tan solo 40 años, pasando de 2500 a 5000 millones de habitantes.

La enorme brecha entre las tasas de mortalidad y natalidad comenzó a reducirse, tanto en los países desarrollados como en los países en vías de desarrollo. En los primeros, mientras que las tasas de mortalidad se estabilizaron en niveles muy bajos, las tasas de natalidad experimentaron un brusco descenso por decisión propia de los padres. Esta disminución se debió principalmente al uso de métodos contraceptivos, a la entrada de las mujeres en el mercado de trabajo y el alto costo (en salud, educación, alimentación, etc.) que tenía la crianza de un nuevo hijo. Los hechos desmentían la teoría del economista inglés Malthus, que sostenía, en su Ensayo sobre el principio de la población³ (1798) que la población mundial crecería de manera geométrica, mientras que los alimentos lo harían en forma aritmética, hasta llegar a un punto en el cual los recursos no serían suficientes para la subsistencia.

El uso de los modelos demográficos se extendió en las últimas décadas ante el retraso en la transición demográfica de los países en vías de desarrollo, y la inquietud por un excesivo crecimiento de la población mundial. Esos modelos, bajo ciertos supuestos, permiten estimar la población futura, así como la del pasado. A partir de ellos diversos países pudieron prever las modificaciones de su población, lo que permitió tomar medidas para modificar las tendencias allí donde se lo creía necesario. Entre esos países se puede mencionar a la China que, dada su enorme población, adoptó una política antinatalista, impidiendo el nacimiento de más de un hijo por mujer y creando leyes para favorecer los matrimonios tardíos. Esa política, por otra parte, está causando problemas de envejecimiento de la población que las

autoridades chinas pretenden paliar permitiendo más hijos⁴. Como menciona Helmut Knolle⁵, la situación había sido muy diferente en Europa y América del Norte hacia fines del siglo XVIII, cuando era necesario un volumen considerable de población como mano de obra en las nuevas industrias. La tasa de mortalidad fue descendiendo allí al reducirse, entre otras, la mortalidad materna; gracias al descubrimiento de la causa de la fiebre puerperal por el médico austro-húngaro Ignaz Philipp Semmelweis cayó de 18% a 1%.

Otro ejemplo de intervención de los estados sobre la evolución de la población es el de la política natalista que aplicaron diversos países europeos para reconstruir sus pirámides de edad, especialmente del sexo masculino, después de las dos guerras mundiales. En los últimos años estas políticas natalistas han resurgido en países como Alemania e Italia debido a sus bajísimas tasas de natalidad, incluso inferiores a las de mortalidad.

2 Objetivo

En este trabajo se enfoca, a través de la modelación matemática computacional de la evolución demográfica de Argentina y otros países (de mayor, igual o menor desarrollo), posibles escenarios futuros bajo distintas hipótesis de fecundidad, mortalidad y migración.

A partir de la creación de un modelo, el cual nos permita estimar de una manera bastante precisa la población futura de cierta población, se analizarán y compararán la cantidad total de habitantes y distribución por edad para países con distinta industrialización. También se desarrollarán, a partir de dicho modelo, varios casos prácticos suponiendo, por ejemplo, una epidemia o una reducción en las tasas.

Salvo que se indique lo contrario, todos los datos que se utilizarán en este trabajo son extraídos de las distintas fuentes que se indican en la sección Datos.

3 Modelos demográficos

Los modelos demográficos nos permiten estimar cómo será la población transcurrida una cierta cantidad de años. Estos modelos intentan representar la realidad de la población a partir de la simulación de la dinámica de la misma. Entre estos modelos podemos mencionar al Exponencial y Logístico.

3.1 Modelo exponencial (versión continua)

Es amplia la variedad de modelos que intentan representar la evolución de una población. El modelo más simple incluye a parámetros tales como la tasa de fecundidad y de mortalidad, que miden el crecimiento vegetativo.

El ejemplo más conocido de este tipo de modelo fue el creado por Malthus en 1798. Se proponía inferir la población futura, a partir de su tamaño en un momento dado, aplicándole la diferencia entre las tasas de fecundidad y de mortalidad correspondientes a esa población. En este modelo las tasas de fecundidad y mortalidad se mantienen constantes con el paso del tiempo.

La diferencia entre las tasas recibe el nombre de tasa de crecimiento poblacional y se denota con la letra R . Podemos escribir el crecimiento poblacional con la siguiente función lineal, donde el número entero positivo t indica el tiempo a partir del tiempo inicial 0:

$$P(t) = P(t-1) * R = P(t-2) * R^2 = P(t-3) * R^3 = \dots\dots\dots = P(0) * R^t$$

La versión continua de este modelo recibe el nombre de “Modelo exponencial” y parte de los siguientes supuestos:

- Las tasas de fecundidad y mortalidad son constantes y no varían según la edad y/o sexo del individuo.
- La población es cerrada, o sea no se tiene en cuenta la emigración ni la inmigración en el modelo.
- Los nacimientos y muertes de los individuos se presentan de manera continua.
- Los recursos necesarios para el crecimiento de la población son ilimitados.

La ecuación diferencial que se utiliza para el modelo es la siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = R * P \quad (1)$$

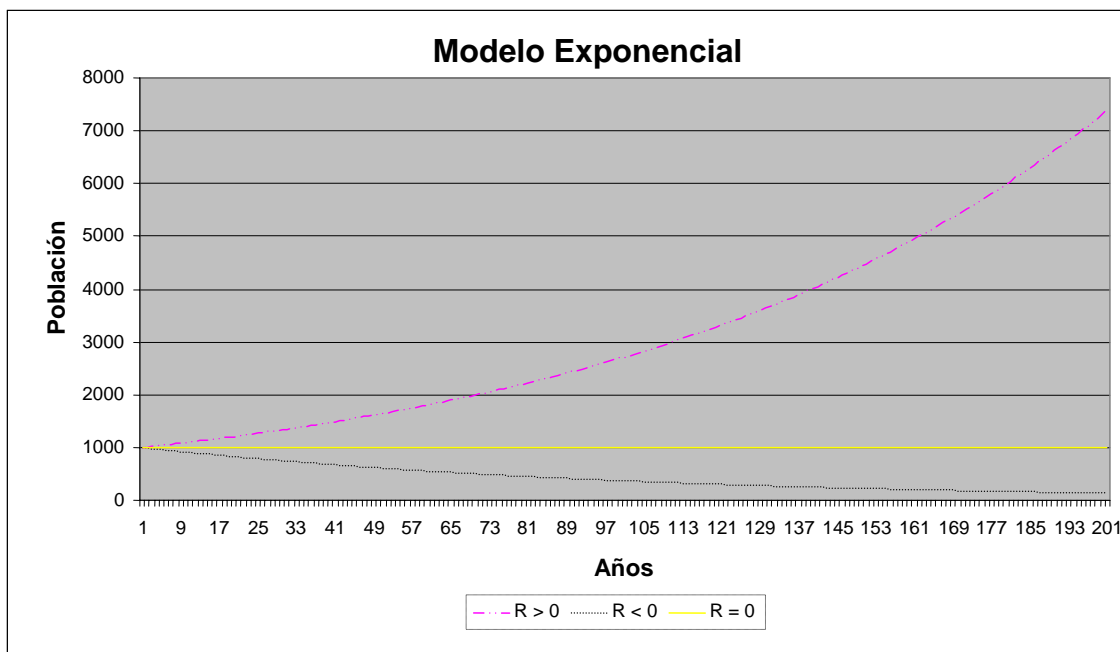
con condición inicial $P(0) = P_0$; esta ecuación diferencial tiene la siguiente solución y nos permite aproximar el tamaño de la población en el tiempo t :

$$P(t) = P_0 * e^{(R * t)}$$

Dependiendo el valor que tenga la tasa de crecimiento la población:

- Crecerá exponencialmente si $R > 0$,
- Decrecerá exponencialmente si $R < 0$ y
- No tendrá crecimiento si $R = 0$.

El siguiente gráfico muestra un ejemplo de la dinámica de 3 poblaciones a partir de una misma población inicial de 1.000 habitantes cada una y diferente tasa de crecimiento, $R = 0,01$, $R = -0,01$ y $R = 0$:



Además del modelo exponencial, podemos mencionar, a pesar que no se vaya a utilizar en este trabajo, al modelo logístico⁶. Este modelo, a diferencia del exponencial, no tiene como supuesto que los individuos de una población puedan tener acceso a recursos de manera ilimitada. De esta manera, sólo una cantidad limitada de individuos podrá sobrevivir en este ambiente más allá de la diferencia entre las tasas de fecundidad y de mortalidad. A medida que la población crezca en cantidad la tasa de crecimiento será cada vez menor, hasta llegar a la población máxima que puede “soportar” el ambiente, la cual se denomina “capacidad de carga”. En este punto el crecimiento es nulo. En la versión discreta de este modelo se pueden obtener resultados muy interesantes, ya que mediante un cambio de variables, produce oscilaciones y puede llegar al caos⁷.

4 Implementación del modelo exponencial con estructura de edad

4.1 Introducción

La información que cada país ofrece de su población, ya sea cantidad de individuos por sexo, tasa de fecundidad, mortalidad, migración interna y externa, se presenta de manera muy variable. Generalmente los países muestran como está compuesta su población diferenciándola por sexo. De esta manera se podría, por ejemplo, plantear un plan de reconstrucción de proporciones existentes del sexo masculino en Alemania antes de la segunda guerra mundial, o las del sexo femenino luego de una epidemia que afectara principalmente a mujeres. Muchas veces la información se encuentra totalizada en grupos quinquenales. De esta manera no se podrá hacer un estudio preciso, y se deberá recurrir por ejemplo, a la interpolación para transformar estas tablas en otras divididas en años simples si es que el modelo propuesto lo requiere.

El modelo exponencial con estructura de edad que se desarrolló mantiene la misma dinámica, de forma discretizada, que (1). Pero mientras que en ese caso sólo se tiene en cuenta la población total de individuos, ya que no existe ninguna agrupación de las personas por edad, el modelo planteado diferencia grupos de edades simples. Ambos modelos son usados en un Δt de un año.

A continuación se detalla el modelo exponencial con estructura de edad desarrollado:

$$\begin{aligned} Pob_{n+1}(0) &= \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * TF(E)) , \\ Pob_{n+1}(E) &= Pob_n(E-1) * (1 - TM(E-1)) , \\ Pob_{n+1}(U) &= Pob_n(U-1) * (1 - TM(U-1)) + Pob_n(U) * (1 - TM(U)) \end{aligned}$$

Modelo demográfico *Modelo1*

donde:

U es la edad máxima tenida en cuenta en el modelo, e incluye en su valor a las edades mayores a U ,

E es la edad de una persona donde $E = 1 \dots U - 1$, es decir con excepción de las edades borde (0 y U),

$Pob_n(X)$ representa la población que en el año n tenía la edad X ,

$TF(E)$ es la tasa de fecundidad de una mujer de edad E , siendo $0 \leq TF(E) \leq 1 \forall E$,

$TM(E)$ es la tasa de mortalidad de una persona de edad E y $0 \leq TM(E) \leq 1 \forall E$, y

$E1$ y $E2$ representan las edades mínimas y máximas respectivamente que se estiman como años de fertilidad de la mujer^a.

^a Estas edades ($E1$ y $E2$) son en realidad los límites inferior y superior, fuera de los cuales la cantidad de hijos nacidos es despreciable.

La primera ecuación del modelo determina la cantidad de nuevos nacimientos. Estos nuevos individuos, que tendrán edad 0 , serán calculados en base a la población de mujeres en el año anterior y su tasa de fecundidad. Para simplificar, supondremos que la población femenina es igual a la masculina, o sea tomar como factor de $TF(E)$ la población total de edad E consiste simplemente como valor de $TF(E)$ la mitad de la tasa de fecundidad.

La segunda ecuación determina la cantidad de personas de edad E que habrá en un año dado a partir de las personas que el año anterior tenían edad $E-1$ y que sobrevivieron al finalizar ese año.

La última ecuación determina cuantas personas hay de edad máxima en un año dado. Estas personas se obtendrán como las personas de edad $U-1$ y U que sobrevivieron al finalizar el año anterior.

4.2 Condiciones iniciales

El modelo propuesto requiere de los siguientes datos para un año y una ciudad o país dado. Estos valores son la condición inicial del modelo:

$Pob_0(E)$ para $E = 0 \dots U$

Se requiere una población inicial Pob_0 para cada sexo de edad E .

Las tasas de fecundidad y mortalidad del modelo son los parámetros del mismo.

$TF(E)$ para $E = E1 \dots E2$

Se requiere la tasa de fecundidad de una mujer de edad E .

$TM(E)$ para $E = 0 \dots U$

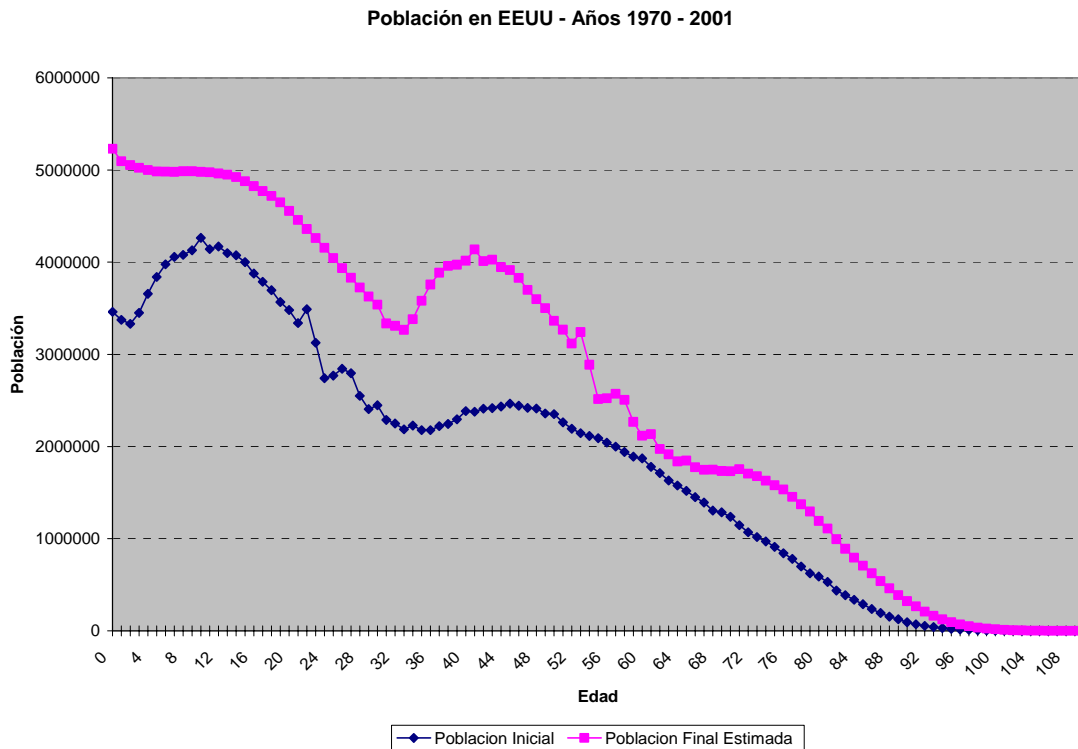
Se requieren las tasas de mortalidad para una persona de edad E (sin diferenciar el sexo de la persona). En el caso que se cuente con esta información dividida por sexo, deberá ser promediada.

Obsérvese que al no figurar en el modelo valores de inmigración o emigración, el modelo no tiene condiciones “de contorno”. Este modelo se puede representar en forma de matriz de Leslie, como veremos en el capítulo Matrices de Leslie.

4.3 Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad

Apliquemos este modelo a la población existente en Estados Unidos con los datos del año 1970, para verificar luego las diferencias con la población de ese país en 2001. Cabe remarcar que para este modelo no se ha tenido en cuenta la migración, que generalmente en el caso de países industrializados, como Estados Unidos, representa una variable importante.

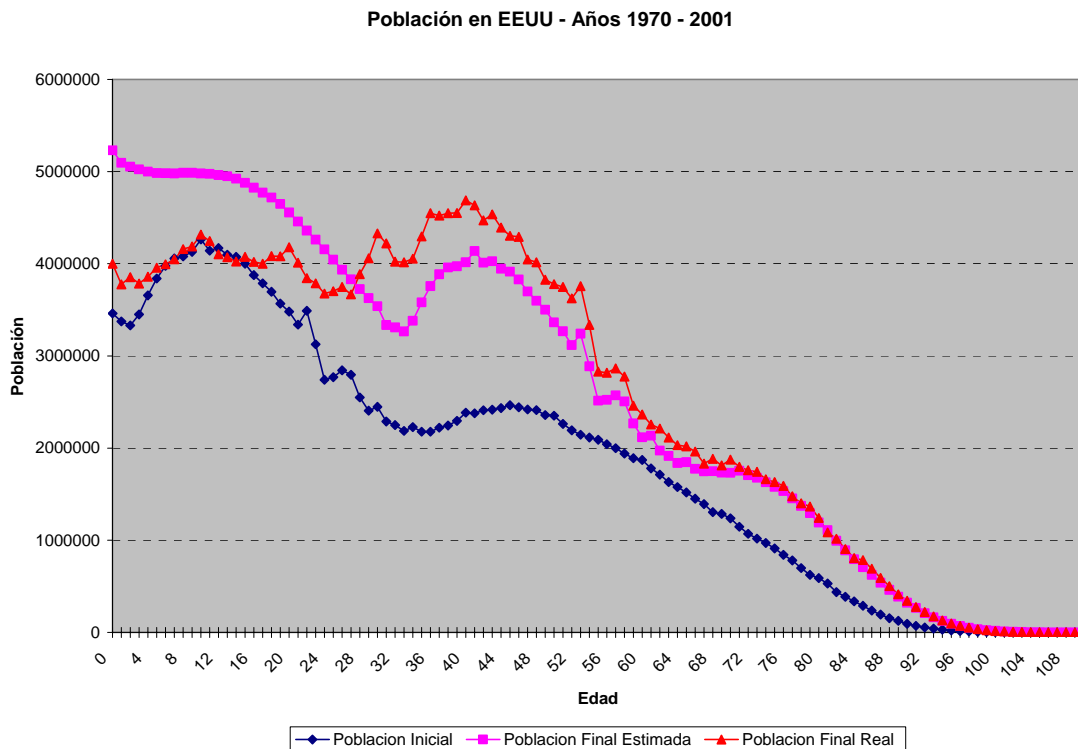
En el siguiente gráfico se puede observar la población inicial para cada edad y la población final estimada según las tasas de mortalidad y fecundidad de 1970:



GráficoResultado1 – Comparación de la Población Inicial de 1970 y la Estimada de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad fijas.

Como se puede ver en el gráfico anterior, las altas tasas de fecundidad existentes en el año 1970 hacían suponer que la población joven (hasta 25 años) iba a tener un fuerte incremento. De esta manera, este segmento de la población crecería un 30% en tan sólo 31 años, pasando de 96 a 125 millones.

En el siguiente gráfico se agrega a las poblaciones del gráfico anterior la población real de Estados Unidos en 2001.



GráficoResultado2 – Comparación de la Población Inicial de 1970, Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad fijas.

Se observa en el gráfico anterior que la población real joven (hasta 25 años) de Estados Unidos en 2001 casi no sufrió modificaciones con respecto a la población inicial. Las tasas de fecundidad fueron notablemente menores a las esperadas.

En cambio la población de edad intermedia (entre 26 y 55 años) tuvo un incremento en relación a la población inicial cercano al 57%, pasando de 70 a 123 millones de personas. Esto se debió principalmente a una marcada disminución de las tasas de mortalidad.

La población de edad real adulta (más de 55 años) fue levemente superior a la inicial (aunque similar a esta). Al igual que para la población de edad intermedia esto se debió a las bajas tasas de mortalidad.

El siguiente cuadro compara la población estimada luego de aplicar el Modelo exponencial con estructura de edad y la población real. En este cuadro se analizará la diferencia que existe entre ambas y el porcentaje que representa esa diferencia con respecto a la población real. Para este estudio se tendrá en cuenta la población total de cada una y la cantidad de personas que hay para cada uno de los 3 segmentos de edad (Población joven, Población de edad intermedia y Población adulta):

	P. Estimada	P. Real	Diferencia	%
Hasta 25 años	124.778.784	103.847.237	20.931.547	20,16
Entre 26 y 55 años	108.171.587	122.752.448	14.580.861	11,88
Más de 55 años	53.528.302	57.223.647	3.695.345	6,46
Total	286.478.673	283.823.332	2.655.341	0,94

TablaResultado1 – Comparación Población Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad fijas.

A partir del GráficoResultado2 y de la tabla anterior se puede ver que existe una gran diferencia entre la cantidad de habitantes que pertenecen a cada grupo de edad. Estas diferencias se compensan (de manera casual) y logran que la diferencia entre la población total real y la estimada sea pequeña. A continuación se intentará reducir esta diferencia sobre la cantidad de individuos para cada grupo de edad.

Como se mencionó anteriormente, las tasas (tanto de fecundidad como de mortalidad) no se mantuvieron fijas a lo largo de la historia, sino que sufrieron notables cambios. Ambas tasas mostraron, por varios factores, una tendencia a la baja, especialmente durante este último siglo.

Vemos que existen desajustes entre la población estimada y la real. Esta diferencia, como vimos, es muy grande, y por lo tanto nos lleva a cuestionar la validez de la hipótesis del Modelo exponencial con estructura de edad, respecto a la constancia de ambas tasas.

En este estudio se decidió modificar el Modelo exponencial con estructura de edad agregando un parámetro que permita ajustar anualmente las tasas de fecundidad y otro que tenga el mismo efecto sobre la tasas de mortalidad.

5 Implementación del modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables

5.1 Introducción

Las tasas de mortalidad y fecundidad muy raramente mantienen sus valores constantes de un año a otro. Los motivos pueden ser varios, y se mencionaron algunos de ellos con anterioridad. Esta variación en las tasas indefectiblemente modificará la cantidad de habitantes que hay en una población dada.

La variación de estas tasas generalmente mantiene cierta tendencia durante varios años en cada ciudad, mientras que esta tendencia puede ser positiva o negativa. En este trabajo se decidió que la modificación de las tasas se haga de forma lineal; de esta manera las tasas podrán tener un incremento o disminución anual de un porcentaje de la tasa original.

A continuación se detalla el modelo propuesto incluyendo los parámetros TFV y TMV :

$$\begin{aligned}
 Pob_{n+1}(0) &= \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * (TF(E) * (1 + n * TFV))) , \\
 Pob_{n+1}(E) &= Pob_n(E - 1) * (1 - (TM(E - 1) * (1 + n * TMV))) , \\
 Pob_{n+1}(U) &= Pob_n(U - 1) * (1 - (TM(U - 1) * (1 + n * TMV))) + \\
 &\quad Pob_n(U) * (1 - (TM(U) * (1 + n * TMV)))
 \end{aligned}$$

Modelo demográfico *Modelo2*

donde los parámetros son los mismos que en el Modelo exponencial con estructura de edad planteado anteriormente a excepción de los parámetros TFV y TMV que servirán como factor de corrección anual para las tasas de fecundidad y mortalidad respectivamente.

Estos nuevos parámetros que se incluyen en el modelo representarán un porcentaje positivo o negativo que anualmente intentará reflejar el aumento o disminución respectivamente de dichas tasas. Si bien estos parámetros son fijos para toda la población, o sea no se hace diferencia en la edad de sus habitantes, multiplican a las tasas que varían según la edad de los individuos.

5.2 Restricciones en el uso de las tasas de fecundidad y mortalidad variables (TFV y TMV)

Como se mencionó en el Modelo exponencial con estructura de edad, las tasas de mortalidad están limitadas al intervalo $[0, 1]$ y las tasas de fecundidad deben ser mayores o iguales que 0. Esto se debe a que en ninguna iteración del modelo se puede sumar una cantidad negativa de personas para alguna edad. Introducir los nuevos parámetros al modelo puede ocasionar el mismo problema. De esta manera limitamos las tasas *TFV* y *TMV* de la siguiente manera:

Sabíamos del modelo que: $0 \leq TF(E)$ y $0 \leq TM(E) \leq 1 \quad \forall E$.

Al incluir las tasas variables se deberá cumplir,

$$0 \leq (TF(E) * (1 + n * TFV))$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1 + n * TFV)$$

$$\Rightarrow -1 \leq n * TFV$$

Por lo tanto la tasa de fecundidad variable debe cumplir:

$$\boxed{\frac{-1}{n} \leq TFV}$$

También se deberá cumplir que $0 \leq (1 - (TM(E) * (1 + n * TMV))) \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq TM(E) * (1 + n * TMV) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + n * TMV \leq \frac{1}{TM(E)}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq TMV \leq \frac{\left(\frac{1}{TM(E)}\right) - 1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-1}{n} \leq TMV \leq \frac{(1 - TM(E))}{TM(E) * n}}$$

Vemos las siguientes tablas a modo de ejemplo de cómo se modificarían las tasas de fecundidad de la población femenina de edad entre 10 y 34 años de Estados Unidos de 1970 para un incremento anual del 10% para $n = 0, 1$ y 10.

Edad	TF	n	TFV	Tasa Fecundidad Proyectada
10	0,0006	0	0,1	0,0006
11	0,0006	0	0,1	0,0006
12	0,0006	0	0,1	0,0006
13	0,0006	0	0,1	0,0006

14	0,0006	0	0,1	0,0006
15	0,03415	0	0,1	0,03415
16	0,03415	0	0,1	0,03415
17	0,03415	0	0,1	0,03415
18	0,0494	0	0,1	0,0494
19	0,0494	0	0,1	0,0494
20	0,05735	0	0,1	0,05735
21	0,05735	0	0,1	0,05735
22	0,05735	0	0,1	0,05735
23	0,05735	0	0,1	0,05735
24	0,05735	0	0,1	0,05735
25	0,0839	0	0,1	0,0839
26	0,0839	0	0,1	0,0839
27	0,0839	0	0,1	0,0839
28	0,0839	0	0,1	0,0839
29	0,0839	0	0,1	0,0839
30	0,07255	0	0,1	0,07255
31	0,07255	0	0,1	0,07255
32	0,07255	0	0,1	0,07255
33	0,07255	0	0,1	0,07255
34	0,07255	0	0,1	0,07255

Tabla1 – Proyección tasas fecundidad EEUU 1970 n = 0,
TFV = 0,1 y Edad = 10.....34.

Edad	TF	n	TFV	Tasa Fecundidad Proyectada
10	0,0006	1	0,1	0,00066
11	0,0006	1	0,1	0,00066
12	0,0006	1	0,1	0,00066
13	0,0006	1	0,1	0,00066
14	0,0006	1	0,1	0,00066
15	0,03415	1	0,1	0,037565
16	0,03415	1	0,1	0,037565
17	0,03415	1	0,1	0,037565
18	0,0494	1	0,1	0,05434
19	0,0494	1	0,1	0,05434
20	0,05735	1	0,1	0,063085
21	0,05735	1	0,1	0,063085
22	0,05735	1	0,1	0,063085
23	0,05735	1	0,1	0,063085
24	0,05735	1	0,1	0,063085
25	0,0839	1	0,1	0,09229
26	0,0839	1	0,1	0,09229
27	0,0839	1	0,1	0,09229
28	0,0839	1	0,1	0,09229
29	0,0839	1	0,1	0,09229
30	0,07255	1	0,1	0,079805
31	0,07255	1	0,1	0,079805
32	0,07255	1	0,1	0,079805
33	0,07255	1	0,1	0,079805
34	0,07255	1	0,1	0,079805

Tabla2 – Proyección tasas fecundidad EEUU 1970 n = 1,
TFV = 0,1 y Edad = 10.....34.

Edad	TF	n	TFV	Tasa Fecundidad Proyectada
10	0,0006	10	0,1	0,0012
11	0,0006	10	0,1	0,0012
12	0,0006	10	0,1	0,0012
13	0,0006	10	0,1	0,0012
14	0,0006	10	0,1	0,0012
15	0,03415	10	0,1	0,0683
16	0,03415	10	0,1	0,0683
17	0,03415	10	0,1	0,0683
18	0,0494	10	0,1	0,0988
19	0,0494	10	0,1	0,0988
20	0,05735	10	0,1	0,1147
21	0,05735	10	0,1	0,1147
22	0,05735	10	0,1	0,1147
23	0,05735	10	0,1	0,1147
24	0,05735	10	0,1	0,1147
25	0,0839	10	0,1	0,1678
26	0,0839	10	0,1	0,1678
27	0,0839	10	0,1	0,1678
28	0,0839	10	0,1	0,1678
29	0,0839	10	0,1	0,1678
30	0,07255	10	0,1	0,1451
31	0,07255	10	0,1	0,1451
32	0,07255	10	0,1	0,1451
33	0,07255	10	0,1	0,1451
34	0,07255	10	0,1	0,1451

Tabla3 – Proyección tasas fecundidad EEUU 1970 n = 10,
TFV = 0,1 y Edad = 10.....34.

Como se puede observar las tasas de fecundidad proyectada en la Tabla1 (año 0) son las mismas que las de *TF*. En cambio en la Tabla2, transcurrido un año, tuvieron un incremento del 10%. En la Tabla3, y al cabo de 10 años, se puede ver que las tasas de fecundidad proyectada duplicaron su valor.

5.3 Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables

A partir de la modificación realizada sobre el Modelo exponencial con estructura de edad se intentará aproximar la gráfica de la población estimada a la real. Para esto se utilizará nuevamente la población inicial de Estados Unidos de 1970.

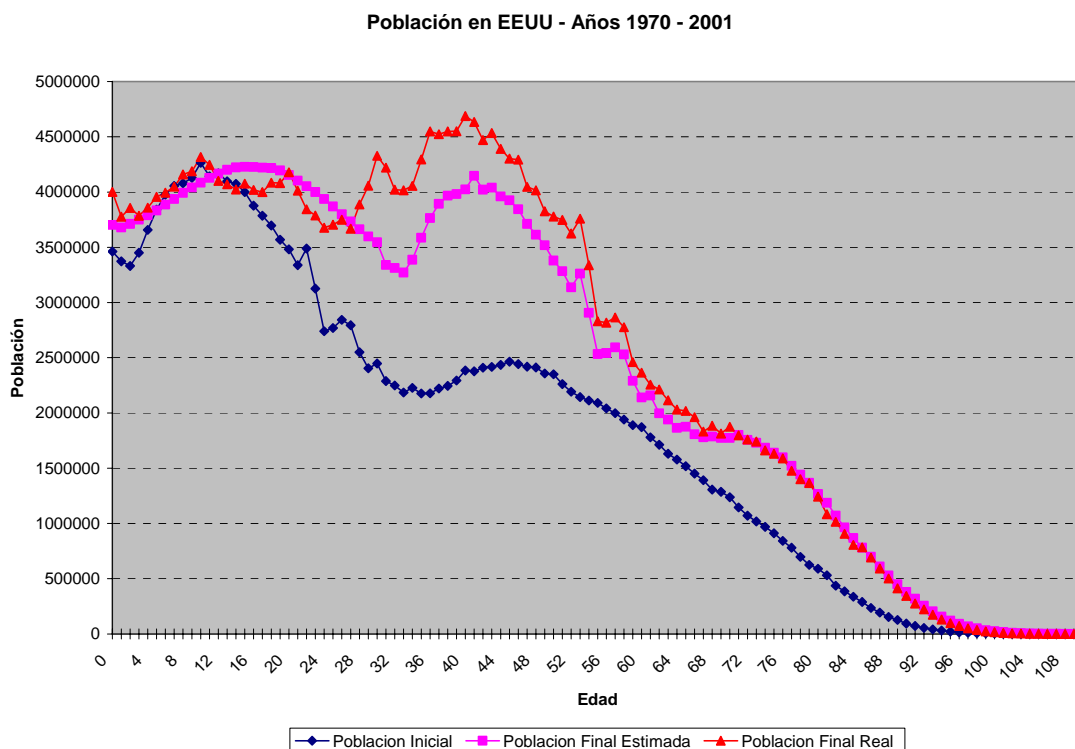
De la tabla de tasas de fecundidad en la cual se muestran valores históricos^b, se puede estimar que estas tuvieron una disminución de aproximadamente el 0,9%

^b Estos datos fueron obtenidos del sitio de las Naciones Unidas (<http://esa.un.org/unpp/index.asp?panel=2>)

anual. De forma similar se puede observar de la tabla de tasas de mortalidad que la reducción de estas tasas fue cercana al 12,6% en un período de 31 años, lo que representa 0,41% en promedio cada año.

Con estos datos podremos aplicar la modificación del Modelo exponencial con estructura de edad con los mismos parámetros que el modelo anterior y con los nuevos parámetros *TFV* y *TMV* con valores 0,9 y 0,41 respectivamente.

La aplicación del nuevo modelo genera como resultado el siguiente gráfico y tabla:



GráficoResultado3 – Comparación de la Población Inicial de 1970, Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41% respectivamente.

	P. Estimada	P. Real	Diferencia	%
Hasta 25 años	104.328.859	103.847.237	481.622	0,46
Entre 26 y 55 años	108.143.442	122.752.448	14.609.006	11,90
Mas de 55 años	55.590.923	57.223.647	1.632.724	2,85
Total	268.063.224	283.823.332	15.760.108	5,55

TablaResultado2 – Comparación de la Población Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41% respectivamente.

Se puede observar en el GráficoResultado3 y la TablaResultado2 que el segmento de personas jóvenes (menores de 25 años) de la población estimada, a partir de una reducción anual de las tasas de mortalidad y fecundidad y al cabo de 31 años, se aproximó notablemente al mismo segmento de personas de la población real.

Mientras que la diferencia de esa porción entre la población estimada y la real si se aplicara un modelo de tasas fijas fue levemente superior al 20% con respecto a la estimada, para uno de tasas variables fue del 0,5%. Si bien en el resto de la población no hubo cambios significativos, cabe destacar la muy buena aproximación sobre la población real para los individuos de edad adulta para el modelo de tasas móviles.

La población total real para 2001 es de 283,8 millones y la estimada es de 268 millones de personas, esta diferencia de 15,8 millones de personas representa el 5,55% de la población real de 2001. Si bien esta diferencia es mayor que la que se obtuvo para el modelo de tasas fijas, se logró acortar la diferencia que existía entre la población estimada y la real para los grupos de edad joven y adulta.

Verificamos que las modificaciones hechas sobre el Modelo exponencial con estructura de edad logran una buena aproximación de la realidad. A pesar de esto continúan existiendo desajustes del modelo respecto de la realidad, es decir que no basta sólo con la hipótesis acerca de la tasa variables de crecimiento vegetativo.

6 Implementación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración

6.1 Introducción

Los modelos demográficos no son universalmente válidos como tampoco lo son a lo largo del tiempo: están pensados para ser aplicados a una población determinada y por un cierto período de tiempo.

El modelo maltusiano era demasiado simple: no sólo supuso una constancia de las tasas de crecimiento, que no se verificaron, sino que tampoco incluyó otras variables, tales como las migraciones externas e internas.

6.2 Tasas de migración fija

En el último siglo gran cantidad de personas tuvieron que emigrar por diferentes causas de su país de origen. Entre ellas podemos mencionar búsqueda de mejores condiciones de trabajo, persecuciones raciales, guerras, etc. En el caso de nuestro país, se produjo una fuerte corriente inmigratoria a partir de fin del siglo XIX, proveniente de países europeos y por otra parte un desplazamiento masivo desde el interior del país hacia la capital a partir de la década del 30', debido a la incipiente industrialización del país. Estos movimientos de población modifican las estimaciones de población que sólo tienen en cuenta el crecimiento vegetativo y deben tenerse en cuenta para ajustar más el modelo a la realidad.

A partir de esto se puede incluir en el modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables un parámetro más que permita ajustar el modelo en base a las tasas de inmigración y emigración del país o ciudad. A continuación se detalla el modelo que incluye las tasas antes mencionadas:

$$\begin{aligned}
 Pob_{n+1}(0) &= \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * ((TIN - TEM) + (TF(E) * (1 + n * TFV)))) , \\
 Pob_{n+1}(E) &= Pob_n(E - 1) * ((TIN - TEM) + \\
 &\quad + (1 - (TM(E - 1) * (1 + n * TMV)))) , \\
 Pob_{n+1}(U) &= Pob_n(U - 1) * ((TIN - TEM) + \\
 &\quad + (1 - (TM(U - 1) * (1 + n * TMV)))) + \\
 &\quad Pob_n(U) * ((TIN - TEM) + \\
 &\quad + (1 - (TM(U) * (1 + n * TMV))))
 \end{aligned}$$

Modelo demográfico *Modelo3*

donde los parámetros son los mismos que para el modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables, a excepción de las tasas de inmigración (TIN) y las tasas de emigración (TEM). Estas últimas, y al igual que las tasas de fecundidad móvil (TFV) y tasas de mortalidad móvil (TMV), no varían respecto de la edad de los individuos de la población. Se modeló de esta manera ya que la información que la mayoría de los organismos brindan sobre estas tasas sólo se encuentra totalizada en base a la cantidad de individuos sin discriminar por edades.

La diferencia entre las tasas TIN y TEM determina, en el caso de ser positiva, la proporción de habitantes que ingresa al país (o ciudad) luego de un período dado. Del mismo modo, una tasa negativa significa un período en donde prevalece la emigración. Esta diferencia se puede simplificar en una sola tasa, que se representará con la sigla TDM y será tasa de migración que hubo durante el período. A partir de esto se puede reescribir el último modelo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 Pob_{n+1}(0) &= \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * (TDM + (TF(E) * (1 + n * TFV)))) , \\
 Pob_{n+1}(E) &= Pob_n(E - 1) * (TDM + (1 - (TM(E - 1) * (1 + n * TMV)))) , \\
 Pob_{n+1}(U) &= Pob_n(U - 1) * (TDM + (1 - (TM(U - 1) * (1 + n * TMV)))) + \\
 &\quad Pob_n(U) * (TDM + (1 - (TM(U) * (1 + n * TMV))))
 \end{aligned}$$

Modelo demográfico *Modelo4*

6.2.1 Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración fija

Como se mencionó en los resultados obtenidos para el modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables (sin incluir la migración), la aproximación obtenida para las personas de edad joven y adulta fue muy buena, pero no para las personas de edad intermedia. En este último caso la población estimada era significativamente menor a la real.

Una de las posibles causas de esta diferencia podría ser que en este modelo no se tuvo en cuenta la edad de las personas que migraban de un país a otro. Esto resulta muy importante en el tramo considerado como de edad intermedia, donde los desplazamientos por razones laborales suelen ser significativos, ya que se busca en el país receptor, generalmente más industrializado que el de origen, mejores oportunidades de trabajo.

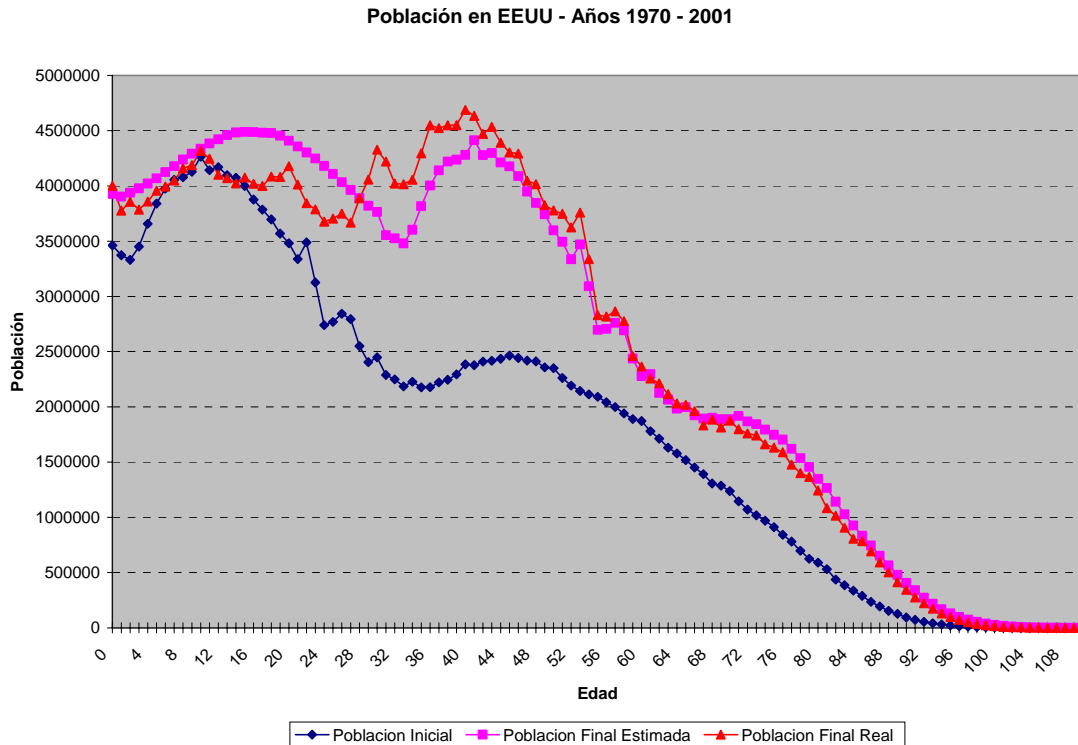
Como menciona Trinidad Torrado⁸, más de la mitad (56%) de los inmigrantes latinoamericanos que llegaron a España tenían una edad comprendida entre los 20 y 39 años (según estadística de 2005). O en el caso particular de Ecuador para los meses de febrero hasta abril del 2003, tal como menciona FLACSO⁹, “El mayor volumen de emigrantes se concentra en el grupo de 20 a 29 años y en el de 30 a 39 años. Esta es la mano de obra que tiene mayores oportunidades de inserción en el mercado laboral de los países de destino”. En el Gráfico 2 del informe antes mencionado (el cual resume la población emigrante por grupo de edad y sexo de Quito, Guayaquil y Cuenca) se puede observar que, si bien hay una pequeña diferencia en los porcentajes de emigración de acuerdo al sexo, en promedio casi el 70% de los emigrantes de estas ciudades tenían entre 20 y 39 años.

Estos ejemplos no son casos aislados, sino que gran cantidad de países industrializados tuvieron porcentajes similares de inmigración en las últimas décadas, tal como el de España, y varios países en vías de desarrollo tuvieron índices de emigración similares al de Ecuador.

Podemos aplicar entonces al modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables, además de todas las variables calculadas anteriormente, el porcentaje que representa el saldo migratorio que hubo en Estados Unidos en 1970 sobre el total de la población (*TDM*). Sabemos que dicho saldo para cada año del período 1965–1970^c fue de 473 mil personas y la población en ese país para el año 1970 era de aproximadamente 203 millones, lo cual representa cerca del 0,2% de la población. A partir de esto se aplica nuevamente el modelo con los mismos parámetros que para el modelo exponencial con estructura de edad y tasas variables agregando este porcentaje.

Luego de aplicar el *Modelo4* con los parámetros antes mencionados se obtienen el siguiente gráfico y tabla:

^c Estos datos fueron obtenidos del sitio de las Naciones Unidas (<http://esa.un.org/unpp/index.asp?panel=2>)



GráficoResultado4 – Comparación de la Población Inicial de 1970, Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41% respectivamente y tasa de migración positiva de 0,2%.

	P. Estimada	P. Real	Diferencia	%
Hasta 25 años	110.751.572	103.847.237	6.904.335	6,65
Entre 26 y 55 años	115.022.903	122.752.448	7.729.545	6,30
Mas de 55 años	59.190.632	57.223.647	1.966.985	3,44
Total	284.965.107	283.823.332	1.141.775	0,40

TablaResultado3 – Comparación de la Población Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41 respectivamente y tasa de migración positiva de 0,2%.

A partir de la TablaResultado3 se puede observar que la diferencia entre la población estimada y la real sobre la cantidad total de habitantes tuvo una leve disminución en comparación sobre los resultados arrojados para el modelo sin migración. En cambio para los diferentes grupos de edades hubo resultados mixtos.

Es claro que la población estimada para cada grupo de edad tuvo un fuerte incremento comparándola con los resultados que se obtuvieron del modelo sin migración. Esto se debe a que cada año la población se ha incrementado 0,2% sin diferenciar por tramo de edades, ya que, como se mencionó anteriormente, no se cuenta con ese dato para la elaboración de este modelo.

Tal como se mencionó anteriormente, a partir de la TablaResultado2, los grupos de edad joven y adulta de la población estimada habían logrado una buena aproximación a la población real. Al sumarle a estos grupos de edades el valor

correspondiente de las tasas de migración, la brecha entre ambos valores se hizo más notoria. Diferente es el caso del tramo de edad intermedia, ya que, a partir de incorporar la migración al modelo, se logró aproximar bastante bien la población estimada a la real.

Resumiendo, observamos que se ha logrado una mayor aproximación, tanto para el total de los habitantes como para el grupo de edad intermedia; en cambio para los grupos de personas de edad joven y adulta sucede lo contrario. Como se mencionó anteriormente, el tramo que más peso tiene en las tasas de migración es el grupo personas en edad laboral, es decir aquellos que tienen entre 20 y 39 años, por lo cual, al generalizar este valor a otros tramos de edades, se obtienen resultados que no representan la realidad demográfica de esos sectores.

6.3 Tasas de migración variable por edad

A partir de los problemas que tiene la generalización de las tasas de migración a todas las edades, podemos nuevamente modificar el modelo para que el parámetro que representa las tasas de migración (TDM) no sea fijo y pueda contener esta información con los datos estimados de estas tasas para cada edad. De esta manera se podrá tener una visión más precisa del aporte que tienen las personas de las distintas edades en el total de la población.

Modificando el parámetro TDM para que sea variable según la edad se obtiene el siguiente modelo:

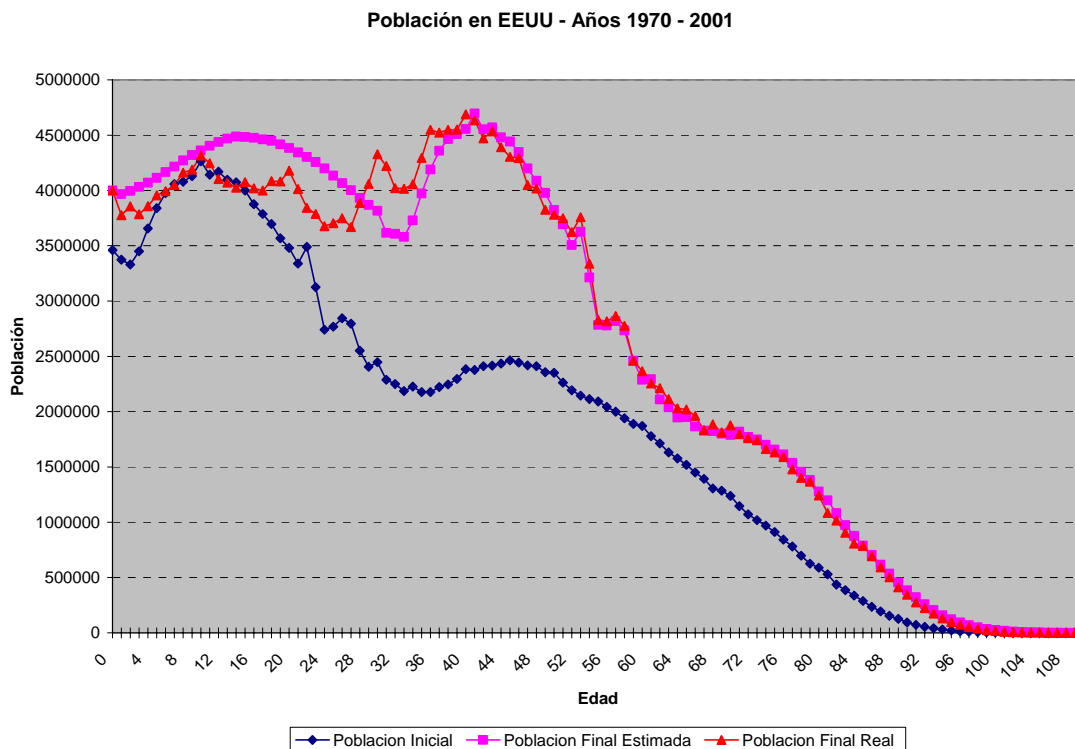
$$\begin{aligned}
 Pob_{n+1}(0) &= \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * (TDM(E) + (TF(E) * (1 + n * TFV)))) , \\
 Pob_{n+1}(E) &= Pob_n(E - 1) * (TDM(E - 1) + \\
 &+ (1 - (TM(E - 1) * (1 + n * TMV)))) , \\
 Pob_{n+1}(U) &= Pob_n(U - 1) * (TDM(U) + (1 - (TM(U - 1) * (1 + n * TMV)))) \\
 &+ Pob_n(U) * (TDM(U) + (1 - (TM(U) * (1 + n * TMV))))
 \end{aligned}$$

Modelo demográfico *Modelo5*

6.3.1 Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración variable por edad

Dada la dificultad que se tuvo en conseguir datos referentes a la edad de los emigrantes e inmigrantes que hubo en Estados Unidos en 1970, asumiremos que los porcentajes de saldos migratorios por edad en este país fueron similares a los de

España del año 2003. A partir de esto aplicamos el *Modelo5* en donde se incluye el *TDM* variable según la edad de las personas y obtenemos los siguientes resultados:



GráficoResultado5 – Comparación de la Población Inicial de 1970, Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41% respectivamente y tasas de migración variable por edad.

	P. Estimada	P. Real	Diferencia	%
Hasta 25 años	111.211.609	103.847.237	7.364.372	7,09
Entre 26 y 55 años	120.266.990	122.752.448	2.485.458	2,02
Mas de 55 años	57.499.008	57.223.647	275.361	0,48
Total	288.977.607	283.823.332	5.154.275	1,82

TablaResultado4 – Comparación de la Población Estimada y Real de 2001 de Estados Unidos con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,9% y 0,41 respectivamente y tasas de migración variable por edad.

La comparación entre los resultados que se obtuvieron del modelo con *TDM* fijo y variable muestra una clara aproximación de este último en relación al primero de la población estimada a la real. El grupo de edad en el cual se notó un claro aumento de la población fue, como se suponía, el de edad intermedia, logrando así que la diferencia entre población real y la estimada sea aproximadamente sólo del 2%.

Una tasa de migración positiva del grupo de edad intermedia no sólo afecta la cantidad de habitantes de este grupo sino que al cabo de pocos años se notará un incremento extra, al ya existente de la migración, en los grupos de edad joven y

adulta. Esto se debe a que el grupo de edad intermedia tiene los índices de fecundidad más altos; por lo tanto se tendrán más nacimientos que los obtenidos con una población intermedia inferior. Por otra parte, y al cabo de unos años, los individuos de edad intermedia pertenecerán al grupo de edad adulta.

Como se mencionó anteriormente la población estimada de edad intermedia fue la que logró una clara aproximación a la real. También se puede mencionar la mínima diferencia que existe entre la cantidad de individuos de edad adulta. Por lo tanto este último modelo logra una excelente estimación de la población luego de un período de tiempo.

7 Estimación de la población futura para cuatro países

En esta sección se aplicará el modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y migración (*Modelo5*) para los siguientes países:

- Argentina,
- Bolivia,
- Brasil y
- Estados Unidos.

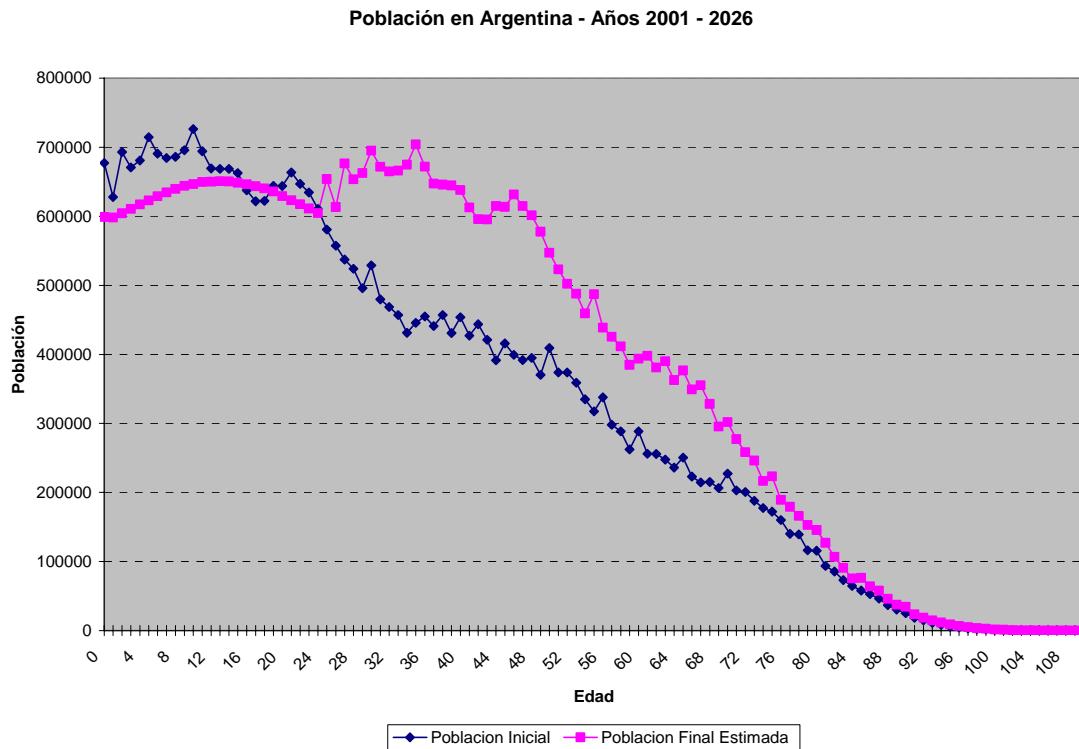
Para esto se asumirá que los países latinoamericanos a los cuales se le aplicará el *Modelo5* tendrán porcentajes de migración por edad, en relación a la población total, similares al de Uruguay. Como menciona el informe sobre migración internacional¹⁰ desarrollado por el Instituto Nacional de Estadística de Uruguay con datos de la Encuesta Nacional de Hogares Ampliada 2006 “La edad que los emigrantes tenían al salir de Uruguay se encuentra muy concentrada en edades jóvenes, como sucede normalmente en una emigración de tipo laboral. El grupo 20-24 años es el modal; el 32,6% de los emigrantes se ubican en ese grupo, seguido por el grupo 25-29 con el 22,2%. Más de la mitad de los emigrantes identificados en esta encuesta son personas que tenían entre 20 y 30 años al momento de partir.”

Para el caso de EEUU se asumió nuevamente (al igual que en la sección “Aplicación del modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración fija”) que los porcentajes de saldos migratorios por edad en este país para 2001 fueron similares a los de España del año 2003.

Teniendo en cuenta estos porcentajes se modificaron los archivos fuentes con los datos de migración por edad de Argentina, Bolivia, Brasil y EEUU. Luego se aplicó el *Modelo5* para estos países estimando como estará distribuida la población en cuanto a la cantidad de personas por edad para el mediano plazo (25 años) y largo plazo (50 años). También se observará como varía año a año la cantidad total de personas de cada país en el transcurso de 50 años.

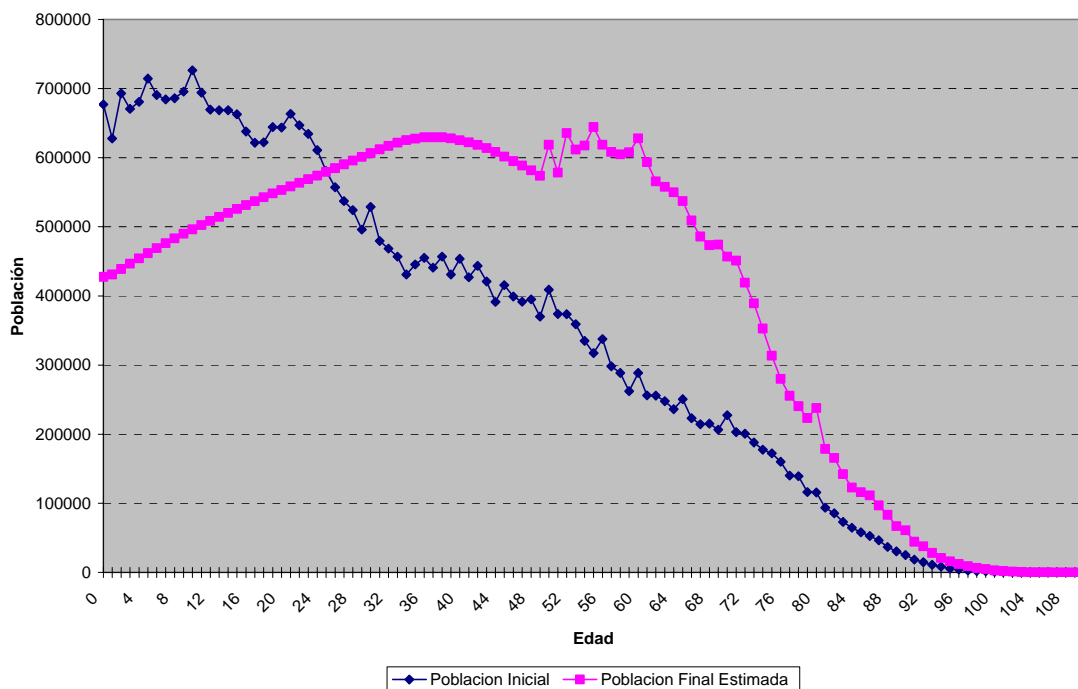
A partir de estos resultados se intentará analizar y comparar los posibles escenarios futuros de los países mencionados.

7.1 Argentina



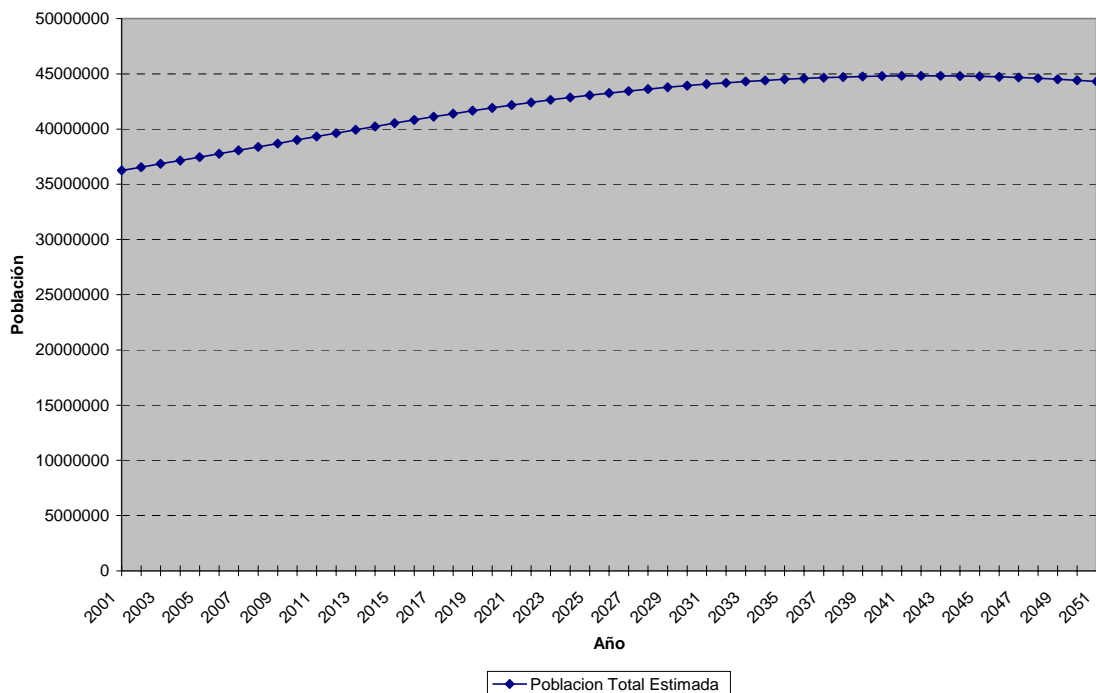
GráficoArgentina1 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2026 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Argentina - Años 2001 - 2051



GráficoArgentina2 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Argentina - Años 2001 - 2051



GráficoArgentina3 – Población total entre 2001 y 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

La difícil situación económica de Argentina en la década del 90' se ve reflejada en la creciente emigración. La tasas de migración para el quinquenio 2000-2005 fue de -0,5 por cada 1000 personas^d. Teniendo en cuenta los supuestos anteriores, estos valores fueron aún superiores para los individuos en edad laboral, que además coincide con las edades en donde los índices de fecundidad son más altos.

En el GráficoArgentina1 se observa un estancamiento en el grupo de edad joven de la población estimada. A pesar de esto y de lo mencionado en el párrafo anterior el crecimiento, en cuanto a la cantidad de habitantes, hasta el año 2026 fue sostenido (tal como se observa en el GráficoArgentina3).

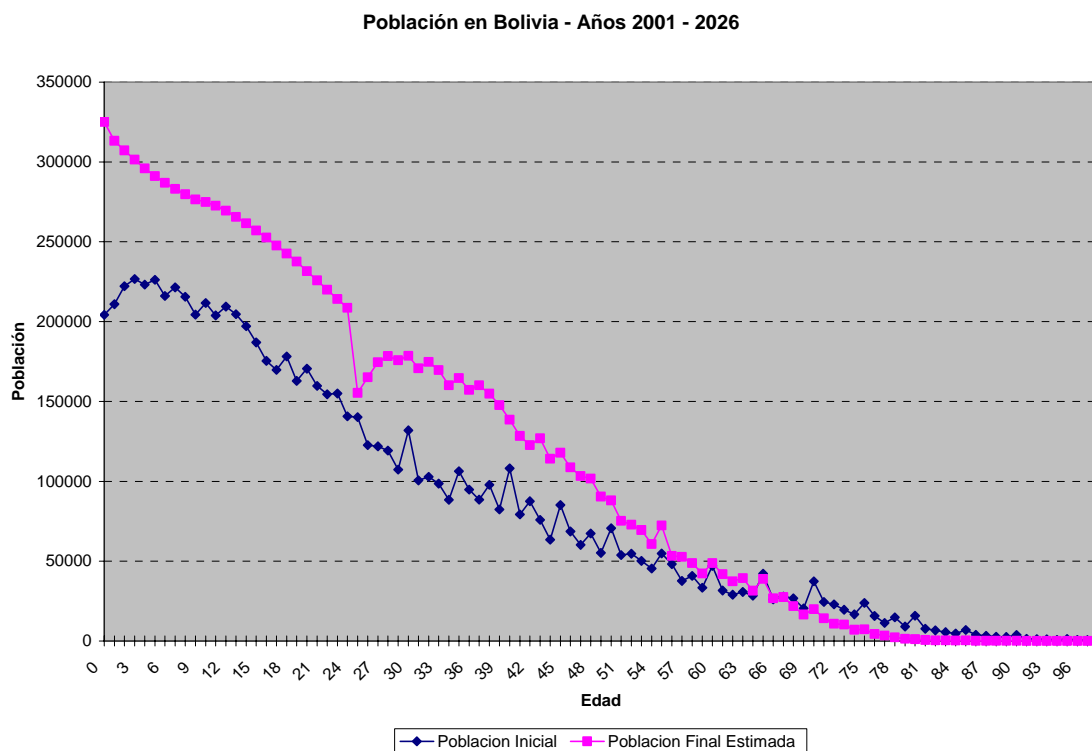
El escenario es bastante diferente para el año 2051. Si bien la tasa de mortalidad variable es negativa (0,3% anual), también lo es la tasa de fecundidad, y en un porcentaje inclusive superior al primero (0,71% anual). A partir de esto último, las tasas de fecundidad para cada edad serán en el año 2051 aproximadamente 35% menores que las que había en el año 2001. El efecto que tiene las bajas tasas de fecundidad y la alta emigración se puede ver en el GráficoArgentina2. En este gráfico la tendencia negativa en el grupo de edad joven es muy significativa. Luego de varios años más, cuando este grupo pertenezca al de edad intermedia y en el caso de mantenerse estas tasas, habrá aún menos nacimientos que los que hubo 25 años atrás.

Se observa en el GráficoArgentina3 un continuo aumento de la población hasta aproximadamente el año 2040; luego, y por las razones antes detalladas, la población argentina comenzará a disminuir año a año.

Dado que es probable que la situación económica de este país sufra numerosos altibajos a lo largo de esos 50 años, esto posiblemente impulsaría un cambio en torno a las tasas de migración negativas registradas en los últimos años. De hecho, las predicciones de las tasas de migración para los quinquenios 2005-2010 y 2010-2015 para la Argentina son positivas. A pesar de esto, en este trabajo solamente se tuvo en cuenta el índice de migración registrado para el quinquenio 2000-2005.

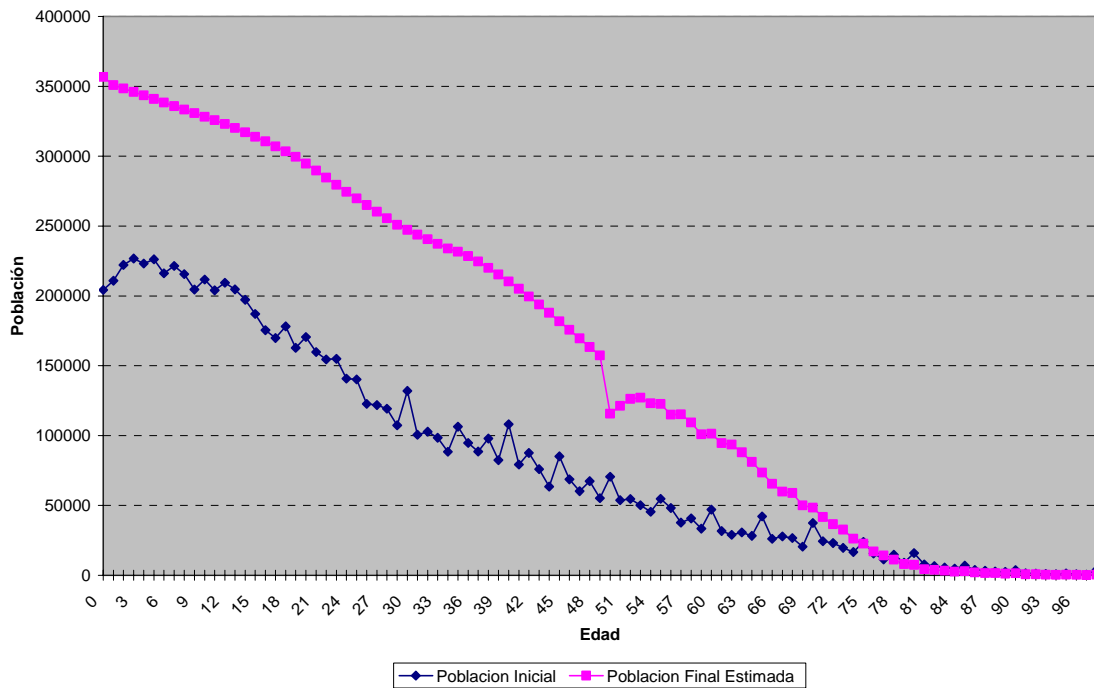
^d Estos datos fueron obtenidos del sitio de las Naciones Unidas (<http://esa.un.org/unpp/index.asp?panel=2>)

7.2 Bolivia



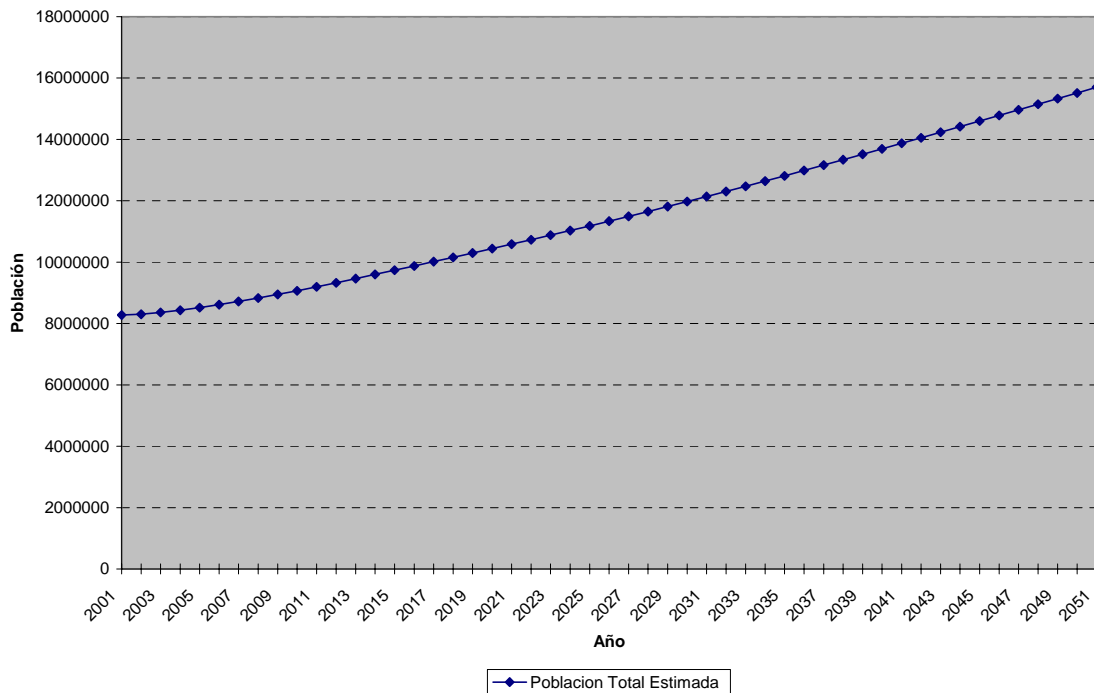
GráficoBolivia1 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2026 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,69% y 1,24% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Bolivia - Años 2001 - 2051



GráficoBolivia2 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,69% y 1,24% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Bolivia - Años 2001 - 2051



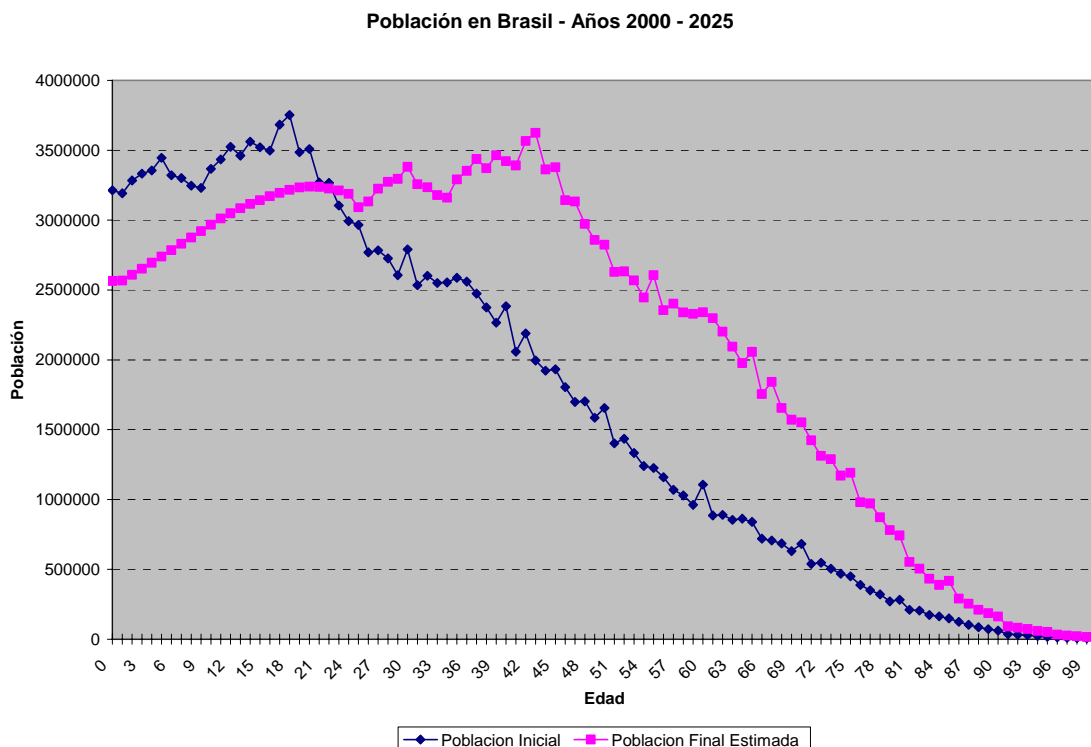
GráficoBolivia3 – Población total entre 2001 y 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,69% y 1,24% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

La población boliviana presenta tasas de fecundidad y mortalidad variables similares a las de Argentina (en ambos casos negativas), las tasas de migración también son negativas en ambos países, aunque en Bolivia este índice es bastante más bajo (-2,3 para el quinquenio 2000-2005). A pesar de esto, las estimaciones de crecimiento en cuanto a la cantidad de habitantes no es la misma. Esto se puede ver claramente en los gráficos generados para cada país para el mediano y largo plazo.

Tanto en el GráficoBolivia1 como en el GráficoBolivia2 se puede ver que la población boliviana de edad joven tiene un crecimiento sostenido a pesar de la alta emigración y de la disminución constante de la tasa de fecundidad. Este hecho se debe principalmente a que este país tiene históricamente una de las más altas tasas de fecundidad de Sudamérica, a diferencia de la Argentina que se encuentra entre las más bajas del continente.

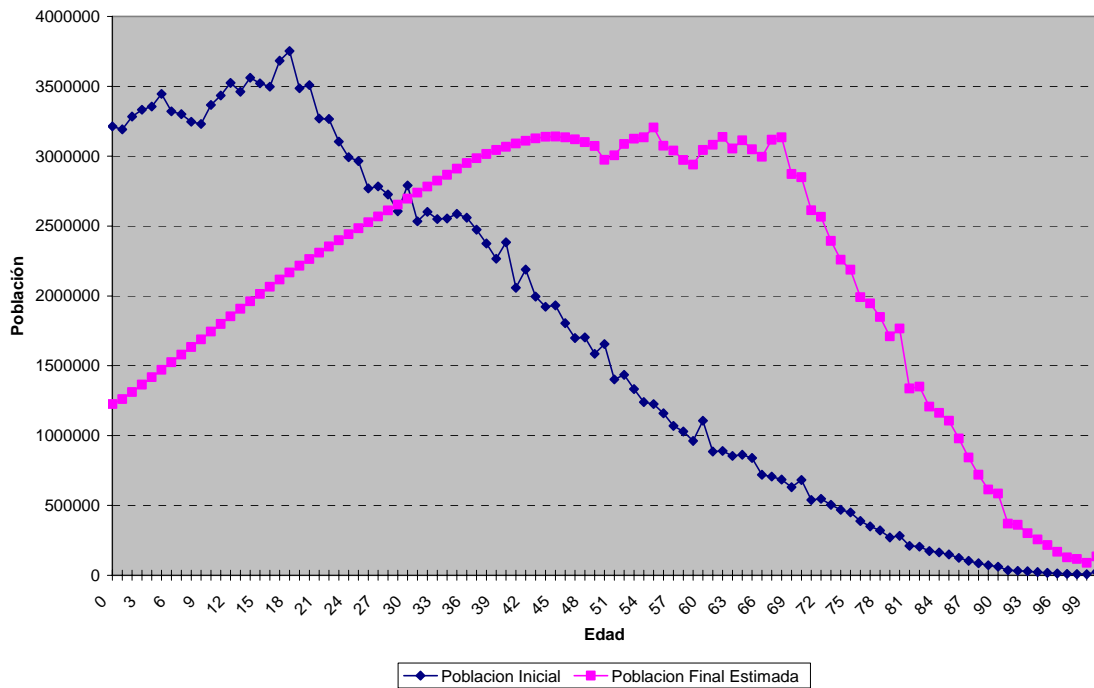
La población total en Bolivia durante el período 2001-2051, como puede verse en el GráficoBolivia3, tiene un crecimiento exponencial. En este período la población se encuentra cerca de duplicar su tamaño, pasando de un poco más de 8 millones de personas a cerca de 16 millones.

7.3 Brasil



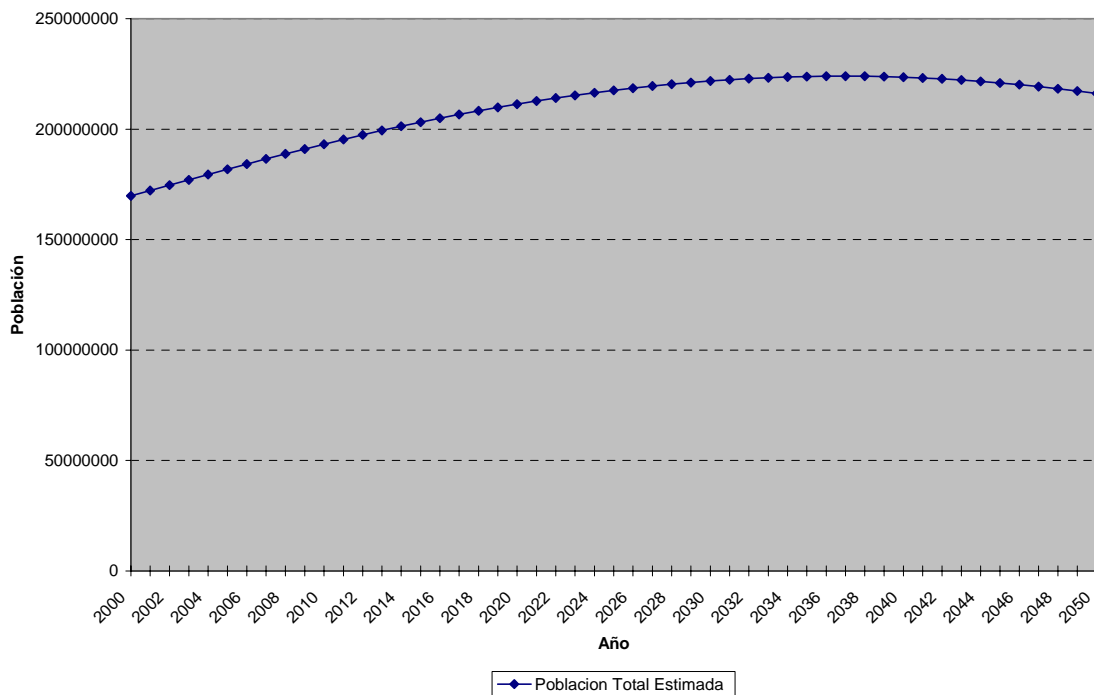
GráficoBrasil1 – Comparación de la Población Inicial de 2000 y Estimada de 2025 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 1,12% y 0,78% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Brasil - Años 2000 - 2050



GráficoBrasil2 – Comparación de la Población Inicial de 2000 y Estimada de 2050 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 1,12% y 0,78% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Población en Brasil - Años 2000 - 2050



GráficoBrasil3 – Población total entre 2000 y 2050 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 1,12% y 0,78% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

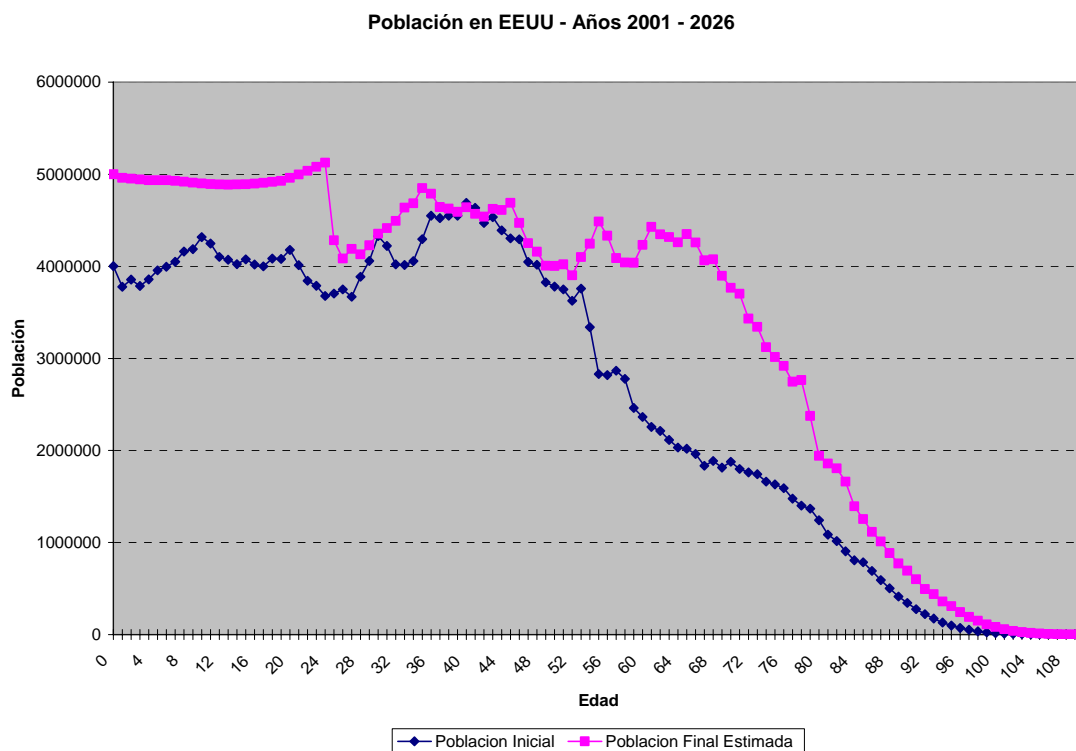
Brasil es uno de los países de Latinoamérica en donde la tasa de fecundidad se vio más reducida en las últimas dos décadas. En tan sólo 20 años los nacimientos cada 1000 personas en este país pasaron de 30,8 a tan sólo 20,6, lo cual representa una reducción anual de un poco más del 1%. Cabe mencionar también la notable reducción anual de la tasa de mortalidad y, aunque fue pequeño, la tasa de migración negativa (-0,3) que tuvo Brasil en el quinquenio 2000-2005.

Si bien existe una notoria diferencia en la cantidad total de habitantes y tasas de fecundidad y mortalidad de Brasil y Argentina, las tasas variables y de migración son muy parecidas. Esto generó que las estimaciones a mediano y largo plazo de Brasil sean muy similares a las de Argentina.

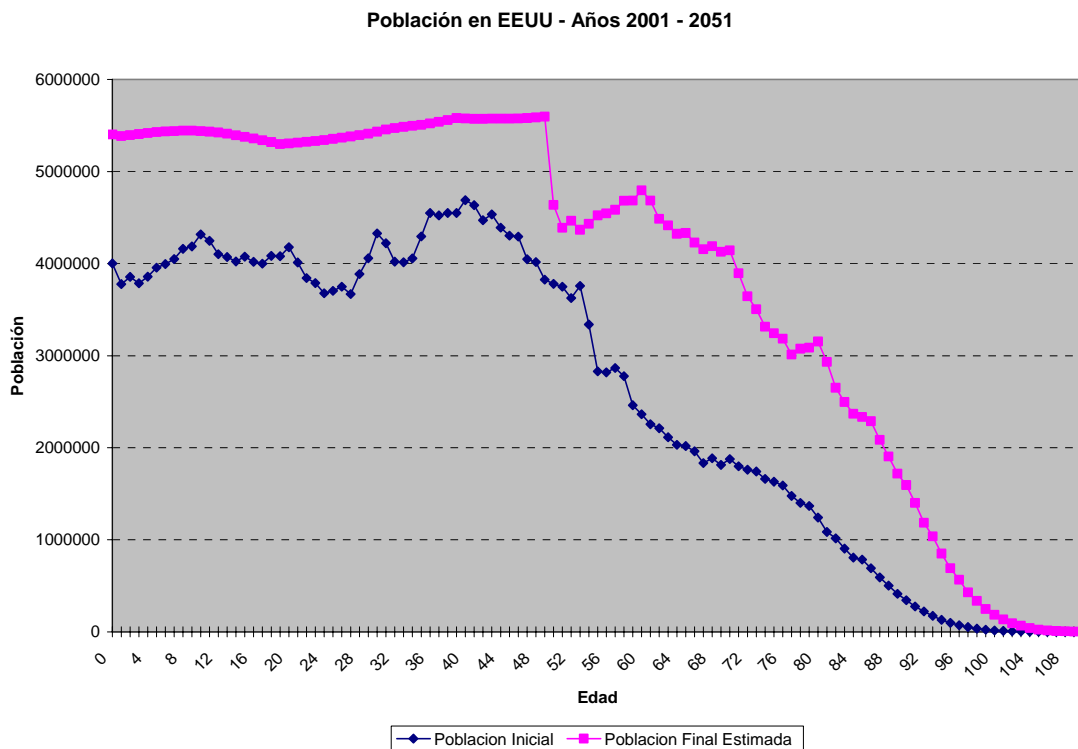
Como se mencionó para la Argentina, Brasil al cabo de 50 años tendrá, de mantenerse las tasas de fecundidad variables, menos de la mitad de nacimientos cada 1000 habitantes. Esto se ve claramente en el GráficoBrasil2, en donde la población de edad joven de este país en el año 2050 es notablemente inferior a la que había inicialmente en el año 2000.

Brasil crecerá en el número de habitantes hasta aproximadamente el año 2036. Luego de este año, y como puede verse en el GráficoBrasil3, la población comenzará a disminuir por las razones mencionadas en los párrafos anteriores.

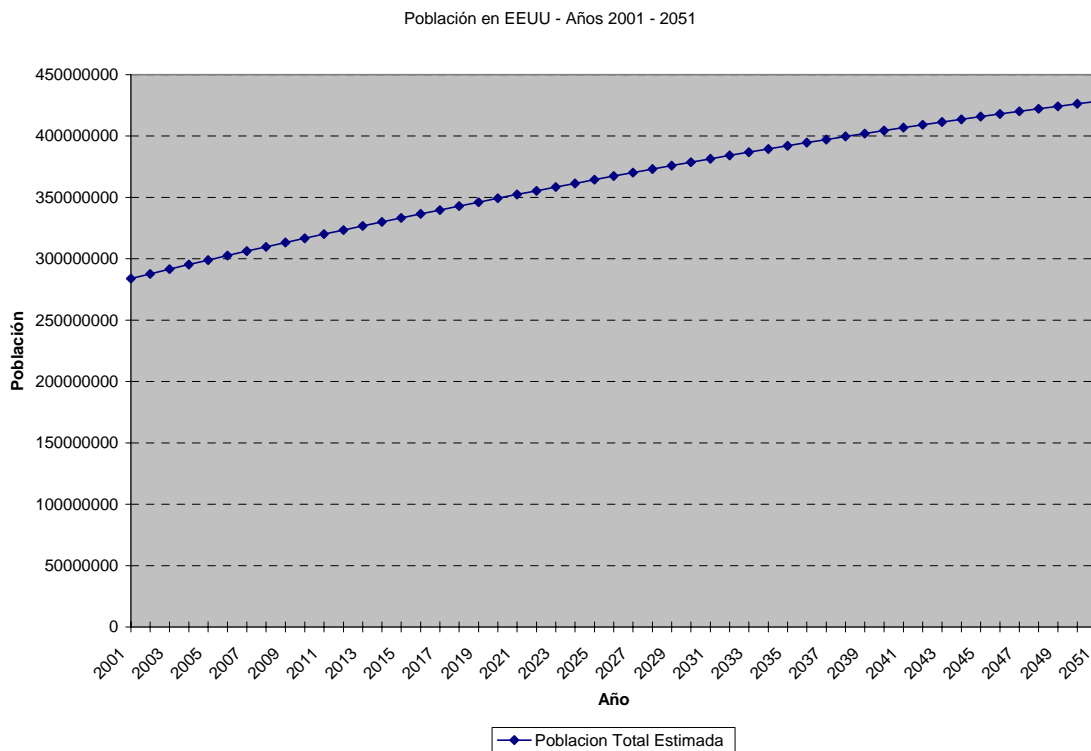
7.4 EEUU



GráficoEEUU1 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2026 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,31% y 0,22% respectivamente y tasas de migración variables por edad.



GráficoEEUU2 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,31% y 0,22% respectivamente y tasas de migración variables por edad.



GráficoEEUU3 – Población total entre 2001 y 2051 con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,31% y 0,22% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

El caso de EEUU es diferente a los anteriores. La población estadounidense, al igual que la mayoría de los países industrializados, inició hace varias décadas un proceso en el cual sus tasas de fecundidad y mortalidad comenzaron a reducirse. Esta tendencia persiste en la actualidad, pero ahora con menor fuerza. Esto se ve reflejado si se compara las tasas variables casi nulas obtenidas anteriormente para EEUU con las altas de los países Latinoamericanos. A pesar de ello las tasas de migración registradas en EEUU desde 1950 siempre fueron positivas, incluso en las últimas 2 décadas obtuvo sus valores más altos.

Del GráficoEEUU1 y el GráficoEEUU2 se puede observar que la población estadounidense comenzará a distribuirse uniformemente entre las edades. Podemos ver que la cantidad de habitantes hasta 25 años para cada edad es muy similar en la primera imagen. Lo mismo ocurre para la segunda imagen en donde en este caso será para las personas de hasta 50 años.

El aporte que tiene la inmigración para este país es muy alto. La tasa de migración anual de Estados Unidos para el período 2000-2005 fue de 4,4 cada 1000 personas. Este no es un caso aislado, ya que los valores son similares desde hace décadas y las proyecciones de estos índices en el corto y largo plazo siguen siendo altas.

La población total de EEUU tendrá un crecimiento positivo y lineal, como se ve en el GráficoEEUU3.

7.5 Conclusiones

Recordamos al comenzar este trabajo la evolución demográfica que tuvo lugar a partir de la revolución industrial, ligada a los progresos en las estructuras sanitarias, la mejor alimentación y especialmente a los descubrimientos de la medicina y su aplicación a una mayoría de la población. Dicho resumidamente, se produjo una disminución de la tasa de mortalidad (particularmente perinatal e infantil) y, ligada a ella, una disminución de la tasa de natalidad debido, entre otros, a la capacidad de ahorro individual y a la seguridad de contar con hijos adultos en la vejez. Recordamos asimismo que estas tendencias se produjeron más tempranamente y con mayor claridad en los países desarrollados.

Ahora bien, puesto que hemos seleccionado países con distinto grado de desarrollo, cabe preguntarse hasta qué punto pueden observarse en ellos dichas tendencias. Esto es, en qué medida su ordenamiento en términos económicos, con los Estados Unidos y Bolivia como casos extremos, muestra diferencias análogas a las que se dieron históricamente en el planeta. Cabe aquí una observación inicial: en las fechas seleccionadas los cuatro países, en mayor o menor grado, han dejado atrás la “explosión demográfica”, así como la etapa de inmigración masiva.

La comparación en el mediano y largo plazo permite formular un cierto número de proposiciones para las tres cohortes de población:

- a) Jóvenes (niños y adolescentes),
- b) De edad intermedia y
- c) Adultos.

a) Los países se distribuyen en dos grupos: Estados Unidos y Bolivia, donde la estimación de la cohorte infantil y adolescente (hasta 25 años) es claramente superior a la población inicial, tanto en el horizonte 2026 como en el horizonte 2051. Se trata, en realidad, de una tendencia más general: para todos los tramos de edad en estos dos países, la estimación a mediano y a largo plazo es superior a la población inicial. Por otro lado, vemos que en Argentina y Brasil (con mayor o menor nitidez) la estimación de ese segmento etario es inferior a la población inicial; dicho de otro modo, se prevé que disminuirá. Cabe observar asimismo que, mientras en el primer grupo la diferencia entre la población inicial y la estimada se mantiene relativamente constante a mediano y a largo plazo, en Argentina se incrementa en el largo plazo (2051), fenómeno más notorio en el caso brasileño.

La similitud entre Estados Unidos y Bolivia no deja de ser paradójica y podría explicarse por el mejor sistema sanitario de Estados Unidos sumado a los diferenciales de fecundidad de la población inmigrante (hispanica en particular), por una parte, y la tradicional elevada tasa de fecundidad boliviana por la otra (el doble que en Estados Unidos). Puede concluirse que el ordenamiento en términos de producto per cápita (o bien PNB) reproduce la secuencia histórica pero ante todo como herencia de un largo proceso, que se mantienen en las estimaciones a mediano y a largo plazo.

b) A diferencia del grupo anterior, las estimaciones respecto de la cohorte de edad intermedia (26-65 años), en los cuatro países fueron superiores a la población inicial. Este grupo de edades, como mencionamos anteriormente, tiene un rol fundamental en la población futura, ya que esta cohorte es la que posee las tasas más altas de fecundidad y además, luego de un período corto de tiempo, pertenecerá al grupo de edad adulta.

c) Las estimaciones sobre la evolución futura del grupo de tercera edad llevan a plantear un fenómeno moderno, cuyos efectos se hacen sentir con mayor nitidez en los países desarrollados: el envejecimiento de la población. Y, efectivamente, las estimaciones para este grupo son superiores a la población existente en 2001, siendo menores en el caso boliviano.

Volviendo a la relación entre desarrollo económico y evolución de la estructura poblacional, es necesario indicar que se trata de una relación de muy largo plazo. Para períodos más cortos son frecuentemente importantes situaciones coyunturales. Tal el caso del “baby boom” en Estados Unidos, la crisis económica de 1985 en Bolivia o la del 2001 en Argentina. Las variables con efectos demográficos son extremadamente numerosas: el nivel educativo, la composición étnica, la heterogeneidad social, económica y cultural (donde Brasil sería un claro ejemplo), que exigirían contar con información desagregada como es el caso del parámetro edad.

8 Matrices de Leslie

8.1 Introducción

A lo largo de este trabajo se han ido desarrollando varios modelos matemáticos, los cuales fueron creciendo en complejidad. El primer modelo, y más simple, que se aplicó en este trabajo fue el Exponencial. En este modelo sólo eran tenidos en cuenta, para poder analizar la dinámica de la población, las tasas de fecundidad y mortalidad. Estos parámetros determinaban la cantidad de nuevos habitantes (nacimientos) de una población y la de individuos que ya no pertenecían a esta (muertes).

En este capítulo se introducirá el modelo matemático creado por Patrick Holt Leslie en el año 1945 y se aplicará dicho modelo para predecir cómo estará compuesta una población a partir de ciertos supuestos. Este modelo no sólo es utilizado en poblaciones humanas sino que también es frecuentemente usado en otras especies.

Este modelo es determinístico y se considerará una variación de tiempo discreta. Es común que se utilice este modelo considerando únicamente los individuos del sexo femenino; esto se debe a que, salvo raras excepciones, la cantidad de hombres y mujeres de una población es prácticamente la misma. En este trabajo no se tuvo en cuenta esta suposición, de esta manera se podría estimar la población de ambos sexos, como así también la cantidad total de habitantes de una población.

Los supuestos para este modelo son los mismos que para el Modelo Exponencial. Entre estos podemos mencionar que las tasas de fecundidad y mortalidad se mantienen constantes, la población es cerrada y sus recursos son ilimitados.

8.2 Descripción del modelo

Al igual que para todos los modelos planteados anteriormente en este trabajo se agrupará a los individuos en clases de acuerdo a la edad de los mismos. Se supone que todos los individuos que pertenecen a una determinada clase poseen idénticas tasas de fecundidad y mortalidad. También se asumirá que existe una edad máxima U de las personas tenidas en cuenta en el modelo. De esta manera quedan determinadas las clases $0, 1, 2 \dots U$.

Se representará la población inicial (en el año 0) por medio de un vector columna $p(0)$. La posición i -ésima del mismo representa la cantidad de individuos de la población que posee i años. Dado que U es la edad máxima y las clases están determinadas por años simples, el vector inicial tendrá dimensión $U + 1$. A continuación se muestra dicho arreglo:

$$p(0) = \begin{bmatrix} p_0(0) \\ p_1(0) \\ \dots \\ \dots \\ p_{U-1}(0) \\ p_U(0) \end{bmatrix}$$

La población inicial $p(0)$ cambiará a lo largo de los años según los nacimientos y muertes correspondientes, y reflejará en este arreglo como estará compuesta dicha población. Por lo tanto el arreglo $p(0)$ es un caso particular del arreglo $p(t)$ para $t = 0$, donde t representa la cantidad de años que transcurrieron a partir del año 0.

Al igual que para el resto de los modelos planteados en este trabajo, la estimación de los nacimientos y muertes dentro de una población en un año dado estarán basados únicamente en la cantidad de personas por edad de ese año y sus respectivas tasas de fecundidad y mortalidad.

Denotamos las tasas de una población según la edad de la siguiente manera:

f_i representa la tasa de fecundidad de una persona de edad i

m_i representa la tasa de mortalidad de una persona de edad i

A partir de esto podemos redefinir la ecuación que representa los nacimientos en el modelo demográfico *Modelo1* de la siguiente manera:

$$Pob_{n+1}(0) = \sum_{E=E1}^{E2} (Pob_n(E) * TF(E)) \quad \rightarrow \quad \boxed{p_0(n+1) = \sum_{E=E1}^{E2} (p_E(n) * f_E)} \quad (\text{Leslie1})$$

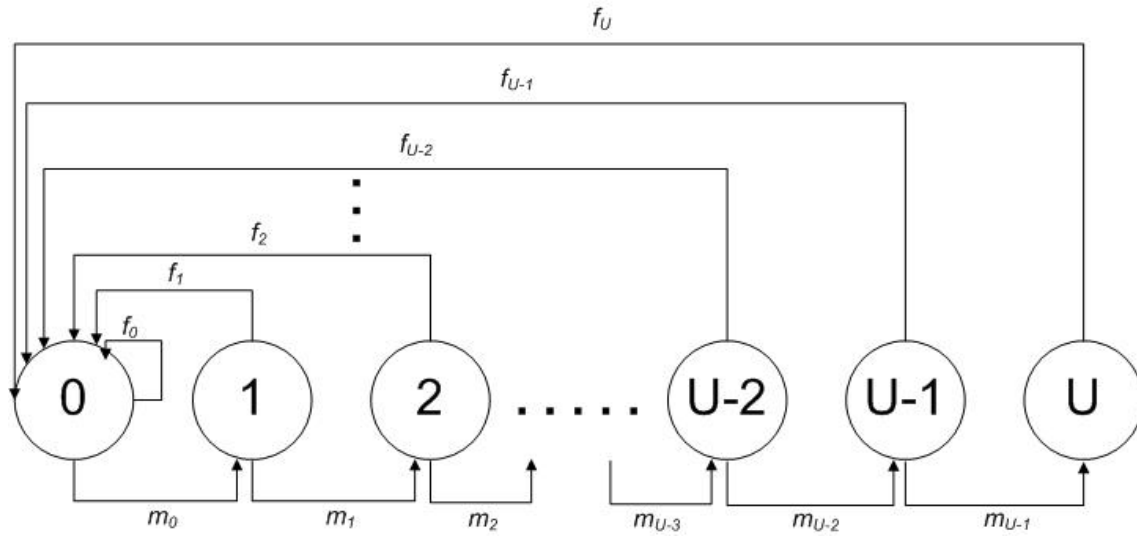
En el *Modelo1* se mencionó que las personas de edad U estaban compuestas por las que el año anterior tenían $U - 1$ ó U años y sobrevivieron a dicho año. Para el caso de las matrices de Leslie se asumirá que las personas de edad U únicamente serán las que en el año anterior tenían $U - 1$ años y sobrevivieron a dicho año. De esta manera se supone que todas las personas que tenían edad U morirán al año siguiente. A partir de esta hipótesis podremos eliminar la tercera ecuación del *Modelo1* e incluiremos el valor U dentro del rango de valores posibles de E de la segunda ecuación. Luego reescribimos dicha ecuación de la siguiente manera:

$$Pob_{n+1}(E) = Pob_n(E - 1) * (1 - TM(E - 1)) \quad \rightarrow \quad \boxed{p_E(n+1) = p_{E-1}(n) * (1 - m_{E-1})} \quad (\text{Leslie2})$$

donde, en este caso, $E = 1 \dots U$

Luego podemos representar las ecuaciones Leslie1 y Leslie2 de forma general como un grafo dirigido en donde los nodos representen las clases (edades) de los habitantes

de la población y los ejes indiquen, en el caso de existir, la relación de supervivencia entre clases ó la tasa de reproducción de las mismas. A continuación se muestra el digrafo mencionado:



Tal como se mencionó en el modelo exponencial con estructura de edad existen edades mínimas y máximas de la mujer para las cuales fuera de ellas el número de nacimientos es despreciable. Por lo tanto, si bien este grafo representa la forma general de las ecuaciones Leslie1 y Leslie2, varios de los arcos que representan las tasas de reproducción serán nulos.

Como se muestra en el digrafo anterior, sólo existe un bucle y corresponde a la tasa de fecundidad del nodo 0. Este bucle aparece en el grafo de forma teórica dado que la tasa de fecundidad para una persona menor de 1 año es 0. De esta manera podemos generalizar que ninguna clase tiene un aporte a sí misma, ya sea por reproducción o supervivencia. Esto vale porque elegimos las clases por año, al igual que el Δt . En cambio, si las clases agruparan 5 años, por ejemplo, habría un aporte de una clase en sí misma. Este es el caso de las matrices de Usher.

También podemos observar que existe un camino desde y hasta cualquier nodo del digrafo. De esta manera podemos afirmar que el digrafo anterior está fuertemente conectado (Strongly Connected Digraph)¹¹.

Al igual que en el digrafo anterior podemos representar de forma vectorial las ecuaciones Leslie1 y Leslie2 tal como se muestra a continuación:

$$\boxed{L * p(n) = p(n+1)}$$

(Leslie3)

donde:

$p(n)$ representa la distribución de la población por edad en el año n , tal como se mencionó anteriormente y

L es una matriz de Leslie.

La matriz de Leslie L tiene las siguientes características:

- Dimensión $(U + 1) * (U + 1)$,
- en su primera fila se encuentran las tasas de fecundidad de la población y
- la subdiagonal principal contiene las tasas de mortalidad de la misma.

Esta matriz recibe también el nombre de “Matriz de proyección”. A continuación se muestra en forma gráfica dicha matriz:

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_U \\ m_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{U-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz teórica de Leslie

Al igual que lo mencionado en el digrafo varias de las tasas de fecundidad serán nulas. También podemos mencionar que todos los elementos que componen esta matriz serán positivos (mayores o iguales que 0) dado que:

$$0 \leq f_i, \forall i: 0 \dots U$$

$$0 \leq m_i < 1, \forall i: 0 \dots U - 1$$

A partir de la matriz de Leslie L y el vector $p(0)$ que contiene la cantidad inicial de individuos por clase de una población se podrá conocer como estará compuesta esta población en un cierto número de años.

De forma similar a la ecuación Leslie3 podemos ver:

$$\boxed{L * p(n) = L^2 * p(n-1) = L^3 * p(n-2) = \dots \dots \dots = L^{n+1} * p(0) = p(n+1)}$$

(Leslie4)

donde:

$p(n+1)$ es la población en el año $n+1$ y

L^{n+1} es la matriz de Leslie elevada a la potencia $n+1$.

8.3 Modelo exponencial con estructura de edad vs. matrices de Leslie

Anteriormente analizamos, a partir de los resultados del modelo exponencial con estructura de edad, como estará compuesta la población de EEUU en el año 2001, tomando como población inicial la de 1970.

Veamos ahora por medio de las Matrices de Leslie como será la población de EEUU en el 2001 considerando la misma población inicial e iguales tasas de fecundidad y mortalidad empleadas en el modelo exponencial con estructura de edad. Luego se intentará comparar estos dos resultados.

Como vimos en la sección anterior, para poder crear la matriz de Leslie (o también llamada matriz de proyección) debemos colocar las tasas de fecundidad sobre la primera fila y la subdiagonal principal deberá contener las tasas de mortalidad de la población^e.

De *Leslie*⁴ sabemos que $L^{n+1} * p(0) = p(n+1)$, por lo tanto para estimar la población del año 2001 ($p(31)$) deberemos primero obtener la matriz de Leslie (L^{31})^f g elevada a la 31ava potencia. Luego multiplicamos esta matriz de proyección por el vector que contiene la distribución por edades de la población inicial de EEUU del año 1970.

En la siguiente tabla compararemos, para los 3 segmentos de edad, los resultados obtenidos en el modelo exponencial con estructura de edad con los que obtuvimos por medio de las matrices de Leslie:

	P. Estimada	Leslie	Diferencia	%
Hasta 25 años	124.778.784	124.778.786	2	0,00
Entre 26 y 55 años	108.171.587	108.171.586	1	0,00
Mas de 55 años	53.528.302	53.528.294	8	0,00
Total	286.478.673	286.478.666	7	0,00

Como podemos ver en la tabla anterior la diferencia que existe para cada segmento de edad y el total de la población es insignificante respecto de las poblaciones estimadas. Esto podemos verlo en la última columna de la tabla que el porcentaje que representa esta diferencia sobre la población estimada del modelo exponencial con estructura de edad es nulo para todos los casos. Las diferencias existentes se deben principalmente a errores de redondeo en los cálculos.

De esta manera podemos determinar que la población estimada es la misma, ya sea si se obtiene por medio de un modelo matemático (modelo exponencial con estructura de edad), o por medio de matrices de Leslie.

^e Se adjunta con este trabajo el documento “Matriz Inicial de Leslie.xls” con la matriz inicial de Leslie

^f La matriz L^{n+1} de Leslie se obtuvo, con el fin de lograr un programa mas óptimo en cuanto al tiempo y cantidad de ejecuciones, multiplicando, en el caso general, $\log_2 (n+1)$ matrices. Esto pudimos hacerlo ya que solo nos interesaba la matriz final (L^{31}) y no los resultados intermedios.

^g Se adjunta con este trabajo el documento “Matriz de Leslie (31 años).xls” con la matriz inicial de Leslie elevada a la 31ava potencia.

8.4 Distribución estable de edades y dinámica de crecimiento

A lo largo de este trabajo fuimos observando, por medio de los distintos modelos construidos y las matrices de Leslie, las variaciones (en cuanto a la cantidad de individuos por clase) de una población a lo largo de los años. A partir de los resultados obtenidos por estos modelos, se obtuvieron los porcentajes de variación de las distintas clases o segmentos de edad entre dos instantes de tiempo. Este porcentaje nos dio una visión clara pero muy específica según los años y edades que analizáramos.

En esta sección intentaremos analizar la dinámica del crecimiento de una población de forma general. Para esto utilizaremos los autovalores y autovectores de la matriz^h de Leslie.

El valor propio positivo λ_I de la matriz de Leslie representa la proporción en la que aumenta (o disminuye) cada clase dentro de una población para cada par de años subsiguientes y en un período largo sin importar el número inicial de sus habitantes. Por lo tanto si:

- $\lambda_I < 1$ la población decrecerá $((1 - \lambda_I) * 100) \%$ cada año,
- $\lambda_I = 1$ se estabiliza en la población actual y
- $\lambda_I > 1$ la población crecerá $((\lambda_I - 1) * 100) \%$ cada año.

De la misma manera el autovector, asociado al autovalor λ_I , contiene en cada campo la proporción que cada clase aporta sobre el total de la población. Este autovector recibe el nombre de **vector de distribución estable de edades**. Por lo tanto si L es la matriz de Leslie y λ_I y v_I son el autovalor y el autovector (de dimensión U) propio respectivamente de dicha matriz entonces:

$$L * v_I = \lambda_I * v_I$$

Resumiendo: luego de una cantidad considerable de años, el autovalor y autovector propio de una matriz de Leslie nos brinda una información bastante precisa de que manera se modificará una población de un año al siguiente, y los porcentajes que aportan cada clase sobre el total respectivamente.

Sabemos por el Teorema (Perron-Frobenius)¹² que si una matriz no negativa es primitiva e irreducible, entonces tiene un autovalor positivo, simple y estrictamente dominante, y a este autovalor le corresponderá un autovector positivo a izquierda y a derecha.

Teniendo en cuenta el teorema anterior, podríamos aplicar el Método de la Potencia¹³ para obtener el autovalor dominante y autovector de una matriz de Leslie. Este método, a partir de un vector inicial y la matriz de Leslie, nos permite de

^h No es el objetivo de este trabajo describir los conceptos de autovalores, autovectores de una matriz y grafo asociado a la misma, que supondremos conocidos, sino utilizar los mismos con el fin de llegar a la solución deseada.

manera sencilla aproximarnos en una forma iterativa al autovalor real, positivo más grande y su autovector asociado.

Veamos ahora si, a partir del teorema anterior, podemos afirmar que una matriz teórica de Leslie posee un autovalor positivo, simple y estrictamente dominante, y un autovalor positivo asociado a dicho autovalor. Para esto analizaremos si la matriz es:

- a) no negativa,
- b) primitiva e
- c) irreducible.

a) La matriz teórica de Leslie es **no negativa**. Esto se debe a que todos los elementos de la matriz son mayores o iguales que 0. Esto es $0 \leq f_i, \forall i: 0 \dots U$ y $0 \leq m_i < 1, \forall i: 0 \dots U-1$, donde f_i y m_i representan la tasa de fecundidad y la de mortalidad de una persona de edad i respectivamente.

b) También deberíamos probar si la matriz es primitiva. Para esto, recordamos que en el capítulo “Implementación del modelo exponencial con estructura de edad” habíamos mencionado la existencia de dos edades ($E1$ y $E2$), las cuales representaban los límites inferior y superior, fuera de los cuales el número de nacimientos era despreciable. A partir de esto podemos afirmar, sin pérdida de generalidad, que las tasas de fecundidad, para las edades entre $E1$ y $E2$, son significativas; por lo tanto mayores que 0. Luego, sabiendo que una matriz es primitiva si existen dos clases fértiles consecutivas¹², podemos afirmar que la matriz teórica de Leslie es **primitiva**.

c) Sabemos que una matriz es irreducible si y solo si su digrafo asociado está fuertemente conectado¹². Si bien anteriormente mencionamos que el digrafo asociado a la matriz teórica de Leslie estaba fuertemente conectado, en la práctica esto no sucede, dado que las clases de edad mas elevadas poseen tasas de fecundidad nulas. De esta manera el digrafo asociado a la matriz no esta fuertemente conectado y por lo tanto **no es irreducible**.

A partir de lo mencionado en el párrafo anterior, podemos suponer que las últimas $U - k$ clases no son fértiles, teniendo en cuenta que la matriz de Leslie tiene dimensión $(U + 1) * (U + 1)$. Por lo tanto podemos redefinir la matriz teórica de Leslie de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} f_0 & f_1 & \dots & f_{k-1} & f_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{k-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{U-1} & 0 \end{array} \right]$$

$$\equiv \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

donde las dimensiones de estas submatrices son:

$$\begin{aligned} A: & (k+1) * (k+1), \\ 0: & (k+1) * (U-k), \\ B: & (U-k) * (k+1) \text{ y} \\ C: & (U-k) * (U-k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L^t = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ g_t(A,B,C) & C^t \end{bmatrix}$$

La submatriz C es estrictamente triangular y posee elementos no nulos en su subdiagonal, por lo tanto $C^t = 0$, si $(U-k) \leq t$. Entonces la matriz t -ésima de Leslie tendrá valores nulos en las últimas $U-k$ columnas de dicha matriz.

Sabemos¹² que si en una matriz de proyección (L) hay k clases juveniles, entonces $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$. Además si $f_U > 0$, entonces L es irreducible. Por lo tanto podemos afirmar que la submatriz A es **irreducible**. Podemos llegar a esta misma conclusión si observamos que el digrafo asociado a esta submatriz esta fuertemente conectado.

De esta manera, dado que además de ser irreducible, la submatriz A es no negativa y primitiva, podemos afirmar que tiene un valor propio (λ_1) positivo, simple y estrictamente dominante, y un autovector (v_1) positivo asociado a dicho autovalor. Por lo tanto, podemos aplicar el Método de la Potencia para obtener el autovalor dominante y autovector de dicha matriz (en Cushing¹² se prueba que si la matriz de proyección es diagonalizable el autovector correspondiente al autovalor positivo, simple y estrictamente dominante corresponde a una distribución estable de edades; Impagliazzo¹⁴ lo demuestra incluso en el caso en que la matriz de proyección no es diagonalizable). Este **vector de distribución estable de edades** tendrá dimensión $k+1$, por lo tanto deberemos obtener los $U-k$ campos restantes para poder conocer la distribución estable por edad de toda la población. Los autores Leslie¹⁵ y Piélou¹⁶ desprecian los valores del vector de distribución estable para las edades por encima de las de reproducción.

Como vimos en la matriz t -ésima de Leslie (L^t), donde $t = U-k$, la submatriz B se convierte en una matriz fija $g_t(A,B,C)$, por lo tanto en la matriz L^s , para $s > t$, la submatriz inferior izquierda (B) tendrá la siguiente forma:

$$g_t(A,B,C) * A^{s-t}$$

Por lo tanto, a partir de un año dado (t), la población con edades estériles dependerá de las clases reproductivas. Como vimos A^{s-t} tenderá a una matriz, la cual posee un vector de distribución estable por edades de dimensión $(k + 1)$. Al multiplicar la matriz fija $g_t(A, B, C)$, de dimensión $(U - k) * (k + 1)$, por el autovector de la matriz A^{s-t} obtendremos un vector con los valores de las últimas $(U - k)$ clases.

En las próximas secciones (**Autovalor** y **Autovector**) se analizarán los resultados correspondientes a la estimación de poblaciones de Argentina para años contiguos, con respecto al autovalor y autovector asociado a la matriz de Leslie de la población inicial.

8.5 Autovalor

Para realizar este estudio, generaremos la matriz de proyección a partir de las tasas argentinas registradas en el año 2001. Luego aplicamos el Método de la Potencia a partir de la submatriz superior izquierda A^i de dimensión $(50 * 50)$ y un vector inicial^j. De esta manera se obtiene una excelente aproximación, luego de realizar 250 iteraciones, del autovector y del autovalor λ_I propio de dicha submatriz. A continuación mostramos este último y en la próxima sección detallaremos el autovector:

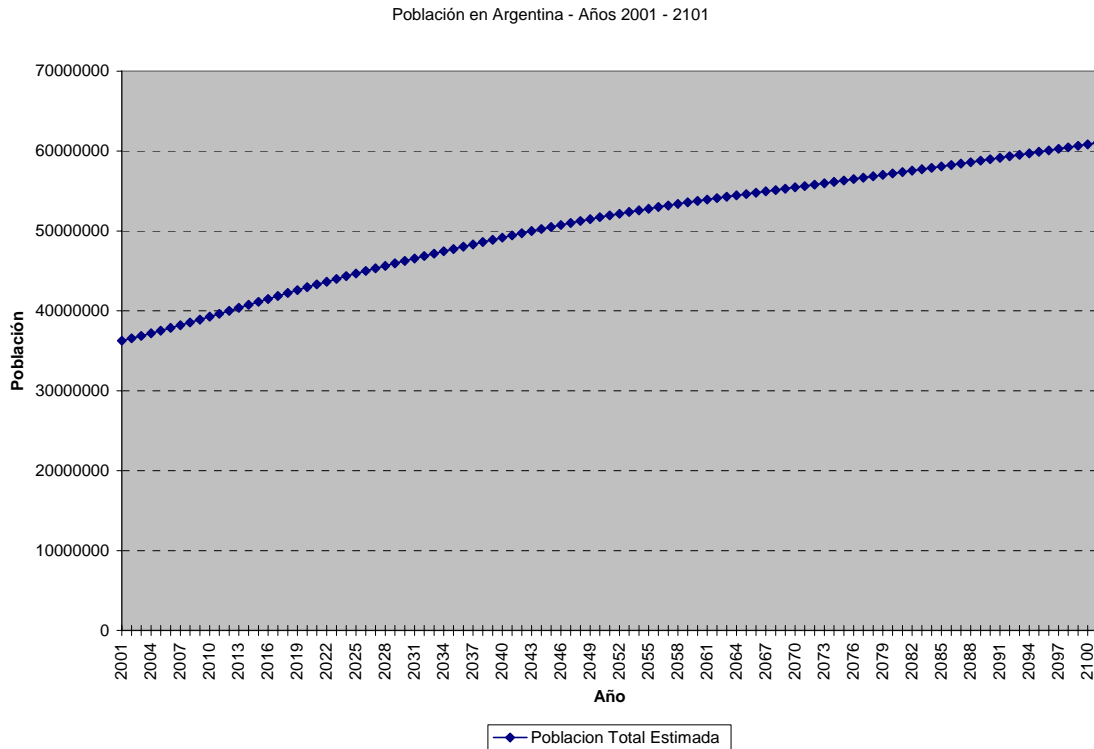
$$\lambda_I = 1,0030927$$

Podemos observar que este autovalor es levemente mayor que 1. Por lo tanto podemos esperar, dado lo mencionado anteriormente, que la población argentina tenga un crecimiento anual pequeño y que en un período de tiempo lo suficientemente grande sea muy cercano al 0,31% anual.

En el siguiente gráfico, generado con el modelo exponencial con estructura de edad, podemos observar las poblaciones totales estimadas en la Argentina para el período [2001, 2101]:

ⁱ Este mismo estudio se realizó utilizando la matriz completa de Leslie obteniéndose los mismos resultados (autovalor y autovector) que para la submatriz A. Obviamente la dimensión del autovector para la matriz de Leslie fue más grande que para el caso de la submatriz A.

^j Este vector inicial contiene los siguiente valores: $(1 + U/1000, 1 + (U-1) / 1000, 1 + (U-2) / 1000, \dots, \dots, 1)$, donde U es la dimensión del vector. En este caso $U = 50$.



GráficoArgentinaLeslie1 – Población total entre 2001 y 2101 con tasas de fecundidad y mortalidad fijas.

Claramente podemos ver en este gráfico que la Argentina posee un incremento continuo en la cantidad total de habitantes. Pero también podemos observar que el crecimiento no es uniforme, y a partir de la década del 40' comienza a tener un ritmo de crecimiento inferior al que tenía al comienzo del siglo. Veamos en los siguientes valores de poblaciones estimadas como sería la variación entre dos años sucesivos durante el período considerado:

Año	Pob. Total Estimada	Crecimiento (%)
2001	36260130	0,837716246
2002	36563887	
2011	39639865	0,92707682
2012	40007357	
2021	43312180	0,799860455
2022	43658617	
2031	46566174	0,639502829
2032	46863966	
2041	49443467	0,54844455
2042	49714637	
2051	51947246	0,418083761
2052	52164429	

2061	53937401	0,32428333
2062	54112311	
2071	55630273	0,302362349
2072	55798478	
2081	57369578	0,302435552
2082	57543084	
2091	59164792	0,311168169
2092	59348894	
2100	60839802	0,308526645
2101	61027509	

TablaArgentinaLeslie1

De esta tabla podemos observar, como suponíamos anteriormente, que el crecimiento de la población es cada vez menor y tiende a 0,31% anual^k ^l.

8.6 Autovector

Como dijimos, el autovector asociado al autovalor λ_1 nos permite conocer, luego de una cantidad considerable de años, durante la cual se logra una estabilidad en el vector de distribución por edades, cual será el porcentaje que tiene cada clase sobre la población total. Por lo tanto, el aporte que realiza la clase de edad i sobre el total de la población, podrá ser determinado por la posición i -ésima del autovector.

A continuación se detallan los campos del autovector v_1 propio de la submatriz de Leslie A de Argentina del año 2001 obtenidos por medio de la aplicación. A partir de estos datos, se obtuvieron, como se mencionó anteriormente, los valores de las clases no reproductivas. En base a estos datos, se obtendrá el porcentaje que representa cada clase sobre el total:

^k Porcentaje de crecimiento según el autovalor λ_1 calculado previamente.

^l Cabe recordar, dado el alto porcentaje de crecimiento que se registró entre los años 2001 y 2002, que en este modelo no se tuvo en cuenta tanto el saldo migratorio como las tasas variables.

Posición	Autovector	Porcentajes (%)			
0	1,00000000	1,52938017	53	0,77051091	1,17840412
1	0,98400994	1,50492529	54	0,76282372	1,16664748
2	0,98042440	1,49944165	55	0,75488486	1,15450594
3	0,97693541	1,49410565	56	0,74670369	1,14199382
4	0,97354204	1,48891589	57	0,73785104	1,12845475
5	0,97024337	1,48387098	58	0,72835230	1,11392757
6	0,96703856	1,47896960	59	0,71823461	1,09845378
7	0,96382482	1,47405456	60	0,70752671	1,08207732
8	0,96060233	1,46912616	61	0,69625876	1,06484434
9	0,95737128	1,46418465	62	0,68446226	1,04680301
10	0,95413183	1,45923031	63	0,67216984	1,02800323
11	0,95088416	1,45426338	64	0,65941511	1,00849639
12	0,94762842	1,44928412	65	0,64623249	0,98833516
13	0,94436478	1,44429277	66	0,63265707	0,96757318
14	0,94109338	1,43928956	67	0,61533889	0,94108709
15	0,93781438	1,43427471	68	0,59457716	0,90933453
16	0,93452789	1,42924843	69	0,57073056	0,87286400
17	0,93122984	1,42420446	70	0,54420677	0,83229904
18	0,92792039	1,41914305	71	0,51545082	0,78832026
19	0,92459972	1,41406448	72	0,48493248	0,74164612
20	0,92126798	1,40896898	73	0,45313334	0,69301314
21	0,91792534	1,40385682	74	0,42053397	0,64315632
22	0,91457197	1,39872824	75	0,38760182	0,59279054
23	0,91120804	1,39358351	76	0,35478004	0,54259356
24	0,90783373	1,38842291	77	0,33197546	0,50771669
25	0,90444922	1,38324671	78	0,31740914	0,48543924
26	0,90105471	1,37805521	79	0,30995699	0,47404207
27	0,89760199	1,37277468	80	0,30900262	0,47258248
28	0,89409181	1,36740629	81	0,24663919	0,37720508
29	0,89052500	1,36195128	82	0,23179218	0,35449836
30	0,88690236	1,35641088	83	0,19934514	0,30487450
31	0,88322473	1,35078639	84	0,17927105	0,27417358
32	0,87949298	1,34507912	85	0,16164664	0,24721917
33	0,87570798	1,33929042	86	0,15027966	0,22983474
34	0,87187063	1,33342165	87	0,13263326	0,20284668
35	0,86798182	1,32747419	88	0,10595479	0,16204516
36	0,86404247	1,32144942	89	0,08789819	0,13442975
37	0,85994830	1,31518789	90	0,07424938	0,11355553
38	0,85570173	1,30869326	91	0,05464520	0,08357329
39	0,85130520	1,30196930	92	0,04300991	0,06577850
40	0,84676125	1,29501987	93	0,03240928	0,04956611
41	0,84207245	1,28784891	94	0,02503773	0,03829221
42	0,83724143	1,28046045	95	0,01675861	0,02563028
43	0,83227087	1,27285858	96	0,01291485	0,01975171
44	0,82716350	1,26504746	97	0,00905900	0,01385465
45	0,82192208	1,25703133	98	0,00599318	0,00916585
46	0,81654942	1,24881450	99	0,00469875	0,00718618
47	0,81086120	1,24011504	100	0,00238344	0,00364519
48	0,80486423	1,23094339	101	0,00155803	0,00238282
49	0,79856568	1,22131051	102	0,00077665	0,00118779
50	0,79197306	1,21122790	103	0,00038520	0,00058911
51	0,78509423	1,20070754	104	0,00026766	0,00040935
52	0,77793735	1,18976196	105	0,00020497	0,00031347
			106	0,00011567	0,00017690

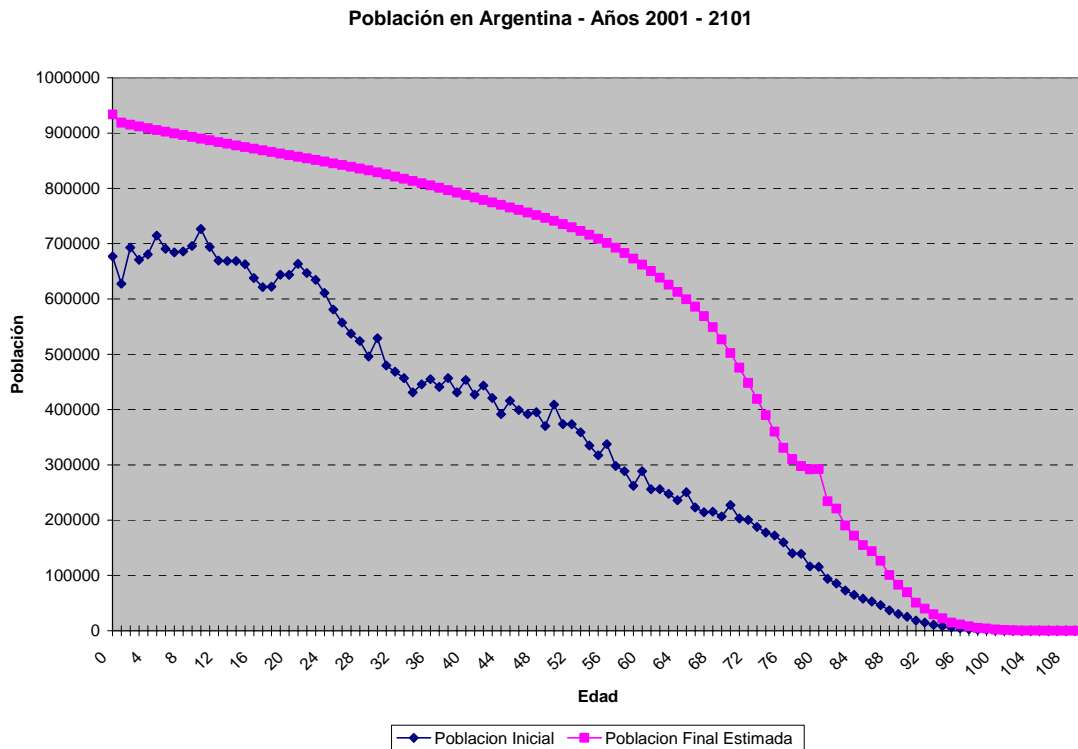
107	0,00006534	0,00009994	109	0,00002292	0,00003506
108	0,00004215	0,00006447	110	0,00002285	0,00003495

TablaArgentinaLeslie2

En este autovector podemos ver, como era de esperar, que las clases que contribuyen mas en el total de la población son las de las personas de edad joven, seguidas por las de las edades intermedia y finalizando con las de las edades adulta en donde el aporte es muy pequeño.

En la sección **Autovalor** calculamos al autovalor λ_1 para la submatriz de Leslie A de Argentina, y en base a este escalar se obtuvo el autovector v_1 . En esta misma sección se determinó que luego de aproximadamente 100 años la Argentina logra una estabilidad en el incremento anual de su población. Por lo tanto $pt_i \cong pt_{i-1} * \lambda_1$, donde pt_i y pt_{i-1} son las poblaciones totales para los años i y $i - 1$ respectivamente.

Veamos en el siguiente gráfico la cantidad de individuos por edad que hay en la población estimada de Argentina para el año 2101^m utilizando el modelo exponencial con estructura de edad:



GráficoArgentinaLeslie2 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2101 con tasas de fecundidad y mortalidad fijas.

^m La estimación de la población de Argentina para el año 2101 utilizada para este estudio esta basada en el supuesto de una estabilidad lograda aproximadamente en 100 años (poblaron inicial del año 2001).

En este gráfico podemos ver claramente que la cantidad de habitantes por clase disminuye de forma continua a medida que aumenta la edad. Esto concuerda con el análisis hecho luego de observar los porcentajes de aporte de cada clase de la TablaArgentinaLeslie2.

A continuación veremos una tabla en la cual compararemos, para ciertos años, el porcentaje de aporte del autovector sobre el total obtenido en la TablaArgentinaLeslie2, de la población inicial (año 2001) de Argentina y de las estimadas para los años 2026, 2051 y 2101:

Edad	Autovector(%)	Pob. 2001	%	Pob. 2026	%	Pob. 2051	%	Pob. 2101	%
0	1,52938017	677115	1,86738	737064	1,63797	801871	1,54363	933648	1,52988
10	1,45923031	726456	2,00346	724748	1,61060	765156	1,47295	889891	1,45818
20	1,40896898	643693	1,77521	652593	1,45025	728399	1,40219	860014	1,40922
30	1,35641088	528924	1,45869	705532	1,56790	718868	1,38384	828766	1,35802
40	1,29501987	453676	1,25117	646367	1,43642	681144	1,31122	787880	1,29102
50	1,21122790	409038	1,12807	549384	1,22089	625770	1,20463	741061	1,21431
60	1,08207732	288568	0,79583	392414	0,87206	628625	1,21012	662117	1,08495
70	0,83229904	227299	0,62686	297366	0,66084	443728	0,85419	502116	0,82277
80	0,47258248	115793	0,31934	140338	0,31187	215031	0,41394	292246	0,47888
90	0,11355553	25254	0,06965	31097	0,06911	46426	0,08937	69701	0,11421
100	0,00364519	755	0,00208	1144	0,00254	1436	0,00276	2198	0,00360
110	0,00003495	27	0,00007	9	0,00002	11	0,00002	23	0,00004
Total		36260130		44998516		51947246		61027509	

Al igual que en la TablaArgentinaLeslie1, en donde comparamos los porcentajes de crecimientos de varios años con el autovalor λ_1 , en la tabla anterior observamos a lo largo de los años la proporción de individuos por clase tiende a los porcentajes obtenidos de la TablaArgentinaLeslie2. Vemos que la diferencia, para cada año, entre los porcentajes de la población estimada para el año 2101 y los del autovector es prácticamente nula.

9 Caso Práctico: Reducción anual de las tasas de mortalidad móvil

En esta sección se analizarán dos posibles escenarios para la Argentina y en un período de 50 años aplicando el *Modelo5* en los cuales se reduzcan anualmente las tasas de mortalidad variables para las personas menores de 1 año y para los mayores de 55.

9.1 Reducción de la tasa de mortalidad al nacer

La tasa de mortalidad para una persona que tenga entre 0 y 1 año en la Argentina para el año 2001 es de 0,012946813, mientras que en Francia para esa misma clase y año es francamente menor: 0,004462.

Para lograr equiparar las tasas del país europeo al cabo de 50 años la Argentina deberá tener una importante disminución en las suyas. Al igual que en el modelo de tasas móviles, se descontará en este caso un porcentaje de la tasa de mortalidad para la edad mencionada en forma constante. A continuación se detallan los cálculos necesarios para obtener dicho porcentaje:

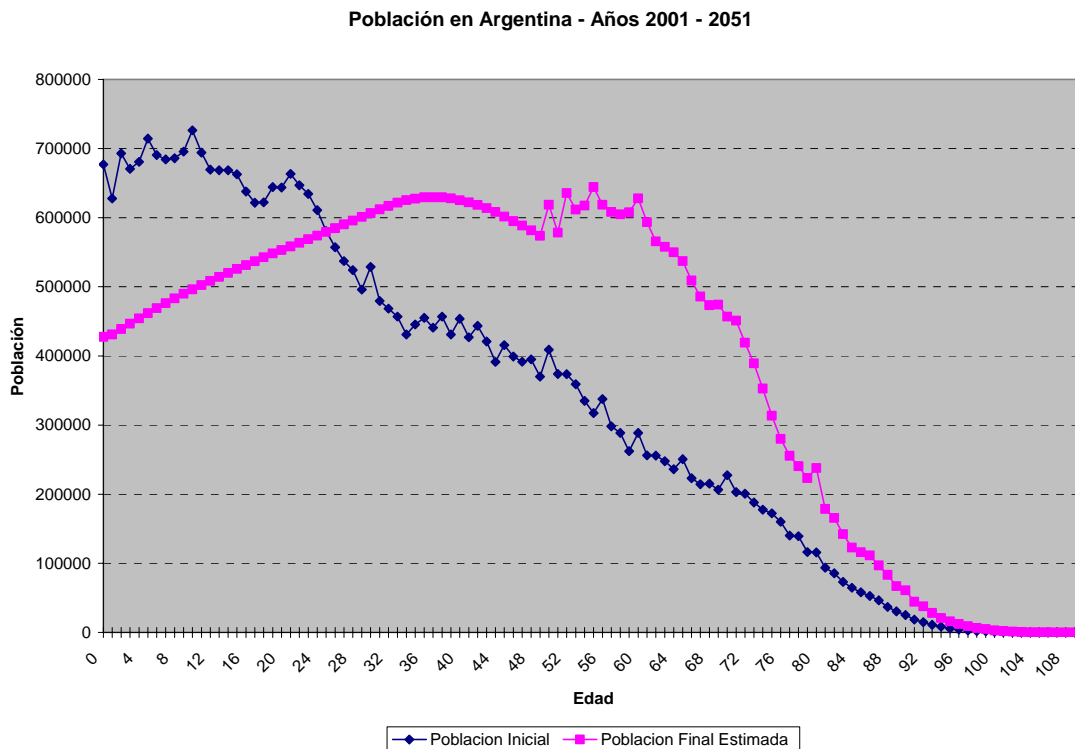
Diferencia entre las tasas:

$$0,012946813 - 0,004462 = 0,008484813$$

Este valor representa el 65,54% de la tasa original, por lo que al cabo de 50 años se deberá tener una reducción anual de 1,31%.

Cabe remarcar que el modelo ya se veía afectado en todas sus clases por una tasa de mortalidad variable con una reducción de 0,3%. Por lo tanto la reducción neta de la nueva tasa variable será de 1,01%.

Con este nuevo parámetro se aplicará nuevamente el modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y migración (*Modelo5*) obteniendo el siguiente resultado:



GráficoArgentina4 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 con tasa de fecundidad variable anualmente con una reducción de 0,71% y con tasa de mortalidad variable anualmente con una reducción de 1,31% para personas menores de 1 año y 0,3% para el resto, y tasas de migración variables por edad.

Como se puede observar este gráfico es muy similar al GráficoArgentina4. Al aplicar el modelo en un período de 50 años reduciendo la tasa de mortalidad para los individuos menores de 1 año es lógico que no se observen modificaciones en cuanto a la cantidad de habitantes mayores de esa edad. Para el caso de los menores de 50 años se observa un leve aumento de la población, pasando de 27829105 a 27965572 personas; lo que representa un aumento cercano al 0,5%.

9.2 Reducción de la tasa de mortalidad de personas de edad adulta

En el caso de las personas de edad adulta (mayores de 55 años) en la Argentina para el año 2001 había una tasa de mortalidad en promedio de 0,07, mientras que en Francia era de 0,0237. Esto representa una diferencia significativa, al igual que para la tasa de personas de edad menor a 1 año. Si bien generalmente las tasas de mortalidad de Francia son muy inferiores a las de Argentina, en algunos casos, como por ejemplo para los individuos que poseen edad entre 18 y 25 años, sucede lo contrario.

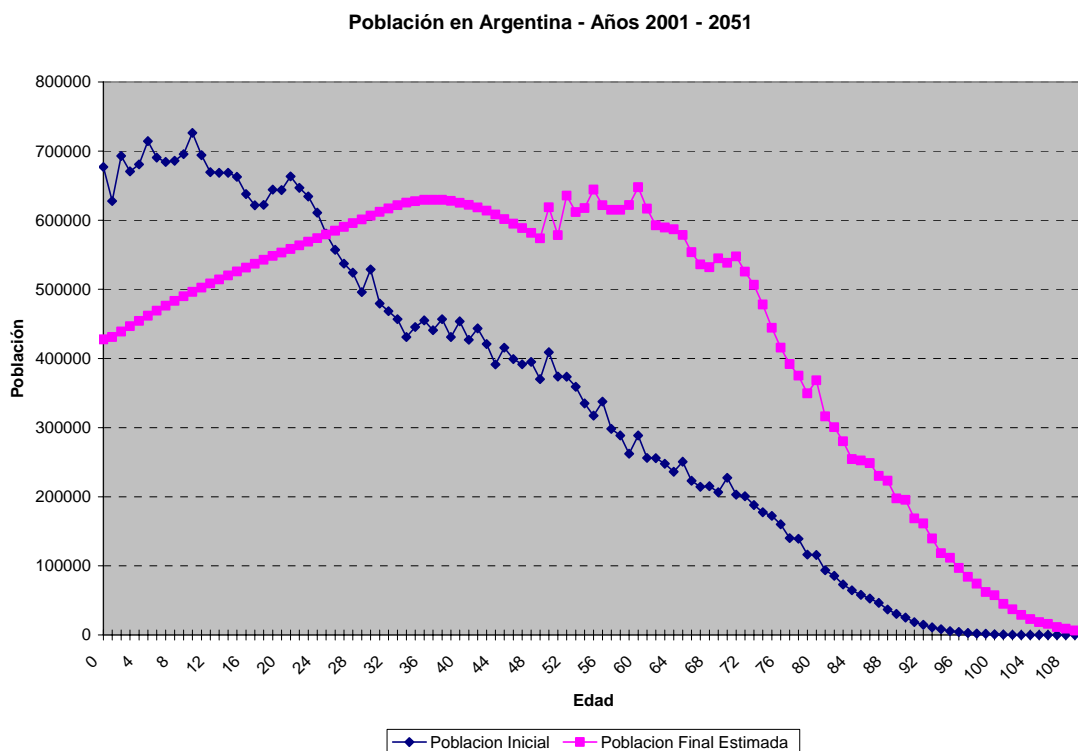
Nuevamente para equiparar las tasas de Francia en 50 años se deberán reducir las tasas de Argentina del siguiente modo:

Diferencia entre las tasas (de acuerdo al promedio entre las clases de cada país):

$$0,07 - 0,023675504 = 0,046324496$$

Esta diferencia representa aproximadamente 66,18% de la tasa original. Por lo tanto se deberá reducir anualmente la tasa original argentina para las personas mayores de 55 años en 1,32%. Al igual que para el caso anterior se deberá restar a esta tasa la que afecta a toda la población. Dado que la tasa de mortalidad variable para toda la población era de 0,3%, entonces la tasa neta para esta porción de la población será de 1,02%. Este valor es muy similar al calculado para la clase de 0 años.

Con este nuevo parámetro se aplica el *Modelo5* que genera el siguiente resultado:



GráficoArgentina5 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 con tasa de fecundidad variable anualmente con una reducción de 0,71% y con tasa de mortalidad variable anualmente con una reducción de 1,32% para personas mayores de 55 años y 0,3% para el resto, y tasas de migración variables por edad.

En este caso se puede observar que hubo un aumento en la cantidad de la población adulta. Este aumento es muy significativo y notoriamente más visible que para el caso anterior. La población adulta (mayor de 55 años), a partir de esta reducción en sus tasas, pasó de 12764555 a 16977886 personas; esto representa un aumento del 33% respecto de la población original.

9.3 Conclusiones

Si bien en los dos escenarios el porcentaje en el cual se reducirá anualmente la tasa de mortalidad móvil es prácticamente el mismo el impacto que esto genera en la población al cabo de 50 años es totalmente distinto.

Esta notable diferencia se debe básicamente a que la reducción en el primer caso se realizó sobre una clase sola (personas menores de 1 año) mientras que en la segunda se hizo sobre la mitad de la población.

Suponiendo una reducción notable, similar a las del segundo caso en las tasas de mortalidad de las personas de la edad adulta Argentina deberá tener en cuenta el gran impacto que esto genera en la economía nacional por el creciente número de personas que se encontrarían en edad de disponer de una jubilación.

10 Caso Práctico: Cantidad de docentes para el ciclo primario

Otra de las muchas utilidades que puede tener para un país la estimación de la cantidad de personas que habrá en un tiempo dado es poder predecir la cantidad de docentes que serán necesarios para cubrir los puestos del ciclo primario. A partir de esta información un gobierno puede tomar ciertas políticas en educación, en el caso de ser necesarias, para capacitar, brindar subsidios o becas a los futuros docentes con el fin de estimular el desarrollo de esta carrera.

Para esto serán tenidos en cuenta los siguientes supuestos:

1. La edad que en el caso general los estudiantes ingresan a primer grado son los 6 años, mientras que a los 12 años se supone que estarán en séptimo grado.
2. Cada alumno puede optar por cursar a la mañana o a la tarde con una carga horaria de 4 horas por día y 4 horas semanales fuera del horario de clase. La distribución de los alumnos en los cursos es uniforme.
3. Los cursos están compuestos por 30 alumnos (sin importar su sexo).
4. La tasa de deserción estudiantil en cualquier grado es de 0,02.
5. A pesar de ser obligatorio el ciclo primario en la Argentina, sólo el 96% de la población en edad estudiantil asiste a clase.
6. Cada docente puede trabajar hasta 40 horas semanales.
7. La probabilidad de ausentismo de cada profesor es de 5%.
8. Cada curso esta compuesto de la siguiente manera:

Cantidad	Materia/s	Horas semanales	Cursos asignados
1	Matemática y Física	7	5
1	Lengua y Cs. Sociales	7	5
1	Música	2	20
1	Actividades Prácticas	2	20
1	Informática	2	20
1	Educación Física	4	10

donde:

Cantidad representa el número de docentes por materia y curso,

Materia/s son las asignaturas que dicta cada docente,

Horas semanales indican la cantidad de horas de un docente por cada curso y

Cursos asignados son la cantidad de cursos en que un mismo docente dicta clases.

Teniendo en cuenta los supuestos anteriores se aplica nuevamente el *Modelo5* obteniendo como resultado la cantidad de estudiantes según su edad (grado) para un período de 25 años (año 2026):

Edad	Población Estimada
6	569564
7	547275
8	546088
9	544385
10	541034
11	537828
12	532807
Total	3818981

A partir de estos resultados y de los supuestos antes mencionados se puede estimar la cantidad de cursos de cada grado, y por consiguiente la cantidad de docentes necesarios para satisfacer la demanda de dichos cursos. En estos resultados se incluye, como consecuencia del supuesto número 7, la capacitación de un 5% adicional de docentes auxiliares:

Edad	Cursos Estimados
6	18986
7	18243
8	18203
9	18147
10	18035
11	17928
12	17761
Total	127303

Edad	Matemática y Física	Lengua y Cs. Sociales	Música	Actividades Prácticas	Informática	Educación Física	Total
6	3988	3988	997	997	997	1994	12961
7	3832	3832	958	958	958	1916	12454
8	3823	3823	956	956	956	1912	12426
9	3811	3811	953	953	953	1906	12387
10	3788	3788	947	947	947	1894	12311
11	3765	3765	942	942	942	1883	12239
12	3730	3730	933	933	933	1865	12124
Total	26737	26737	6686	6686	6686	13370	86902

Los resultados anteriores dan una clara idea de la cantidad de docentes por grado y materia que se necesitarían en el año 2026.

Como vimos anteriormente en el GráficoArgentina1, donde se comparó la población argentina para cada edad en el año 2001 con la del 2026, la población con edades entre 6 y 12 años disminuirá; por lo cual si la Argentina en el año 2001 mantiene la misma cantidad de docentes para cubrir los cargos necesarios y respetando los supuestos antes mencionados, en el año 2026 habrá demasiados docentes para los cargos disponibles. Si observamos ahora el GráficoArgentina2, en donde aquí se comparó la población del

2001 con la del 2051, la población en edad estudiantil es todavía menor que en la del caso anterior; por lo cual habrá un exceso aún mayor en el plantel docente.

Veamos ahora como se modifican la cantidad de docentes necesarios para los diferentes cursos y materias si suponemos que la tasa de deserción estudiantil en cualquier grado es 0 (se elimina el supuesto 4) y todos los individuos en edad estudiantil concurre a clase (se elimina el supuesto 5).

A partir de estas modificaciones sobre las hipótesis anteriores aplicamos el *Modelo5* donde se obtienen los siguientes resultados para un período de 25 años (año 2026):

Edad	Población Estimada
6	628832
7	634365
8	639508
9	644108
10	646652
11	649506
12	650156
Total	4493127

Como podemos ver en la tabla anterior la cantidad de individuos en edad escolar, eliminando los supuestos 4 y 5, tuvieron un incremento del 17,65%. Este porcentaje es muy alto teniendo en cuenta que a priori los índices de deserción y analfabetismo se suponían pequeños. A continuación se muestran, como en el caso anterior, los cursos y docentes por materia necesarios para satisfacer dicha demanda.

Edad	Cursos Estimados
6	20962
7	21146
8	21317
9	21471
10	21556
11	21651
12	21672
Total	149775

Edad	Matemática y Física	Lengua y Cs. Sociales	Música	Actividades Prácticas	Informática	Educación Física	Total
6	4403	4403	1101	1101	1101	2202	14311
7	4441	4441	1111	1111	1111	2221	14436
8	4477	4477	1120	1120	1120	2239	14553
9	4509	4509	1128	1128	1128	2255	14657
10	4527	4527	1132	1132	1132	2264	14714
11	4547	4547	1137	1137	1137	2274	14779
12	4552	4552	1138	1138	1138	2276	14794
Total	31456	31456	7867	7867	7867	15731	102244

11 Caso Práctico: Epidemia

Como mencionamos en la introducción de este trabajo la cantidad de individuos de una población no se mantiene constante con el paso del tiempo. Estas modificaciones pueden deberse, como vimos, al nacimiento e inmigración de personas (incremento de población), como a la muerte y emigración (decremento de población). Entre las causas de muerte podemos mencionar el caso de una Epidemia.

En este caso práctico veremos primero y sobre varios escenarios el impacto que tiene sobre la población el ingreso al país de un número de personas infectadas con alguna enfermedad contagiosa. Luego, y a partir de estos resultados, se estimará como estará compuesta para cada escenario la población luego de un período de 50 años. Para esto utilizaremos el modelo discreto SIR, que se detalla a continuación, desarrollado por Kermack-Mckendrick¹⁷ en el año 1927. Naturalmente, este modelo ha sido modificado y perfeccionado constantemente a partir de esa fecha, hasta llegar a los actuales sofisticados modelos epidemiológicos, pero para el ejercicio que nos proponemos nos basta con usar el modelo original.

11.1 Modelo SIR (discreto)

Este es posiblemente uno de los más conocidos en cuanto a modelización y control de epidemia se refiere dada su simplicidad y su aplicabilidad sobre datos reales. Denotamos de la siguiente manera las distintas categorías en las que puede estar una población:

- $S(t)$ a la **población susceptible** que en el tiempo t no fue infectada todavía,
- $I(t)$ como la **población infectada** que en el tiempo t son capaces de transmitir la enfermedad al estar en contacto con personas susceptibles y
- $R(t)$ a la **población removida** que anteriormente estuvo infectada pero que ahora, ya sea por muerte o recuperación, no es capaz de continuar transmitiendo la enfermedad.

Se asume en este modelo que la población total N es constante y no hay nacimientos ni muertes ajenas a esta enfermedad. Por lo tanto,

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

También asumimos los siguientes puntos:

- cada persona infectada transmite la enfermedad a otras $r * N$ personas por unidad de tiempo y
- ya sea por inmunidad o fallecimiento, una proporción a del conjunto de infectados pasa a pertenecer, por unidad de tiempo, al conjunto de removidos.

A continuación se describe dicho modelo:

$$S(t) = S(t-1) - r * S(t-1) * I(t-1)$$

$$I(t) = I(t-1) + r * S(t-1) * I(t-1) - a * I(t-1)$$

$$R(t) = R(t-1) + a * I(t-1)$$

A partir de que supusimos que la población total (N) se mantendría constante podemos eliminar la tercera ecuación del modelo dado que la población total estaba compuesta por la suma de personas **susceptibles**, **infectadas** y **removidas**.

Según los valores de a , r y una población inicial de susceptibles e infectados podremos ver como se modifican estos dos grupos a lo largo del tiempo:

Caso 1: Si $S(0) < \frac{a}{r}$, la población de infectados decrecerá y tenderá a 0 y

Caso 2: Si $S(0) > \frac{a}{r}$, la población de infectados inicialmente crecerá hasta un instante de tiempo T ; luego decrecerá, y al igual que en el Caso 1, tenderá a 0.

En ambos casos la población de susceptibles disminuirá y tenderá a una constante mayor que 0.

De estos dos casos podemos definir el indicador R_0 que determina el umbral para el cual se desencadena una epidemia dentro de la población. Este valor se define de la siguiente manera:

$$R_0 = \frac{r * S(0)}{a}.$$

De esta manera, si se introduce una cantidad de individuos infectados a una población, **ocurrirá una epidemia si $R_0 > 1$** .

11.2 Fase 1

Teniendo en cuenta el modelo SIR, supondremos el ingreso de 100 personas infectadas al país. Se analizará para un período de 100 días y según distintos escenarios la cantidad de personas que pertenecerán a los grupos **susceptibles**, **infectados** y **removidos**:

Escenario 1:

$$r = 0,00000004$$

$$a = 0,3$$

$$R_0 = 4,83$$

Escenario 2:

$$r = 0,00000003$$

$$a = 0,8$$

$$R_0 = 1,36$$

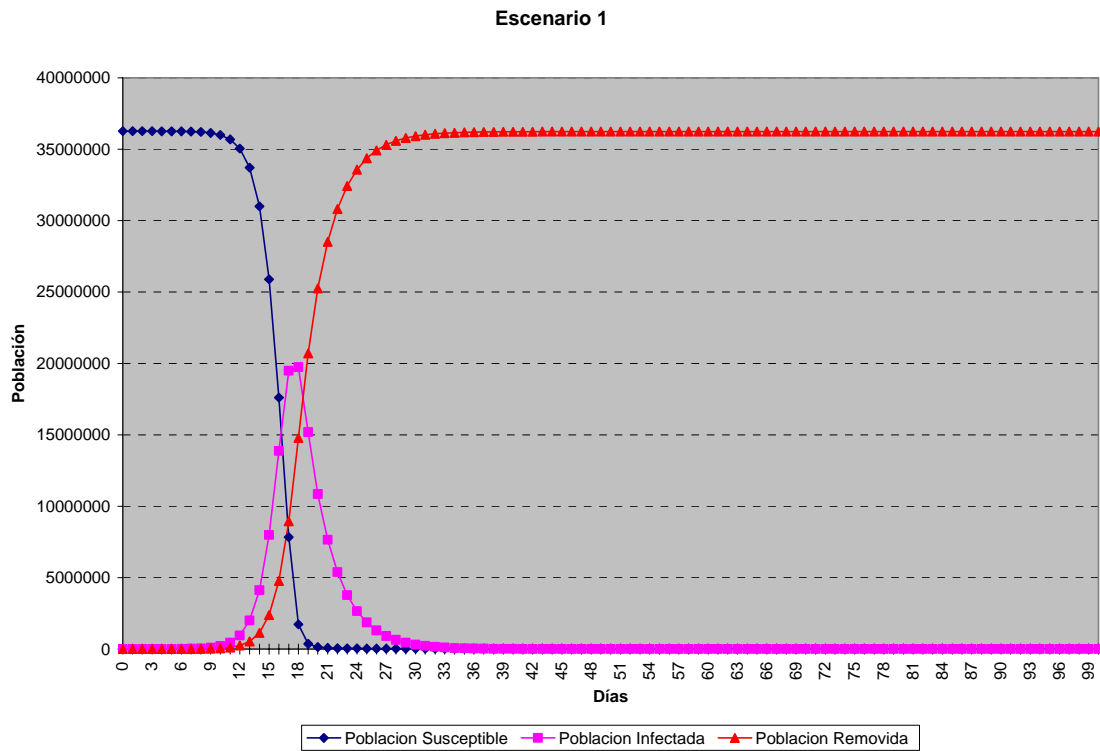
Escenario 3:

$$r = 0,00000002$$

$$a = 0,8$$

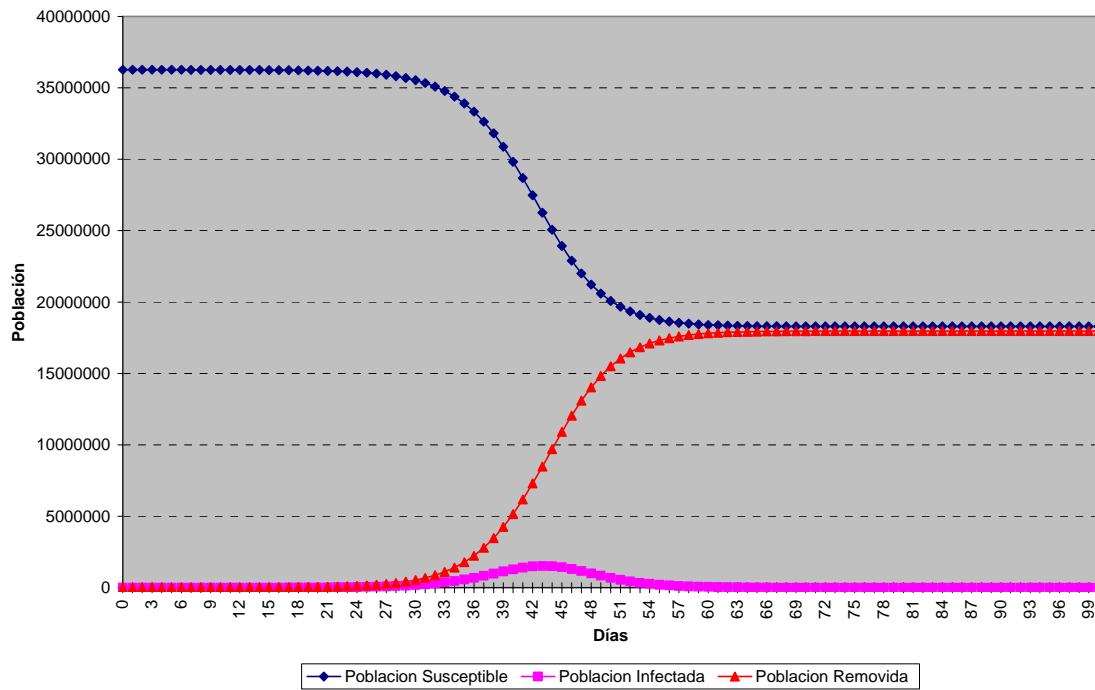
$$R_0 = 0,91$$

11.2.1 Resultados



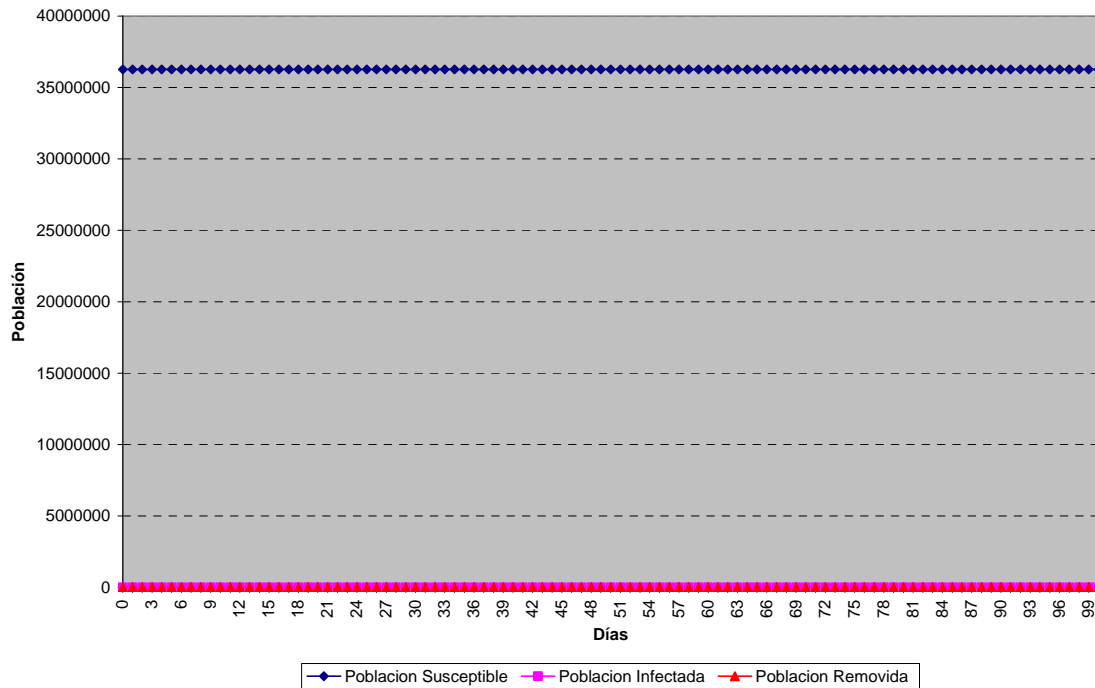
GráficoEpidemial1 – Comparación de la población susceptible, infectada y removida.
Parámetros: $I(0) = 100$, $Días = 100$, $r = 0,00000004$ y $a = 0,3$.

Escenario 2



GráficoEpidemia2 – Comparación de la población susceptible, infectada y removida.
Parámetros: $I(0) = 100$, $Días = 100$, $r = 0,00000003$ y $a = 0,8$.

Escenario 3



GráficoEpidemia3 – Comparación de la población susceptible, infectada y removida.
Parámetros: $I(0) = 100$, $Días = 100$, $r = 0,00000002$ y $a = 0,8$.

Si bien los escenarios a priori no eran tan distintos, generan resultados muy diferentes. Esto podemos verlo en los gráficos expuestos.

Vemos en el GráficoEpidemia1 como, a partir de un alto valor de contagio r y bajo de a , se genera una gran epidemia en la población, en donde al cabo de 100 días casi toda la población pertenece al grupo de **removidos**.

En el GráficoEpidemia2 se puede observar una fuerte epidemia, aunque de menor intensidad, en donde luego de 100 días cerca de la mitad de la población ha resultado afectada.

Diferente es el caso que observamos en el GráficoEpidemia3. Aquí no llega a haber epidemia dado que el valor de contagio r es bajo y alto el de a . La población de infectados se reduce y la población susceptible casi no sufre modificaciones.

Los primeros dos escenarios son claros ejemplos de epidemia y pertenecen al Caso 2 del Modelo SIR. Esto se puede ver ya que en ambos escenarios la población inicial de **susceptibles** es mayor que a/r . Lo que es lo mismo decir que en ambos casos $R_0 > 1$. Observamos también, que a diferencia del Escenario 3, existe un claro instante T en el cual la población **infectada** alcanza su máximo valor y luego comienza a descender. Este instante para el Escenario 1 es el día 18, en cambio para el Escenario 2 es el día 43. Por otra parte el último escenario pertenece claramente al Caso 1 del Modelo SIR ya que $R_0 < 1$.

11.3 Fase 2

Para poder estimar las consecuencias que provocaría una epidemia en cada uno de los escenarios, supondremos lo siguiente:

- De las personas que pertenecen al grupo de **removidos**, el 10% son fallecidos^{n,18},
- La edad de las personas fallecidas por la epidemia se distribuye de manera uniforme.

A partir del primer supuesto y al cabo de 100 días obtenemos, para cada escenario, los siguientes fallecidos y los porcentajes que estos representan sobre una población inicial de 36260130 personas.

ⁿ Este valor se basa en el supuesto de un porcentaje similar que tuvo la Peste Bubónica entre los años 1978 y 1992, en donde la cantidad de muertos para ese período y epidemia, según la OMS, fue de 1500 mientras que el número de infectados fue de 15000.

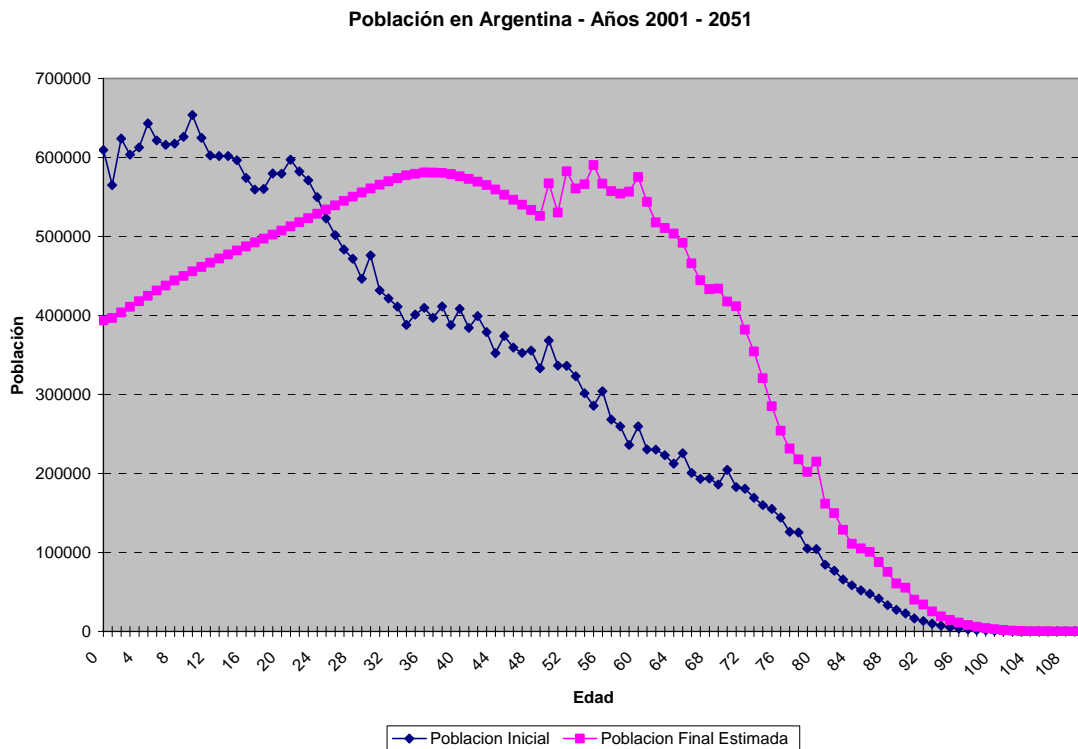
Nro. Escenario	Removidos	Fallecidos	% sobre la población inicial
Escenario 1	36234396	3623440	9,99%
Escenario 2	17971409	1797141	4,96%
Escenario 3	1329	133	0%

TablaEpidemia

Como vimos en los gráficos de la Fase 1 de este caso práctico el número de personas que pertenecen al grupo de **removidos** para cada escenario es muy diferente, por consecuencia también lo será la cantidad de fallecidos. También observamos que en el Escenario 3 el número de fallecidos es de solo 133, lo cual representa un porcentaje insignificante respecto de la población inicial.

Veamos ahora, teniendo en cuenta el segundo supuesto de esta fase y el porcentaje de la población inicial fallecida por la epidemia, cuales serán las consecuencias dentro de 50 años en los Escenarios 1 y 2°. Para esto reduciremos en cada caso la población inicial (para cada edad) según el porcentaje calculado en la última columna de la tabla anterior y luego aplicaremos nuevamente el *Modelo5* a estos datos.

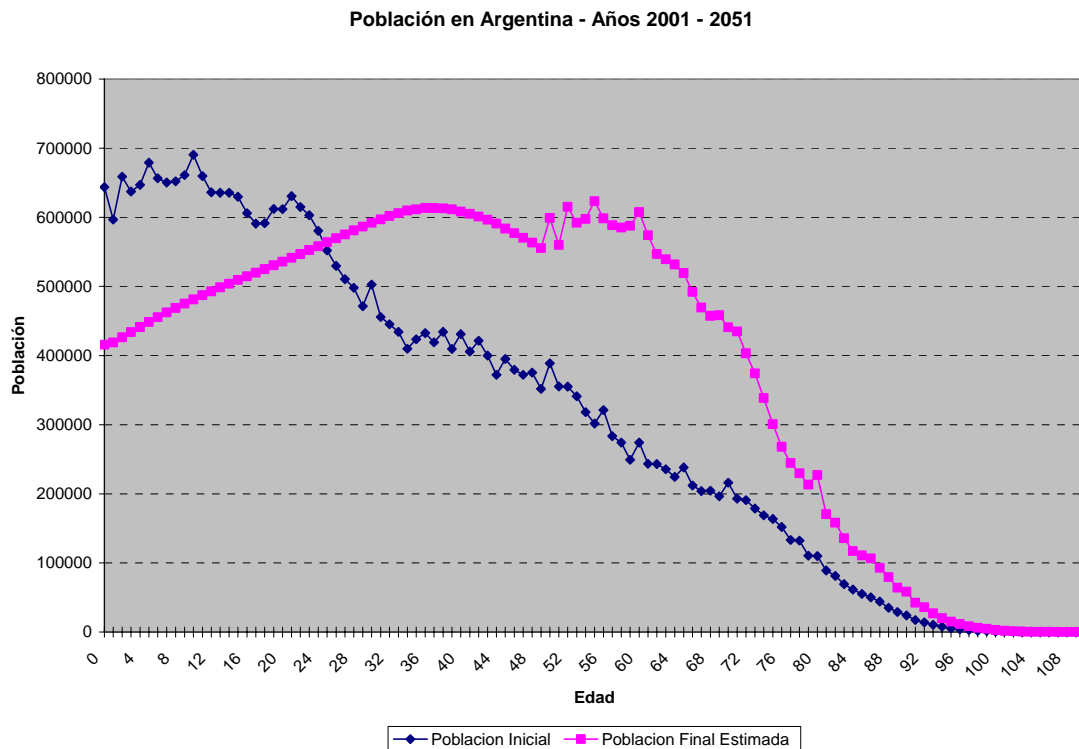
Escenario 1



GráficoEpidemia4 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 bajo supuesto Escenario 1, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

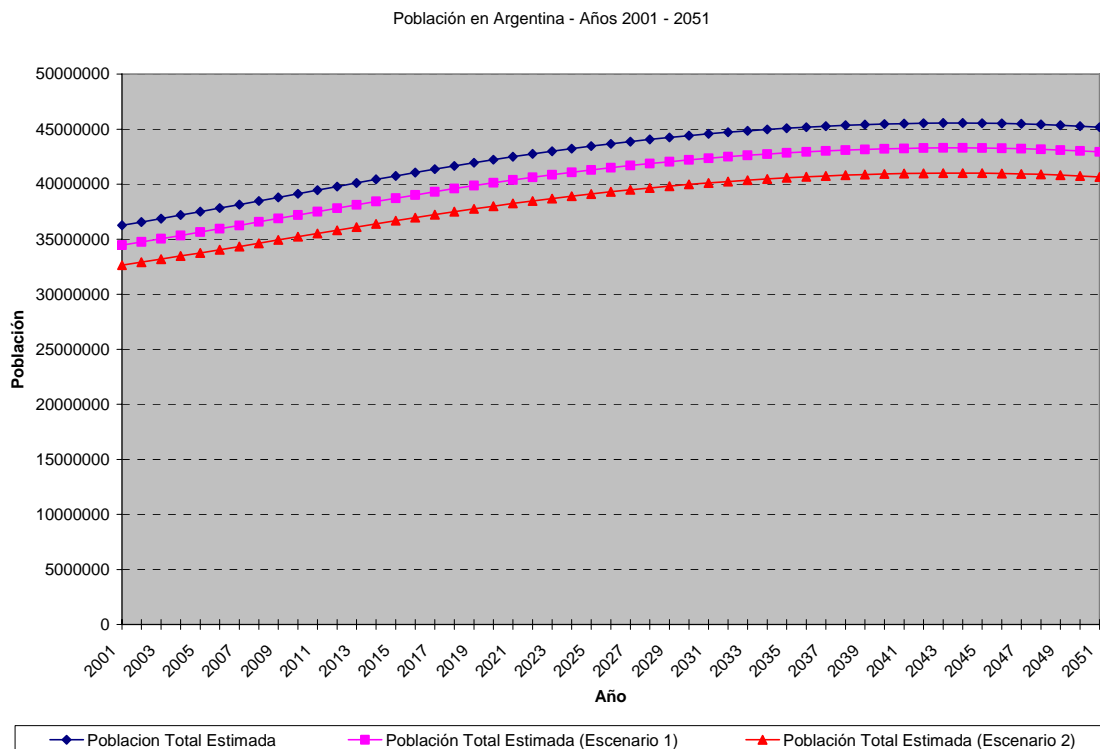
° Sólo se analizarán estos dos escenarios dado que en el Escenario 3 fue insignificante el número de muertos en relación a la población inicial, lo que representaría una estimación futura de la población casi idéntica a la que se hizo sin tener en cuenta la epidemia.

Escenario 2



GráficoEpidemia5 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 bajo supuesto Escenario 2, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

11.3.1 Comparación de la población total original, Escenario 1 y Escenario 2



GráficoEpidemia6 – Comparación Población total de 2001 a 2051 sin escenario, con Escenario 1 y 2, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Claramente se observa que los GráficoEpidemia4 y GráficoEpidemia5 son muy similares a GráficoArgentina2 (Ver sección Estimación Población futura de Argentina). Esto se debe a que se mantuvieron los valores de las tasas de migración, las tasas de fecundidad y mortalidad variables, y se redujo la población completa en un porcentaje dado.

Los porcentajes en que difiere la población inicial sin epidemia de la población inicial para cada escenario (última columna de TablaEpidemia) son los mismos que se obtienen de las poblaciones estimadas para el año 2051. Podemos ver en el GráficoEpidemia6 que estas diferencias no son solo para los años 2001 y 2051 sino que también lo son para todo el intervalo.

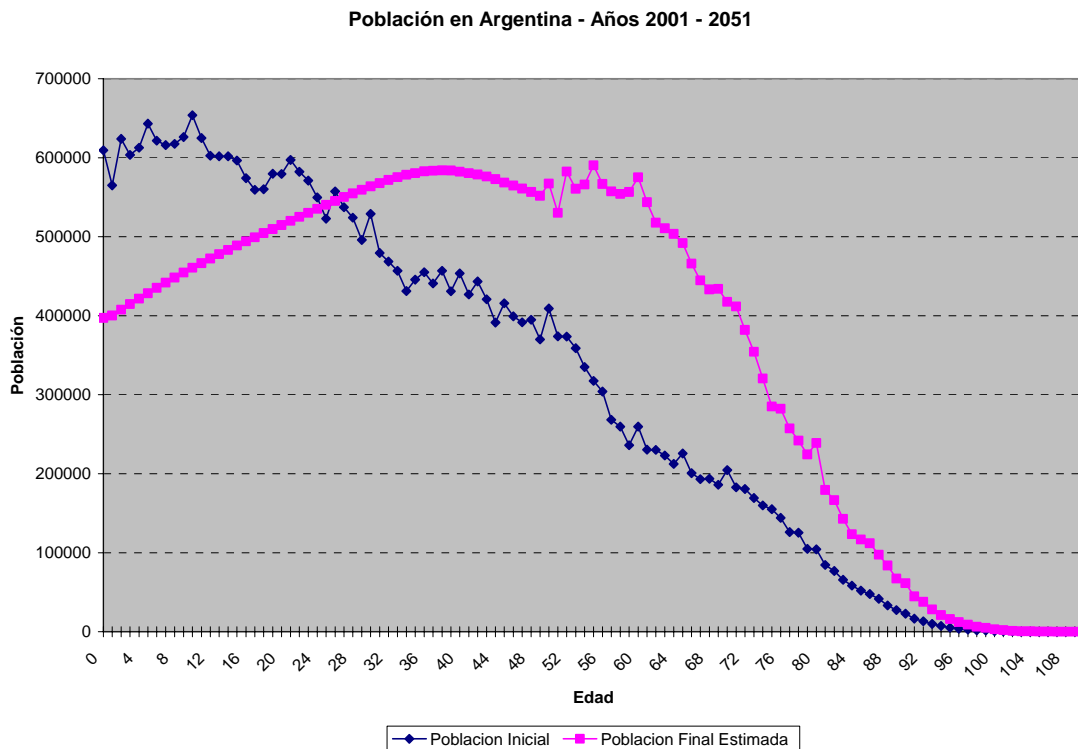
11.4 Fase 3

En la fase anterior supusimos que la edad de las personas fallecidas por la epidemia se distribuía de manera uniforme. Veamos ahora que sucede si mantenemos los porcentajes calculados en la última columna de la TablaEpidemia, pero suponemos que la epidemia solo puede ocasionar la muerte, a diferencia de la fase anterior, en

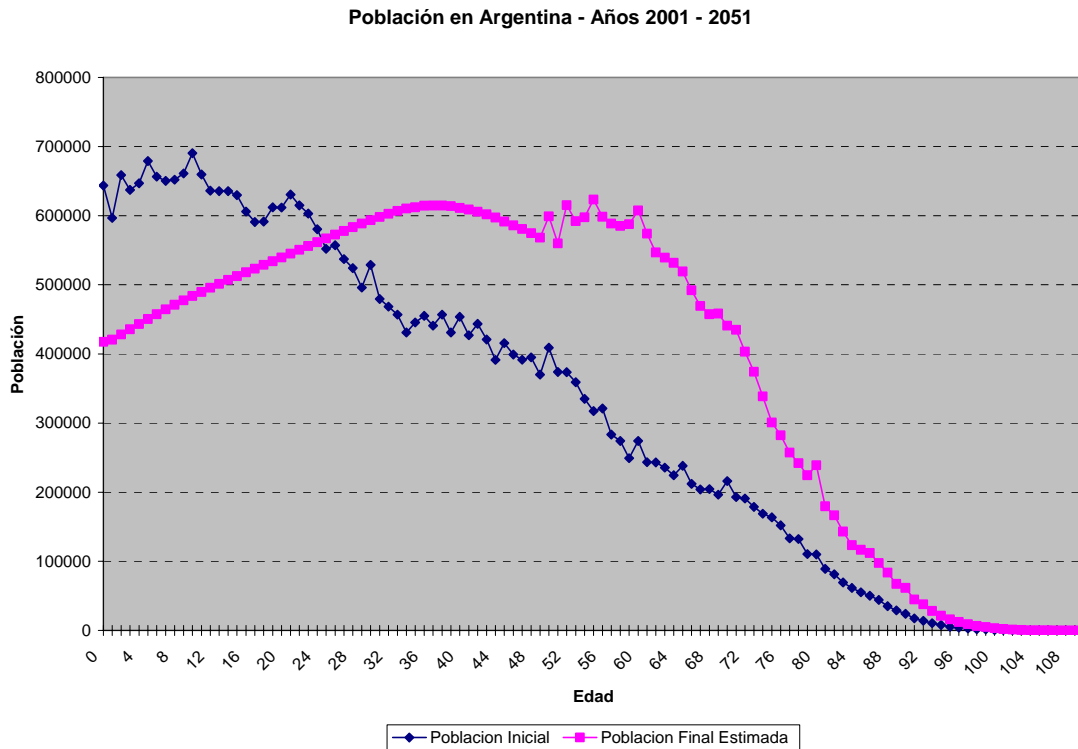
personas de edad joven (hasta 25 años) y adulta (mayores de 55 años), excluyendo a las personas de edad intermedia.

A partir de esto surgen los Escenarios 3 y 4, que representarán los Escenarios 1 y 2 respectivamente teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior.

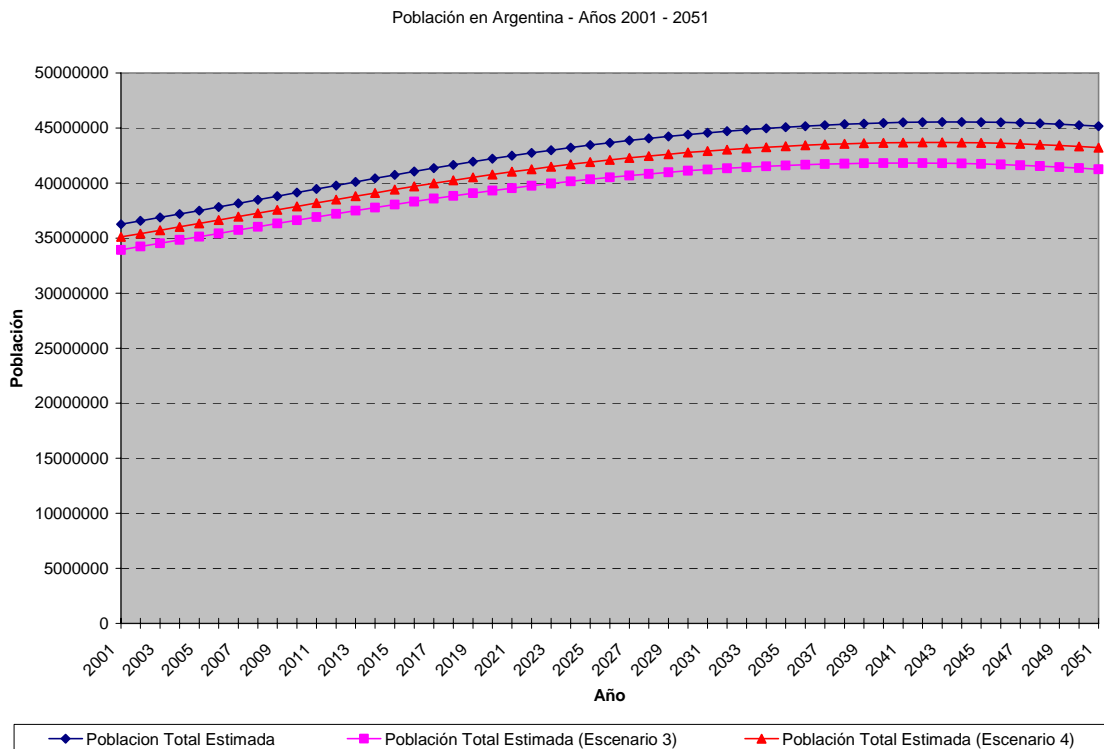
A continuación se muestran los resultados que se obtienen luego de aplicar el *Modelo5* a los Escenarios 3 y 4:



GráficoEpidemia7 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 bajo supuesto Escenario 3, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.



GráficoEpidemia8 – Comparación de la Población Inicial de 2001 y Estimada de 2051 bajo supuesto Escenario 4, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.



GráficoEpidemia9 – Comparación Población total de 2001 a 2051 sin escenario, con Escenario 3 y 4, con tasas de fecundidad y mortalidad variables anualmente con una reducción de 0,71% y 0,3% respectivamente y tasas de migración variables por edad.

Si bien la cantidad de individuos de cada clase es notablemente distinta, no se observan diferencias significativas en la forma que adoptan las líneas de las Poblaciones estimadas en GráficoEpidemia4, GráficoEpidemia5, GráficoEpidemia7 y GráficoEpidemia8.

En todas las clases de los Escenarios 3 y 4 se obtuvieron cantidades mayores o iguales a las de los Escenarios 1 y 2 respectivamente.

En el GráficoEpidemia9 se observan las poblaciones totales de individuos para el intervalo de años [2001, 2051] en un escenario sin epidemia y los Escenarios 3 y 4. Podemos ver en este gráfico que las poblaciones que sufrieron una epidemia al cabo de 50 años (en mayor o menor grado) no lograron reponerse a este efecto. De hecho se puede ver que estas poblaciones cada año se alejan de la población que no sufrió epidemia.

En el siguiente cuadro comparativo se muestran las personas que conforman, según cada escenario, las distintas poblaciones para los años 2001, 2011, 2021, 2031, 2041 y 2051:

Año	Sin Epidemia	Escenario 3	Escenario 4	% Escenario 3	% Escenario 4
2001	36260130	33934946	35105662	93,58749127	96,81615041
2011	39460378	36918469	38198307	93,55832577	96,80167534
2021	42489021	39543437	41026523	93,06742323	96,55793905
2031	44568314	41238415	42914998	92,52855066	96,29037796
2041	45508582	41824761	43679545	91,90521691	95,98089653
2051	45170743	41252767	43225441	91,3262972	95,69344697

donde:

Sin Epidemia representa la población que no sufrió de epidemia,

Escenario 3 y 4, son las poblaciones en las cuales se tomaron en cuenta los supuestos 3 y 4 respectivamente y

% Escenario 3 y 4, representan los porcentajes de los escenarios 3 y 4 respectivamente sobre la población sin epidemia.

Claramente podemos ver en la tabla, como mencionamos anteriormente para el GráficoEpidemia9, que las poblaciones en las cuales se registró una epidemia no logran alcanzar los valores que se obtienen de una población sin epidemia. También podemos ver en las columnas **% Escenario 3 y 4** de la tabla anterior que estas poblaciones, con el correr de los años, se alejan, en diferentes proporciones, de la población sin epidemia.

12 Conclusiones y trabajo a futuro

12.1 Conclusiones

En varios de los capítulos desarrollados en este trabajo se agregaron conclusiones individuales; igualmente en esta sección se intentará realizar una conclusión general del trabajo realizado.

Luego de varios modelos preliminares se generó el *Modelo5* (modelo exponencial con estructura de edad, tasas variables y de migración variable por edad). Este modelo logra una muy buena aproximación de la población futura; esto se pudo ver en las mínimas diferencias que existían, para los diferentes grupos de edades definidos, entre una población inicial y su estimada.

A partir de este modelo se realizaron varios estudios, tanto de interés internacional como de índole nacional.

Para el primer caso estimamos la población a mediano y largo plazo de varios países de distinto grado de industrialización. Pudimos ver que, de mantenerse las tasas variables y de migración, la Argentina y Brasil disminuirán radicalmente la cantidad de habitantes de edad joven. En cambio para este mismo segmento de la población, dos países con una clara diferencia en el desarrollo económico (Estados Unidos y Bolivia), poseen un crecimiento en la población joven.

En cambio, para el caso de tomar a la Argentina como escenario se desarrollaron varios casos prácticos. Estos son:

Reducción anual de las tasas de mortalidad móvil: En este caso no observamos un cambio notorio en la población en el caso de reducir las tasas de mortalidad al nacer. En cambio pudimos ver que la población adulta crecería sensiblemente si se logra reducir, imitando los valores de Francia, las tasas de mortalidad de este segmento de la población.

Cantidad de docentes para el ciclo primario: Este caso práctico nos brinda una clara idea del número de docentes que serán necesarios, bajo ciertos supuestos, para cada grado del ciclo primario en el año 2026. Pudimos ver que, al haber menos individuos en edad escolar, se necesitarían obviamente una menor cantidad de docentes. En base a esto se podría tomar cierta política para desalentar, en cierta medida, la carrera docente.

Epidemia: Analizamos, utilizando el modelo SIR, tres posibles escenarios de Epidemia de distinta intensidad. Observamos que si bien en todos los casos el número de infectados desciende luego de un determinado tiempo, la cantidad de personas muertas no es la misma. En los casos en los que la epidemia se presentó de una manera notable dentro de la población vimos que no logran recuperarse nunca de este suceso, de hecho las poblaciones que sufrieron una epidemia fuerte, cada año se alejan más de una población estimada sin epidemia.

Por último y por medio de la Matriz de Leslie de Argentina (respecto las tasas del año 2001), pudimos observar, de forma teórica, el comportamiento de la población en el límite y la composición (en cuanto al porcentaje de aporte sobre el total) de la misma. Pudimos concluir que la población Argentina tendrá un crecimiento anual bajo. Esto pudimos corroborarlo a partir de las poblaciones estimadas obtenidas por medio de la aplicación.

12.2 Trabajo a futuro

El modelo demográfico obtenido en este trabajo (*Modelo5*) podría ser utilizado para predecir la población futura de cualquier país, provincia o ciudad del planeta, siempre y cuando se cuente con la información de la cantidad de habitantes (discriminado por edad) de la población y sus respectivas tasas de fecundidad y mortalidad (opcionalmente de migración). En consecuencia, podemos decir que son innumerables los casos prácticos que pueden desarrollarse a partir dicho modelo. En esta tesis se intentó resolver casos prácticos muy distintos, entre ellos podemos mencionar casos actuales como es el de la epidemia.

Como mencionamos, fue de gran dificultad obtener en varios casos datos como las tasas de fecundidad, de mortalidad y de migración para la mayoría de los países. Esta complicación se vio acentuada en el hecho que esta información debía estar separada por clase. Por lo tanto en la medida que se puedan obtener más datos, ya sea para los países involucrados en este trabajo u otros, o más precisos^P.

^P Recordemos que en varias ocasiones, y a partir de un dato que agrupaba varios años, se tuvo que interpolar o dividir el valor para obtener el dato anual necesario para aplicar el modelo.

13 Datos

Como se mencionó a lo largo de este trabajo, en muchas ocasiones obtener los datos necesarios para aplicar al modelo resultó bastante dificultoso. A pesar que en algunos casos la información brindada por algunos organismos nacionales era la requerida, se intentó unificar (en lo posible) las fuentes de consulta. Los datos acerca de población, fecundidad, mortalidad y saldos migratorios de los países que se tomaron como referencia para este trabajo, fueron obtenidos de las siguientes direcciones:

Población:

Argentina	http://www.indec.gov.ar
Bolivia	http://www.ine.gov.bo/indice/visualizador.aspx?ah=PC20201.HTM
Brasil	http://www.ibge.com.br/home/estatistica/populacao/censo2000/default.shtm
EEUU	http://www.mortality.org/

Fecundidad:

Argentina	http://www.indec.gov.ar
Bolivia	http://www.ine.gov.bo
Brasil	http://www.ibge.com.br/home/
EEUU	http://pregnancy-and-parenting-after-40.com/USStats.aspx

Mortalidad:

Argentina	http://www.indec.gov.ar
Bolivia	http://www.ine.gov.bo/indice/visualizador.aspx?ah=PC2030601.HTM
Brasil	http://www.ibge.com.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida/2006/default.shtm
EEUU	http://www.mortality.org/

Variación anual de las tasas de fecundidad y mortalidad:

Para todos los países <http://esa.un.org/unpp/index.asp?panel=2>

Migración:

Para todos los países <http://esa.un.org/unpp/index.asp?panel=2>

Con el fin de obtener el formato necesario de los archivos fuentes que serán utilizados para ejecutar el software se realizaron las siguientes modificaciones (en el caso que sean necesarios), a los datos antes mencionados:

- Para las poblaciones que se encontraban agrupadas de forma quinquenal se las dividió por 5 esta cantidad para obtener las proporciones en años simples.
- Se interpolaron linealmente las tasas de fecundidad y mortalidad en los casos en que estas se encontrasen agrupadas en forma quinquenal, intentando de esta manera poder suavizar las variaciones que existen entre años contiguos de ambas tasas.

Para obtener la variación de tasas de fecundidad y mortalidad que hubo en cierta población se decidió observar la tendencia que hubo en la tasa cruda de nacimientos (Crude birth rate) y tasa cruda de muertes (Crude death rate) de ese país durante 1980 y el año de su último censo nacional. A continuación se detallan la tasa cruda de nacimientos, muertes para cada país y grupo quinquenal y la variación anual correspondiente.

Tasa de nacimientos (nacimientos cada 1000 habitantes)

Argentina (último censo: 2001)	Brasil (último censo: 2000)
1980-1985: 23,1	1980-1985: 30,8
1985-1990: 22,2	1985-1990: 26,3
1990-1995: 21,3	1990-1995: 22,6
1995-2000: 19,7	1995-2000: 21,6
2000-2005: 18,0	2000-2005: 20,6
Variación anual = -0,71%	Variación anual = -1,12%
Bolivia (último censo: 2001)	EEUU (último censo: 2001)
1980-1985: 38,4	1980-1985: 15,6
1985-1990: 36,8	1985-1990: 15,9
1990-1995: 35,8	1990-1995: 15,7
1995-2000: 32,6	1995-2000: 14,4
2000-2005: 30,2	2000-2005: 14,1
Variación anual = -0,69%	Variación anual = -0,31%

Tasa de muertes (muertes cada 1000 habitantes)

Argentina (último censo: 2001)	Brasil (último censo: 2000)
1980-1985: 8,5	1980-1985: 8,3
1985-1990: 8,5	1985-1990: 7,4
1990-1995: 8,2	1990-1995: 6,8
1995-2000: 7,7	1995-2000: 6,4
2000-2005: 7,7	2000-2005: 6,3
Variación anual = -0,30%	Variación anual = -0,78%
Bolivia (último censo: 2001)	EEUU (último censo: 2001)
1980-1985: 13,3	1980-1985: 8,9
1985-1990: 11,4	1985-1990: 8,9
1990-1995: 10,0	1990-1995: 8,9
1995-2000: 8,9	1995-2000: 8,3
2000-2005: 8,2	2000-2005: 8,3
Variación anual = -1,24%	Variación anual = -0,22%

Para obtener la tasa de migración ocurrida en cierto país durante el año del último censo realizado en dicho lugar se tuvo en cuenta la variable “Net migration rate” en el intervalo quinquenal 2000-2005.

14 Información técnica

14.1 Descripción

Este trabajo fue realizado en Microsoft Visual Studio 2005 (particularmente desarrollado en C#) y se utilizó el framework 2.0. Sólo se agregó, a las librerías estándar, el archivo Interop.Excel.dll, el cual se utiliza para poder exportar de manera gráfica (Excel) los resultados obtenidos por la aplicación.

Se creo un ejecutable con el nombre Tesis.exe

14.2 Requerimientos

Para ejecutar esta aplicación se debe contar con la siguiente tecnología:

- a) Contar con el framework 2.0 o superior. Para esto se deberá instalar el archivo dotnetfx.exe^q.
- b) Se deberá colocar el archivo Interop.Excel.dll (que se incluye con este trabajo) en la misma carpeta que el archivo ejecutable Tesis.exe.
- c) Sistema operativo Windows (Windows 98, XP o Vista).

14.3 Archivos fuente

A continuación detallaremos los distintos campos de los dos archivos fuente (Población Inicial/Real y Tasas de migración por edad). Todos los archivos fuente deberán estar en formato Texto (delimitado por tabulaciones).

Población Inicial/Real:

En este caso, ambos archivos tendrán los mismos campos con la diferencia que, en el primer caso se graficará la población Inicial y su estimada (según cálculos de la aplicación), mientras que en la Real sólo se graficará la población que figura en el archivo. La carga del archivo con la población Inicial es obligatoria, mientras que el de la población Real es optativo. Esta tabla debe contener en la primera fila el encabezado de la tabla con los nombres de los campos.

Campo	Descripción
<i>Year</i>	Año de los datos. El mismo dato se repite en toda la columna
<i>Age</i>	Edad de cada clase. Este dato es entero y debe contener los valores de 0 a U.
<i>Female</i>	Cantidad de personas del sexo femenino para cada clase. Este dato es entero

^q Se adjunta con este trabajo este archivo, pero también se puede descargar de la página oficial de Microsoft (<http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?FamilyID=0856EACB-4362-4B0D-8EDD-AAB15C5E04F5&displaylang=en>).

<i>Male</i>	Cantidad de personas del sexo masculino para cada clase. Este dato es entero
<i>Total</i>	Cantidad total de personas para cada clase. Este dato es entero.
<i>mx</i>	Tasa de fecundidad para cada clase. Este dato es decimal positivo.
<i>qx</i>	Tasa de mortalidad para cada clase. Este dato es decimal positivo, menor o igual a 1.
<i>City</i>	Ciudad (o país) de los datos. El mismo dato se repite en toda la columna.

Tasas de migración por edad:

Este archivo contiene las tasas de migración par las distintas clases. Deberá contener la misma cantidad de clases que en el caso de la población Inicial. La carga de este archivo es optativa. Esta tabla no debe contener encabezado en la primera fila.

Campo	Descripción
<i>Age</i>	Edad de cada clase. Este dato es entero y debe contener los valores de 0 a U.
<i>TDM</i>	Tasa de migración por edad. Este dato es decimal (positivo y negativo), y en valor absoluto debe ser menor o igual a 1.

15 Glosario de términos

Tasa de natalidad: Representan los nacimientos que se registraron en promedio en cierta población femenina en el periodo de un año.

Tasa de fecundidad: Representan los nacimientos que se registraron en promedio en cierta población en el periodo de un año.

Tasa de mortalidad: Representan las muertes que se registraron en promedio en cierta población en el periodo de un año.

Migración interna: Es un movimiento de personas que se realiza dentro de un mismo país, provincia o municipalidad hacia otra.

Migración externa: Es un movimiento de personas que involucra el cruce de una o varias fronteras internacionales.

Saldo migratorio: Es la diferencia que existe entre la cantidad inmigrantes y la de emigrantes dentro de un mismo país, provincia, municipalidad u otra.

Tasa de Migración: Es la proporción que representa el Saldo migratorio de un país, provincia, municipalidad u otra sobre el total el total de la misma.

16 Referencias

- ¹ [PER/08] Perren, J., “Transición demográfica. Modelos teóricos y experiencia latinoamericana, en Contribuciones a las Ciencias Sociales”, agosto 2008, www.eumed.net/rev/cccss/02/jp.htm.
- ² [OPO/93] Oposinet.com, 1993, http://www.oposinet.com/historia/temas/oposiciones_historia_T6.php.
- ³ [MAL/98] Malthus, Thomas Robert, “*An Essay on the Principle of Population*”, 1st ed, 1798, <http://esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>.
- ⁴ [NYT/09] THE NEW YORK TIMES. ESPECIAL, edición impresa de Clarín del día 24/07/09 y en <http://www.clarin.com/diario/2009/07/25/elmundo/i-01965188.htm>.
- ⁵ [KNO/05] Knolles, Helmut, “*Un modelo demográfico y su interpretación sociológica*”, 2005, <http://www.matematicas.unal.edu.co/boletin/Archivos/2005-II/Doc5.pdf>.
- ⁶ [VER/38] VERHULST, P. F., “Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement”, *Corresp. Math. Phys.* **10**, pág 113-121, 1838.
- ⁷ [MAY/76] May, Robert, “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature* **261**, pág 459–467, 1976, <http://www.ct.infn.it/rapis/rio-lectures/papers/may-nature1976.pdf>.
- ⁸ [VIC/06] Vicente Torrado, Trinidad L., “*La inmigración Latinoamericana en España*”, 2006, http://www.un.org/esa/population/meetings/IttMigLAC/P13_Vicente.pdf.
- ⁹ [MAR/04] Martínez V., Luciano, “*La emigración internacional en Quito, Guayaquil y Cuenca*”, 2004, <http://www.flacso.org.ec/docs/migracion.pdf>.
- ¹⁰ [MAC/06] Macadar, Daniel / Pellegrino, Adela, “*Informe sobre migración internacional en base a los datos recogidos en el módulo migración*”, 2006, <http://www.ine.gub.uy/enha2006/informe%20Migraci%F3n%20ENHA%202006.pdf>.
- ¹¹ [WEI] Weisstein, Eric W., “Strongly Connected Digraph”, From MathWorld--A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/StronglyConnectedDigraph.html>.
- ¹² [CUS/98] Cushing, J. M., “*An introduction to structured population dynamics*”, SIAM, Filadelfia, 1998.
- ¹³ [MAT/04] Mathews, John H., “Module for The Power Method for Eigenvectors”, 2004, <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/PowerMethodMod.html>.
- ¹⁴ [IMP/80] Impagliazzo, J., “*Deterministic aspects of mathematical demography*”, Biomathematics 13, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

¹⁵ [LES/45] Leslie, P. H., “On the use of matrices in certain population mathematics”, *Biometrika* **33**, pág 183-212, 1945.

¹⁶ [PIE/69] Piélou, E. C., “*An introduction to mathematical ecology*”, Wiley, Nueva York, 1969.

¹⁷ [KER/27] Kermack, W. O. / McKendrick, A. G., "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics", *Proc. Roy. Soc. Lond.* **115**, pág 700-721, 1927.

¹⁸ [CAS/06] Editorial J. Castillo, “La peste bubónica es provocada por una bacteria, la *Yersinia Pestis*”, 2006, <http://www.archivoconfidencial.com.mx/?c=128&a=3934>.

17 Bibliografía adicional

[HOP/75] Hoppensteadt, F., “*Mathematical theories of populations: demographics, genetics and epidemics*”, SIAM, Filadelfia, 1975.

[HAB/98] Haberman, R., “*Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*”, SIAM, 1998.