



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

# **Un estudio poliedral del problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos**

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Jessica Singer

Director: Javier Marengo

Buenos Aires, 2023

## Índice general

1. Resumen . . . . .	3
2. Introducción al problema . . . . .	4
2.1. Definiciones preliminares . . . . .	4
2.2. Modelado del problema . . . . .	7
3. Modelos de Programación Lineal Entera . . . . .	10
3.1. Modelo de representantes . . . . .	10
3.2. Modelo clásico . . . . .	11
3.3. Comparación de los modelos en la práctica . . . . .	13
4. Estudio del polítopo asociado al modelo clásico . . . . .	15
4.1. Dimensión del polítopo . . . . .	15
4.2. Desigualdades de partición . . . . .	18
4.2.1. Demostración de validez . . . . .	18
4.2.2. Demostración de facetitud . . . . .	18
4.3. Desigualdades de partición generalizadas . . . . .	23
4.3.1. Demostración de validez . . . . .	23
4.3.2. Demostración de facetitud . . . . .	24
4.4. Desigualdad de Unión de Cliques . . . . .	30
4.4.1. Demostración de validez . . . . .	32
4.4.2. Demostración de facetitud . . . . .	33
4.5. Desigualdades Clique-Cursos . . . . .	40
4.5.1. Demostración de validez: . . . . .	43
4.5.2. Demostración de facetitud . . . . .	43
5. Conclusiones . . . . .	50
6. Trabajo futuro . . . . .	51
Bibliografía . . . . .	52
7. Apéndice . . . . .	53
7.1. Modelo de representantes . . . . .	53
7.2. Modelo clásico . . . . .	55

## 1. RESUMEN

Dados un grafo  $G = (V, E)$ , un hipergrafo  $H = (V, E_H)$  sobre el mismo conjunto de vértices y un conjunto  $C$  de colores, el problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos consiste en hallar un coloreo factible, es decir, una función  $c : V \rightarrow C$  con  $c(i) \neq c(j)$  para toda arista  $ij \in E(G)$ , tal que se maximice la cantidad de hiperaristas de  $H$  que se asignan al mismo color.

Este problema surge en el contexto de asignación de aulas a clases, donde  $V$  es el conjunto de clases semanales de una institución educativa,  $C$  son las aulas de la misma, y las aristas del grafo  $H$  conectan a las clases de una misma asignatura. En este sentido, una particularidad que intentaremos modelar será la preferencia por asignar a todas las clases de una misma asignatura, una misma aula. Sin embargo, habrá que tomar en cuenta los casos donde esto no será posible por superposiciones horarias.

Para este problema, analizamos dos modelos basados en programación lineal entera, concluyendo que uno de ellos muestra una ejecución más veloz en la práctica. Utilizando el modelo ganador, hacemos un estudio del poliedro inducido por las soluciones factibles de éste, calculando su dimensión y buscando desigualdades válidas y facetas.

## 2. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

La asignación de aulas es un tema de gran interés, debido a su aplicación práctica para cualquier institución educativa y a las múltiples particularidades que emergen de cada contexto individual, ya sean horarios disponibles, preferencia de los docentes, capacidad de las aulas, entre otros.

A pesar de su indudable aplicación concreta, este problema no es sencillo de resolver. Formalmente, pertenece a la clase de problemas *NP-Difícil* [BDDLM17][GJ79].

En este trabajo estudiaremos posibles soluciones utilizando la técnica de programación lineal entera, concepto que introduciremos en la siguiente sección y que ha proporcionado buenos resultados en problemas similares o incluso variantes del mismo problema [BDDLM17][CCF04].

Primero daremos algunas definiciones preliminares que ayudarán a entender los conceptos que utilizaremos, luego haremos una introducción al problema y su modelado desde el enfoque de programación entera. En la segunda sección, se hará una comparación entre dos modelos de programación lineal entera para este problema, concluyendo que uno de ellos se comporta mejor en la práctica. Por último, nos centraremos en un estudio poliedral, concepto que también introduciremos en la siguiente sección, utilizando el modelo ganador.

El objetivo de este trabajo es, mediante un estudio teórico, dar herramientas que puedan ser útiles en la práctica para mejorar la performance de algoritmos que resuelvan el problema en cuestión. En particular, los resultados que expondremos serán de utilidad para la creación de algoritmos llamados de *planos de corte* [BHM77], utilizados para resolver modelos de programación entera.

### 2.1. Definiciones preliminares

Consideraremos siempre grafos finitos, no dirigidos  $G = (V, E)$ , donde  $V(G)$  serán los vértices del grafo,  $E(G)$  las aristas del mismo. Por otra parte, consideramos hipergrafos  $H = (V_H, E_H)$  donde  $V_H$  es un conjunto de vértices, y  $E_H \subseteq \mathcal{P}(V_H)$  el conjunto de *hiperaristas* donde cada arista conecta a uno o más vértices, siendo siempre un número finito de vértices conectados.

Podemos definir lo que es un coloreo de un grafo de la siguiente manera:

#### Definición 2.1.1: Coloreo de un grafo

Dado  $G = (V, E)$  un grafo, un *coloreo* en  $G$  es una función  $c : V \rightarrow C$ , tal que  $c(i) \neq c(j)$  para todo  $i, j \in V$  tales que  $ij \in E(G)$ , donde  $C$  son los colores disponibles, y  $|C|$  es finito. Dicha aplicación se denomina un  $C$ -coloreo de  $G$ .

El *número cromático* de un grafo  $G$ ,  $\chi(G)$  es el mínimo número de colores necesarios para colorear todo el grafo con un coloreo factible según las anteriores restricciones.

Como una variante de este problema, tenemos el *coloreo de máximo impacto en hipergrafos*, el problema en cuestión que estudiaremos en esta tesis. Éste se define de la siguiente forma:

#### Definición 2.1.2: Coloreo de máximo impacto en hipergrafos

Dados un grafo  $G = (V, E_G)$  y un hipergrafo  $H = (V, E_H)$  sobre el mismo conjunto de vértices y dado un conjunto  $C$  de colores, obtener un  $C$ -coloreo de  $G$  que maximice la cantidad de hiperaristas de  $H$  cuyos vértices reciben todos el mismo color.

En este caso, nuestro conjunto de vértices serán las *clases* o *sesiones* de una materia; las aristas  $E_G$  serán las superposiciones de horarios entre las distintas clases. Finalmente, las hiperaristas  $E_H$  serán las que conecten a las distintas clases o sesiones de un mismo curso, y los colores representarán a las distintas aulas.

En este contexto, colorear los vértices maximizando la cantidad de hiperaristas que reciben el mismo color, será asignar las  $|C|$  aulas a las distintas clases, maximizando la cantidad de cursos que se asignan a la misma aula. A esto llamaremos tener un *máximo impacto* sobre las hiperaristas  $E_H$ . Daremos una definición más detallada de este problema en la sección 2.2.

Con el objetivo de introducir el concepto de programación lineal entera, debemos comenzar con la definición de *programación lineal* [BT97]:

### Definición 2.1.3: Programación Lineal

La *programación lineal* es una caracterización de problemas que constan de una función objetivo que se quiere maximizar cumpliendo una serie de restricciones lineales. Su formulación es la siguiente:

Encontrar un vector  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tal que

**Maximiza:**  $c^T x$  (función objetivo)

**Sujeto a:**  $Ax \leq b$  (restricciones)

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in 1, \dots, n$$

Con  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Existen algoritmos que resuelven problemas de programación lineal de forma relativamente eficiente en la práctica, el más conocido de ellos es el llamado Simplex, aunque también existen algoritmos que son polinomiales en el peor caso [BT97].

Sin embargo en el problema que estudiaremos, como veremos más adelante, nos interesarán únicamente las soluciones *enteras*, es decir, donde el vector  $x \in \mathbb{R}^n$  solamente puede tomar valores enteros, con lo cual  $x$  pertenece a  $\mathbb{Z}^n$ . Esta restricción adicional compone lo que se conocen como problemas de **programación lineal entera**.

A continuación, definiremos los conceptos de polítopo y poliedro, ya que serán centrales a lo largo de esta tesis. Debido a que las definiciones de ambos conceptos varían según la bibliografía que se utilice, aquí nos basaremos en el libro *Integer Combinatorial Optimization* [NW99]. Primeramente, debemos definir lo que es un *semiespacio*:

### Definición 2.1.4: Semiespacio

Dado  $E$  un espacio euclideo, un *semiespacio*  $S \subseteq E$  es el conjunto de vectores  $v \in E$  que satisfacen una fórmula del tipo  $\langle a, v \rangle_E \leq b$  o  $\langle a, v \rangle_E < b$ . Con  $a \in E$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , donde  $\langle a, v \rangle$  refiere al producto interno entre ambos vectores.

En el primer caso se tratará de un semiespacio *cerrado*, mientras que en el segundo caso se tratará de un semiespacio *abierto*.

### Definición 2.1.5: Semiespacio en $\mathbb{R}^n$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , un semiespacio  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , es el conjunto de vectores  $v \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen una fórmula del tipo  $\langle a, v \rangle \leq b$  o  $\langle a, v \rangle < b$ . Con  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Nuevamente en el primer caso se tratará de un semiespacio *cerrado*, y en el segundo caso de un semiespacio *abierto*.

A raíz de esta definición, podemos introducir el concepto de *poliedro*, como una *intersección de finitos semiespacios cerrados* en  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto que se puede expresar como  $P = \bigcap_{i=1, \dots, m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leq b_i\}$ , donde  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ .

Análogamente, podemos definir a un poliedro  $P$  como:  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Notemos que ésto último nos indica que el conjunto de soluciones  $X$  de un problema de programación lineal es, por definición, un poliedro. Más aún, un problema de programación lineal, en estos términos, es maximizar una función lineal sobre un poliedro.

Siguiendo la misma línea, un polítopo se define como un *poliedro acotado*. Formalmente:

#### Definición 2.1.6: Polítopo

Dado un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , si existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $P \subseteq B(\hat{o}, r)$  (donde  $B(\hat{o}, r)$  es la bola cerrada de centro  $\hat{o} \in \mathbb{R}^n$ , y de radio  $r$ ), entonces diremos que el mismo es un *polítopo*.

En esta tesis haremos un análisis del poliedro dado por la cápsula convexa de las soluciones de un modelo de programación lineal entera para el problema de asignación de aulas a clases. La cápsula convexa de un conjunto  $S$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene a todos los elementos de  $S$ , es decir  $\bigcap_{C_i \text{ convexo}, S \subseteq C_i} C_i$ .

En particular, veremos que este poliedro es acotado, es decir, un polítopo, analizaremos la *dimensión* del mismo, y buscaremos desigualdades válidas que definan *caras*. La *dimensión* de un polítopo se define como la dimensión del espacio más pequeño que lo contiene, mientras que una *desigualdad válida* se define de la siguiente manera:

#### Definición 2.1.7: Desigualdad válida

Dado un modelo de programación lineal o lineal entera cuyo espacio de soluciones es  $S$ , una *desigualdad válida* es una desigualdad de la forma  $\alpha^\top x = \beta$ , donde  $\alpha^\top x = \beta$  se puede agregar como restricción al modelo sin que eso modifique las soluciones factibles del mismo. Es decir, es una desigualdad que cumplen todos los puntos que son soluciones factibles del modelo.

A continuación, incluimos la definición de una *cara* de un polítopo:

#### Definición 2.1.8: Caras de un polítopo

Una *cara* de un polítopo  $P$  es un conjunto de puntos  $\{x \in P : \alpha^\top x = \beta\}$ , donde  $\alpha^\top x \leq \beta$  es una desigualdad válida en  $P$ .

Notemos que la definición anterior difiere de lo que conocemos como cara en la geometría en 2 dimensiones, ya que podemos tener, para una figura de  $n$  dimensiones, caras de  $1, 2, 3, \dots, n - 1$  dimensiones. A las caras de dimensión  $n - 1$  las llamaremos *facetas*.

El último concepto que debemos abordar es el de grafo de intervalos:

#### Definición 2.1.9: Grafo de Intervalos

Un grafo  $G = (V, E)$  no dirigido se dice de *intervalos* si existe una correspondencia con sus vértices y sus ejes, donde sus vértices son intervalos en la recta real, y sus ejes son las intersecciones entre dichos intervalos.

Esta familia de grafos será de importancia en este trabajo, ya que es justamente la clase de grafos sobre la cual trabajaremos.

**Ejemplo 2.1.1: Grafo de Intervalos**

A continuación incluimos un ejemplo de un grafo con 5 vértices. Debajo del mismo se encontrará una posible interpretación como grafo de intervalos.

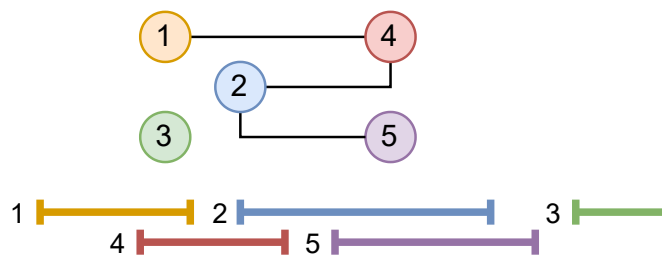


Fig. 2.1: Grafo de intervalos de ejemplo.

## 2.2. Modelado del problema

Como hemos mencionado al comienzo, el problema que estudiaremos surge en el contexto de una institución educativa, donde queremos calcular, para cada clase o sesión de una asignatura, el aula que le será asignada. Tendremos una cantidad fija de aulas, y consideraremos que una superposición de horarios entre clases implica distintas aulas asignadas a las mismas.

El problema en cuestión puede ser interpretado como un problema de coloreo de grafos de la siguiente forma:

Sea  $G = (V, E)$  un grafo finito, donde  $V$  representa las clases de una institución, y  $E$  representa los solapamientos de horarios entre distintas clases. Se busca en este caso un coloreo factible, que en el contexto del problema implica no asignar la misma aula a dos clases con horarios superpuestos. Debemos también utilizar a lo sumo  $|C|$  colores, donde  $C$  son las aulas de la institución. Asumiremos que los cronogramas se pautan de forma semanal, es decir, se repiten los mismos horarios cada semana, y por lo tanto basta con definir el cronograma de una semana.

Lo que haremos en este trabajo será considerar adicionalmente un hipergrafo  $H = (V, E_H)$ , donde  $E_H$  son hiperaristas que conectan las clases de una misma asignatura o materia. Lo que buscaremos con esta adición será modelar dentro del problema la preferencia de tener todas las clases de una misma materia asignadas a una misma aula. Esto resulta deseable tanto para la comodidad de alumnos/as y docentes, como para la organización general de la institución y del equipamiento necesario para las clases.

Notemos que este problema no tendría solución si  $\chi(G) > |C|$ , por lo tanto ésta será una de las asunciones que tendremos que considerar. Asimismo, la asignación de todas las clases de un curso a una misma aula es deseable, pero no siempre será posible. En este sentido, intentaremos maximizar la cantidad de cursos con esta característica, a lo cual nos referiremos como tener el *máximo impacto* sobre el grafo  $H$ .

El problema clásico de coloreo posee numerosas formulaciones ya estudiadas utilizando programación lineal entera, por lo que resulta natural la idea de modificar modelos ya conocidos para resolver el problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos.

Como se ve en [BDDL17], este problema contiene como subproblema el determinar si  $\chi(G) \leq |C|$ , por lo tanto si consideramos el problema con grafos genéricos es sencillo verificar que pertenece a la clase de problemas NP-difícil [GJ79].

Como  $G$  es un grafo que surge de un cronograma de clases semanales, podemos notar que se trata de un grafo de intervalos, familia en la que la resolución del problema de coloreo es polinomial. Sin

embargo, siguiendo lo demostrado en [BDDLM17], para este problema en particular, incluso con grafos de intervalos se mantiene la complejidad NP-difícil.

A diferencia de otros modelos ya estudiados, en este caso nos interesará únicamente maximizar la cantidad de asignaturas donde *todas* sus clases estén asignadas a la misma aula, no buscaremos maximizar que algunas clases lo estén.

Esto último resulta interesante en la práctica, contrastándose con otras ideas donde, por ejemplo, se busca maximizar los pares de clases de una asignatura que comparten el aula [BDDLM17].

En este trabajo presentaremos dos formulaciones de este problema utilizando Programación Lineal Entera, para posteriormente compararlas ejecutándolas con instancias reales obtenidas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Por último, elegiremos uno de esos modelos en base a su performance y estudiaremos su polítopo de soluciones, hallando desigualdades válidas y estudiando las condiciones necesarias para su factibilidad.

Consideraremos siempre un grafo  $G = (V, E)$  donde  $V$  representa las clases de una institución,  $E$  las superposiciones de horarios entre clases, y adicionalmente consideraremos el conjunto  $C$  de colores, y  $\mathcal{F}$  de cursos, donde si  $f \in \mathcal{F}$ , entonces  $f \subset V$ .

### Ejemplo 2.2.1

A continuación se incluye un ejemplo donde tenemos dos cursos,  $f$  y  $g$ , tal que ambos cuentan con dos clases cada uno. Debajo del grafo, se incluye su interpretación como intervalos.

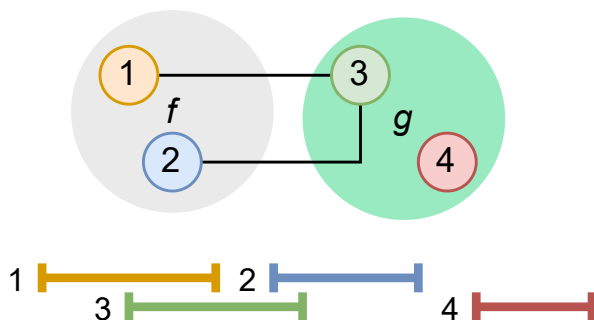


Fig. 2.2: Grafo  $G$  de ejemplo, donde  $f$  y  $g$  representan a los cursos de una institución educativa mientras que los vértices numerados representan las clases de cada curso.

Utilizaremos este grafo a modo de ejemplo para introducir los modelos.

Veremos a continuación un último ejemplo en el que comparamos dos posibles coloreos para un mismo grafo, que representan distintas asignaciones de aulas en el contexto del problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos.



## Ejemplo 2.2.2

En la Figura 2.3, tenemos un grafo  $G$  cuyos vértices representan a las clases de una institución educativa, y sus aristas representan las superposiciones horarias entre clases. El ejemplo consta de tres cursos,  $f$ ,  $g$  y  $h$ . Los dos primeros con dos clases cada uno, y el último con tres. Las hiperaristas del hipergrafo  $H$  están implícitas en el gráfico y conectan a las clases de cada curso. Suponemos que disponemos de dos aulas, y el color utilizado para el relleno de cada vértice representa el aula asignada.

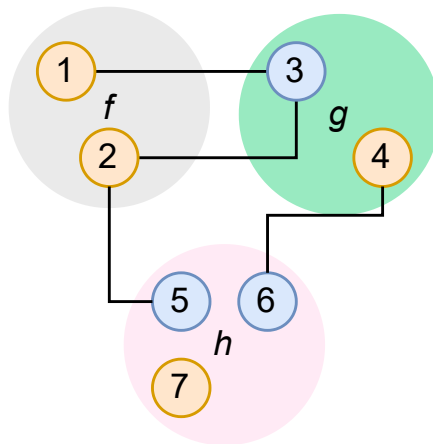


Fig. 2.3: Grafo  $G$  coloreado con dos colores, que representa una posible asignación de aulas a clases.  $f$ ,  $g$ , y  $h$  representan a los cursos mientras que los vértices numerados representan las clases de cada curso.

Notemos que utilizando este coloreo, únicamente el curso  $f$  tendría a todas sus clases asignadas a la misma aula. Si bien esta asignación es factible, ya que se trata de un coloreo válido, no es una asignación óptima en el contexto del problema de máximo impacto en hipergrafos, como podemos notar analizando la Figura 2.4. En la misma vemos otro coloreo factible, en el que tanto los cursos  $f$  como  $g$  tendrían a todas sus clases asignadas a la misma aula.

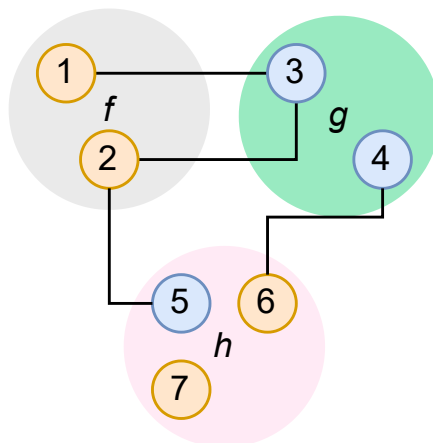


Fig. 2.4: Grafo  $G$  coloreado con dos colores, que representa una posible asignación de aulas a clases.  $f$ ,  $g$ , y  $h$  representan a los cursos mientras que los vértices numerados representan las clases de cada curso. En este caso, la asignación es óptima para el problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos.

Dado que el ejemplo elegido es de un tamaño reducido, podemos calcular manualmente que este último coloreo sí es óptimo, ya que no existe asignación posible donde todos los cursos reciban una única aula para todas sus clases.

### 3. MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

En esta sección presentaremos dos modelos elegidos para resolver el problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos, y luego presentaremos una comparación entre ambos ejecutándolos sobre las mismas instancias.

#### 3.1. Modelo de representantes

El primero de nuestros modelos está basado en el modelo de representantes para el problema de coloreo clásico [CCF04].

Consideraremos un coloreo factible como una familia  $\{S_1, \dots, S_k\}$ , con  $S_i \subseteq V$  un conjunto de vértices asignados a un mismo color. Para cada uno de esos conjuntos  $S_j$  se propone *elegir* un *representante*  $v_j$  del mismo, que represente su color. Luego si en el coloreo otro vértice  $u$  tiene asignado el color de  $v_j$ , esto se traduce a que el mismo está *representado* por  $v_j$ .

En términos del modelo, vamos a utilizar variables  $x_{ij}$ , donde  $i, j \in V$ , donde  $i \in \overline{N}(j)$ , y  $x_{ij} = 1$  si y sólo si  $i$  representa el color de  $j$ , implicando que ambos tienen asignados el mismo color. Tendremos adicionalmente variables  $z_f$ , con  $f \in \mathcal{F}$ , tales que  $z_f = 1$  si y sólo si a todos los vértices  $v \in f$  les corresponde el mismo color.

Sea el grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices y  $E$  es el conjunto de sus aristas. Sea además el conjunto  $C$ , tal que  $|C| > 0$  es la cantidad de colores disponibles. Tenemos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar: } \sum_{f \in \mathcal{F}} z_f \\
 &\text{Sujeto a: } \sum_{j \in \overline{N}[i]} x_{ji} \geq 1 \quad \forall i \in V \tag{1} \\
 &\quad \sum_{j \in V} x_{jj} \leq |C| \tag{2} \\
 &\quad x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} \quad \forall u \in V, \forall v \in \overline{N}(u), v \neq u, \forall w \in \overline{N}[u] \cap N(v) \tag{3} \\
 &\quad x_{uv} \leq x_{uu} \quad \forall u \in V, \forall v \in \overline{N}(u), v \neq u \tag{4} \\
 &\quad z_f \leq 1 + x_{iu} - x_{iv} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall i \in V, \forall u, v \in f \tag{5} \\
 &\quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in V, i \in \overline{N}(j) \tag{6} \\
 &\quad z_f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{7}
 \end{aligned}$$

La primera restricción indica que cada vértice debe tener al menos un representante. La segunda restricción fija que a lo sumo hay  $|C|$  vértices representándose a sí mismos. Esto junto con las restricciones (3) y (4) implicarán que la cantidad de colores debe ser menor o igual a  $|C|$ . Las restricciones (3) y (4), nos impiden que haya más de un representante para el mismo color; es decir, prohíben el caso  $x_{uv} = 1 = x_{wu}$ , con  $v, w, u \in V$ . Adicionalmente la desigualdad (3) impide que dos vértices adyacentes tengan asignado el mismo color. La restricción (5) será la que nos provea la *consistencia* de los  $z_f$ . De esta manera, si tenemos un curso representado por  $f$ , y tenemos dos vértices  $u$  y  $v$  del mismo, es condición necesaria que  $u$  y  $v$  estén coloreados idénticamente para poder tener  $z_f = 1$ . Esto se explicita aquí exigiendo que ambos estén representados por el color de  $i$ , o que ninguno lo esté. Al aplicar esto para todo  $i \in V$ , tenemos la condición deseada. Las últimas dos restricciones indican el dominio de las variables. En este modelo, trabajaremos con variables binarias.

A continuación incluimos un ejemplo de este modelo aplicado a un caso particular:

## Ejemplo 3.1.1

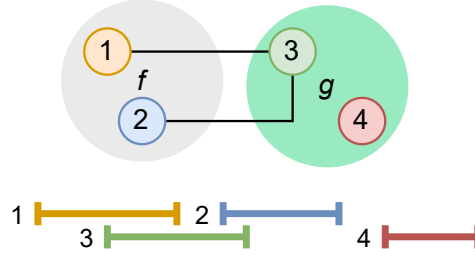


Fig. 3.1: Grafo G de ejemplo

El modelo de representantes del grafo G es el siguiente:

Maximizar:  $z_f + z_g$

Sujeto a:

$x_{11} + x_{21} + x_{41} \geq 1$	(1)	$z_f \leq 1 + x_{31} - x_{32}$	(5)
$x_{21} + x_{22} + x_{42} \geq 1$	(1)	$z_f \leq 1 + x_{41} - x_{42}$	(5)
$x_{33} + x_{43} \geq 1$	(1)	$z_f \leq 1 + x_{12} - x_{11}$	(5)
$x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} \leq C$	(2)	$z_f \leq 1 + x_{22} - x_{21}$	(5)
$x_{41} + x_{43} \leq x_{44}$	(3)	$z_f \leq 1 + x_{32} - x_{31}$	(5)
$x_{42} + x_{43} \leq x_{44}$	(3)	$z_f \leq 1 + x_{42} - x_{41}$	(5)
$x_{12} \leq x_{11}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{13} - x_{14}$	(5)
$x_{21} \leq x_{22}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{23} - x_{24}$	(5)
$x_{14} \leq x_{11}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{33} - x_{34}$	(5)
$x_{24} \leq x_{22}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{43} - x_{44}$	(5)
$x_{41} \leq x_{44}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{14} - x_{13}$	(5)
$x_{42} \leq x_{44}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{24} - x_{23}$	(5)
$x_{43} \leq x_{44}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{34} - x_{33}$	(5)
$x_{34} \leq x_{33}$	(4)	$z_g \leq 1 + x_{44} - x_{43}$	(5)
$z_f \leq 1 + x_{11} - x_{12}$	(5)	$x_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$	(6)
$z_f \leq 1 + x_{21} - x_{22}$	(5)	$z_f, z_g \in \{0, 1\}$	(7)

### 3.2. Modelo clásico

Este modelo está basado en el modelado del problema de Coloreo de Máximo Impacto presentado en [BDDL17]. Utilizaremos variables  $x_{ic}$ , donde  $i \in V$ ,  $c \in C$  y  $x_{ic} = 1$  si y sólo si  $i$  tiene asignado el color  $c$ . Tendremos adicionalmente variables  $z_f$ , con  $f \in \mathcal{F}$ , tales que  $z_f = 1$  si y sólo si a todos los vértices  $v \in f$  les corresponde el mismo color.

Definimos el modelo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar: } \sum_{f \in \mathcal{F}} z_f \\
 &\text{Sujeto a: } \sum_{c \in C} x_{ic} = 1 \quad \forall i \in V \quad (1) \\
 &\quad x_{ic} + x_{jc} \leq 1 \quad \forall i, j \in V, ij \in E(G) \quad (2) \\
 &\quad z_f \leq 1 + x_{ic} - x_{jc} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathcal{F}, \forall c \in C \quad (3) \\
 &\quad x_{ic} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall c \in C \quad (4) \\
 &\quad z_f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (5)
 \end{aligned}$$

La restricción (1) exige que un vértice pueda tener a lo sumo un color. La restricción (2) impone que si dos vértices son adyacentes, entonces deben tener colores distintos. La restricción (3) preserva la validez de los  $z_f$ . Notemos que si para un  $f \in \mathcal{F}$  fijo,  $z_f$  fuera 1 pero hubiera dos vértices  $i, j \in f$  de colores  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente, con  $c_1 \neq c_2$ , entonces  $z_f > 1 + x_{ic_2} - x_{jc_2} = 0$ . Las últimas dos restricciones, (4) y (5), fijan el dominio de las variables. En este modelo contaremos únicamente con variables binarias.

A continuación, incluiremos un ejemplo aplicando este modelo a un grafo de ejemplo:

#### Ejemplo 3.2.1

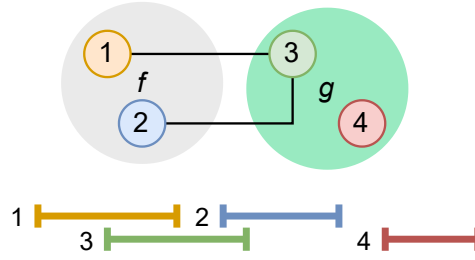


Fig. 3.2: Grafo G de ejemplo

Utilizando el grafo de ejemplo, suponiendo  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  tenemos el siguiente modelo clásico:

Maximizar:  $z_f + z_g$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 x_{1c_1} + x_{1c_2} + x_{1c_3} &= 1 & (1) & & z_f &\leq 1 + x_{1c_3} - x_{2c_3} & (3) \\
 x_{2c_1} + x_{2c_2} + x_{2c_3} &= 1 & (1) & & z_f &\leq 1 + x_{2c_1} - x_{1c_1} & (3) \\
 x_{3c_1} + x_{3c_2} + x_{3c_3} &= 1 & (1) & & z_f &\leq 1 + x_{2c_2} - x_{1c_2} & (3) \\
 x_{4c_1} + x_{4c_2} + x_{4c_3} &= 1 & (1) & & z_f &\leq 1 + x_{2c_3} - x_{1c_3} & (3) \\
 x_{1c_1} + x_{3c_1} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{3c_1} - x_{4c_1} & (3) \\
 x_{1c_2} + x_{3c_2} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{3c_2} - x_{4c_2} & (3) \\
 x_{1c_3} + x_{3c_3} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{3c_3} - x_{4c_3} & (3) \\
 x_{2c_1} + x_{3c_1} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{4c_1} - x_{3c_1} & (3) \\
 x_{2c_2} + x_{3c_2} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{4c_2} - x_{3c_2} & (3) \\
 x_{2c_3} + x_{3c_3} &\leq 1 & (2) & & z_g &\leq 1 + x_{4c_3} - x_{3c_3} & (3) \\
 z_f &\leq 1 + x_{1c_1} - x_{2c_1} & (3) & & x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall j \in \{1, 2, 3\} & (4) \\
 z_f &\leq 1 + x_{1c_2} - x_{2c_2} & (3) & & z_f, z_g &\in \{0, 1\} & (5)
 \end{aligned}$$

### 3.3. Comparación de los modelos en la práctica

Para comparar los modelos, utilizamos instancias reales pertenecientes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Ambos modelos fueron implementados en lenguaje ZIMPL [Koc04], lenguaje estándar de modelado para problemas de programación lineal entera.

Para estos experimentos utilizamos la imagen de Docker con la versión de SCIP 7.0.2 [GAB<sup>+</sup>20], una aplicación de código abierto que resuelve problemas de programación lineal entera, así como problemas de programación lineal o problemas mixtos (donde se requiere que algunas variables sean enteras). Nos referiremos a veces a este programa como el *solver*.

En ningún caso se modificaron los parámetros por defecto de SCIP. Los experimentos se corrieron utilizando la versión 4.14.0 de Docker, con 4 núcleos de CPU, 8GB de memoria RAM. Se utilizó una computadora con procesador Apple M1 Pro y 16 GB de memoria RAM.

A continuación, incluimos información sobre las instancias utilizadas, junto con la solución óptima hallada por el modelo clásico y el tiempo en segundos que tomó.

Instancia	V	$ E(G) $	$ \mathcal{F} $	$ C $	Tiempo(s)	Resultado	#(Variables)	#(Restricciones)	Nodos visitados
2010.01.I	235	1894	127	21	523,56	127	5.062	89.926	98
2010.01.II	267	2593	122	22	1187,93	121	5.996	133.345	77
2010.02.I	256	1921	151	18	295,79	147	4.759	78.412	61
2010.02.II	277	2914	159	26	708,55	155	7.361	167.743	45
2011.01.I	265	2092	150	16	770,47	147	4.390	75.961	192
2011.01.II	255	2295	135	20	501,33	130	5.235	104.795	48
2012.01.I	182	1381	95	18	445,13	93	3.371	57.386	644
2012.01.II	235	2220	114	23	494,78	111	5.519	116.730	13
2012.02.I	253	1974	123	20	357,06	122	4.930	86.342	109
2012.02.II	254	2368	118	22	591,94	118	5.706	118.218	41
2014.02.I	172	1201	68	20	591,59	65	2.648	46.972	189
2014.02.II	238	2294	74	20	1172,63	68	4.834	117.598	38

Tab. 3.1: Instancias, tiempos, resultados y cantidad de variables y restricciones para el modelo basado en coloreo clásico.

En este caso, el solver fue capaz de encontrar la solución óptima en todos los casos, sin sobrepasar el límite de 20 minutos.

Podemos notar que las instancias en cuestión forman grafos relativamente malos. Además, tenemos una cantidad pequeña de aulas, lo cual beneficiará al modelo clásico, debido a que traerá aparejada una cantidad menor de variables para éste, comparándolo con el caso del modelo de representantes, como veremos en el cuadro siguiente.

A continuación, analizaremos los resultados utilizando el modelo de representantes. Omitiremos la columna de tiempos, ya que en todos los casos utilizamos un tiempo límite de una hora para correr los mismos.

Instancia	V	$ E(G) $	$ \mathcal{F} $	$ C $	Resultado	#(variables)	#(restricciones)	Nodos visitados
2010.01.I	235	1894	127	21	127*	55.352	881.149	1
2010.01.II	267	2593	122	22	**	71.411	1.349.654	
2010.02.I	256	1921	151	18	**	65687	1.002.709	
2010.02.II	277	2914	159	26	159*	76.888	1.558.487	1
2011.01.I	265	2092	150	16	148*	70.375	1.118.863	1
2011.01.II	255	2295	135	20	**	65.160	1.155.751	
2012.01.I	182	1381	95	18	94*	33.219	492.454	1
2012.01.II	235	2220	114	23	113*	55.339	1.007.826	1
2012.02.I	253	1974	123	20	122*	64.132	1.000.645	1
2012.02.II	254	2368	118	22	118*	64.634	1.173.498	1
2014.02.I	172	1201	68	20	66*	29.652	407.577	1
2014.02.II	238	2294	74	20	**	56.718	1.040.474	

Tab. 3.2: Resultados, tiempos e instancias. Los resultados marcados con \* corresponden a cotas duales capturadas luego de una hora, y los marcados con \*\* significan que luego de 1 hora no se logró resolver la relajación lineal.

Como vemos, ninguna de las instancias de este modelo logró resolver el problema utilizando el límite de tiempo de una hora. En algunos casos, no se llegó siquiera a resolver la primera relajación lineal. Esto último es esperable si notamos la gran cantidad de variables y restricciones. Sin embargo, alrededor del 50 % de las restricciones de este último modelo eran eliminadas en la etapa presolve.

Podemos notar una diferencia de casi un 1000 % entre la cantidad de variables y restricciones del modelo clásico y de representantes. Esto es debido a que en este último, las variables y restricciones resultan afectadas de manera cuadrática y cúbica por la cantidad de vértices del modelo. Por el contrario, el modelo clásico tiene un mayor impacto al aumentar la cantidad de colores disponibles, que en los casos de prueba utilizados no constituyen una gran cantidad.

Los resultados muestran que el modelo clásico parece comportarse mejor en la práctica, dado que los tiempos de ejecución fueron abismalmente menores. Si bien estas instancias no dejan de ser un conjunto particular, resultan una muestra de la utilidad práctica que pueden representar ambos modelos.

En la siguiente sección nos concentraremos en estudiar el poliedro asociado de soluciones del modelo clásico, calculando su dimensión y desigualdades válidas.

## 4. ESTUDIO DEL POLÍTOPO ASOCIADO AL MODELO CLÁSICO

En esta sección presentaremos un estudio del poliedro asociado al modelo clásico. Formalmente, lo definiremos de la siguiente manera:

### Definición 4.0.1

Dados el grafo,  $G = (V, E)$ , el hipergrafo  $H = (V, E_H)$ , y un conjunto  $C$  de colores disponibles, llamaremos  $P_{HMIC}(G, H, C) \subset \mathbb{R}^{|V||C|+|E_H|}$  al poliedro generado por los puntos  $(x, z) \in \mathbb{R}^{|V||C|+|E_H|}$  que cumplen con las restricciones asociadas al modelo clásico de coloreo de máximo impacto en hipergrafos.

Notemos que el modelo que analizaremos tiene la particularidad de ser binarias todas sus variables. Es por esto que, siguiendo la Definición 2.1.6, el poliedro asociado a este modelo es en particular un polítopo.

En general, si tuviéramos  $n$  variables de un problema de programación lineal, donde cada una de ellas es binaria, tendríamos que el conjunto de soluciones factibles del problema estaría encerrado en  $B(\hat{0}, 2)$  donde ésta última es la bola cerrada de radio 2, con centro en  $\hat{0} \in \mathbb{R}^n$ .

Lo primero que haremos será calcular la dimensión de  $P_{HMIC}(G, Z, C)$ , y luego presentaremos familias de desigualdades válidas y condiciones adicionales bajo las cuales éstas inducen facetas del mismo.

Con el fin de simplificar las demostraciones, asumiremos que, dado  $f \in \mathcal{F}$  un curso, si  $v, w \in f$ , entonces no hay aristas entre ambos. En caso que las hubiera, no habría posibilidad de obtener  $z_f = 1$ . Podríamos, entonces, modificar el modelo marcando  $z_f = 0$  y eliminar las desigualdades relacionadas a  $z_f$ . Además, asumiremos que cada clase pertenece a un único curso, esto es, si  $f, g \in \mathcal{F}$ ,  $v \in f$  implica  $v \notin g$ .

Introduciremos a continuación algunas notaciones que utilizaremos a lo largo del trabajo:

1. Dados  $i \in V$ ,  $c \in C$ , notaremos  $e_{ic} \in \{0, 1\}^{|V||C|}$  al vector formado por todos 0s salvo un 1 en la posición  $ic$ .

2. Dado  $\lambda \in \mathbb{R}^{|V||C|}$ ,  $i \in V$ , llamaremos  $\lambda_i$  al vector  $v \in \mathbb{R}^{|C|}$  conformado por 
$$\begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \vdots \\ \lambda_{i|C|} \end{pmatrix}.$$

3. Por último, notaremos  $\hat{0}$  al vector formado por todos valores 0 con la dimensión correcta.

### 4.1. Dimensión del polítopo

Lo primero que haremos será calcular la dimensión del polítopo de soluciones del problema en cuestión. Esto implicará que el sistema de ecuaciones utilizado en el modelo es minimal.

### Proposición 4.1.1

Si  $\mathcal{X}(G) < |C|$ , entonces la dimensión de  $\mathcal{P}_{HMIC}(G, H, C)$  es  $|V|(|C| - 1) + |\mathcal{F}|$ .

*Demostración.* La dimensión del polítopo, por definición es la dimensión del espacio euclideo más pequeño que lo contiene. Si tenemos  $n$  variables, entonces estamos buscando la dimensión de un polítopo  $P \subseteq \mathcal{R}^n$ . Esto nos daría, una cota superior a la dimensión igual a  $n$ .

Aplicando el Teorema 3.17 de [CCZ14], tendremos que la dimensión del polítopo será  $n - \#(\text{igualdades linealmente independientes del modelo})$ . El teorema en cuestión indica que la dimensión de un polítopo  $P$  es  $n$  menos el rango de  $A^=$ , donde  $A^=$  es una matriz cuyas columnas son todas las igualdades implícitas del modelo que induce al polítopo. El rango de la misma será entonces la cantidad de igualdades linealmente independientes.

La cantidad de variables del modelo es  $|V||C| + |\mathcal{F}|$ , ya que tenemos las variables  $x_{ic}$ , cuyos subíndices representan cada posible clase y color, y los  $z_f$  cuyo subíndice representa cada curso.

Debemos hallar, por último, las igualdades linealmente independientes. Las primeras igualdades que podemos considerar son las propias del modelo, que fácilmente podemos demostrar que son linealmente independientes.

Al ser  $|V|$  igualdades, tenemos en principio una cota superior de la dimensión igual a  $|V|(|C| - 1) + |\mathcal{F}|$ . Resta ver que no existen otras igualdades linealmente independientes.

Para eso, tomemos una igualdad genérica,  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ , y supongamos que todas las soluciones factibles de nuestro modelo cumplen dicha igualdad. Vamos entonces a demostrar que la misma no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades que ya teníamos.

Probaremos, con el fin último ya mencionado, algunas propiedades sobre la igualdad genérica en cuestión:

1.  $\mu_f = 0 \forall f \in \mathcal{F}$  :

Sea  $f \in \mathcal{F}$ , fijo. Tomemos una solución factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores.

Como  $|C| > \mathcal{X}(G)$ , tenemos un color  $c$  que no está siendo utilizado para colorear ningún vértice.

Utilicemos dicho color, para pintar los vértices de  $f$ . A continuación, tomemos la solución  $w_1 = \begin{pmatrix} x \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ , con  $x$  representando el coloreo en cuestión, y tomemos la solución  $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ e_f \end{pmatrix}$ , con  $e_f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}|}$  el vector canónico con un 1 únicamente en el lugar de  $f$ .

Notemos que ambas soluciones son factibles para el modelo, y por lo tanto deberían cumplir con la igualdad genérica. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x + \mu^\top 0 &= \lambda^\top x + \mu^\top e_f \iff \\ 0 &= \mu_f \end{aligned}$$

Y con eso probamos el resultado que queríamos.  $\diamond$

2.  $\lambda_{vc} = \lambda_{vc'} \forall c, c' \in C, v \in V$  :

Sean  $v \in V, c, c' \in C$ , fijos. Tomemos un coloreo factible utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilice el color  $c'$  para colorear ningún vértice.

Luego, intercambiamos los colores de los vértices, de forma tal que a  $v$  le quede asignado el color  $c$ .

Con este coloreo, formamos la solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ .

Por último, construyamos la solución  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  con  $x^2$  igual a  $x^1$ , pero intercambiando el color de  $v$  por  $c'$ . De esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^1 + \mu^\top 0 &= \lambda^\top x^2 + \mu^\top 0 \iff \\ \lambda_{vc} &= \lambda_{vc'} \end{aligned}$$

Y esto era lo que queríamos probar.  $\diamond$



Ahora bien, reescribiendo la igualdad genérica que teníamos, podemos expresarla como:

$$\sum_{i \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f z_f = \lambda_0$$

Como  $\mu_f = 0 \ \forall f \in \mathcal{F}$ , esto es equivalente a:

$$\sum_{i \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} = \lambda_0$$

Ahora bien, por el ítem 2, podemos fijar un  $c' \in C$  y reescribir la igualdad como:

$$\sum_{i \in V} \lambda_{ic'} \sum_{c \in C} x_{ic} = \lambda_0$$

Podemos ver que esto no es otra cosa que una combinación lineal de las igualdades del modelo, por lo que finalmente demostramos que no hay otras desigualdades linealmente independientes con las igualdades del modelo, y por consecuencia que la dimensión del polítopo es  $|V|(|C| - 1) + |\mathcal{F}|$ .

□

## 4.2. Desigualdades de partición

La primera desigualdad que introduciremos está basada en la desigualdad homónima del artículo sobre coloreo de máximo impacto [BDDL17].

Sea  $f \in \mathcal{F}$ , con  $i, j \in f$ . Sea  $D \subseteq C$  tal que  $1 \leq |D| \leq |C| - 1$ . Definimos la siguiente desigualdad:

$$z_f \leq \sum_{c \notin D} x_{ic} + \sum_{d \in D} x_{jd} \quad \text{Desigualdad de partición}$$

Estas desigualdades intuitivamente serían una generalización de las restricciones (3) del modelo:

$$z_f \leq 1 + x_{ic} - x_{jc} \quad \forall f \in \mathcal{F}, i, j \in f, c \in C \quad (3)$$

Notemos que si fijamos un  $c \in C$ , y además fijamos  $D = \{c\}$ , tenemos exactamente estas restricciones, dado que  $\sum_{c \notin D} x_{ic} = 1 - x_{ic}$ . Esto último a causa de las igualdades  $\sum_{c \in C} x_{ic} = 1 \quad \forall i \in V$ .

Esta familia de desigualdades marca una condición necesaria, mas no suficiente, para afirmar que si  $z_f = 1$ , no haya clases de la asignatura  $f$  asignadas a distintas aulas.

### Teorema 4.2.1

Las desigualdades de partición son válidas. Más aún, si  $\mathcal{X}(G) + 1 < |C|$ , entonces definen facetas de  $\mathcal{P}_{HMIC}(G, H, C)$

En las próximas dos subsecciones demostraremos el teorema anterior, primero demostrando la validez de las desigualdades y por último la facetitud contando con la hipótesis adicional.

### 4.2.1. Demostración de validez

Notemos que la única forma en que la desigualdad fuese inválida, sería si  $z_f = 1$ , y  $\sum_{c \notin D} x_{ic} + \sum_{d \in D} x_{jd} = 0$ , así que supongamos una solución factible con dichas características.

Como  $\sum_{c \in C} x_{jc} = 1$ , necesariamente existe un  $c \in C \setminus D$  tal que  $x_{jc} = 1$ . Análogamente, existe  $d \in D$  tal que  $x_{id} = 1$ . Como  $D \cap C \setminus D = \emptyset$ ,  $i$  y  $j$  tienen distinto color, por lo tanto  $z_f$  debe valer 0 por las restricciones del modelo.  $\square$

### 4.2.2. Demostración de facetitud

Queremos demostrar que la desigualdad de partición define una faceta. Esto es, ver que la igualdad inducida por la desigualdad produce una cara de dimensión  $n - 1$ , siendo  $n$  la dimensión del polítopo. Por comodidad, llamaremos *igualdad de partición* a la igualdad inducida por la desigualdad de partición.

Para ver que la cara que produce tiene dimensión  $n - 1$ , primero tomemos una igualdad  $\lambda^T x + \mu^T z = \lambda_0$  genérica y asumamos que la cumplen todos los puntos  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{|V||C|+|\mathcal{F}|}$  enteros tales que  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{HMIC}(G, H, C)$ , y además cumplen la desigualdad candidata por igualdad. Esto es, una ecuación genérica que cumplan todos los puntos del polítopo que pertenezcan a la cara definida por la desigualdad de partición.

Luego debemos probar que dicha ecuación no puede ser otra cosa que una combinación lineal de las igualdades originales del modelo, y la igualdad dada por la desigualdad de partición.

Si logramos esto, estaremos probando que no hay otras igualdades linealmente independientes con las que teníamos del modelo original (que nos dan la dimensión  $n$  del polítopo) y la nueva (con la cual

tendríamos el resultado de dimensión  $n - 1$ ).

Fijemos la igualdad genérica como  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ , con las dimensiones correspondientes tal que toda solución factible  $(x, z) \in \mathcal{P}_{MIC}(G, Z, C) \cap \mathbb{Z}^{|V|+|C|+|\mathcal{F}|}$  que cumple la desigualdad de partición por igualdad también cumple la igualdad genérica.

La demostración constará de dos partes: primero, demostraremos propiedades sobre  $\lambda$  y  $\mu$ , y por último, utilizando las mismas, concluiremos que la igualdad en cuestión no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo y la igualdad de partición.

Comencemos probando las siguientes afirmaciones:

1.  $\lambda_{kc} = \lambda_{kc'} \forall k \in V, k \notin f, \forall c, c' \in C$ :

Fijemos  $c, c' \in C$  y  $k \in V \setminus f$ .

Primero tomemos una solución factible coloreando los vértices con  $\mathcal{X}(G)$  colores.

Como asumimos que hay al menos  $\mathcal{X}(G) + 2$  colores, deben existir al menos dos,  $c_1, c_2 \in C$ , que no se hayan utilizado para colorear ningún vértice. Sin romper el coloreo factible, podemos intercambiar colores de forma tal que  $c_1 = c'$ . Luego, podemos intercambiar colores nuevamente de forma que el vértice  $k$  quede asignado con el color  $c$  (asumimos que  $c \neq c'$ , de otra forma, el ítem es trivial).

Por último, modificamos el coloreo asignándole a todos los vértices de  $f$  el color  $c_2$ . Con este coloreo, formaremos la solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x \\ e_f \end{pmatrix}$ . Esta solución cumple con las restricciones del modelo, y además cumple la desigualdad de partición por igualdad.

Construyamos una solución nueva,  $w^2 = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ e_f \end{pmatrix}$ , asignándole el color  $c'$  a  $k$ , y dejando el resto de los vértices iguales. Esta solución también cumple las restricciones del modelo y la igualdad de partición.

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x + \mu^\top e_f &= \lambda^\top \bar{x} + \mu^\top e_f \iff \\ \lambda^\top x &= \lambda^\top \bar{x} \iff \\ \lambda_{kc} &= \lambda_{kc'} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos el resultado deseado. ◇

2.  $\mu_{f'} = 0 \forall f' \in \mathcal{F}, f' \neq f$ :

Sea  $f' \in \mathcal{F} \setminus \{f\}$ , fijo. Sea  $w = \begin{pmatrix} x \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  una solución factible con  $\mathcal{X}(G) + 1$  colores, tal que todos los  $v \in f'$  tienen el mismo color. Esto es posible construyendo una solución con  $\mathcal{X}(G)$  colores, y luego utilizando un color que no haya utilizado antes para pintar los vértices de  $f'$ .

Luego, construyamos  $\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$  tal que:

- Si todos los  $i \in f$  tienen el mismo color, tomemos  $x = \bar{x}$  y  $\bar{z} = e_f$ .
- Si no:
  - Si  $i$  y  $j$  tienen colores distintos, renombramos los colores, para que  $i$  tenga un color en  $D$ , y  $j$  un color en  $C \setminus D$ . Luego fijemos la solución  $\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ .

- Si  $i$  y  $j$  tienen el mismo color, como todavía queda un color disponible sin utilizar (ya que  $|C| > \mathcal{X}(G) + 1$ ), renombramos a  $i$  o  $j$  con un nuevo color, y estaremos en el caso anterior.

Notemos que en todos los casos tenemos una solución factible que cumple con la igualdad de partición.

Tomemos una segunda solución,  $w' = \bar{w} + \begin{pmatrix} \hat{0} \\ e_{f'} \end{pmatrix}$ .

Usando un argumento análogo al anterior, tenemos que  $\mu_{f'} = 0$ .  $\diamond$

3.  $\mu_f = -\lambda_{ic} + \lambda_{id} \quad \forall c \in C \setminus D, \forall d \in D$ :

Fijemos  $c \in C \setminus D$ , y  $d \in D$ .

Tomemos un coloreo factible  $x^0$ , tal que ni  $d$  ni  $c$  se hayan asignado a ningún vértice. Esto es posible de la siguiente manera:

- 1) Tomamos un coloreo factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores.
- 2) Como  $C > \mathcal{X}(G) + 1$ , sabemos que al menos tenemos dos colores más disponibles. Llamémoslos  $c_1$  y  $c_2$ . Luego, si habían vértices coloreados con  $c$ , cambiamos su color por  $c_1$ . Por otra parte, si habían vértices coloreados con  $d$ , intercambiamos su color por  $c_2$ . De esta forma, obtendremos que los colores  $c$  y  $d$  quedaron sin utilizarse por ningún vértice.

Definamos  $w^1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$  tal que  $x^1$  es igual a  $x^0$ , excepto en los vértices de  $f$ , donde  $x_{kc}^1 = 1$  para todo  $k \in f$ , con el color  $c \in C \setminus D$  que habíamos fijado.

Definamos también  $w^2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ , con  $x^2$  igual a  $x^1$ , pero con  $x_{id}^2 = 1$  para el  $d \in D$  que habíamos fijado.

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^T x^1 + \mu e_f &= \lambda^T x^2 \iff \\ \lambda_{ic} + \mu_f &= \lambda_{id} \iff \\ \mu_f &= \lambda_{id} - \lambda_{ic} \end{aligned}$$

$\diamond$

4.  $\mu_f = -\lambda_{jc} + \lambda_{jd} \quad \forall c \in C \setminus D, \forall d \in D$ :

La demostración es análoga a la anterior, por lo tanto la omitiremos.  $\diamond$

5.  $\lambda_{kc} = \lambda_{kd} \quad \forall k \in f \setminus \{i, j\}, \forall c \in C \setminus D, \forall d \in D$ :

Fijemos  $k \in f \setminus \{i, j\}$ ,  $c \in C \setminus D$  y  $d \in D$ .

Tomemos una solución factible  $\begin{pmatrix} x \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ , tal que exista un color de  $D$ , y un color de  $C \setminus D$  que no se hayan asignado a ningún vértice (esta solución existe por el mismo argumento que el ítem (3)).

Fijemos  $d \in D$ ,  $c \in C \setminus D$ , los colores que no se utilizaron para pintar ningún vértice.

Construyamos  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ , donde  $x^1$  es igual a  $x$ , pero pintando con  $d$  todos los vértices de  $f$ . Esta solución es factible y cumple la igualdad de partición.

Por último, tomemos  $w^2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ , igual a  $w^1$ , pero intercambiando el color de  $k$  y de  $j$  por  $c$ . Es decir,

$$x_{kc}^2 = x_{jc}^2 = 1.$$

Notemos que ambas son soluciones factibles que cumplen la igualdad. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^1 + \mu^\top e_f &= \lambda^\top x^2 \iff \\ \lambda_{jd} + \lambda_{kd} + \mu_f &= \lambda_{jc} + \lambda_{kc} \iff & (\text{por (4) sabemos } \mu_f = -\lambda_{jd} + \lambda_{jc}) \\ \lambda_{kd} &= \lambda_{kc} \end{aligned}$$

Notemos que, al ser  $c$  y  $d$  tomados sin pérdida de generalidad, esto implica que  $\lambda_{kc} = \lambda_{kc'}$  para todo  $c, c' \in C$ .

◇

6. Por (3), sabemos que  $\mu_f = -\lambda_{ic} + \lambda_{id}$ , y similarmente  $\mu_f = -\lambda_{ic} + \lambda_{id'}$ , con lo cual tenemos como resultado  $\lambda_{id} = \lambda_{id'}$  para todo  $d, d' \in D$ . El mismo argumento puede utilizarse para probar  $\lambda_{ic} = \lambda_{ic'}$ ,  $\lambda_{jc} = \lambda_{jc'}$  y  $\lambda_{jd} = \lambda_{jd'}$ , con  $c, c' \in C \setminus D$ , y  $d, d' \in D$ , genéricos.

◇

Volvamos a mirar la igualdad  $\lambda^\top x + \mu z = \lambda_0$  teniendo en cuenta estos puntos. Si llamamos  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{|V|} \end{pmatrix}$  a  $\lambda$  siguiendo la notación definida al comienzo de esta sección, y hacemos lo mismo con  $x$ , tomando  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{|V|} \end{pmatrix}$ , podemos expandir la igualdad de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^\top & \lambda_2^\top & \dots & \lambda_{|V|}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{|V|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{|\mathcal{F}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{|\mathcal{F}|} \end{pmatrix} = \lambda_0 \quad (4.1)$$

Haciendo la multiplicación de matrices, tenemos:

$$\sum_{k \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{kc} x_{kc} + \sum_{i \in \mathcal{F}} \mu_i z_i = \lambda_0$$

Por el ítem 1, sabemos que si  $k \notin f$ ,  $\lambda_k = \lambda_{k1} \cdot 1^{\|C\|}$ . Similarmente tenemos el mismo argumento si  $k \in f \setminus \{i, j\}$ , por el ítem 5.

La desigualdad quedaría entonces:

$$\sum_{k \neq \{i, j\}} \lambda_{k1} \sum_{c \in C} x_{kc} + \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{c \in C} \lambda_{jc} x_{jc} + \sum_{i \in \mathcal{F}} \mu_i z_i = \lambda_0$$

Por ítem 2, tenemos  $\mu_{f'} = 0$  para todo  $f' \neq f$ .

Tenemos entonces:

$$\sum_{k \neq \{i, j\}} \lambda_{k1} \sum_{c \in C} x_{kc} + \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{c \in C} \lambda_{jc} x_{jc} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Podemos ver que el primer término de la igualdad es combinación lineal del lado izquierdo de las igualdades originales del modelo. Notemos el mismo con (1).

Si dividimos el segundo y tercer término según si  $c \in C \setminus D$  o  $c \in D$ , tenemos:

$$(1) + \sum_{c \in C \setminus D} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{d \in D} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{c \in C \setminus D} \lambda_{jc} x_{jc} + \sum_{d \in D} \lambda_{jd} x_{jd} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Por el ítem 6, podemos reescribir la ecuación como:

$$(1) + \lambda_{ic_1} \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} + \lambda_{id_1} \sum_{d \in D} x_{id} + \lambda_{jc_1} \sum_{c \in C \setminus D} x_{jc} + \lambda_{jd_1} \sum_{d \in D} x_{jd} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Como  $\mu_f = \lambda_{id} - \lambda_{ic} = \lambda_{jc} - \lambda_{jd}$ , sumando y restando  $\lambda_{jc_1} \sum_{d \in D} x_{jd}$  y  $\lambda_{id_1} \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic}$  podemos reescribir la ecuación como:

$$(1) + \lambda_{id_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \lambda_{jc_1} \sum_{c \in C} x_{jc} + \mu_f \left( - \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} \right) + \mu_f \left( - \sum_{d \in D} x_{jd} \right) + \mu_f z_f = \lambda_0 \iff$$

$$(1) + \lambda_{id_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \lambda_{jc_1} \sum_{c \in C} x_{jc} + \mu_f \left( - \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} - \sum_{d \in D} x_{jd} + z_f \right) = \lambda_0$$

Con esto vemos que nuestra igualdad no es otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo y la igualdad de partición. Por lo tanto dicha desigualdad define una faceta.  $\square$

### 4.3. Desigualdades de partición generalizadas

La siguiente familia de desigualdades es una generalización de las desigualdades de partición descritas en la sección anterior. A diferencia de las desigualdades de partición analizadas en [BDDL17], veremos que utilizando este modelo podemos generalizar las mismas para que funcionen con un número arbitrario de vértices en lugar de dos.

#### Definición 4.3.1

Sea  $f \in \mathcal{F}$ , con  $i_1, \dots, i_n \in f$ . Sean  $D_1, \dots, D_n \subseteq C$  disjuntos dos a dos, tales que  $1 \leq |D_i| \leq |C| - 1$  y  $\bigcup_{i=1}^n D_i = C$ . Definimos la siguiente desigualdad:

$$z_f \leq \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} \quad \text{Desigualdad de partición generalizada}$$

#### Teorema 4.3.1

Las desigualdades de partición generalizadas son válidas. Más aún, si  $\mathcal{X}(G) + 1 < |C|$ , entonces definen facetas de  $\mathcal{P}_{MIC}(G, H, C)$

Demostraremos la validez y la facetitud bajo la hipótesis adicional en las siguientes subsecciones.

#### 4.3.1. Demostración de validez

Demostraremos por el absurdo. Supongamos que existe una solución factible  $w$ , donde tengamos  $f \in \mathcal{F}, i_1, \dots, i_n \in f, D_1, \dots, D_n \subseteq C$  tales que la desigualdad no se cumple, es decir:

$$z_f > \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j}$$

Ahora bien, tenemos  $z_f \leq 1$ , y  $\sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} \geq 0$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} 1 \geq z_f &> \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} \geq 0 \iff \\ 1 = z_f &> \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en dicha solución valdrán  $z_f = 1$ , y  $\sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} = 0$ . Supongamos una solución factible con dichas características.

Miremos por un momento a  $i_1$ . En estas condiciones, tendremos  $\sum_{d \in D_1} x_{i_1 d} = 0$ . A su vez, por las restricciones del modelo sabemos  $\sum_{c \in C} x_{i_1 c} = 1$ . Por lo tanto, necesariamente debe existir  $c \in D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n$  tal que  $x_{i_1 c} = 1$ , dado que  $\bigcup_{i=1}^n D_i = C$ .

Podemos ver que, de la misma forma, existe  $d \in D_1 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n$  tal que  $x_{i_2 d} = 1$ . Podemos generalizar este razonamiento diciendo que para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  existe  $d \in D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{j-1} \cup D_{j+1} \cup \dots \cup D_n = C \setminus D_j$  tal que  $x_{i_j d} = 1$ .

Como  $(C \setminus D_1) \cap (C \setminus D_2) \cap \dots \cap (C \setminus D_n) = \emptyset$ , necesariamente algún par de vértices entre  $i_1, i_2, \dots, i_n$  debe tener distinto color, y por lo tanto  $z_f$  debe valer 0 por las restricciones del modelo.  $\square$

### 4.3.2. Demostración de facetitud

Llamemos *igualdad de partición generalizada* a la igualdad inducida por la desigualdad de partición generalizada.

Utilizando el mismo argumento que en el Teorema 4.2.1, fijaremos una igualdad genérica,  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ , con las dimensiones correspondientes, asumiendo como hipótesis que todas las soluciones que cumplen la igualdad de partición generalizada y además son soluciones factibles en el problema, cumplen esta desigualdad.

Trataremos de demostrar que esta igualdad no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo y de la igualdad de partición generalizada.

La demostración constará de dos partes: primero, demostraremos propiedades sobre  $\lambda$  y  $\mu$ , y por último, utilizando las mismas, concluiremos que la igualdad genérica en cuestión no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades mencionadas.

Primero comencemos probando las siguientes afirmaciones:

1.  $\lambda_{kc} = \lambda_{kc'} \forall k \notin f, \forall c, c' \in C$ :

Sean  $c, c' \in C$  fijos, distintos (de otra forma, es trivial la premisa).

Tomemos una solución factible  $w^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que ningún vértice utilice el color  $c'$  (esto es posible con un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 4.2.1, intercambiando colores y utilizando la hipótesis de  $|C| > \mathcal{X}(G)$ ). Supongamos, además que el vértice  $k$  está pintado con el color  $c$ . Si no lo estaba, y su color era  $\hat{c} \in C$ , podemos intercambiar el color de todos los vértices pintados con  $\hat{c}$  con los vértices coloreados con  $c$ , o, si no hay ninguno, simplemente cambiarle el color al vértice  $k$ .

Sean  $c', c'' \in C$  los colores que no fueron utilizados por ningún vértice (ya que  $|C| > \mathcal{X}(G) + 1$ ).

Tomemos una solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$  igual a la anterior, pero coloreando los vértices de  $f$  con  $c''$ .

Dado que  $c'' \in D_j$  para algún  $j = \{1, \dots, n\}$ , al estar coloreando todos los vértices de  $f$  con dicho color, nos quedará entre ellos,  $i_j$  coloreado, y por lo tanto  $\sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} = 1$ . Como los  $D_j$  son disjuntos, tendremos  $\sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} = 1$ .

A su vez,  $z_f = 1$ , por lo cual nos queda  $z_f = \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} = 1$ . Por lo tanto  $w_1$  cumple la igualdad de partición generalizada.

Luego fijemos una segunda solución,  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ e_f \end{pmatrix}$ , idéntica a  $w^1$ , pero cambiando el color de  $k$  por  $c'$ . Esto es posible, ya que por hipótesis ningún vértice tendría asignado el color  $c'$ .

Al no modificarse ninguna variable presente en la igualdad de partición generalizada, esta solución también cumple la igualdad de partición generalizada.

Podemos ver que ambas soluciones,  $w^1$  y  $w^2$ , cumplen las restricciones del modelo y la igualdad de partición generalizada, por lo tanto, deben cumplir nuestra igualdad  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ . Con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^2 + \mu^\top e_f &= \lambda^\top x^1 + \mu^\top e_f \iff \\ \lambda^\top x^2 &= \lambda^\top x^1 \iff (\text{todos los términos son iguales salvo } \lambda_{kc'} \text{ y } \lambda_{kc}) \\ \lambda_{kc'} &= \lambda_{kc} \end{aligned}$$



Y con ello tenemos lo que queríamos probar.  $\diamond$

2.  $\mu_{f'} = 0 \forall f' \in \mathcal{F}, f' \neq f$ :

Sea  $f' \in \mathcal{F} \setminus \{f\}$  fijo.

Sea  $w = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  una solución factible con  $\mathcal{X}(G) + 1$  colores, tal que todos los vértices de  $f'$  tienen el mismo color. Esto es posible tomando un coloreo con  $\mathcal{X}(G)$  colores, y luego asignando un nuevo color  $c \in C$  que no se haya utilizado a los vértices de  $f'$ .

Construyamos  $\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$  de la siguiente manera:

- Si todos los  $i \in f$  tenían el mismo color en  $w$ , entonces tomemos  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{z} = e_f$ .
- Si no, tomemos un color que no tenga asignado ningún vértice (éste existe, ya que  $|C| > \mathcal{X}(G) + 1$ ), e intercambiamos el color de los vértices de  $f$  por éste. Utilicemos ese nuevo coloreo para construir  $\bar{x}$ , y fijemos  $z = e_f$ .

Por último, tomemos una segunda solución,  $w' = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ e_f + e_{f'} \end{pmatrix}$ . Con un argumento análogo al ítem anterior, tanto  $w'$  como  $\bar{w}$  cumplen las restricciones del modelo, y la igualdad de partición generalizada. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^\top \bar{x} + \mu^\top e_f &= \lambda^\top \bar{x} + \mu^\top (e_f + e_{f'}) \iff \\ \mu^\top e_f &= \mu^\top (e_f + e_{f'}) \iff \\ \mu_f &= \mu_f + \mu_{f'} \iff \\ \mu_{f'} &= 0. \end{aligned}$$

Y con esto probamos lo que queríamos.

Notemos que en este caso, utilizamos la hipótesis de que cada vértice pertenece a un único  $f$ , es decir, cada clase pertenece a una única materia.  $\diamond$

3.  $\mu_f = \lambda_{i_j d_m} - \lambda_{i_j d_j} \forall j, m \in \{1, \dots, n\}, j \neq m, \forall d_j \in D_j, \forall d_m \in D_m$ :

Fijemos  $m \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, d_m \in D_m$  y  $d_j \in D_j$  respectivamente.

Tomemos  $x$  solución factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que los colores  $d_m$  y  $d_j$  no se utilicen para pintar ningún vértice.

Definamos  $w_1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$  tal que  $x^1 = x$  salvo en los vértices de  $f$ , a los cuales asignaremos el color  $d_j$ . Definamos luego una segunda solución,  $w_2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ e_f \end{pmatrix}$ , tal que  $x^2$  es igual a  $x^1$ , pero cambiando el color de  $i_j$  por  $d_m$ .

Nuevamente, ambas soluciones cumplen las restricciones del modelo y la igualdad de partición generalizada. Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^1 + \mu^\top e_f &= \lambda^\top x^2 \iff \\ \lambda_{i_j d_j} + \mu_f &= \lambda_{i_j d_m} \end{aligned}$$

Y con este último paso tenemos el resultado deseado.  $\diamond$

4.  $\lambda_{kd_j} = \lambda_{kd_m} \forall k \in f \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \forall d_j \in D_j, \forall d_m \in D_m, m \neq j$ :

Fijemos  $k \in f \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , dos colores  $d_j \in D_j, d_m \in D_m$  y tomemos una solución factible  $\begin{pmatrix} x \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que ni  $d_j$  ni  $d_m$  estén asignados a ningún vértice. Podemos construir esta solución de la siguiente forma:

- Tomamos un coloreo factible utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores.
- Como  $|C| > \mathcal{X}(G) + 1$ , tenemos dos colores  $c_1, c_2$  que no utiliza ningún vértice. Intercambiamos colores de forma tal que  $c_1 = d_j$  y  $c_2 = d_m$ .

Tomemos  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ , donde  $x^1$  es igual a  $x$ , pero coloreando con  $d_j$  a todos los vértices de  $f$ .

Tomemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ , igual a  $w^1$ , pero intercambiando el color de  $k$  y de  $i_j$  por  $d_m$ . Es decir,  $x_{kd_m}^2 = x_{i_j d_m}^2 = 1$ . Notemos que esta solución cumple la igualdad de partición generalizada, ya que todos los vértices de  $f$  excepto  $i_j$  tienen asignado el color  $d_j$ , y éste último tiene asignado un color  $d_m \notin D_j$ , por lo tanto  $z_f = 0 = \sum_{j=1}^n \sum_{d_s \in D_s} x_{i_s d_s}$ .

Ambas son soluciones factibles que cumplen las restricciones del modelo y la igualdad de partición generalizada. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^1 + \mu^\top e_f &= \lambda^\top x^2 \iff \\ \lambda_{i_j d_j} + \lambda_{kd_j} + \mu_f &= \lambda_{i_j d_m} + \lambda_{kd_m} \iff & (\text{por (3) sabemos } \mu_f = -\lambda_{i_j d_j} + \lambda_{i_j d_m}) \\ \lambda_{kd_j} &= \lambda_{kd_m} \end{aligned}$$

Y con eso tenemos lo que queríamos probar. ◇

5.  $\lambda_{kd_j} = \lambda_{kd'_j} \forall k \in f \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \forall d_j, d'_j \in D_j$ :

Este ítem se deduce directamente del anterior; por lo tanto omitiremos su demostración. ◇

6.  $\lambda_{i_j d_m} = \lambda_{i_j d'_m} \forall d_m, d'_m \in D_m, \forall m, j \in \{1, \dots, n\}$ :

Por (3), sabemos que, dados  $d_j, d'_j \in D_j, d_m, d'_m \in D_m, \mu_f = -\lambda_{i_j d_j} + \lambda_{i_j d_m}$ , y similarmente  $\mu_f = -\lambda_{i_j d'_j} + \lambda_{i_j d'_m}$ , con lo cual tenemos como resultado  $\lambda_{i_j d_j} = \lambda_{i_j d'_j}$  para todo  $d_j, d'_j \in D_j$ .

De forma similar es posible demostrar el ítem en cuestión. ◇

Probaremos a continuación que la igualdad genérica  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$  no es otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo, y de la igualdad de partición generalizada. Para esto, vamos a expandir la igualdad genérica que teníamos, y empezar a ver cada término por separado.

Primeramente, escribamos la igualdad genérica, y desarrollemos la multiplicación vectorial. Así,  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$  se puede reescribir como la siguiente expresión:

$$\sum_{i \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f z_f = \lambda_0$$

Ahora bien, por el ítem 2,  $\mu_{f'} = 0 \forall f' \in \mathcal{F}, f' \neq f$ , por lo tanto la igualdad nos queda:

$$\sum_{i \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

A su vez, por el ítem 1, sabemos que  $\lambda_{kc} = \lambda_{kc'}$  para todo  $c \in C$ , y para todo  $k \notin f$ . Separando el primer término y haciendo factor común, tenemos:

$$\sum_{i \notin f} \lambda_{i_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \sum_{i \in f} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Notemos que la primera parte de la sumatoria no es más que combinación lineal del lado izquierdo de igualdades del modelo. Para facilitar la lectura de esta demostración, notaremos éste término como (1). Así, la igualdad nos queda:

$$(1) + \sum_{i \in f} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Ahora bien, unificando los ítems 4 y 5, tenemos que para todo  $k \in f \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , y para todo  $c, c' \in C$ ,  $\lambda_{kc} = \lambda_{kc'}$ , por lo tanto, similar a lo anterior, podemos reescribir la igualdad separando el caso  $k \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  de la siguiente manera:

$$(1) + \sum_{i \in f \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} \lambda_{i_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_n\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Similar al caso anterior, el segundo término no es otra cosa que combinación lineal del lado izquierdo de algunas igualdades del modelo, y para facilitar la escritura lo marcamos como (2). A su vez, las sumatorias para  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , podemos separarlas según si  $c \in D_1$ ,  $c \in D_2$ , etc. De esta forma obtenemos:

$$(1) + (2) + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{d_m \in D_m} \lambda_{i_j d_m} x_{i_j d_m} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Por el ítem 6, podemos hacer factor común, fijando  $\bar{d}_m \in D_m$ , para cada  $m = 1, \dots, n$ :

$$(1) + (2) + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_{i_j \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_j d_m} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Para facilitar la lectura posterior, reescribimos la ecuación separando los términos según si  $m = j$  o  $m \neq j$ :

$$(1) + (2) + \sum_{j=1}^n \lambda_{i_j \bar{d}_j} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1, m \neq j}^n \lambda_{i_j \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_j d_m} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Notemos que, por el ítem (3), sabemos que  $\mu_f = \lambda_{i_j d_m} - \lambda_{i_j d_j}$ . Vamos a sumar y restar términos a la igualdad, para poder obtener una combinación lineal de la igualdad del modelo. Fijemos  $j', j'' \in \{1, \dots, n\}$ , con  $j' \neq j''$ :

$$\begin{aligned} (1) + (2) + & \boxed{\sum_{j=1}^n \lambda_{i_j \bar{d}_j} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j}} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1, m \neq j}^n \lambda_{i_j \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_j d_m} + \\ & \sum_{j=1, j \neq j'}^n \lambda_{i_j \bar{d}_{j'}} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} - \boxed{\sum_{j=1, j \neq j'}^n \lambda_{i_j \bar{d}_{j'}} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j}} + \\ & \lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j''}} \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_{j'} d_{j'}} - \boxed{\lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j''}} \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_{j'} d_{j'}}} + \\ & \boxed{\mu_f z_f} = \lambda_0 \end{aligned}$$

Miremos los términos marcados con un cuadrado alrededor:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{i_j \bar{d}_j} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} - \sum_{j=1, j \neq j'}^n \lambda_{i_j \bar{d}_{j'}} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} - \lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j''}} \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_{j'} d_{j'}} + \mu_f z_f$$

Haciendo factor común, tenemos:

$$\sum_{j=1, j \neq j'}^n (\lambda_{i_j \bar{d}_j} - \lambda_{i_j \bar{d}_{j'}}) \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} + (\lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j'}} - \lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j''}}) \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_{j'} d_{j'}} + \mu_f z_f$$

Notemos que, por el ítem 3, sabemos que  $\mu_f = \lambda_{i_j d_m} - \lambda_{i_j d_j}$  para todo  $j, m \in \{1, \dots, n\}, j \neq m$ , por lo tanto, la suma que tenemos no es otra cosa que multiplicar por un escalar el lado izquierdo de la igualdad de partición generalizada:

$$\mu_f \left( - \sum_{j=1}^n \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} + z_f \right)$$

Para simplificar la lectura, resumiremos estas sumas como el término (3). Reordenando los términos, nos queda entonces:

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1, m \neq j}^n \lambda_{i_j \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_j d_m} + \\ \sum_{j=1, j \neq j'}^n \lambda_{i_j \bar{d}_{j'}} \sum_{d_j \in D_j} x_{i_j d_j} + \\ \lambda_{i_{j'} \bar{d}_{j_1}} \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_{j'} d_{j'}} = \lambda_0 \end{aligned}$$

Ahora bien, fijemos un  $m' \neq j'$  y tomemos los términos en los que aparece  $i_{m'}$ :

$$\sum_{m=1, m \neq m'}^n \lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_{m'} d_m} + \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} \sum_{d_{m'} \in D_{m'}} x_{i_{m'} d_{m'}}$$

Para poder hacer factor común, sumemos y restemos  $\lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}}$  en los términos de la primera sumatoria:

$$\sum_{m=1, m \neq m'}^n (\lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} + \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}}) \sum_{d_m \in D_m} x_{i_{m'} d_m} + \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} \sum_{d_{m'} \in D_{m'}} x_{i_{m'} d_{m'}}$$

Haciendo factor común, tenemos:

$$\sum_{m=1, m \neq m'}^n (\lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}}) \sum_{d_m \in D_m} x_{i_{m'} d_m} + \sum_{m=1}^n \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_{m'} d_m}$$

Notemos que, como  $D_1 \cup \dots \cup D_n = C$ , podemos agrupar las primeras tres sumatorias como:

$$\sum_{m=1, m \neq m'}^n (\lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}}) \sum_{d_m \in D_m} x_{i_{m'} d_m} + \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} \sum_{c \in C} x_{i_{m'} c}$$

Por el ítem 3, tenemos que  $\mu_f = \lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{m'}}$ , y también  $\mu_f = \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{m'}}$ . Si restamos estas dos igualdades, tenemos  $0 = \lambda_{i_{m'} \bar{d}_m} - \lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}}$ , y por lo tanto podemos descartar la primera sumatoria. De esta forma, nos queda:

$$\lambda_{i_{m'} \bar{d}_{j'}} \sum_{c \in C} x_{i_{m'} c}$$

Y podemos ver que esto no es otra cosa que multiplicar una de las igualdades del modelo por un escalar.

Oodemos aplicar este mismo proceso para todos los  $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq j'$ . Abreviaremos estos términos como (4):

$$(1) + (2) + (3) + (4) \sum_{m=1, m \neq j'}^n \lambda_{i_j, \bar{d}_m} \sum_{d_m \in D_m} x_{i_j, d_m} + \lambda_{i_j, \bar{d}_{j'}} \sum_{d_{j'} \in D_{j'}} x_{i_j, d_{j'}} = \lambda_0$$

En este caso, con un razonamiento análogo al anterior, vamos a obtener que esta ecuación es equivalente a:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + \lambda_{i_j, \bar{d}_1} \sum_{c \in C} x_{i_j, c} = \lambda_0$$

Y podemos ver que ésta última es una de las igualdades originales del modelo.

Con esto, probamos que esta igualdad no es otra cosa que combinación lineal de las igualdades originales del modelo y de la igualdad de partición generalizada, y con eso concluimos que esta última induce una faceta.  $\square$

#### 4.4. Desigualdad de Unión de Cliques

Dado  $f \in \mathcal{F}$  un curso, dos vértices  $v, w \in f$ , y un tercer vértice  $j \in V \setminus f$ , tal que  $fv \in E(G)$  pero  $jw \notin E(G)$ , tenemos que si  $j$  y  $w$  están coloreados con un mismo color, necesariamente  $v$  estará coloreado de otro, y por lo tanto  $z_f = 0$ .

##### Ejemplo 4.4.1

En el siguiente ejemplo, tenemos un curso  $f$ , con cuatro clases entre las que se encuentran  $v$  y  $w$ .

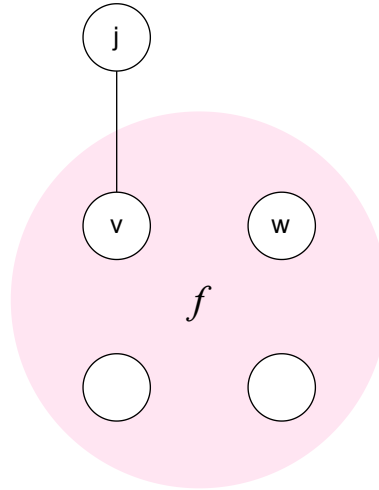


Fig. 4.1: Grafo  $G$  de ejemplo donde tenemos  $v, w \in f$ , y a su vez  $j \notin f$  adyacente a  $v$  y no a  $w$ .

La siguiente desigualdad que presentaremos está basada en esta idea, generalizándola de forma tal que en lugar de un vértice  $j$ , tengamos una clique  $K$ .

##### Definición 4.4.1: Desigualdad de Unión de Cliques

Sea  $K$  una clique no vacía,  $\{v\} = f \cap K$ ,  $w \in f \setminus \{v\}$ .

Sea además,  $K'$  una clique (que puede ser vacía) tal que:

1. Si  $k' \in K'$ , entonces  $k'v \in E(G)$  para todo  $k \in K \setminus \{v\}$ .
2. Si  $k' \in K'$ , entonces  $k'w \notin E(G)$ .
3. Si  $k' \in K'$ , entonces existe  $v' \in f$  tal que  $k'v' \in E(G)$

Por último, sea  $c \in C$ .

Definimos la siguiente desigualdad:

$$z_f + x_{wc} + \sum_{k \in K \setminus f} x_{kc} + \sum_{u \in K'} x_{uc} \leq 2 \quad \text{Desigualdad de Unión de cliques}$$

Podemos ver que los primeros tres términos refieren al ejemplo anterior, utilizando una clique  $K$  en lugar de  $j$ . Por otra parte, añadimos la clique  $K'$  ya que añadiremos condiciones sobre la misma, necesarias para que la desigualdad induzca una faceta. Sin embargo, notemos que la misma podría, a priori, ser el conjunto vacío.

**Teorema 4.4.1: Desigualdad de Unión de cliques**

Las desigualdades de unión de cliques son válidas. Más aún, si:

1. No hay vértices adyacentes a  $w$  en  $K$
2.  $K' \cup K \setminus \{v\}$  es una clique maximal
3. Para todo vértice  $u$  en  $f \setminus \{v\}$ , existe un vértice  $k$  en  $K \setminus \{v\}$  tal que  $u$  y  $k$  no son adyacentes
4. Existe  $k' \in K'$  tal que  $w$  y  $k'$  no son adyacentes
5.  $\mathcal{X}(G) + 1 < C$

Entonces define una faceta de  $\mathcal{P}_{HMIC}(G, H, C)$ .

Antes de pasar a la demostración, incluimos dos ejemplos de la familia de grafos que cumple las condiciones para que la desigualdad de unión de cliques induzca una faceta.

**Ejemplo 4.4.2**

En el siguiente ejemplo, tenemos un grafo  $G = (V, E)$ , con  $|V| = 6$ ,  $|E| = 3$ , donde  $|K| = 2$ ,  $|K'| = 1$ . Notemos que este grafo podría contar con más vértices, pero a fines de facilitar el ejemplo incluimos sólo los mínimos necesarios.

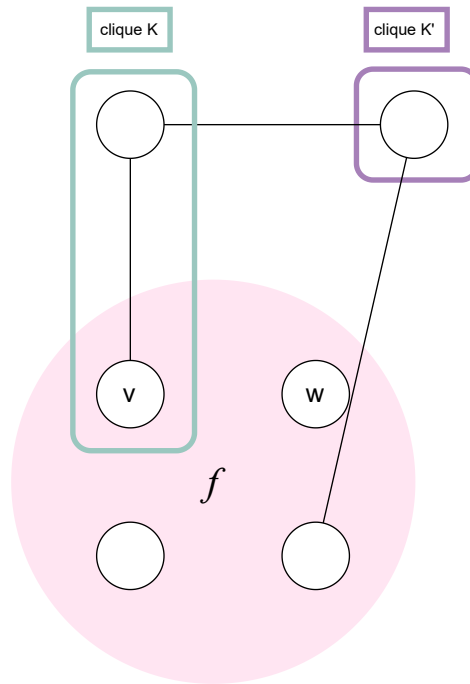


Fig. 4.2: Grafo  $G$  de ejemplo que cumple con las condiciones para definir una desigualdad de unión de cliques y que produzca una faceta.

## Ejemplo 4.4.3

En este segundo ejemplo, tenemos  $G = (V, E)$ , donde  $|V| = 8$ ,  $|E| = 10$ ,  $|K| = 3$  y  $|K'| = 2$ . En este caso, ambos vértices de  $K'$  están conectados al mismo vértice de  $f$ , aunque podrían ser adyacentes a vértices distintos o a más de uno.

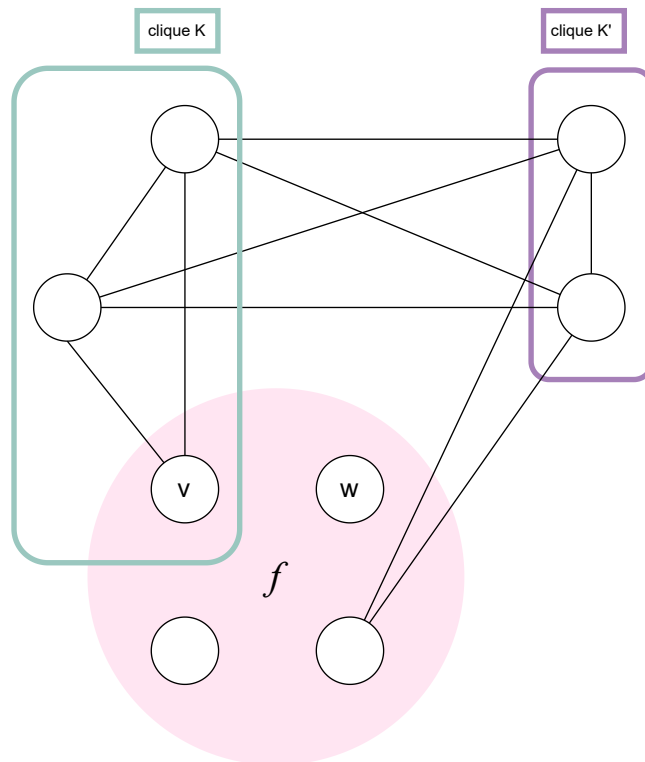


Fig. 4.3: Grafo  $G$  de ejemplo que cumple con las condiciones para definir una desigualdad de unión de cliques y que produzca una faceta.

Ahora sí, pasaremos a la demostración del teorema en las siguientes dos subsecciones, demostrando la validez primero, y posteriormente la facetitud considerando las hipótesis adicionales.

## 4.4.1. Demostración de validez

Demostraremos por el absurdo. Supongamos  $z_f + x_{wc} + \sum_{k \in K \setminus \{v\}} x_{kc} + \sum_{k \in K'} x_{kc} \geq 3$ .

Al ser cuatro términos de una suma, cada uno de los cuales puede llegar a valer a lo sumo 1, intentaremos probar que no puede haber tres de esos términos distintos de 0 a la vez.

- Si  $\sum_{k \in K \setminus \{v\}} x_{kc} = 1$ :

En este caso, no podría haber vértices de  $K'$  coloreados con  $c$ , por lo que  $\sum_{k \in K'} x_{kc} = 0$ .

Deberíamos tener, entonces,  $x_{wc} = z_f = 1$ . Pero esto último implica que  $x_{vc}$  debería valer 1, es decir, que  $v$ , debería estar coloreado con  $c$ , y esto es un absurdo ya que es parte de la clique  $K$ .

- Si  $x_{wc} = 1$ :

Podemos dividir nuevamente en distintas posibilidades;

- Si  $\sum_{k \in K \setminus \{v\}} x_{kc} = 1$  estaríamos entonces en un caso similar al anterior, y por lo tanto no llegaríamos a sumar 3.
- Si tenemos  $\sum_{k \in K'} x_{kc} = 1$ , entonces como dichos vértices tienen algún vértice adyacente en  $f$ , no podríamos tener  $z_f = 1$ , y por lo tanto nuevamente no llegaríamos a sumar 3.



- Si asumimos  $z_f = 1$ , entonces tendríamos que tener todos los vértices de  $f$  coloreados con  $c$ , y no podríamos colorear ningún vértice de  $K'$  ni  $K$  con dicho color. Por lo tanto, tampoco llegaríamos a invalidar la desigualdad.
- Supongamos  $z_f = 1$ , con todos los vértices de  $f$  coloreados con  $d \in C \setminus \{c\}$  fijo (ya que si no estaríamos en el caso anterior):  
 Para sumar 3, necesitaríamos tener al menos un vértice de  $K \setminus \{v\}$  y un vértice de  $K'$  coloreados con  $c$ .  
 Esto no va a ser posible, ya que si hay algún vértice de una de las dos cliques, al ser  $K' \cup (K \setminus \{v\})$  una clique, no puede haber otro vértice del conjunto coloreado con  $c$ .
- Por último, si  $\sum_{k \in K'} x_{kc} = 1$ :  
 En este caso, no podríamos colorear con  $c$  a ningún vértice de  $K \setminus \{v\}$ , por ser adyacentes a los vértices de  $K'$ .  
 Por lo tanto, para llegar a sumar 3 necesitaríamos colorear a todos los vértices de  $f$  con  $c$ , y esto es imposible nuevamente por las hipótesis sobre  $k'$ .

Concluimos entonces que la desigualdad es válida.  $\square$

#### 4.4.2. Demostración de facetitud

Llamemos *igualdad de unión de cliques* a la igualdad inducida por la desigualdad con este nombre. Utilizando el mismo argumento que en el Teorema 4.2.1, fijaremos una igualdad genérica,  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ , con las dimensiones correspondientes, asumiendo como hipótesis que todas las soluciones que cumplen la igualdad de unión de cliques y además son soluciones factibles en el problema, cumplen esta desigualdad.

Trataremos de demostrar que esta igualdad no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo y de la igualdad de unión de cliques.

La demostración constará de dos partes: primero, demostraremos propiedades sobre  $\lambda$  y  $\mu$ , y por último, utilizando las mismas, concluiremos que la igualdad genérica en cuestión no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades mencionadas.

Empezaremos con algunas propiedades:

1.  $\mu_{f'} = 0, \forall f' \in \mathcal{F} \setminus \{f\}$  :

Fijemos  $f' \in \mathcal{F}$ ,  $f' \neq f$ , y un color  $d \in C$ ,  $d \neq c$ . Tomemos una solución factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen el color  $c$  ni el color  $d$  (recordemos que  $\mathcal{X}(G) + 1 < |C|$ ).

Formemos la solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f + e_{f'} \end{pmatrix}$  modificando el coloreo anterior para asignarle a los vértices de  $f$  el color  $c$ , y a los vértices de  $f'$  el color  $d$ .

Por último, modifiquemos  $w^1$  para formar  $w^2$  definida como  $w^2 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ . Notemos que ambas son soluciones factibles que cumplen por igualdad nuestra candidata a faceta. Por lo tanto, deben cumplir nuestra igualdad genérica  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \lambda^\top x^1 + \mu_f + \mu_{f'} &= \lambda_0 = \lambda^\top x^1 + \mu_f \iff \\ \mu_{f'} &= 0 \end{aligned}$$

$\diamond$

2.  $\lambda_{v'c} = \lambda_{v'd'} \forall d' \neq c, d' \in C, \text{ y } v' \notin f \cup K \cup K'$  :

Sean  $d, d' \in C, d \neq c$ , y  $v' \in V \setminus (f \cup K \cup K')$  fijos.

Formemos un coloreo factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $c$  ni  $d$ .

Separaremos en distintos casos:

- Si  $v'$  no tiene vértices adyacentes en  $f$ , podemos colorear con  $c$  a todos los vértices de  $f$  y a  $v'$ .
- Si  $v'$  tiene algún vecino en  $f$ :
  - Si existe  $k \in K \setminus \{v\}$  tal que  $kv' \notin E(G)$ , entonces podemos colorear  $k$  y  $v'$  con  $c$ , y los vértices de  $f$  con  $d$ .
  - Si  $v'$  es vecino de todos los vértices de  $K \setminus v$ : Como  $v' \notin K'$ , entonces debe existir otro vértice  $k' \in K'$  que no sea adyacente a  $v'$ . Podemos entonces formar una solución coloreando los vértices de  $f$  con  $d$ , y  $k'$  y  $v'$  con  $c$ .

Podemos ver que en cualquiera de los casos, formamos una solución factible que cumple por igualdad nuestra candidata a faceta.

Basta con formar  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$  con el coloreo en cuestión según el caso, y  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ e_f \end{pmatrix}$  solución idéntica a  $w^1$  pero coloreando a  $v'$  con  $d'$ .

Con estas dos soluciones, es trivial demostrar el ítem en cuestión.  $\diamond$

3.  $\lambda_{id} = \lambda_{id'} \forall i \in f \setminus \{w\} \forall d, d' \in C, d \neq d', d \neq c, d' \neq c$  :

Fijemos  $i \in f \setminus \{w\}$ , y  $d, d' \in C \setminus \{c\}$  distintos.

Tomemos una solución factible utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores, de forma tal que ni  $d$  ni  $c$  sean utilizados, e intercambiando colores de manera que  $i$  tenga asignado el color  $d'$ .

A continuación, podemos modificar dicha solución asignándole el color  $c$  a  $w$  y a un vértice  $k \in K$ . Esto último es posible dadas las hipótesis 1 y 3 del teorema de facetitud.

Con esto, obtendremos una primera solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  factible y que cumple la desigualdad de clique por igualdad.

Por último, formamos la solución  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  idéntica a  $w^1$  pero coloreando  $i$  con  $d$ . Con estas dos soluciones, podemos probar fácilmente el ítem en cuestión.  $\diamond$

4.  $\lambda_{v'c} = \lambda_{v'd'} \forall v' \in f \setminus \{w, v\}, \forall d' \in C, d' \neq c$  :

Fijemos  $v' \in f \setminus \{v, w\}$ , y  $d', d \in C \setminus \{c\}$  distintos.

Tomemos una solución factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $d'$  y  $c$ .

Luego, asignemos a  $w$  y  $v'$  el color  $c$ , y, tomando un vértice  $k \in K$ , tal que  $k$  no sea adyacente a  $v'$  (éste existe por hipótesis), coloreemos éste con  $c$ . Recordemos que por hipótesis  $w$  no es adyacente a ningún vértice de  $K$ .

Con este coloreo, podemos construir  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ . Por último, formemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  una solución idéntica a  $w^1$  pero intercambiando el color de  $v'$  por  $d'$ .

Notemos que, tanto  $w^1$  como  $w^2$  cumplen la igualdad de unión de cliques y son soluciones factibles en el modelo. Por lo tanto, deben cumplir la igualdad genérica. Igualando ambas partes izquierdas de la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda^\top x^1 + \mu^\top \hat{0} &= \lambda^\top x^2 + \mu^\top \hat{0} \iff \\ \lambda^\top x^1 &= \lambda^\top x^2 \iff \\ \lambda_{v'c} &= \lambda_{v'd'}\end{aligned}$$

◇

5.  $\lambda_{vc} = \lambda_{vd} \forall d \in C, d \neq c$ :

Fijemos  $d \in C \setminus \{c\}$ . Tomemos una solución factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $c$  ni  $d$ .

Sea  $k' \in K'$  tal que no es vecino de  $w$  (existe por hipótesis). Coloreemos  $v, w$  y  $k'$  con  $c$ . Con esta solución, formemos  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$ .

Por último, formemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  tomando  $w^1$  e intercambiando el color de  $v$  por  $d$ .

Utilizando estas dos soluciones, podemos probar el ítem en cuestión.

◇

6.  $\lambda_{ud} = \lambda_{ud'} \forall u \in K', d, d' \in C \setminus \{c\}$ :

Fijemos  $u \in K'$ , y  $d, d' \in C \setminus \{c\}$  distintos (si no, el ítem es trivial).

Tomemos una solución factible utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $c$  ni  $d$ , e intercanbemos la asignación de forma tal que a  $u$  le quede asignado el color  $d'$ .

Luego, formemos  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$  modificando dicho coloreo de forma tal que a todos los vértices de  $f$  se les asigne el color  $c$ .

Por último, formemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ e_f \end{pmatrix}$  similar a  $w^1$  pero intercambiando el color de  $u$  por  $d$ .

Notemos que tanto  $w^1$  como  $w^2$  cumplen la igualdad de unión de cliques. Utilizando las mismas y el hecho de que ambas cumplen dicha igualdad, podemos probar el ítem en cuestión.

◇

7.  $\lambda_{ud} = \lambda_{ud'} \forall u \in K \setminus \{v\}$ :

Omitiremos esta demostración ya que es muy similar a la del ítem anterior.

◇

8.  $\mu_f + \lambda_{wd} = \lambda_{wc} \forall d \in C \setminus \{c\}$ :

Fijemos  $d \in C \setminus \{c\}$ . Tomemos un coloreo factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $d$  ni  $c$ .

Luego, coloreemos los vértices de  $f$  con  $d$ , y un vértice  $k \in K \setminus \{v\}$  con  $c$ .

Notemos que esta solución es factible, y además cumple la desigualdad de unión de cliques por igualdad. Denotémosla  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ .

Por último, intercambiamos el color de  $w$  por  $c$ . Definamos esta solución como  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  y notemos que también cumple la desigualdad de unión de cliques por igualdad.

Como ambas soluciones además deben cumplir la igualdad genérica, es sencillo obtener  $\mu_f + \lambda_{wd} = \lambda_{wc}$ .  $\diamond$

9.  $\lambda_{k'c} + \lambda_{kd} = \lambda_{kc} + \lambda_{k'd} \forall k' \in K', k \in K \setminus \{v\}$  :

Fijemos  $k' \in K'$ ,  $k \in K \setminus \{v\}$ , y  $d, d', d'' \in C \setminus \{c\}$  colores distintos. Notemos que, como  $|K| \geq 2$ , y suponemos  $|C| > \mathcal{X}(G) + 1$ , existen al menos cuatro colores distintos.

Tomemos una solución factible utilizando  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $c$  ni  $d$ , e intercambiamos colores de forma tal que a  $k$  le quede asignado el color  $d''$ , y  $k'$  tenga asignado el color  $d'$ . Podemos asumir que ambos vértices tenían colores distintos en la solución inicial dado que  $kk' \in E(G)$ .

Modifiquemos el coloreo asignándole a los vértices de  $f$  el color  $d$ , y a  $k'$  el color  $c$ . Con esto, formamos la solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ . Notemos que cumple la igualdad de clique.

Por último, formemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  tomando como base el coloreo de  $x^1$ , e intercambiando el color de  $w$  por  $c$ , el color de  $k'$  por  $d'$  (el que tenía en un principio), y cambiando el color de  $k$  por  $c$ .

Notemos que ambas soluciones cumplen por igualdad la desigualdad de clique.

Tenemos entonces:

$$\lambda_{k'c} + \mu_f + \lambda_{wd} + \lambda_{kd''} = \lambda_{wc} + \lambda_{kc} + \lambda_{k'd'}$$

Aplicando el ítem 8, tenemos:

$$\lambda_{k'c} + \lambda_{kd''} = \lambda_{kc} + \lambda_{k'd'}$$

Finalmente, por el ítem 6, tenemos que  $\lambda_{k'd'} = \lambda_{k'd}$ :

$$\lambda_{k'c} + \lambda_{kd} = \lambda_{kc} + \lambda_{k'd}$$

Y con este último paso obtenemos lo que queríamos probar.  $\diamond$

10.  $\mu_f + \lambda_{kd} = \lambda_{kc} \forall k \in K \setminus \{v\}$  :

Fijemos  $k \in K \setminus \{v\}$ , y  $d \in C \setminus \{c\}$ . Tomemos un coloreo factible con  $\mathcal{X}(G)$  colores, tal que no se utilicen los colores  $c$  ni  $d$ .

Modifiquemos dicho coloreo asignándole el color  $c$  a todos los vértices de  $f$ , y el color  $d$  a  $k$ .

Formemos con este coloreo nuestra primera solución  $w^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ e_f \end{pmatrix}$ .

Por último, formemos  $w^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \hat{0} \end{pmatrix}$  que modifica  $w^1$  coloreando todos los vértices de  $f \setminus \{w\}$  con  $d$ , y a  $k$  con  $c$ .

Nos queda entonces:

$$\mu_f + \sum_{u \in f \setminus \{w\}} \lambda_{uc} + \lambda_{kd} = \sum_{u \in f \setminus \{w\}} \lambda_{ud} + \lambda_{kc}$$

Aplicando el ítem 4, tenemos que  $\lambda_{uc} = \lambda_{ud}$  para todo  $u \in f \setminus \{v, w\}$ . Por lo tanto, podemos cancelar todos los factores de la sumatoria del segundo término salvo en el sumando proveniente del vértice  $v$ :

$$\mu_f + \lambda_{vc} + \lambda_{kd} = \lambda_{vd} + \lambda_{kc}$$

Por ítem 5, tenemos que  $\lambda_{vc} = \lambda_{vd}$ . Por lo tanto, nos queda:

$$\mu_f + \lambda_{kd} = \lambda_{kc}$$

Que era lo que queríamos probar. Además, si utilizamos el ítem 9, podemos sumar la propiedad adicional:

$$\mu_f + \lambda_{k'd} = \lambda_{k'c} \quad \forall k' \in K'$$

◇

Habiendo encontrado propiedades sobre la igualdad genérica, desarrollaremos la misma para poder demostrar que es combinación lineal de las igualdades del modelo y de la igualdad inducida por la desigualdad que estamos analizando.

Comenzaremos desarrollando la multiplicación vectorial:

$$\begin{aligned} \lambda^T x + \mu_f z &= \lambda_0 \iff \\ \sum_{i \in V} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f z_f &= \lambda_0 \end{aligned}$$

Aplicando el ítem 1, tenemos:

$$\sum_{i \in V} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Ahora bien, separaremos en distintas sumatorias según si  $i \in K \setminus \{v\}$ ,  $i \in f$ ,  $i \in K'$  o  $i \in V \setminus \{K \cup f \cup K'\}$ :

$$\sum_{i \in V \setminus (K \cup f \cup K')} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in K \setminus \{v\}} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in K'} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in f} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id} + \mu_f z_f = \lambda_0$$

Desarrollaremos cada término de la parte izquierda de la igualdad por separado, para demostrar que no son otra cosa que combinaciones lineales de las partes izquierdas de las igualdades del modelo y de la igualdad de clique en cuestión. Como la parte derecha en todos los casos es una constante, nos quedará definido unívocamente  $\lambda_0$ .

1) Primero fijemos  $d_1 \in C \setminus \{c\}$ , ya que lo utilizaremos más adelante en las demostraciones.

Comencemos por el primer término:

$$\sum_{i \in V \setminus (K \cup f \cup K')} \sum_{d \in C} \lambda_{id} x_{id}$$

Si aplicamos el ítem 2, tenemos que  $\lambda_{ic} = \lambda_{id}$  para cualquier  $d \in C$ , e  $i \in V \setminus (K \cup f \cup K')$ . Por lo tanto, nos queda:

$$\sum_{i \in V \setminus (K \cup f \cup K')} \lambda_{ic} \sum_{d \in C} x_{id}$$

Notemos que esto no es otra cosa que una combinación lineal del lado izquierdo de las igualdades del modelo. Notemos este término con **(1)**.

2) Desarrollemos ahora el segundo término.:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K \setminus \{v\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} = \\ & \sum_{i \in K \setminus \{v\}} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in K \setminus \{v\}} \sum_{d \in C, d \neq c} \lambda_{id} x_{id} \end{aligned}$$

Aplicando el ítem 7, podemos hacer factor común  $\lambda_{id_1}$  en la segunda sumatoria:

$$\sum_{i \in K \setminus \{v\}} (\lambda_{ic} - \lambda_{id_1}) x_{ic} + \sum_{i \in K \setminus \{v\}} \lambda_{id_1} \sum_{d \in C} x_{id}$$

Podemos ver que el segundo término no es otra cosa que una combinación lineal del lado izquierdo de las igualdades del modelo. Notamos este término con **(2)**:

$$\sum_{i \in K \setminus \{v\}} (\lambda_{ic} - \lambda_{id_1}) x_{ic} + \textbf{(2)}$$

Por último, aplicando el ítem 10 obtenemos:

$$\sum_{i \in K \setminus \{v\}} \mu_f x_{ic} + \textbf{(2)}$$

3) Desarrollemos ahora el tercer término:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K'} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} = \\ & \sum_{i \in K'} \sum_{d \neq c} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in K'} \lambda_{ic} x_{ic} \end{aligned}$$

Aplicando el ítem 6, tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K'} \lambda_{id_1} \sum_{d \neq c} x_{ic} + \sum_{i \in K'} \lambda_{ic} x_{ic} = \\ & \sum_{i \in K'} \lambda_{id_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \sum_{i \in K'} (\lambda_{ic} - \lambda_{id_1}) x_{ic} \end{aligned}$$

Notemos que el primer término es una combinación lineal del lado izquierdo de algunas de las igualdades del modelo. Notaremos este término con **(3)**:

$$\textbf{(3)} + \sum_{i \in K'} (\lambda_{ic} - \lambda_{id_1}) x_{ic}$$

Aplicando la propiedad dada al final del ítem 10, tenemos que  $\mu_f = \lambda_{ic} - \lambda_{id_1}$ , con  $i \in K'$ . Nos queda como resultado:

$$\textbf{(3)} + \sum_{i \in K'} \mu_f x_{ic}$$

4) Por último, miremos el cuarto término del lado izquierdo de la igualdad:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in f \setminus \{w, v\}} \sum_{c' \in C} \lambda_{ic'} x_{ic'} = \\ & \sum_{i \in f \setminus \{w, v\}} \sum_{c' \in C} \lambda_{ic'} x_{ic'} + \lambda_{wc} x_{wc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{wd} x_{wd} + \lambda_{vc} x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd} x_{vd} \end{aligned}$$

Aplicando los ítems 3 y 4:

$$\sum_{i \in f \setminus \{w, v\}} \lambda_{ic} \sum_{c' \in C} x_{ic'} + \lambda_{wc} x_{wc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{wd} x_{wd} + \lambda_{vc} x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd} x_{vd}$$

Notemos que el término  $\sum_{i \in f \setminus \{w,v\}} \lambda_{ic} \sum_{c \in C} x_{ic}$  es una combinación lineal de la parte izquierda de las igualdades del modelo. Notaremos este término con (4):

$$(4) + \lambda_{wc}x_{wc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{wd}x_{wd} + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd}$$

Aplicando el ítem 8, tenemos  $\lambda_{wd} = \lambda_{wc} - \mu_f$  para todo  $d \in C \setminus \{c\}$ :

$$\begin{aligned} (4) + \lambda_{wc}x_{wc} + \sum_{d \neq c} (\lambda_{wc} - \mu_f)x_{wd} + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd} = \\ (4) + \sum_{d \neq c} (-\mu_f)x_{wd} + \lambda_{wc} \sum_{d \in C} x_{wd} + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd} \end{aligned}$$

Notaremos al término  $\lambda_{wc} \sum_{c \in C} x_{wd}$  con (5), ya que es multiplicar por  $\lambda_{wc}$  a una de las igualdades del modelo, si además consideramos el lado derecho de la igualdad.

Utilizaremos, además, el hecho de que  $\sum_{d \neq c} x_{wd} = 1 - x_{wc}$ :

$$\begin{aligned} (4) + (5) + (-\mu_f)(1 - x_{wc}) + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd} = \\ (4) + (5) - \mu_f + \mu_f x_{wc} + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd} \end{aligned}$$

Omitiremos el término  $\mu_f$  ya que al ser una constante, pasaría a formar parte del lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned} (4) + (5) + \mu_f x_{wc} + \lambda_{vc}x_{vc} + \sum_{d \neq c} \lambda_{vd}x_{vd} = \\ (4) + (5) + \mu_f x_{wc} + \lambda_{vc}x_{vc} + \lambda_{vd_1} \sum_{d \neq c} x_{vd} = \\ (4) + (5) + \mu_f x_{wc} + (\lambda_{vc} - \lambda_{vd_1})x_{vc} + \lambda_{vd_1} \sum_{d \in C} x_{vd} \end{aligned}$$

Al igual que antes, notemos el término  $\lambda_{vd_1} \sum_{c \in C} x_{vd}$ , multiplicación del lado izquierdo de una de las igualdades del modelo, como (6):

$$(4) + (5) + (6) + \mu_f x_{wc} + (\lambda_{vc} - \lambda_{vd_1})x_{vc}$$

Utilizando el ítem 5, nos queda:

$$(4) + (5) + (6) + \mu_f x_{wc}$$

Ahora bien, si unificamos todos los términos, reescribamos la igualdad:

$$\begin{aligned} (1) + \sum_{i \in K \setminus v} \mu_f x_{ic} + (2) + (3) + \sum_{i \in K'} \mu_f x_{ic} + (4) + (5) + (6) + \mu_f x_{wc} + \mu_f z_f = \lambda_0 + \mu_f \iff \\ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + \sum_{i \in K'} \mu_f x_{ic} + \sum_{i \in K \setminus v} \mu_f x_{ic} + \mu_f x_{wc} + \mu_f z_f = \lambda_0 + \mu_f \iff \\ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + \mu_f \left( \sum_{i \in K'} x_{ic} + \sum_{i \in K \setminus v} x_{ic} + x_{wc} + z_f \right) = \lambda_0 + \mu_f \end{aligned}$$

Con este último paso, demostramos que la desigualdad genérica que teníamos al principio no es otra cosa que una combinación lineal de las igualdades del modelo y la igualdad de clique, y con eso concluimos en que la desigualdad de clique induce una faceta de nuestro polítopo.  $\square$

## 4.5. Desigualdades Clique-Cursos

Sean  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$ . Definimos como  $G_{\mathcal{F}}$  al grafo construido a partir de contraer los nodos de cada curso  $f$  en un único vértice  $v_f$ , unificando también todas sus aristas. Es decir, dado un eje  $ij \in E(G)$ , tal que  $i \in f_i, j \in f_j$ , entonces en  $G_{\mathcal{F}}$  tendremos un eje  $ij$  entre  $v_{f_i}$  y  $v_{f_j}$ . Además, si hay más de una arista entre  $f_i$  y  $f_j$ , igualmente habrá una única arista entre  $v_{f_i}$  y  $v_{f_j}$ .

Llamaremos *clique de cursos* a una clique del grafo  $G_{\mathcal{F}}$ .

Antes de proseguir, daremos un ejemplo de estos conceptos.

### Ejemplo 4.5.1

Tomemos el siguiente grafo  $G$ :

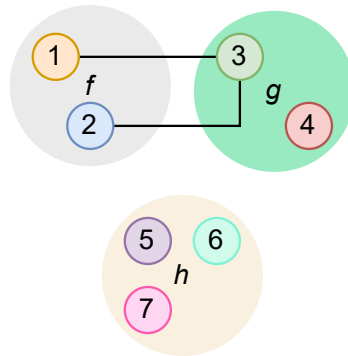


Fig. 4.4: Grafo  $G$  que representa a 3 cursos,  $f$ ,  $g$  y  $h$  respectivamente, y 7 clases.

Para éste, el grafo  $G_{\mathcal{F}}$  sería de la siguiente manera:

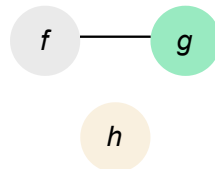


Fig. 4.5: Grafo  $G_{\mathcal{F}}$  cuyos vértices representan los cursos del grafo  $G$ .

Notemos que tenemos una *clique de cursos* entre  $f$  y  $g$ .

### Definición 4.5.1

Sean  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$  tal que  $v_{f_1}, \dots, v_{f_k}$  forman una clique de tamaño  $k \in \mathbb{N}$  en  $G_{\mathcal{F}}$ . Fijemos  $i_1, \dots, i_k$  tal que  $i_j \in f_j$ .

A su vez, sea  $D \subset C$  tal que  $|D| = |C| - (k - 1)$ .

Definiremos la desigualdad de clique-curso de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^k z_{f_j} \leq k - 1 + \sum_{d \in D} \sum_{j=1}^k x_{i_j d} \quad \text{Desigualdad de Clique-Curso}$$



**Teorema 4.5.1**

Las desigualdades de cursos son válidas. Más aún, si se cumplen las siguientes condiciones, entonces esta desigualdad define una faceta de  $\mathcal{P}_{HMC}(G, H, C)$ :

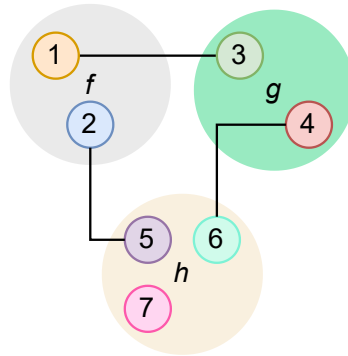
1. Existe una solución factible del problema utilizando una cantidad menor o igual a  $|C| - 2$  colores, tal que  $z_{f_1} = \dots = z_{f_k} = 1$  y
2. Para todo vértice  $v \in f_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , existe  $l \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$  tal que  $v$  no tiene vecinos en  $f_l$ .

A continuación, examinaremos un ejemplo sencillo con el objetivo de facilitar el entendimiento de las condiciones necesarias para que la desigualdad induzca una faceta.

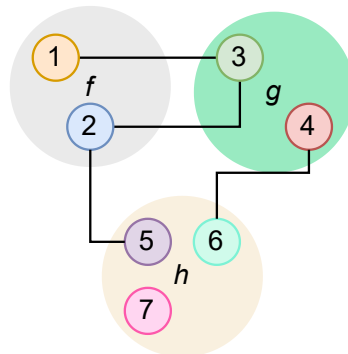
## Ejemplo 4.5.2

En el siguiente ejemplo, podemos ver que los cursos  $f, g$  y  $h$  inducirían una *clique de cursos* de tamaño 3. En este caso, tendríamos que la desigualdad clique-cursos aplicada a éstos, induciría una faceta si contáramos con al menos cinco colores.

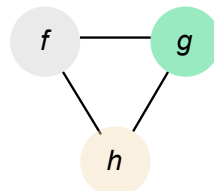
Podemos ver que por cada vértice hay un curso (aparte del propio) con el cual dicho vértice no tiene vecinos.

Fig. 4.6: Grafo  $G$  con 3 cursos,  $f$ ,  $g$  y  $h$ .

Por el contrario, el siguiente es un ejemplo de un grafo  $G$  que define una *clique de cursos* de tamaño 3. Sin embargo, no cumple las condiciones que aseguran que induzca una faceta, independientemente de la cantidad de colores disponibles. Esto es debido a que hay vértices adyacentes al número 2 pertenecientes a todos los otros cursos.

Fig. 4.7: Grafo  $G$  con 3 cursos y 7 vértices.

En ambos casos, la clique de cursos que se forma es la siguiente:

Fig. 4.8: Grafo  $G_{\mathcal{F}}$  cuyos vértices representan los cursos del grafo  $G$ .

Comenzaremos demostrando la validez. Luego, asumiendo las hipótesis adicionales, demostraremos la facetitud.

### 4.5.1. Demostración de validez:

Supongamos que tenemos una solución factible con  $\sum_{j=1}^k z_{f_j} > k - 1 + \sum_{d \in D} \sum_{j=1}^k x_{i_j d}$ .

Dado que  $\sum_{j=1}^k z_{f_j} \leq k$ , necesariamente tendría que valer  $\sum_{d \in D} \sum_{j=1}^k x_{i_j d} = 0$ , ya que de otra forma sería imposible una desigualdad estricta.

Esto implica que los vértices  $i_1, \dots, i_k$  están coloreados únicamente utilizando colores de  $C \setminus D$ . Ahora bien,  $|C \setminus D| = k - 1$ . Por lo tanto, deberíamos tener al menos dos vértices,  $i_{j_1}$  e  $i_{j_2}$  coloreados con el mismo color.

Por otra parte, para que se cumpla la desigualdad, otra condición necesaria es que  $\sum_{j=1}^k z_{f_j} = k$ , es decir, tengamos todos los  $z_{f_j}$  encendidos.

A su vez, teníamos que los cursos formaban una clique, es decir que, si tuviéramos todos los  $z_{f_1}, \dots, z_{f_k}$  encendidos, habría dos vértices de los cursos  $f_{j_1}$  y  $f_{j_2}$  que serían adyacentes y tendrían el mismo color. Por lo tanto, tenemos un absurdo.  $\square$

### 4.5.2. Demostración de facetitud

Llamaremos *igualdad de clique-cursos* a la igualdad inducida por la desigualdad con este nombre. Comenzaremos probando el siguiente lema:

#### Lema 4.5.1

Dados  $D \subseteq C$ , y  $f_1, \dots, f_k$  acordes a la definición previa, si existe una solución factible al problema de coloreo de máximo impacto en hipergrafos, tal que todos los  $z_{f_1}, \dots, z_{f_k}$  estén encendidos, y además hayan al menos dos colores sin utilizar, entonces existe una solución factible que cumple por igualdad la desigualdad de cursos, donde  $z_{f_1} = \dots = z_{f_k} = 1$ , y al menos dos colores  $d_1, d_2 \in D$  están sin utilizar.

*Demostración.* Supongamos una solución factible con dos colores sin utilizar, tal que  $z_{f_1}, \dots, z_{f_k} = 1$ .

Luego, intercambiamos colores de forma tal que a los vértices de  $f_1$  les quede asignado el color  $c_1$ , donde  $C \setminus D = \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$ . Esto es posible ya que únicamente tendríamos que intercambiar el color que ya tienen asignados los vértices de  $f_1$  por los que tengan asignado  $c_1$ . Si ningún vértice tenía asignado dicho color, simplemente no le asignaremos a ningún vértice el color previo de  $f_1$ .

Notemos que este intercambio no modifica que el coloreo sea factible, ni tampoco la condición de que hayan dos colores sin utilizarse.

Podemos continuar repitiendo el proceso, intercambiando el color de los vértices de  $f_2$  por  $c_2$ , y  $f_3$  por  $c_3$ , e ir siguiendo hasta tener los vértices de  $f_{k-1}$  asignados con el color  $c_{k-1}$ . Notemos que al ser  $\{f_1, \dots, f_k\}$  una clique de cursos, necesariamente en el coloreo original deben haber sido asignados colores distintos para cada  $f_i$ .

Tenemos, al igual que antes, dos colores que ningún vértice está utilizando. Ahora bien, sabemos por el proceso que utilizamos para construir la solución que estamos utilizando todos los colores de  $C \setminus D$ , por lo tanto, los dos colores sobrantes deben pertenecer a  $D$ .

Por otra parte, partimos de la hipótesis de una solución con todos los  $z_f$  encendidos. Por lo tanto, los vértices de  $f_k$  deben estar asignados todos al mismo color, que por la construcción que hicimos de la solución, debe pertenecer a  $D$ .

De esta forma, mirando la desigualdad clique-cursos para este caso, tenemos:

$$k = \sum_{j=1}^k z_{f_j} \leq k - 1 + \sum_{d \in D} \sum_{j=1}^k x_{i_j d} = k$$

Por lo tanto esta solución cumple la desigualdad por igualdad.  $\square$

Notemos que las condiciones para poder aplicar el lema anterior componen la hipótesis 1 del Teorema 4.5.1. Por ende, podremos aplicar este lema en la demostración de facetitud para obtener una solución que cumpla con las características mencionadas en el mismo. Llamaremos a esta solución  $w$ , y a los colores sin utilizar  $d_1 \in D$  y  $d_2 \in D$ .

Teniendo en cuenta este lema, demostraremos ahora la facetitud. Utilizando el mismo argumento que en el Teorema 4.2.1, fijaremos una igualdad genérica,  $\lambda^\top x + \mu^\top z = \lambda_0$ , con las dimensiones correspondientes, asumiendo como hipótesis que todas las soluciones que cumplen la igualdad clique-cursos y además son soluciones factibles en el problema, cumplen esta desigualdad.

La demostración constará de dos partes: primero, demostraremos propiedades sobre  $\lambda$  y  $\mu$ , y por último, utilizando las mismas, concluiremos que la igualdad genérica en cuestión no puede ser otra cosa que combinación lineal de las igualdades del modelo y de la igualdad clique-cursos.

*Demostración.* Comenzaremos con las propiedades:

1.  $\mu_{f'} = 0 \ \forall f' \in \mathcal{F}, f' \neq f_1, \dots, f_k :$

Tomemos la solución del lema  $w$ , con  $d_1, d_2 \in D$  los colores que no son utilizados por ningún vértice.

Utilicemos el color  $d_1$  para colorear todos los vértices de  $f'$ , y formemos la solución  $w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sum_{j=1}^k e_{f_j} \end{pmatrix}$  con dicho coloreo.

Por último, formemos la solución  $w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ e_{f'} + \sum_{j=1}^k e_{f_j} \end{pmatrix}$ .

Como ambas soluciones cumplen la igualdad de clique-cursos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda^\top x_1 + \mu^\top \sum_{j=1}^k e_{f_j} &= \lambda^\top x_1 + \mu^\top (e_{f'} + \sum_{j=1}^k e_{f_j}) \iff \\ \mu^\top \sum_{j=1}^k e_{f_j} &= \mu^\top (e_{f'} + \sum_{j=1}^k e_{f_j}) \iff \\ \sum_{j=1}^k \mu_{f_j} &= \mu_{f'} + \sum_{j=1}^k \mu_{f_j} \iff \\ 0 &= \mu_{f'} \end{aligned}$$

$\diamond$

2.  $\lambda_{i_j c} = \lambda_{i_j d} + \mu_{f_j} \ \forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall c \in C \setminus D, \forall d \in D :$

Sea  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $d \in D$ ,  $c \in C \setminus D$  fijos.

Tomemos la solución  $w$  del lema. Notemos que en la misma, se utilizan dentro de la clique de cursos todos los colores de  $C \setminus D$ , y además un color  $d' \in D$ , para uno de los cursos. Podemos, como paso preliminar, intercambiar colores de forma tal que dicho curso sea  $f_j$ , y además quede coloreado con  $d$ , sin romper la factibilidad de la solución. Los restantes cursos  $f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_k$  quedarán asignados con colores en  $C \setminus D$ . Por otra parte, llamaremos nuevamente  $d_1$  y  $d_2$  a los dos colores que quedaron sin utilizar.

A su vez, sea  $i_p \in \{i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k\}$ , tal que no es vecino de  $i_j$  (este vértice existe por la segunda hipótesis del teorema). Intercambiamos colores de forma tal que  $i_p$  quede asignado con el color  $c$ . A los vértices fuera de la clique asignados con color  $c$ , los coloreamos con  $d_1$ .

Llamemos a esta solución, que cumple la igualdad clique-curso y además es factible,  $w_1 = \left( \begin{smallmatrix} x_1 \\ \sum_{j=1}^k e_{f_j} \end{smallmatrix} \right)$ .

Por último, construyamos  $w_2$  con  $x_2$  idéntico a  $x_1$ , pero coloreando a  $i_j$  con  $c$ . Tenemos, por lo tanto,  $w_2 = \left( \begin{smallmatrix} x_2 \\ \sum_{m=1, m \neq j}^k e_{f_m} \end{smallmatrix} \right)$ . Notemos que colorear de esta forma no anula la igualdad, ya que tendremos  $k - 1 = \sum_{m=1}^k z_{f_m} = \sum_{m=1}^k \lambda_{i_j c} = \lambda_{i_j d} + \mu_{f_j}$ .  $\diamond$

**3.  $\lambda_{id} = \lambda_{ic} \forall i \in V, i \notin f_1 \cup \dots \cup f_k, \forall d \in D, \forall c \in C \setminus D$ :**

Sean  $i \in V \setminus \{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $c \in C \setminus D$ ,  $d \in D$  fijos.

Tomamos la solución del lema,  $w$ , e intercambiamos colores de forma tal que no se utilicen los colores  $d$  ni  $d_1$ . Como  $i$  no pertenece a  $f_1, \dots, f_k$ , esto significa que existe un curso en la clique de cursos, tal que  $i$  no es vecino de ningún vértice de éste, dado que la clique de cursos es maximal en  $G_{\mathcal{F}}$ . Fijemos dicho curso como  $f_j$ .

Como la solución del lema cumple la igualdad clique-cursos, podemos asumir que, incluso luego de intercambiar los colores de la forma descrita, habrá un único curso de  $\{f_1, \dots, f_k\}$  asignado a un color de  $D$ , mientras que los restantes tendrán asignados colores en  $C \setminus D$ .

Intercambiaremos colores de tal manera que los vértices de  $f_j$  tengan asignado el color  $c$ . Esta será nuestra solución  $w_1 = \left( \begin{smallmatrix} x_2 \\ \sum_{m=1}^k e_{f_m} \end{smallmatrix} \right)$ . Notemos que esta solución cumple la igualdad clique-curso, ya que seguiremos teniendo un único curso asignado con un color perteneciente a  $D$ , y por lo tanto nos queda  $k = \sum_{m=1}^k z_{f_m} = k - 1 + \sum_{d \in D} \sum_{m=1}^k x_{i_m d} = k - 1 + 1$ .

Por último, podemos intercambiar el color de  $i$  por  $d$  para construir  $w_2 = \left( \begin{smallmatrix} x_2 \\ \sum_{m=1}^k e_{f_m} \end{smallmatrix} \right)$ . Dado que tanto  $w_1$  como  $w_2$  cumplen la igualdad clique-cursos, podemos probar la afirmación en cuestión.  $\diamond$

**4.  $\lambda_{ic} = \lambda_{id'}, \forall c \in C \setminus D, \forall d' \in D, \forall i \in f_j, i \neq i_j, j = 1, \dots, k$ :**

Fijemos  $d, d', d'' \in D$ ,  $c \in C \setminus D$ ,  $i \in f_j \setminus \{i_j\}$ . Notemos que existen al menos tres colores en  $D$ , ya que un color se utiliza para colorear uno de los cursos en la solución  $w$  del lema, y otros dos colores quedan sin utilizarse en la misma solución.

Sean  $f_{n'}$  y  $f_n$  los cursos tales que  $i_j$  no tiene vecinos en  $f_{n'}$ , e  $i$  no tiene vecinos en  $f_n$ .

Seguiremos los siguientes pasos:

- I. Tomemos la solución  $w$  del lema e intercambiamos colores de forma tal que  $d''$  y  $d'$  queden sin utilizarse.
- II. Intercambiemos colores con el objetivo de asignarle a  $f_n$  el color  $c$ . Por la construcción de la solución  $w$ , existía algún curso de  $\{f_1, \dots, f_k\}$  cuyos vértices estaban coloreados con  $c$ , por lo tanto este paso será simplemente intercambiar los colores entre dos de los cursos, y también entre el resto de los vértices que tengan asignados estos colores.
- III. Sea  $f_m \in \{f_1, \dots, f_k\}$  el curso que está asignado con un color  $d_1 \in D$ . Podemos intercambiar colores de forma tal que sea  $d$  el color de dicho curso.
- IV. Luego, intercambiamos el color de los vértices de  $f_j$  por el color de los vértices de  $f_m$ .
- V. Luego, intercambiamos el color de  $i_j$  por el color  $c_1 \in C$  tal que  $c_1$  está asignado a  $f_{n'}$ . Para no perder la factibilidad del coloreo al asignarle a  $i_j$  dicho color, si existían vértices fuera de la clique coloreados con  $c_1$ , los coloreamos con  $d''$ .

VI. Por último, si existían vértices fuera de la clique coloreados con  $c$ , los coloreamos con  $d'$ .

Esta será nuestra solución  $w_1 = \left( \begin{matrix} x_1 \\ \sum_{l=1, l \neq j}^k e_{f_l} \end{matrix} \right)$ . Notemos que se sigue cumpliendo la igualdad clique-cursos, ya que tenemos:

$$k - 1 = \sum_{j=1}^k z_{f_j} \leq k - 1 + \sum_{d \in D} \sum_{j=1}^k x_{i_j d} = k - 1$$

VII. Por último, formamos una nueva solución  $w_2$  con  $x_2$  igual a  $x_1$ , pero coloreando  $i$  con  $c$ .

De esta forma, utilizando la igualdad genérica e igualando la misma con  $w_1$  y  $w_2$ , tenemos el resultado deseado.

A continuación, incluiremos una serie de gráficos con el objetivo de facilitar el entendimiento del razonamiento anterior. Tomando un ejemplo, si partimos desde el paso III, tendríamos esta primera figura:

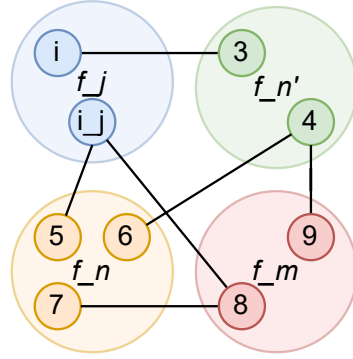


Fig. 4.9: Grafo  $G$  que representa a cuatro cursos,  $f_j$ ,  $f_n$ ,  $f_{n'}$  y  $f_m$  respectivamente, y 9 clases, entre las cuales están  $i_j$  e  $i$ .

Donde el color rojo representaría el color  $d$ , y el color naranja corresponde a  $c$ .

Luego, en el paso IV, intercambiamos los colores de  $f_j$  por los de  $f_m$ , y nos queda lo siguiente:

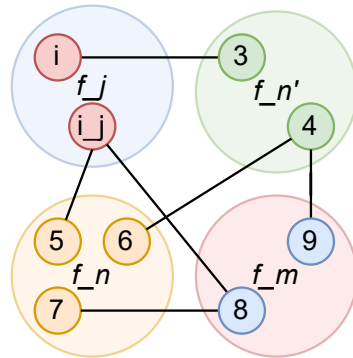


Fig. 4.10: Grafo  $G$  que representa a cuatro cursos,  $f_j$ ,  $f_n$ ,  $f_{n'}$  y  $f_m$  respectivamente, y 9 clases, entre las cuales están  $i_j$  e  $i$ . Se describe cómo los vértices de  $f_j$  y  $f_m$  intercambiaron colores.

En el paso V, intercambiamos el color de  $i_j$  por el de  $f_{n'}$ . Tomando al color verde como  $c_1$ , nos queda graficamente:

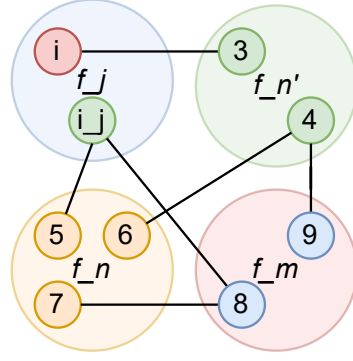


Fig. 4.11: Grafo  $G$  que representa a cuatro cursos,  $f_j$ ,  $f_n$ ,  $f_{n'}$  y  $f_m$  respectivamente, y 9 clases, entre las cuales están  $i_j$  e  $i$ . El color de  $i_j$  es el mismo que el de los vértices pertenecientes a  $f_{n'}$ .

Esta sería, en este caso, nuestra solución  $w_1$ . Por último, la solución  $w_2$  se vería de la siguiente forma:

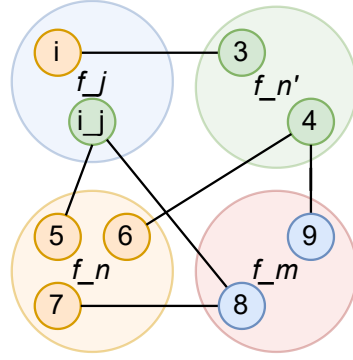


Fig. 4.12: Grafo  $G$  que representa a cuatro cursos,  $f_j$ ,  $f_n$ ,  $f_{n'}$  y  $f_m$  respectivamente, y 9 clases, entre las cuales están  $i_j$  e  $i$ . El color de  $i$  es el mismo que el de los vértices pertenecientes a  $f_n$ .

◇

$$5. \lambda_{i_j d} + \lambda_{i_m c} = \lambda_{i_m d} + \lambda_{i_j c} \quad \forall j, m \in \{1, \dots, k\}, d \in D, c \in C \setminus D :$$

Fijemos  $j, m \in \{1, \dots, k\}$  distintos, y los colores  $c \in C \setminus D$ ,  $d \in D$ .

Tomemos la solución del lema, e intercambiamos colores de forma tal que los vértices de  $f_j$  tengan asignado el color  $d$ , y los vértices de  $f_m$  tengan asignado el color  $c$ . Esto es posible ya que sabemos que al menos un curso de  $\{f_1, \dots, f_k\}$  debe tener un color de  $D$  asignado. Por otra parte, fijemos  $d_1, d_2 \in D$  colores que ningún vértice utilice.

Primero, vamos a intercambiar el color de todos los vértices por fuera de  $\{f_1, \dots, f_k\}$  que tengan asignado el color  $c$ , con  $d_1$ , y todos los que tengan asignado el color  $d$  con  $d_2$ . Una vez hecho esto, ésta será nuestra solución  $w_1 = \begin{pmatrix} x \\ \sum_{m=1}^k e_{f_m} \end{pmatrix}$ . Por último, intercambiamos los colores de  $f_m$  y  $f_j$ . De esta forma, todos los vértices de  $f_j$  quedan asignados con el color  $c$ , y los vértices de  $f_m$  quedan asignados con el color  $d$ . Con este cambio, formamos la solución  $w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sum_{m=1}^k e_{f_m} \end{pmatrix}$ .

Notemos que ambas soluciones cumplen las restricciones del modelo y la igualdad *clique-cursos*. Utili-

zando que entonces ambas soluciones deben cumplir con la igualdad genérica, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda^\top x_1 + \mu^\top z &= \lambda^\top x_2 + \mu^\top z \iff \\ \lambda^\top x_1 &= \lambda^\top x_2 \iff \\ \sum_{i \in f_m} \lambda_{id} + \sum_{i \in f_j} \lambda_{ic} &= \sum_{i \in f_m} \lambda_{ic} + \sum_{i \in f_j} \lambda_{id}\end{aligned}$$

Ahora bien, si utilizamos el ítem 4, tenemos que  $\sum_{i \in f_m \setminus \{i_m\}} \lambda_{id} = \sum_{i \in f_m \setminus \{i_m\}} \lambda_{ic}$ , y similarmente tenemos lo mismo utilizando  $f_j$  e  $i_j$ . Por lo tanto, volviendo a la igualdad genérica, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i \in f_m} \lambda_{id} + \sum_{i \in f_j} \lambda_{ic} &= \sum_{i \in f_m} \lambda_{ic} + \sum_{i \in f_j} \lambda_{id} \iff \\ \lambda_{imd} + \lambda_{ijc} &= \lambda_{imc} + \lambda_{ijd}\end{aligned}$$

Y con esto probamos el ítem en cuestión.  $\diamond$

6.  $\mu_{f_i} = \mu_{f_j} \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$  :

La demostración de este ítem surge directamente de los ítems 2 y 5.  $\diamond$

Habiendo demostrado las propiedades anteriores, pasemos a la segunda parte de la demostración, estudiando la igualdad genérica. Primeramente, haciendo la multiplicación vectorial, tenemos:

$$\sum_{i \in V} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f z_f = \lambda_0$$

Luego, separando según si  $i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}$ ,  $i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}$  o  $i \notin \{f_1, \dots, f_k\}$ , tenemos:

$$\sum_{i \in V \setminus \{f_1, \dots, f_k\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mu_f z_f = \lambda_0$$

Aplicando el ítem 1:

$$\sum_{i \in V \setminus \{f_1, \dots, f_k\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Fijemos  $c_1 \in C \setminus D$ , y  $d_1 \in D$ . Luego, aplicamos el ítem 3 al primer término:

$$\sum_{i \in V \setminus \{f_1, \dots, f_k\}} \lambda_{ic_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \sum_{i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Podemos observar que el primer término es combinación lineal del lado izquierdo de las igualdades del modelo, lo notaremos como (1):

$$(1) + \sum_{i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Aplicando el ítem 4 al segundo término, tenemos:

$$(1) + \sum_{i \in \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \lambda_{ic_1} \sum_{c \in C} x_{ic} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$



Este segundo término es combinación lineal del lado izquierdo de las igualdades del modelo, por lo tanto lo notaremos como **(2)**:

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Podemos separar el tercer término según si  $c \in D$  o  $c \in C \setminus D$ :

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{d \in D} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{c \in C \setminus D} \lambda_{ic} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Aplicando el ítem 2 en el cuarto término, nos queda:

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{d \in D} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (\lambda_{id_1} + \mu_f) \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} + \sum_{i=1}^k \mu_{f_i} z_{f_i} = \lambda_0$$

Ahora bien, por el ítem 6, tenemos que  $\mu_{f_i} = \mu_{f_j}$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Llamaremos  $\mu_f$  indistintamente a  $\mu_{f_1}, \dots, \mu_{f_k}$ , y haremos factor común en el último término del lado izquierdo:

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{d \in D} \lambda_{id} x_{id} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (\lambda_{id_1} + \mu_f) \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} + \mu_f \sum_{i=1}^k z_{f_i} = \lambda_0$$

Aplicamos nuevamente el ítem 2 en el tercer término, dado que éste implica que  $\lambda_{id} = \lambda_{id'}$  para todo  $i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}$ , y para todo par  $d, d' \in D$ , podemos fijar  $d_1 \in D$  y hacer factor común:

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \lambda_{id_1} \sum_{d \in D} x_{id} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (\lambda_{id_1} + \mu_f) \sum_{c \in C \setminus D} x_{ic} + \mu_f \sum_{i=1}^k z_{f_i} = \lambda_0$$

Ahora bien, podemos sumar y restar  $\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} (-\mu_f) \sum_{d \in D} x_{id}$  y nos queda lo siguiente:

$$(1) + (2) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (-\mu_f) \sum_{d \in D} x_{id} + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (\lambda_{id_1} + \mu_f) \sum_{c \in C} x_{ic} + \mu_f \sum_{i=1}^k z_{f_i} = \lambda_0$$

Podemos ver que el cuarto término es combinación lineal del lado izquierdo de algunas igualdades del modelo, y lo notamos con **(3)**:

$$(1) + (2) + (3) + \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} (-\mu_f) \sum_{d \in D} x_{id} + \mu_f \sum_{i=1}^k z_{f_i} = \lambda_0$$

Haciendo factor común con  $\mu$ , tenemos por último:

$$(1) + (2) + (3) + \mu_f \left( \sum_{i=1}^k z_{f_i} - \sum_{i \in \{i_{f_1}, \dots, i_{f_k}\}} \sum_{d \in D} x_{id} \right) = \lambda_0$$

Podemos ver que finalmente esta igualdad genérica no puede ser otra cosa que combinación lineal de igualdades del modelo y de la igualdad clique-cursos. Por lo tanto, la desigualdad en cuestión define una faceta.  $\square$

## 5. CONCLUSIONES

La asignación de aulas es un problema con el que cualquier institución educativa de tamaño considerable se topará en cierto momento, de ahí el interés por obtener algoritmos que resuelvan dicho problema en el menor tiempo posible.

La programación lineal entera ha demostrado ser una herramienta eficaz para resolver este problema, a pesar de ser un problema *NP-difícil*. Sin embargo, al haber tantas características específicas de cada institución, resulta difícil construir un modelo que englobe todas las posibles particularidades y sea efectivo en la práctica.

A lo largo de este trabajo, hemos construido dos modelos de programación entera para resolver el problema de asignación de aulas a cursos teniendo en cuenta uno de esos aspectos: priorizar que las clases de un mismo curso estén asignadas a una misma aula.

Hemos comparado dichos modelos en casos concretos, concluyendo que uno de ellos, el modelo clásico, se comporta mejor en la práctica. Posteriormente, estudiamos el poliedro asociado a las soluciones de dicho modelo, obteniendo su dimensión y tres familias de desigualdades válidas. Encontramos condiciones necesarias bajo las cuales estas familias también definen facetas.

El proceso detrás de hallar desigualdades válidas no es lineal. En algunos casos, pudimos trasladar desigualdades utilizadas en otros modelos. Este es el caso de las desigualdades de partición. En otros, nos fue útil pensar qué datos nos aportan las variables del modelo.

A modo de ejemplo, algunas ideas han surgido a raíz de que, si dado un curso  $f$ , tenemos  $z_f = 1$ , y tenemos el color de una de las clases del mismo, entonces tendremos definido unívocamente el color de todas ellas. Aunque esto último es una implicación, pensar cómo se podría traducir en una desigualdad fue un ejercicio que colaboró en el surgimiento de las desigualdades de unión de cliques y de clique-curso.

Hemos trabajado mayoritariamente con cliques, sin ahondar en estructuras más complejas de grafos. Sería interesante estudiar, por ejemplo, desigualdades válidas sobre *caminos* de un grafo. Sin embargo, en nuestro caso, muchas familias de grafos no son compatibles o ya están dadas, ya que estamos trabajando con grafos de intervalos. En este sentido, resulta útil la caracterización por patrones prohibidos de [FH21] para reconocer rápidamente sub-familias de grafos de intervalos.

En el caso del modelo de representantes, los resultados demostraron que su gran cantidad de variables y restricciones resultan en un tiempo de cómputo no es efectivo, incluso para calcular la relajación lineal. Sin embargo, a la hora de buscar facetas y desigualdades válidas, notamos que su gran cantidad de variables de alguna manera resultaba en, informalmente, un mayor poder de expresividad, y con ello facilitaba el hallazgo de desigualdades válidas.

Este trabajo servirá como puntapié para realizar algoritmos de planos de corte, así como también para combinar con otras variantes del problema.

## 6. TRABAJO FUTURO

A lo largo de este trabajo han surgido numerosos puntos con los que se puede continuar el estudio del problema de asignación de aulas y sus soluciones.

Primeramente, resulta natural preguntarse por la eficacia en la práctica de las desigualdades halladas, tanto desde un punto de vista de cuánto mejoran los algoritmos existentes, así como qué costo requiere la utilización de algunas de estas desigualdades y de qué forma utilizarlas.

En este sentido, calcular la complejidad y buscar algoritmos para resolver los problemas de separación asociados con estas familias de desigualdades, y más aún, bajo las cuales las desigualdades definen facetas, es un ítem importante si se pretende que las mismas puedan llegar a utilizarse en la práctica. En el caso de las desigualdades de partición no se trata de estructuras complejas, pero sí de un número exponencial de desigualdades a considerar. En este caso, habría que analizar en qué momentos y cuáles de éstas conviene agregar en un algoritmo de planos de corte.

Siguiendo la misma línea, sería interesante implementar algoritmos de planos de corte que utilicen estas familias de desigualdades y medir su eficiencia tanto en los casos de prueba que utilizamos en esta tesis como en casos de prueba estándar.

En el desarrollo de esta tesis, particularmente a la hora de construir desigualdades, nos hemos topado con que en muchos casos resultaba más sencillo o intuitivo considerar desigualdades en el modelo dado por representantes. Al mismo tiempo, ambos modelos sufren de simetría, lo cual empeora los tiempos de ejecución. En el caso del modelo de representantes, resulta análogo elegir cualquier vértice como representante de los de su color. En el segundo caso, dado un coloreo factible, podemos intercambiar los colores sin que esto afecte el resultado.

Si bien en ambos casos existe el problema de la simetría, en el caso del modelo de representantes ésta aumenta enormemente al agregar vértices que compartan colores, lo que es usual en los casos prácticos de este problema.

Un posible trabajo futuro entonces sería comprobar en cuánto mejora el modelo de representantes al romper con la simetría, e incluso agregando desigualdades válidas para el mismo. La forma de romper la simetría está descrita en las conclusiones de [CCF04] y en [CCC08].

## Bibliografia

- [BDDL17] Monica Braga, Diego Delle Donne, Rodrigo Linfati, and Javier Marenco. The maximum-impact coloring polytope. *International Transactions in Operational Research*, 24(2):321–335, 2017.
- [BHM77] Stephen P Bradley, Arnoldo C Hax, and Thomas L Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley, 1977.
- [BT97] Dimitris Bertsimas and John N Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
- [CCC08] Manoel Campêlo, Victor Campos, and Ricardo Corrêa. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156:1097–1111, 04 2008.
- [CCF04] Manoel Campêlo, Ricardo Corrêa, and Yuri Frota. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89(4):159–164, 2004.
- [CCZ14] M. Conforti, G. Cornuejols, and G. Zambelli. *Integer Programming*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.
- [FH21] Laurent Feuilloley and Michel Habib. Graph classes and forbidden patterns on three vertices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35:55–90, 01 2021.
- [GAB<sup>+</sup>20] Gerald Gamrath, Daniel Anderson, Ksenia Bestuzheva, Wei-Kun Chen, Leon Eifler, Maxime Gasse, Patrick Gemander, Ambros Gleixner, Leona Gottwald, Katrin Halbig, Gregor Hendel, Christopher Hojny, Thorsten Koch, Pierre Le Bodic, Stephen J. Maher, Frederic Matter, Matthias Miltenberger, Erik Mühmer, Benjamin Müller, Marc E. Pfetsch, Franziska Schlösser, Felipe Serrano, Yuji Shinano, Christine Tawfik, Stefan Vigerske, Fabian Wegscheider, Dieter Weninger, and Jakob Witzig. The SCIP Optimization Suite 7.0. Technical report, Optimization Online, March 2020.
- [GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman, New York, NY, 1 edition, 1979.
- [Koc04] Thorsten Koch. *Rapid Mathematical Programming*. PhD thesis, 01 2004.
- [NW99] George L Nemhauser and Laurence A Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. W. H. Freeman, New York, NY, 1 edition, 1999.

## 7. APÉNDICE

### 7.1. Modelo de representantes

A continuación presentamos el modelo ZIMPL [Koc04] para el modelo de representantes.

Como salvedades, los conjuntos de CLASES, CURSOS, y los parámetros AULAS, VECINOS, ESELCURSO, MINIMOSDELCURSO, CANTIDADPORCURSO fueron variando por cada caso de prueba, ya que éstos dependían del semestre analizado.

Por otra parte, se utilizaron los siguientes archivos:

1. `ady_matrix_11.txt` es un archivo con la matriz de adyacencia del grafo  $G$  inducido por los horarios de las clases de uno de los semestres.
2. `courses_matrix_11.txt` es un archivo con una matriz  $M$  cuyas filas representan los cursos del semestre en cuestión, y las columnas representan las clases. El valor de  $M_{ij}$  es 1 si la clase  $j$  pertenece al curso  $i$ , y 0 en otro caso.
3. `first_of_each_course_11.txt` contiene un vector  $v$  de tamaño igual a la cantidad de cursos, donde cada valor representa el número más bajo de clase que pertenece a dicho curso. Por ejemplo, si para el curso  $c$  tenemos las clases 5, 6, 14, y 19, el valor de  $v_c$  sería 5.
4. Por último, `amount_per_course_11.txt` contiene un vector  $v$  de tamaño igual a la cantidad de cursos, donde cada escalar será la cantidad de clases pertenecientes al curso en cuestión.

Listing 7.1: Código modelo ZIMPL de representantes

```
set CLASES := {1..238};
set CURSOS := {1..74};
param AULAS := 20; #21 22 18 26 16 20 18 23 19 22 15 20
param VECINOS[CLASES*CLASES] := read "/test_cases/aux/refs/ady_matrix_11.txt" as "n+";
var x[CLASES*CLASES] binary;
var z[CURSOS] binary;
param ESELCURSO[CURSOS*CLASES] := read "/test_cases/aux/refs/courses_matrix_11.txt" as "n+";
param MINIMOSDELCURSO[CURSOS] := read "/test_cases/aux/refs/first_of_each_course_11.txt" as
    "n+";
param CANTIDADPORCURSO[CURSOS] := read "/test_cases/aux/refs/amount_per_course_11.txt" as "n+";
maximize cursos_misma_aula: sum <f> in CURSOS: z[f];
subto alguien_te_representa:
    forall <i> in CLASES:
        (sum <j> in CLASES with VECINOS[i,j] == 0 : x[j,i]) >= 1;
subto no_mas_colores_que_cantidad_de_aulas:
    (sum <j> in CLASES: x[j,j]) <= AULAS;
subto distintos_representantes_si_estan_conectados:
    forall <u> in CLASES:
        forall <v> in CLASES with (VECINOS[u,v] == 0 and u != v):
            forall <w> in CLASES with (VECINOS[v,w] == 1 and VECINOS[u,w] == 0 and w != u):
                x[u,v] + x[u,w] <= x[u,u];
subto distintos_representantes_si_no_estan_conectados_con_vertices_aislados:
    forall <u> in CLASES:
        forall <v> in CLASES with (VECINOS[u,v] == 0 and u != v):
            x[u,v] <= x[u,u];
subto o_todos_o_ninguno:
    forall <f> in CURSOS:
```

```
forall <v> in CLASES with (VECINOS[v,MINIMOSDELCURSO[f]+1] == 0):  
    CANTIDADPORCURSO[f] * (z[f] + x[v,MINIMOSDELCURSO[f]+1] - 1) <=  
    (sum <w> in CLASES with (ESDELCURSO[f,w] == 1): x[v,w]);
```

## 7.2. Modelo clásico

in A continuación presentamos el modelo ZIMPL [Koc04] para el modelo clásico. Al igual que en el caso anterior, los conjuntos de CLASES, CURSOS, y los parámetros AULAS, VECINOS, ESDELCURSO, MINIMOSDELCURSO, CANTIDADPORCURSO fueron variando por cada caso de prueba, ya que éstos dependían del semestre analizado. Por otra parte, se utilizaron los archivos:

1. `ady_matrix_0.txt` es un archivo con la matriz de adyacencia del grafo  $G$  inducido por los horarios de las clases de uno de los semestres.
2. `courses_matrix_0.txt` es un archivo con una matriz  $M$  cuyas filas representan los cursos del semestre en cuestión, y las columnas representan las clases. El valor de  $M_{ij}$  es 1 si la clase  $j$  pertenece al curso  $i$ , y 0 en otro caso.

Listing 7.2: Código modelo ZIMPL de máximo impacto

```

set V := {1..235};
set F := {1..127};
set C := {1..21};
param VECINOS[V*V] := read "/test_cases/aux/ads/ady_matrix_0.txt" as "n+";
var x[V*C] binary;
var z[F] binary;
param ESDELCURSO[F*V] := read "/test_cases/aux/ads/courses_matrix_0.txt" as "n+";
maximize cursos_misma_aula: sum <f> in F: z[f];
subto un_solo_color_cada_uno: # constraint 1
    forall <i> in V:
        (sum <c> in C: x[i,c]) == 1;
subto vecinos_de_distinto_color: # constraints 2
    forall <i> in V:
        forall <j> in V with (VECINOS[i,j] == 1):
            forall <c> in C:
                x[i,c] + x[j,c] <= 1;
subto validez_de_los_zf:
    forall <f> in F:
        forall <i> in V with (ESDELCURSO[f,i] == 1):
            forall <j> in V with (ESDELCURSO[f,j] == 1):
                forall <c> in C:
                    z[f] <= 1 + x[i,c] - x[j,c];

```