Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Normalidad de los números de Stoneham

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Natalia Pesaresi

LU: 636/14

Mail: natalia.pesaresi@gmail.com

Directora: Dra. Verónica Becher

Buenos Aires, 13 de Junio de 2019

NORMALIDAD DE LOS NÚMEROS DE STONEHAM

Decimos base para referirnos a un número entero mayor o igual que 2. Si representamos un número real en una base dada, tenemos una parte entera seguida de una coma seguida de una expansión fraccionaria, que es una secuencia posiblemente infinita de dígitos en esa base. Decimos que un número real es normal en base b si en su expansión en esta base ningún bloque de dígitos ocurre con mayor frecuencia asintótica que los demás bloques de la misma longitud. La normalidad es una condición básica de las secuencias aleatorias.

En esta tesis damos una versión completa y fácil de comprender de la demostración de normalidad en base 2 del número de Stoneham $\xi_{2,3}$. También damos la demostración completa de que $\xi_{2,3}$ no es normal en base 6. Este número $\xi_{2,3}$ es un caso particular de la familia de números de Stoneham que se definen mediante una serie muy sencilla, son fáciles de computar, y se han usado para generar números pseudoaleatorios.

Palabras claves: Normalidad, Absoluta Normalidad, Número de Stoneham, Stoneham, Pseudoaleatoriedad.

NORMALITY OF THE STONEHAM'S NUMBERS

We say base to refer to an integer greater than or equal to 2. If we represent a real number in a given base, we have an entire part followed by a comma followed by a fractional expansion, which is a possibly infinite sequence of digits in that base. We say that a real number is normal in base b if in its expansion in this base no block of digits occurs more frequently asymptotically than the other blocks of the same length. Normality is a basic condition of random sequences.

In this thesis we give a complete and easy to understand version of the normality proof in base 2 of the Stoneham number $\xi_{2,3}$. We also give the complete proof that $\xi_{2,3}$ is not normal in base 6. This number $\xi_{2,3}$ is a particular case of the family of Stoneham numbers that are defined by a very simple series, are easy to compute, and have been used to generate pseudorandom numbers.

Keywords: Normality, Absolute Normality, Stoneham's number, Stoneham, Pseudo randomness.

AGRADECIMIENTOS

A las personas que iluminan mi camino con su cariño y compañía.

A mi familia, por apoyarme para que pueda estudiar. A mi Abuela.

A mis amigos, que transitaron conmigo pasillos, aulas y bibliotecas durante años.

A la facultad, mi segunda casa, por permitirme ser ayudante.

A mis maestros, por ser ejemplo y motivarme a seguir aprendiendo.

A Aldana.

A Vero, por su paciencia y dedicación. Por estar siempre para trabajar juntas.

Los quiero,

Nati

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

Todos tenemos una idea intuitiva de qué es el azar, típicamente asociada con el juego o con la suerte. Sabemos que al azar no se lo puede predecir, porque no tiene leyes de formación, no tiene patrones.

Si realizamos el experimento de tirar una moneda, sabemos que caras y cecas deben salir, a la larga, la misma cantidad de las veces; Y que después de observar una cara puede venir cara o ceca, y lo mismo después de ceca. Como las echadas sucesivas son independientes entre sí, todas las posibles combinaciones de caras y cecas tienen, a la larga, las mismas chances de ocurrir.

Esta es la condición más básica del azar y se llama normalidad. Fue definida por el matemático francés Emile Borel [7] hace más de 100 años. Una secuencia infinita de símbolos -por ejemplo ceros y unos- es normal si ningún bloque de símbolos aparece con mayor frecuencia que los demás bloques de la misma longitud. Dado que la secuencia es infinita, al hablar de la frecuencia de aparición de un bloque de dígitos en dicha secuencia, nos estamos refiriendo a la frecuencia asintótica del bloque en la secuencia, es decir, al límite de la frecuencia de tal bloque en los segmentos iniciales de la secuencia.

En adelante, al decir *base*, nos referimos a un número entero b mayor o igual que 2. Si representamos un número real en una base dada, tenemos una parte entera seguida de un punto seguido de una expansión fraccionaria, que es una secuencia posiblemente infinita de dígitos en esa base dada.

Para notar la función parte entera de un número α, escribimos $\lfloor \alpha \rfloor$.

Fijada una base b, la *expansión* de un número real α en base b es una secuencia de dígitos

$$d_1 d_2 d_3 \ldots$$

con cada d_i entre 0 y $b-1$, tales que

$$\alpha \; = \lfloor \alpha \rfloor + 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

Decimos que un número real α es *normal* en la base b si su expansión en base b es una secuencia normal. Es decir, si en la cola infinita de dígitos en base b que vienen después de la coma, ninguno ocurre con mayor frecuencia que los demás y ningún bloque de dígitos ocurre con mayor frecuencia que los demás bloques de la misma longitud. Notar que solamente importa analizar la frecuencia en la expansión fraccionaria del número, ya que la cantidad de dígitos que forman la parte entera del número es finita y su descarte no afecta al análisis de la propiedad, porque es una propiedad que ocurre en el límite de la frecuencia.

Las posiciones de palabras finitas e infinitas están contadas desde 0. Para representar la longitud de una secuencia finita u, notamos $|u|$. Para hacer referencia al dígito que se encuentra en la posición $i-\acute{e}sima$ de una secuencia escribimos u_i y para indicar el sub−bloque de u desde la posición i a la j escribimos

$$u[i..j].$$

En particular, escribimos

$$\alpha[1..N]$$

para denotar la secuencia de los primeros N dígitos de la expansión de α en base b.

Para precisar de qué manera se cuentan las ocurrencias, fijemos una base b. Sean α y u secuencias de dígitos en base b, la *cantidad de ocurrencias* (no alineadas) de u en α es

$$|\alpha|_u = \#\{i : \alpha[i..(i + |u| - 1)] = u\}.$$

Por ejemplo, $|000001|_{00}$=4 y $|110001|_{00}$=2.

Definición 1.1 (Normalidad). Dado b un número entero mayor o igual que 2, decimos que α es ***normal*** en base b, si para todo posible bloque u escrito en base b,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\alpha[1..N]|_u}{N} = \frac{1}{b^{|u|}}$$

Definición 1.2 (Simple normalidad)**.** Decimos que un número real α es *simplemente normal* en base b si, en la expansión de α en base b, la frecuencia de aparición de cada dígito d_i entre 0 y $b-1$, es $1/b$.

Definición 1.3 (Absoluta normalidad)**.** Un número es *absolutamente normal* si es normal para toda base.

Una presentación sobre números normales puede leerse de [15], de [9] o de [3].

Al mismo tiempo que Borel dio la definición de normalidad demostró que la mayoría de los números reales (en el sentido que la medida de Lebesgue) son absolutamente normales, es decir, normales en todas las bases enteras mayores o iguales que 2. Y planteó el problema de dar un ejemplo concreto de un número absolutamente normal. Desde entonces este ha sido un desafío difícil y hasta el momento los ejemplos no son completamente satisfactorios, ya que no es posible demostrar ninguna otra propiedad sobre estos números más que su absoluta normalidad.

Borel hubiera querido que se demostrara la normalidad de alguna de las constantes matemáticas usuales como π, e o $\sqrt{2}$, sin embargo esto no ha sido posible todavía, aunque se cree qué sí lo son [19, 8]. El problema de dar ejemplos de números reales que garanticen nada más que la normalidad en una base dada ha sido más exitoso. Se conocen algunos definidos mediante una fórmula analítica que viene junto con una forma de construir la expansión fraccionaria en la base dada. El ejemplo más famoso que sigue siendo el más simple, es el número de Champernowne [10] escrito en base 10,

$$0,1\ 2\ 3\ldots 10\ 11\ 12\ 13\ldots 99\ 100\ 101\ 102\ 103\ldots$$

Notar que agregamos espacios entre los números que se concatenan para facilitar la lectura. Como se puede observar, este número se forma concatenando los números naturales en orden creciente. Además de tener una definición muy simple, el número de Champernowne es muy fácil de calcular: es posible computar el dígito de la posición $n - \acute{e}sima$ sin haber calculado las anteriores. No se sabe si el número de Champernowne es normal en otras bases que la usada en su construcción.

Copeland and Erdős [11] demostraron la normalidad en una base dada de muchos otros números, cuyas expansiones en esa base se obtienen concatenando los términos de ciertas secuencias crecientes. El más famoso es el número escrito en base 10 que se obtiene de la concatenación de los números naturales primos en orden creciente. Tampoco se sabe si estos números son normales en otras bases que la usada en su construcción.

Otra clase de ejemplos de secuencias normales, se obtiene mediante concatenación de secuencias de Bruijn en orden creciente [25]. La secuencia llamada *de orden i*, contiene a todas las posibles secuencias de largo i una sola vez. Son las secuencias de largo mas pequeñas que cumplen esta propiedad. Notar que puede haber distintas secuencias del mismo orden. También se demostró que las secuencias de Bruijn infinitas son normales en la base en que fueron escritas [5, 4].

Otra familia de ejemplos de números normales en una base dada es la de los números de Stoneham [24], cuya característica más saliente es que se definen mediante una serie muy sencilla. En esta tesis nos dedicamos a los números de Stoneham, que presentamos en la siguiente sección.

1.a. Los números de Stoneham y la demostración de su normalidad

Dados b y c números enteros coprimos mayores o iguales que 2, el número de Stoneham $\xi_{b,c}$ es,

$$\xi_{b,c} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}$$

Se sabe que $\xi_{b,c}$ es normal en base b y no es normal en la base que resulta de multiplicar b por c. La demostración de normalidad de $\xi_{b,c}$ en base b se debe a Richard Stoneham y aparece en [24, Theorem 6], Bailey y Borwein en [1, Theorem 1] dan una nueva presentación de este resultado.

La demostración de que $\xi_{b,c}$ no es normal en base bc fue dada por Stoneham en [23, Theorem 3]. En 2011 Bailey y Borwein reescriben esta demostración [2, Theorem 5, Appendix 1], y luego presentan estos resultados para números que son variantes de los números de Stoneham [1, Theorem 2].

La demostración de normalidad de los números de Stoneham $\xi_{b,c}$ en base b para cada posible elección de b y c, se basa en un lema importante de Korobov [13] postulado en 1972 ver demostración en [9, Lemma 5.2]. Korobov considera las expansiones en una base entera b de las fracciones irreducibles que son de la forma Z/m y que pertenecen al intervalo $[0, 1]$, observando las posiciones de su parte periódica, cuando b y m son coprimos. En el lema Korobov demuestra que para ciertas longitudes k, todos los bloques de largo k aparecen aproximadamente con la frecuencia esperada en este conjunto de secuencias. Como veremos más adelante, para cada n mayor o igual que 1 la parte fraccionaria de

$$b^n \xi_{b,c}$$

es decir, la expansión de $\xi_{b,c}$ a partir de cada posición $n-\acute{e}sima$, se puede aproximar mediante fracciones irreducibles para las cuales luego se aplica el mencionado lema de Korobov para calcular la frecuencia de aparición de bloques.

El siguiente gráfico representa la expansión de $\xi_{2,3}$ en base 2, con color verde al dígito 0 y con rojo al 1. A simple vista parece que ambos colores aparecen en cantidades similares, porque la imagen no parece ser más verde que roja, ni más roja que verde. Tampoco se observan patrones que nos permitan pensar que el número sea periódico o haya exceso de alguna secuencia de dígitos en particular por sobre las demás de su mismo tamaño.

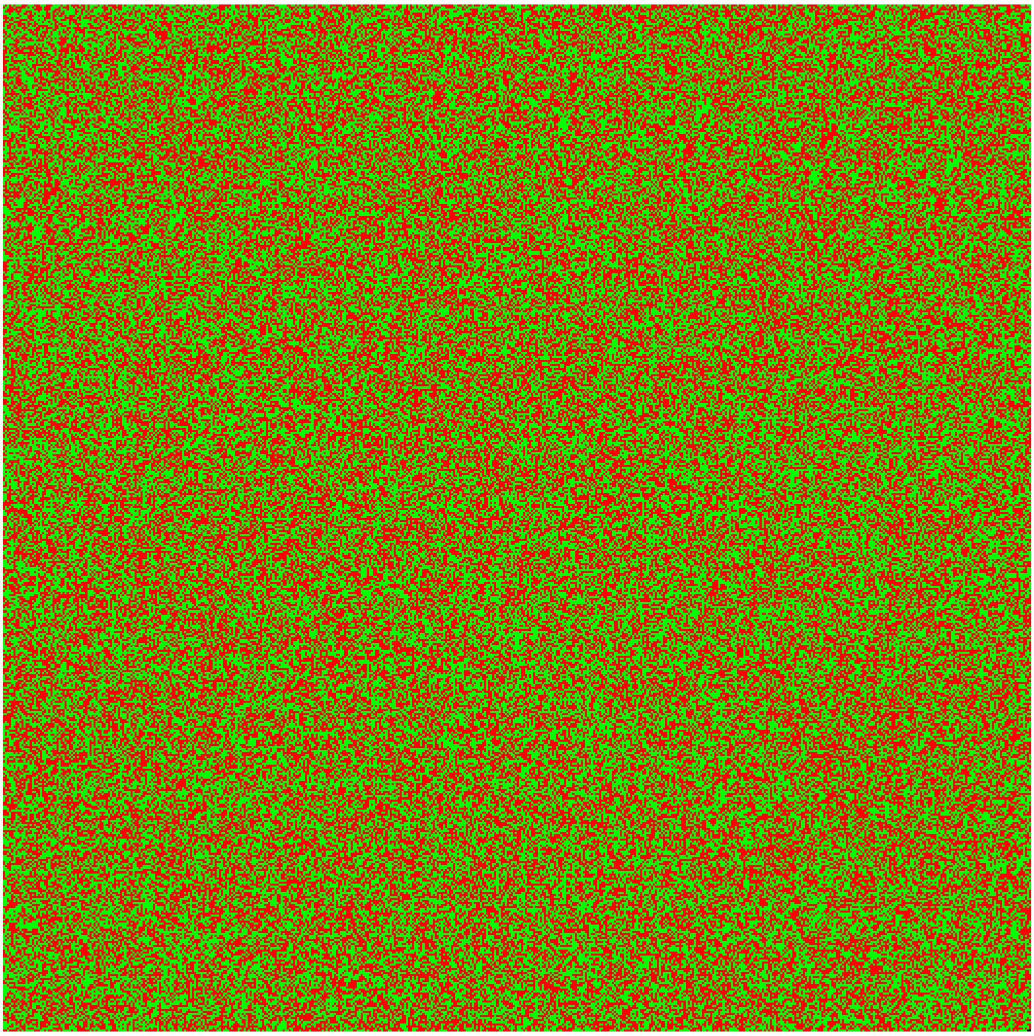

Fig. 1.1: Primeros 25000 dígitos de la expansión de $\xi_{2,3}$ en base 2.

Uno se podría preguntar, si en la expansión de un número normal deben aparecer todas las secuencias de largo k con la frecuencia esperada, ¿Por qué no vemos en la imagen una línea de píxeles rojos, que se corresponderían con un número que empieza con 1 y sigue con tantos 0 como cantidad de píxeles tiene el ancho de la imagen? Lo que ocurre es que la normalidad asegura que todos los bloques de dígitos de un mismo largo van a parecer con la misma frecuencia en el límite, pero esto no nos asegura a partir de que posición vamos a encontrar un bloque en particular.

El siguiente gráfico representa la expansión de $\xi_{2,3}$ en base 6, con rojo al dígito 0. En este gráfico observamos que hay un exceso de color rojo -dígito 0- que se repite con cierto patrón.

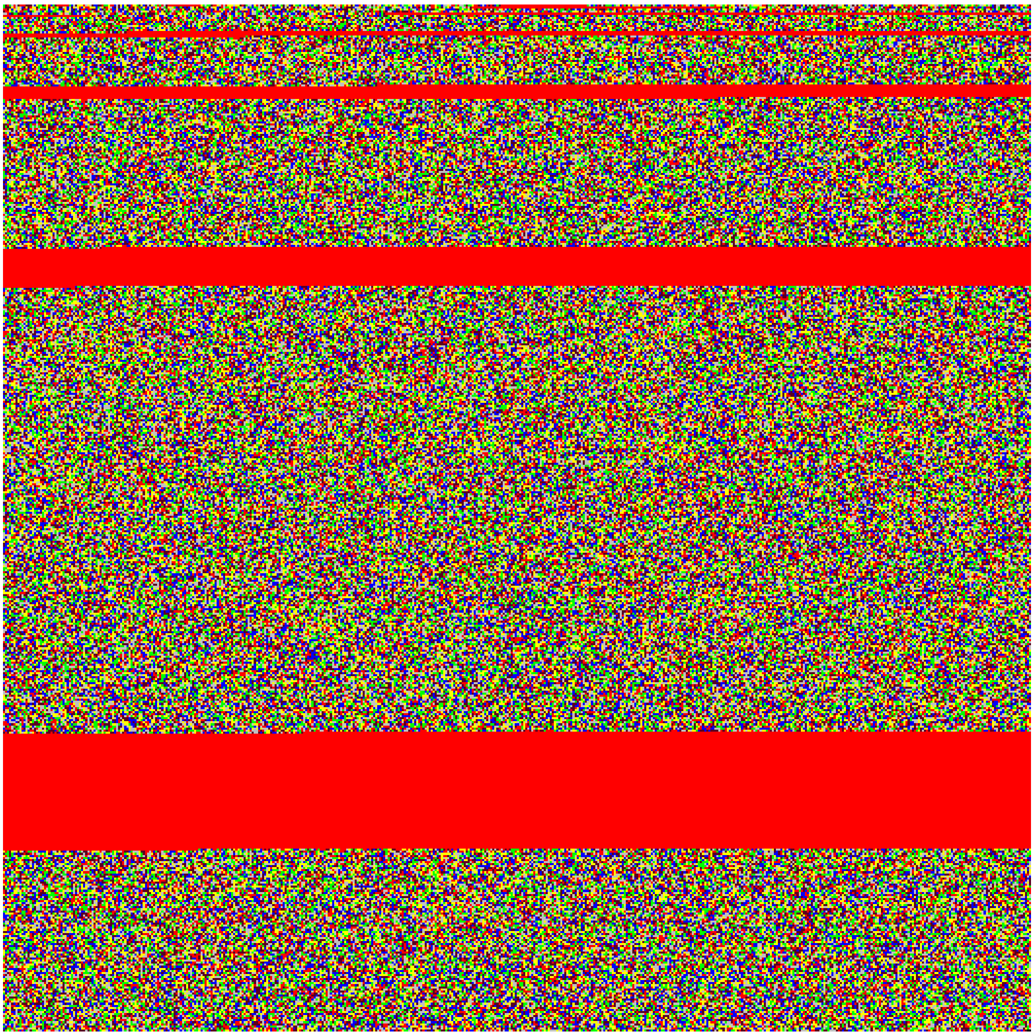

Fig. 1.2: Primeros dígitos de la expansión de $\xi_{2,3}$ en base 6.

Si observamos cada franja roja y la franja de colores que le sigue a continuación, podemos ver que hay una relación entre sus tamaños. Además la forma en que el tamaño de la franja roja aumenta, a medida que observamos las mas alejadas del principio, nos permite intuir que algo ocurre con el exceso del dígito cero en el límite de la expansión de $\xi_{2,3}$ escrita en base 6.

1.b. El aporte de este trabajo

En el presente trabajo, damos primero una demostración completa de la normalidad del número de Stoneham $\xi_{2,3}$ en base 2 y luego una demostración de que $\xi_{2,3}$ no es simplemente normal en base 6. Para la demostración de normalidad de $\xi_{2,3}$ en base 2 seguimos la dada por Bailey y Borwein [1, Theorem 1]. Para la demostración de falta de simple normalidad de $\xi_{2,3}$ en base 6 seguimos la de Bailey y Borwein [2, Theorem 5, Apendix 1].

El principal aporte de este trabajo ha sido completar los detalles de la demostración que estaban ausentes en las publicaciones originales de los autores y presentar la prueba de manera simple y comprensible para quienes tenemos una formación en Ciencias de la Computación. Nuestro objetivo ha sido identificar la técnica de demostración de modo tal que sea imaginable como usarla para probar la normalidad de otros números que admitan esta estrategia de demostración.

Notemos que nuestra demostración de normalidad es específica para $\xi_{2,3}$. Sin embargo, se puede usar la misma estrategia para todo número de Stoneham $\xi_{b,c}$, para demostrar normalidad en base b. Esta demostración es elemental excepto por dos resultados. Uno es el Teorema de Piatetski-Shapiro [16], enunciado en el Lema 2.2, que brinda una formulación de la propiedad de normalidad aparentemente más fácil de cumplir que la definición original. El otro es un resultado de Korobov de 1972 [13] que permite estimar la cantidad de ocurrencias de un bloque de dígitos dado dentro de secuencias periódicas (que son las que corresponden a las expansiones fraccionarias de números racionales).

Cabe destacar que la propiedad de normalidad permite construir un generador de números pseudoaleatorios usando el número de Stoneham $\xi_{b,c}$. Cada número generado se corresponde con un bloque de dígitos de la expansión de $\xi_{b,c}$ [2, 21] en base b.

1.c. ¿De donde viene el número de Stoneham $\xi_{2,3}$?

En el año 1935, Besicovitch [6] define que una secuencia finita w es $(\epsilon, k)-$normal si para todo bloque u de k dígitos, existen θ un número real entre -1 y 1, y ϵ un número real mayor que 0, tales que

$$|w|_u = \left(\frac{1}{b^k} + \theta\epsilon\right)|w|$$

Esto significa que, para todo ϵ, todos los bloques de largo k, tienen una frecuencia de aparición de aproximadamente $1/b^k$.

En 1946, Good [12] probó que dada una base b y un número entero k, existen números racionales cuya expansión en base b tiene un período de tamaño b^k y cumplen que todos los bloques de largo k aparecen con frecuencia $1/b^k$. Esta es la misma condición que define a las secuencias de Bruijn.

En 1964, Richard Stoneham demostró [18] que las fracciones $1/p^i$ son $(\epsilon, k)-$normales en el sentido de Besicovitch [6], bajo las siguientes condiciones: p es un primo impar y b es una raíz primitiva módulo p^2 (dado un número natural i, decimos que b es una raíz primitiva módulo i, si para todo c en $\mathbb{Z}_i$ existe un entero k tal que $b^k \equiv c(mod\ i)$). El período del número $1/p^i$ tiene una cantidad de dígitos igual a $\lambda = (p-1)p^{i-1}$.

Por lo tanto, en [18] Stoneham encontró un ejemplo que cumple la definición de Good considerando frecuencias que aproximan a la frecuencia esperada. En el mismo trabajo, estableció una cota inferior para la cantidad de bases en las que $1/p^i$ es $(\epsilon, k)-$normal, para ϵ y k determinados.

Proposición 1.4. *Sabemos que si un número real α, escrito en base b, es simplemente normal en base b^i, para todo i mayor o igual que 1, entonces el número es normal en base b. Además si α es normal en base b para toda base natural, entonces el número es absolutamente normal. Estas equivalencias entre las definiciones de normalidad pueden leerse de [9] o de [4]. Schmidt [17] demuestra que la normalidad en una base no implica normalidad en otra.*

Stoneham analiza la posibilidad de que para una familia de números considerados, la normalidad en una base implique normalidad absoluta. Él pensaba que se podía extender el concepto de $(\epsilon, k)-$normalidad para sumas y productos de fracciones del tipo $1/p^i$ y así estudiar la distribución de los dígitos de las aproximaciones de números irracionales.

En 1965, Stoneham [19] se interesó en la pregunta de si el número irracional e es normal o no lo es (en alguna base), pregunta que había postulado Borel medio siglo antes. Encontró que presentaban buenas propiedades estadísticas, sin tener éxito con la prueba.

En 1970, Stoneham definió una familia de racionales Z/m, que extienden a los del tipo $1/p^i$, para los que probó su $(\epsilon, k)-$ normalidad. Este resultado aparece en [22, Theorem 2]. Estos racionales deben cumplir: Z y m ser números enteros; $Z/m < 1$ ser una fracción irreducible; si los escribimos en base b, b debe estar entre 2 y $C(m)$; b y m deben ser coprimos; $C(m)$ debe ser una constante que depende de m.

Además, Stoneham extendió la noción de normalidad en el sentido de Besicovitch a secuencias infinitas que corresponden a la expansión de racionales irreducibles Z/m. Por otra parte, define una forma de construir números normales trascendentes que no son tipo *Liouville* dado un racional irreducible Z/m [20]. Los resultados que Stoneham obtuvo hasta ese momento, lo inspiraron en la construcción de un generador pseudoaleatorio [21], donde los elementos que produce son secuencias que aparecen en la expansión del número Z/m escrito en base b, con denominador $m = p^i$, donde p es un número primo y coprimo con Z.

En 1973 continuó en el estudio de números racionales $(\epsilon, k)-$normales [23]. En el mismo año definió los números de Stoneham $\xi_{b,c}$ como se conocen en la actualidad, probó su normalidad en base b en [24, Theorem 6] y su no normalidad en base bc en [23, Theorem 3].

2. NORMALIDAD $\xi_{2,3}$ EN BASE 2

Teorema 2.1. *El número Stoneham* $\xi_{2,3} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j 2^{3^j}}$ *es normal en base* 2.

Para estudiar la normalidad del número de Stoneham en base b, usamos el Lema de Piatetski-Shapiro [16], que formula la propiedad de normalidad de una manera aparentemente más fácil de cumplir que la formulación original dada por Borel:

Lema 2.2 (Piatetski-Shapiro [16])**.** *Sea* α *un número real y* b *un entero mayor o igual a* 2.
Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El número* α *es normal en base* b.
2. *Existe una constante* C *tal que para infinitos naturales* k *y para todo bloque* u *de* k *dígitos escrito en base* b,
$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\alpha[1..N]|_u}{N} < \frac{C}{b^k}$$
La frecuencia de aparición de u *en los primeros* N *dígitos de la expansión de* α *escrita en base* b, *está acotada por* C/b^k.

2.a. Lemas y definiciones

A continuación presentamos las definiciones y los lemas que serán utilizados de aquí en adelante. Notar que en su mayoría valen para b y c cualesquiera coprimos, en particular para $b = 2$ y $c = 3$.

Sucesión asociada

Para usar el Lema de Piatetski-Shapiro, Lema 2.2, necesitamos contar las ocurrencias de un bloque u escrito en base b de largo k en la expansión del número $\xi_{b,c}$. Si se quiere contar las ocurrencias de tal bloque u a partir de una posición $n-\acute{e}sima$ debemos considerar las posiciones n a $n + |u| - 1 = n + k - 1$.

Recordemos que el número Stoneham se define así:

$$\xi_{b,c} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}$$

Definición 2.3 (Términos de $\xi_{b,c}$)**.** Definimos la sucesión $(y_j)_{j\geq 0}$ donde

$$y_j = \frac{1}{c^j b^{c^j}}.$$

Observemos que $(y_j)_{j\geq 0}$ es estrictamente decreciente, porque j es una variable creciente y cada elemento y_j tiene en el denominador potencias de b, por lo tanto para todo j vale que y_{j+1} aporta al menos un dígito más alejado del comienzo de la secuencia que y_j.

Dado que b no es 0 y que y_j está escrito en base b, al sumar $\lfloor \log_c n \rfloor$ términos de la sucesión $(y_j)_{j\geq 0}$, podemos concluir que obtenemos un número con al menos

$$\lfloor \log_c n \rfloor$$

dígitos en base b.

Luego, para todo n entre c^k y $c^{k+1} - 1$, sucede que $k = \lfloor \log_c n \rfloor$, entonces tenemos que al sumar $k = \lfloor \log_c n \rfloor$ términos, el número resultante tendrá al menos k dígitos.

Hay una sucesión, llamada *Sucesión asociada*, que describe a las secuencias de dígitos que se encuentran a partir de cada posición $n-$*ésima* en la expansión de $\xi_{b,c}$, tal que podemos asegurar que cada uno de sus elementos tiene más de $\lfloor \log_c n \rfloor$ dígitos.

En adelante usaremos la siguiente notación. Dado un número real x positivo escribimos $\{x\}$ para denotar la expansión fraccionaria de x, es decir, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Definición 2.4 (Sucesión Asociada a $\xi_{b,c}$)**.** Se define la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ asociada al número de Stoneham $\xi_{2,3}$ donde,

$$x_n = \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_c n \rfloor} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}} \right\}.$$

Veamos que significa esta sucesión. Consideremos nuevamente la definición del número de Stoneham :

$$\xi_{b,c} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}$$

Separando los términos en dos sumatorias, la primera expresará los dígitos más significativos del número, y la segunda los menos significativos.

$$\xi_{b,c} = \sum_{j=1}^{\lfloor \log_c n \rfloor} \frac{1}{c^j b^{c^j}} + \sum_{\lfloor \log_c n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}$$

Por otra parte, para obtener el $n-$*ésimo* dígito de la parte fraccionaria de un número, se multiplica al número por su base elevado a la potencia $n-$*ésima*.

$$b^n \xi_{b,c} = \sum_{j=1}^{\lfloor \log_c n \rfloor} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}} + \sum_{\lfloor \log_c n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}}$$

Tomando parte entera obtenemos los dígitos buscados.

$$\{b^n \xi_{b,c}\} = \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_c n \rfloor} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}} \right\} + \left\{ \sum_{\lfloor \log_c n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}} \right\} \right\}$$

Luego, la sucesión asociada al número de Stoneham $\xi_{b,c}$, es:

$$(x_n)_{n \geq 0} = \left(\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_c n \rfloor} \frac{b^n}{c^j b^{c^j}} \right\} \right)_{n \geq 0}.$$

Sucesión asociada a $\xi_{b,c}$ equivalente

Nos será útil la siguiente definición equivalente de la sucesión asociada a $\xi_{b,c}$, ya que nos da otra forma de escribirla, mediante fórmula recursiva para obtener cada término x_n.

Definición 2.5 (Sucesión Asociada a $\xi_{b,c}$ equivalente)**.** La Definición 2.4 de cada elemento de $(x_n)_{n \geq 0}$ es equivalente a:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \{b x_{n-1} + r_n\} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{donde } r_n = \begin{cases} 1/n & \text{si existe } m \text{ tal que } n = c^m. \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Relación entre ambas definiciones de Sucesión Asociada

A continuación se presenta a modo de ejemplo un cuadro comparando los primeros 10 términos de ambas formas de construir el $n - \textit{ésimo}$ término de la sucesión asociada al número de Stoneham $\xi_{b,c}$, cuando $b = 2$ y $c = 3$.

n	Forma I: $x_n = \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 n \rfloor} \frac{2^n}{3^j 2^{3^j}} \right\}$	Forma II: $x_n = \{2x_{n-1} + r_n\}$	r_n
0	0	0	0
1	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 1 \rfloor} \frac{2^1}{3^j 2^{3^j}} \right\} = 0$	$\{2 * 0 + 0\} = 0$	0
2	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 2 \rfloor} \frac{2^2}{3^j 2^{3^j}} \right\} = 0$	$\{2 * 0 + 0\} = 0$	0
3	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 3 \rfloor} \frac{2^3}{3^j 2^{3^j}} \right\} = \left\{ \frac{2^3}{3^1 2^{3^1}} \right\} = \left\{ \frac{1}{3^1} \right\} = \frac{1}{3}$	$\left\{2 * 0 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 4 \rfloor} \frac{2^4}{3^j 2^{3^j}} \right\} = \left\{ \frac{2^4}{3^1 2^{3^1}} \right\} = \left\{ \frac{2}{3^1} \right\} = \frac{2}{3}$	$\left\{2 * \frac{1}{3} + 0\right\} = \frac{2}{3}$	0
5	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 5 \rfloor} \frac{2^5}{3^j 2^{3^j}} \right\} = \left\{ \frac{2^5}{3^1 2^{3^1}} \right\} = \left\{ \frac{2^2}{3^1} \right\} = \frac{1}{3}$	$\left\{2 * \frac{2}{3} + 0\right\} = \frac{1}{3}$	0
6	$\left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 6 \rfloor} \frac{2^6}{3^j 2^{3^j}} \right\} = \left\{ \frac{2^6}{3^1 2^{3^1}} \right\} = \left\{ \frac{2^3}{3^1} \right\} = \frac{2}{3}$	$\left\{2 * \frac{1}{3} + 0\right\} = \frac{2}{3}$	0

7	$\left\{\sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 7\rfloor} \frac{2^7}{3^j 2^{3^j}}\right\} = \left\{\frac{2^7}{3^1 2^{3^1}}\right\} = \left\{\frac{2^4}{3^1}\right\} = \frac{1}{3}$	$\left\{2 * \frac{2}{3} + 0\right\} = \frac{1}{3}$	0
8	$\left\{\sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 8\rfloor} \frac{2^8}{3^j 2^{3^j}}\right\} = \left\{\frac{2^8}{3^1 2^{3^1}}\right\} = \left\{\frac{2^5}{3^1}\right\} = \frac{2}{3}$	$\left\{2 * \frac{1}{3} + 0\right\} = \frac{2}{3}$	0
9	$\left\{\sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 9\rfloor} \frac{2^9}{3^j 2^{3^j}}\right\} = \left\{\frac{2^9}{3^1 2^{3^1}} + \frac{2^9}{3^2 2^{3^2}}\right\}$	$\left\{2 * \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right\} = \left\{\frac{3*2*2+1}{9}\right\} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
	$= \left\{\frac{2^6}{3^1} + \frac{1}{3^2}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 2^6+1}{3^2}\right\} = \frac{4}{9}$		
10	$\left\{\sum_{j=1}^{\lfloor \log_3 10\rfloor} \frac{2^{10}}{3^j 2^{3^j}}\right\} = \left\{\frac{2^{10}}{3^1 2^{3^1}} + \frac{2^{10}}{3^2 2^{3^2}}\right\}$	$\left\{2 * \frac{4}{9} + 0\right\} = \frac{8}{9}$	0
	$= \left\{\frac{2^7}{3^1} + \frac{2}{3^2}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 2^7+2}{3^2}\right\} = \frac{8}{9}$		

Factor de repetición

La sucesión asociada $(x_n)_{n\geq 0}$ al número $\xi_{b,c}$ presenta una característica particular: para todo j mayor o igual que 0, la cantidad de veces que puede aparecer repetido x_j en $(x_n)_{n\geq 0}$ es menor o igual que una constante T que depende solamente de b y c, a la que llamamos *factor de repetición*. La definición del *factor* T fue dada por Korobov en 1972 en [13, Section 1] y también está desarrollada en su libro [14, Chapter 1, pages 45-53]. En [1, Theorem 1] Bailey y Borwein utilizan esta definición de Korobov para dar la demostración de normalidad de $\xi_{b,c}$ en base b.

Por lo tanto, en el caso en que $b = 2$ y $c = 3$ se tiene el siguiente lema:

Lema 2.6 (Caso particular del resultado de Korobov en [13])**.** *Para todo n suficientemente grande, la cantidad de elementos de la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ asociada al número de Stoneham $\xi_{2,3}$ que son iguales entre sí es* 3. *Es decir, el factor de repetición T para $(x_n)_{n\geq 0}$ es* 3.

¿A que dígitos representa cada término de la Sucesión Asociada?

Sabemos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ asociada al número de Stoneham $\xi_{b,c}$, representa los primeros dígitos que se encuentran a partir de cada posición $n-$*ésima* de su expansión. Dado un elemento x_i de esta sucesión, queremos saber a cuantos dígitos representa exactamente. Para poder mostrar los valores de los términos, vamos a analizar la sucesión asociada al número de Stoneham $\xi_{2,3}$.

Veamos cuales son los primeros dígitos de la expansión de $\xi_{2,3}$.

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\xi_{2,3}$=0,	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
n=	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0 ...

Y recordemos como construíamos cada término de la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \{2\, x_{n-1} + r_n\} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{donde } r_n = \begin{cases} 1/n & \text{si existe } m \text{ tal que } n = 3^m. \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Entonces debemos seguir esta definición para calcular cada uno de los términos. El primero que es x_0, es igual a 0 por definición. Para los siguientes debemos multiplicar por 2 al término anterior y sumarle el resto cuando la posición sea potencia de 3, como lo indica su definición. Al calcular los primeros 81 términos, obtuvimos la siguiente tabla que contiene a cada término con su correspondiente escritura en binario:

x_0=0	$\overline{0}$	x_3=1/3	0,$\overline{01}$	x_9= 4/9	0,$\overline{011100}$	$x_{27} = 13/27$	$0,\overline{011110110100001001}$
x_1=0	$\overline{0}$	x_4=2/3	0,$\overline{10}$	x_{10}= 8/9	0,$\overline{111000}$	$x_{28} = 26/27$	$0,\overline{111101101000010010}$
x_2=0	$\overline{0}$	x_5=1/3	0,$\overline{01}$	x_{11}= 7/9	0,$\overline{110001}$	$x_{29} = 25/27$	$0,\overline{111011010000100101}$
		x_6=2/3	0,$\overline{10}$	x_{12}= 5/9	0,$\overline{100011}$	$x_{30} = 23/27$	$0,\overline{110110100001001011}$
		x_7=1/3	0,$\overline{01}$	x_{13}= 1/9	0,$\overline{000111}$	$x_{31} = 19/27$	$0,\overline{101101000010010111}$
		x_8=2/3	0,$\overline{10}$	x_{14}= 2/9	0,$\overline{001110}$	$x_{32} = 11/27$	$0,\overline{011010000100101111}$
				x_{15}= 4/9	0,$\overline{011100}$	$x_{33} = 22/27$	$0,\overline{110100001001011110}$
				...		$x_{34} = 17/27$	$0,\overline{101000010010111101}$
				x_{26}= 2/9	0,$\overline{001110}$	...	

Encontramos que existe una relación entre el índice del término que estamos observando y los dígitos que éste representa.

Dado i un número natural mayor o igual que 3, tomamos k el mayor número natural que cumple $i \geq 3^k$. La **cantidad de dígitos** que representa (como máximo) el $i-\acute{e}simo$ término de la sucesión, son los que posee su período. Este valor se calcula de la siguiente manera,

$$\frac{3^{k+1} - 3^k}{3}$$

Como observamos en la tabla, el tamaño del período de x_i es uno para todo i entre 0 y 2.

Veamos por ejemplo que, para todo i entre 0 y 2, el período cada x_i es 1 y en la expansión de $\xi_{2,3}$ en cada una de estas posiciones encontramos exactamente los dígitos del período de cada x_i que son el dígito 0.

Para todo i entre 3 y 8, tenemos que $k = 1$, entonces el período cada x_i es,

$$\frac{3^2 - 3^1}{3} = 6/3 = 2.$$

Así mismo verificamos empíricamente que para todo i entre 9 y 26, $k = 2$, el período cada x_i es

$$\frac{3^3 - 3^2}{3} = 18/3 = 6$$

y para todo i entre 27 y 80, $k = 3$, el período cada x_i es,

$$\frac{3^4 - 3^3}{3} = 54/3 = 18.$$

Por otra parte, descubrimos que no siempre encontraríamos al término x_i completo, para algunos i, sino que encontraríamos un prefijo del mismo. Por ejemplo, ver los dígitos que se encuentran a partir de la posición 26 de la expansión del número $\xi_{2,3}$ y el elemento x_{26} de la sucesión asociada al número de Stoneham $\xi_{2,3}$.

Por último notamos que los términos de la sucesión aparecen 3 veces, como lo determina el *factor de repetición* descripto anteriormente, dentro de las posiciones 3^k y 3^{k+1}, para algún k y aparecen con cierto orden (ver términos 3 a 8 en la tabla).

Intervalos I, J

Para la demostración de normalidad necesitamos contar cuantas veces aparece un bloque de dígitos u en la expansión de $\xi_{b,c}$.

$$\{\xi_{b,c}\} = 0, d_1 d_2 \ldots$$

Queremos ver en cuantas posiciones $n - \textit{ésimas}$ observamos una ocurrencia de u. Dada n una posición, la estrategia analítica que utilizamos para comparar esa posición y las subsiguientes con u es:

- Primero eliminar los dígitos de las posiciones 1 a $n - 1$.

  $$\{b^n \xi_{b,c}\} = 0, d_n d_{n+1} \ldots d_{n+|u|-1} \cdots$$

- Luego para comparar los dígitos de la posición n a la $n+|u|-1$ con u, lo que hacemos es preguntarnos si el número $\{b^n \xi_{b,c}\}$ pertenece al intervalo

  $$J = \Big[\frac{u}{b^k}, \frac{u+1}{b^k}\Big)$$

  ya que para que esto suceda $d_n d_{n+1} \ldots d_{n+|u|-1}$ debe ser igual a u.

Esto nos da una representación geométrica en el intervalo $[0, 1)$ para evaluar de la igualdad $d_n d_{n+1} \ldots d_{n+|u|-1} = u$. Por otro lado, los dígitos de $\xi_{b,c}$ que se encuentran a partir de la posición $n - \textit{ésima}$, están en la sucesión asociada a $\xi_{b,c}$, $(x_n)_{n \geq 0}$. Entonces, debemos establecer si $\{b^n \xi_{b,c}\}$ pertenece al intervalo J definido más arriba.

Lema 2.7. *Sean n y k dos números naturales y sea u un bloque de k dígitos en base b.*

$$\textit{Si } \{b^n \xi_{b,c}\} \in J = \Big[\frac{u}{b^k}, \frac{u+1}{b^k}\Big),$$

$$\textit{entonces } x_n \in I = \Big[\frac{u}{b^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{n}\Big).$$

Demostración. Veamos primero que la diferencia entre el número de Stoneham, eliminando las primeras n posiciones, y el $n-$*ésimo* término de su sucesión asociada es menor que $1/n$.

Sea k el menor entero que cumple $n < c^k$. Veamos que vale la siguiente desigualdad que usaremos más abajo:

$$\frac{1}{b^{c^k(c-1)}} \leq \frac{1}{bc^k} \tag{2.1}$$

Esta desigualdad surge de las siguientes otras desigualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b^{c^k(c-1)}} &\leq \frac{1}{bc^k} \\
bc^k &\leq b^{c^k(c-1)} \\
c^k &\leq b^{c^k(c-1)-1} \\
\log c^k &\leq \log b^{c^k(c-1)-1} \\
k \log c &\leq (c^k(c-1)-1)\log b.
\end{aligned}$$

Luego, la desigualdad (2.1) se cumple para todo n y k suficientemente grandes, por la relación que existe entre las funciones lineal y exponencial en k.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\{b^n \xi_{b,c}\} - x_n| &\leq \sum_{m=\lfloor \log_c n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{b^{n-c^m}}{c^m} \\
&\leq \sum_{m=\lfloor \log_c c^k \rfloor + 1}^{\infty} \frac{b^{c^k-c^m}}{c^m} \\
&\leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b^{c^k-c^m}}{c^m} \\
&\leq \frac{b^{c^k-c^{k+1}}}{c^{k+1}} + \frac{b^{c^k-c^{k+2}}}{c^{k+2}} + \frac{b^{c^k-c^{k+3}}}{c^{k+3}} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{b^{c^k(c-1)}c^{k+1}} + \frac{1}{b^{c^k(c^2-1)}c^{k+2}} + \frac{1}{b^{c^k(c^3-1)}c^{k+3}} + \dots \\
&\leq \frac{1}{b^{c^k(c-1)}} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{c^m}, \text{ y usando 2.1,} \\
&\leq \frac{1}{b\ c^k} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{c^m} \\
&\leq \frac{c}{b\ n\ (c-1)} \\
&< \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Demostramos entonces que

$$|\{b^n\xi_{b,c}\} - x_n| < \frac{1}{n}$$

que nos permite deducir las las siguientes desigualdades obvias:

$$\begin{aligned}
\{b^n\xi_{b,c}\} - x_n &< \frac{1}{n} \\
\{b^n\xi_{b,c}\} - \frac{1}{n} &< x_n \\
x_n - \{b^n\xi_{b,c}\} &< \frac{1}{n} \\
x_n &< \{b^n\xi_{b,c}\} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que se cumple el Lema 2.7. Asumamos que $\{b^n\xi_{b,c}\} \in J$ entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{u}{b^k} &\leq \{b^n\xi_{b,c}\}, \text{por lo tanto,} \\
\frac{u}{b^k} - \frac{1}{n} &\leq \{b^n\xi_{b,c}\} - \frac{1}{n}, \text{y usando la segunda desigualdad de arriba} \\
\{b^n\xi_{b,c}\} - \frac{1}{n} &< x_n.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $\{b^n\xi_{b,c}\} \leq \dfrac{u+1}{b^k}$ entonces,

$$\begin{aligned}
\{b^n\xi_{b,c}\} + \frac{1}{n} &\leq \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{n} \text{ y usando la cuarta desigualdad de arriba} \\
x_n &< \{b^n\xi_{b,c}\} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Concluimos,

$$x_n \in \Big[\frac{u}{b^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{n}\Big) = I$$

□

Tamaño del intervalo I

Veamos ahora la longitud del intervalo $I = \left[\frac{u}{b^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{n}\right)$.

Lema 2.8. *Si $n \geq b^k$ entonces $|I|$ es $3/b^{k+1}$.*

Demostración. Se define el intervalo I como,

$$I = \left[\frac{u}{b^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{n}\right)$$

Si $n \geq b^k$ tenemos,

$$I \subseteq \left[\frac{u}{b^k} - \frac{1}{b^k}, \frac{u+1}{b^k} + \frac{1}{b^k}\right) = \left[\frac{u-1}{b^k}, \frac{u+1+1}{b^k}\right)$$

Entonces su longitud es,

$$|I| \leq \left|\frac{u+1+1}{b^k} - \frac{u-1}{b^k}\right| = \frac{3}{b^{k+1}}.$$

$\square$

2.b. Demostración de Normalidad de $\xi_{2,3}$ en base 2

Ahora sí podemos demostrar el teorema anunciado:

Demostración del Teorema 2.1. Sea $\xi_{2,3}$ el número de Stoneham con $b = 2$ y $c = 3$. Se cumple que 2 es coprimo con 3.

Por el Lema de Piatetski-Shapiro, Lema 2.2, demostrar que $\xi_{2,3}$ es normal en base 2 es equivalente a probar que existe un número real C, tal que para infinitos números naturales k y para todo bloque u de k dígitos escrita en base 2, se cumple:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\xi_{2,3}[1..N]|_u}{N} < \frac{C}{2^k}$$

Entonces dados k un número natural y u un bloque de k dígitos escrito en base 2, queremos contar cuantas veces aparece el bloque u en los primeros N dígitos de la expansión de $\xi_{2,3}$.

Podemos observar que este procedimiento equivale a contar cuantas veces, el resultado de eliminar los primeros n símbolos de la expansión de $\xi_{2,3}$, con n entre 1 y N, pertenece al intervalo

$$J = [\frac{u}{2^k}, \frac{u+1}{2^k})$$

ya que para que esto suceda la secuencia u debería ser prefijo del mismo. Es decir, queremos contar $n \in \mathbb{N}$ tales que si $1 \leq n < N$, entonces $\{2^n \xi_{2,3}\} \in J$.

Tomando $N > 2^{2k}$, se tiene que $\exists \ell \in \mathbb{N}$ tal que $3^\ell \leq N < 3^{\ell+1}$.

Por otra parte, tenemos que cada x_n es un elemento de la sucesión asociada $(x_n)_{n\geq 0}$ al número $\xi_{2,3}$, según la Definición 2.4. Estos representan los dígitos de la expansión $\xi_{2,3}$ que se encuentran respectivamente a partir de cada posición $n-\acute{e}sima$. Por lo tanto, queremos contar cuantos de ellos pertenecen al intervalo J.

Vamos a ver que podemos asegurar que que si $\{2^n \xi_{2,3}\} \in J$ entonces x_n pertenece a un intervalo I más grande tal que $J \subseteq I$.

Por el Lema 2.7, sabemos que si $\{2^n \xi_{2,3}\} \in J$, entonces

$$x_n \in \Big[\frac{u}{2^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{2^k} + \frac{1}{n}\Big).$$

Además se tiene que si $n \geq 2^k$, entonces

$$\Big[\frac{u}{2^k} - \frac{1}{n}, \frac{u+1}{2^k} + \frac{1}{n}\Big) \subseteq \Big[\frac{u-1}{2^k}, \frac{u+2}{2^k}\Big) = I.$$

Se puede ver que I contiene a lo sumo $3(\lfloor 3^\ell \frac{3}{2^k} \rfloor + 1)$ elementos de la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$, ya que:

- Por el Lema 2.6, el factor de repetición de cada x_n en los primeros N términos de la sucesión es a lo sumo 3. Lo que implica que tomando como posición inicial a las primeras N de la expansión de $\xi_{2,3}$, la secuencia x_n puede aparecer hasta 3 veces.

- La Definición 2.5, dice que cada elemento x_n se escribe como el producto de un entero por $1/3^\ell$, por lo tanto hay 3^ℓ posibles valores distintos que puede tomar.
- El Lema 2.8, establece que el tamaño del intervalo I es $3/2^k$.

Entonces del conjunto de posibles valores que puede tomar cada x_n, tomamos tantos como puedan caber en el intervalo I y expresamos que pueden aparecer como máximo 3 veces esta cantidad.

Luego, veamos que se cumple el Lema de Piatetski-Shapiro 2.2 para $\xi_{2,3}$.

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{|\xi_{2,3}[1..N]|_u}{N} &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n : 0 \leq n \leq N \text{ y } \{2^n \xi_{2,3}\} \in J\}}{N} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{n : 0 \leq n \leq N \text{ y } x_n \in I\}}{N}, \text{y, si } n \geq 2^k, \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{2^k + \#\{n : 2^k \leq n < N \text{ y } x_n \in I\}}{N} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{2^k + 3(\lfloor 3^\ell \frac{3}{2^k} \rfloor + 1)}{N} \\
&\leq \frac{11}{2^k}
\end{aligned}$$

Entonces tomando $C = 11$, se tiene que $\xi_{2,3}$ es normal en base 2.

□

3. FALTA DE NORMALIDAD DE $\xi_{2,3}$ EN BASE 6

Teorema 3.1. *$\xi_{2,3}$ no es simplemente normal en base 6.*

Demostración del Teorema 3.1. Dado el número de Stoneham:

$$\xi_{2,3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3^m} 3^m}.$$

Para obtener los dígitos a partir de la posición $n - \textit{ésima}$ de su expansión en base 6 debemos multiplicar por 6^n:

$$Q_n = \{\xi_{2,3} 6^n\} = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6^n}{2^{3^m} 3^m} \right\}.$$

Queremos ver que ocurre con la aparición del dígito 0 en las posiciones alineadas a $n = 3^k$, para todo natural k.

Separamos los términos de la sumatoria,

$$Q_n = \left\{ \left\{ \sum_{m=0}^{\lfloor \log_3 n \rfloor} 2^{n-3^m} 3^{n-m} \right\} + \left\{ \sum_{m=\lfloor \log_3 n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{2^{3^m} 3^m} \right\} \right\}.$$

y observamos los dígitos que se encuentran a partir de la posición $n = 3^k$,

$$Q_{3^k} = \left\{ \left\{ \sum_{m=0}^{\lfloor \log_3 3^k \rfloor} 2^{3^k-3^m} 3^{3^k-m} \right\} + \left\{ \sum_{m=\lfloor \log_3 3^k \rfloor + 1}^{\infty} \frac{2^{3^k} 3^{3^k}}{2^{3^m} 3^m} \right\} \right\}$$

$$Q_{3^k} = \left\{ \left\{ \sum_{m=0}^{k} 2^{3^k-3^m} 3^{3^k-m} \right\} + \left\{ \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2^{3^k} 3^{3^k}}{2^{3^m} 3^m} \right\} \right\}.$$

Los primeros k términos de la sumatoria no aportan dígitos distintos que 0, ya que son números enteros, entonces su parte fraccionaria es 0.

$$\begin{aligned} &\text{m=0, } 2^{3^k-3^0} 3^{3^k-0} > 0 \\ &\text{m=1, } 2^{3^k-3^1} 3^{3^k-1} > 0 \\ &\qquad \cdots \\ &\text{m=k, } 2^{3^k-3^k} 3^{3^k-k} > 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\{2^{3^k-3^0} 3^{3^k-0}\} = 0$$

$$\{2^{3^k-3^1}3^{3^k-1}\} = 0$$
$$\dots$$
$$\{2^{3^k-3^k}3^{3^k-k}\} = 0$$

Por lo tanto, Q_{3^k} se puede escribir:

$$Q_{3^k} = \left\{ \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2^{3^k}3^n}{2^{3^m}3^m} \right\}.$$

y puede ser aproximada por su primer término. Para todo $k \geq 1$, se tiene:

$$\frac{(3/4)^{3^k}}{3^{k+1}} < Q_{3^k} < \frac{(3/4)^{3^k}}{3^{k+1}}\ (1 + 2\ 10^{-6})$$

Sea Z_{3^k} la cantidad de ceros que aparecen inmediatamente después de cada posición 3^k,

$$Z_{3^k} = \lfloor \log_6 \frac{1}{Q_{3^k}} \rfloor$$

Entonces,

$$3^k\ \log_6(4/3) + (k+1)\ \log_6 3 - 2 < Z_{3^k} < 3^k\ \log_6(4/3) + (k+1)\ \log_6 3$$

Sea F_k la frecuencia de ceros que aparecen hasta la posición $3^k + Z_{3^k}$.

$$F_k > \frac{\sum_{i=1}^{k} Z_{3^i}}{3^k + Z_{3^k}}$$

Para k suficientemente grande, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} Z_{3^i} &> 3/2\ (3^k - 1/3)\ \log_6(4/3) + \frac{k(k+3)}{2} \log_6 3 - 2k \\ &> 3/2\ 3^k\ \log_6(4/3) - 1/2\ \log_6(4/3) - 2k\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, para k suficientemente grande:

$$\begin{aligned}F_k &> \frac{3/2\ 3^k\ \log_6(4/3) - 1/2\ \log_6(4/3) - 2k}{3^k + 3^k\ \log_6(4/3) + (k+1)\ \log_6 3} \\ &= \frac{3/2\ \log_6(4/3) - 1/3^k(1/2\ \log_6(4/3) + 2k)}{1 + \log_6(4/3) + 1/3^k(k+1)\ \log_6 3} \\ &\geq \frac{3/2\ \log_6(4/3) - \epsilon}{1 + \log_6(4/3) + \epsilon} \\ &\geq 1/2\ \log_2(4/3) - 2\epsilon\end{aligned}$$

Pero sea $\beta = 1/2\log_2(4/3)$. El valor de β es aproximadamente 0,2075, un número mayor que $1/6 = 0{,}1\overline{6}$.

Esto significa que la frecuencia de ceros de la expansión de $\xi_{2,3}$ en base 6 es mayor que la esperada en cada intervalo de $3^k + Z_{3^k}$ de dígitos.

Entonces $\xi_{2,3}$ no es simplemente normal en base 6. $\square$

Bibliografía

[1] David H Bailey and Jonathan M Borwein. Non-normality of Stoneham constants. *The Ramanujan Journal*, 29(1-3):409–422, 2012.

[2] David H Bailey and Jonathan M Borwein. Normal numbers and pseudorandom generators. in honor of jonathan borwein 60th birthday. In *Computational and Analytical Mathematics*, pages 1–18. Springer, 2013.

[3] V. Becher and O. Carton. Normal numbers and computer science. In V. Berthé and M. Rigo, editors, *Sequences, Groups, and Number Theory*, Trends in Mathematics Series. Birkhäuser, Springer, 2018.

[4] V. Becher and O. Carton. Normal numbers and nested perfect necklaces. *Journal of Complexity*, page In press, 2019.

[5] V. Becher and P.A. Heiber. On extending de bruijn sequences. *Information Processing Letters*, 111:930–932, 2011.

[6] A. S. Besicovitch. The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1):146–156, Dec 1935.

[7] Émile Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 27:247–271, 1909.

[8] Jonathan M Borwein, David H Bailey, and Roland Girgensohn. *Experimentation in mathematics: Computational paths to discovery.* AK Peters/CRC Press, 2004.

[9] Y. Bugeaud. *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation.* Series: Cambridge Tracts in Mathematics 193. Cambridge University Press, 2012.

[10] D. G. Champernowne. The construction of decimals normal in the scale of ten. *Journal of the London Mathematical Society*, 8:254–260, 1933.

[11] Copeland and Erdös. Note on normal numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(10):857–861, 1946.

[12] I. J. Good. Normal recurring decimals. *Journal of the London Mathematical Society*, page 167–169, 1946.

[13] N M Korobov. On the distribution of digits in periodic fractions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 18(4):659–676, Apr 1972.

[14] N M Korobov. *Exponential sums and their applications.* kluwer 1992, 2013. Traducción del original Trigonometricheskie summy i ikh prilozheni$\sqrt{a}$. 1989 por Yu. N Shakhov. Publicado en Mathematics and its applications Soviet series v. 80.

[15] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience, New York, 1974.

[16] II Pjateckiı-Šapiro. On the distribution of the fractional parts of the exponential function. *Moskov. Gos. Ped. Inst. Uc. Zap*, 108:317–322, 1957.

[17] Wolfgang M Schmidt et al. On normal numbers. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(2):661–672, 1960.

[18] R. Stoneham. The reciprocals of integral powers of primes and normal numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(2):200–208, 1964.

[19] R. Stoneham. A study of 60,000 digits of the transcendental e. *The American Mathematical Monthly*, 72(5):483–500, 1965.

[20] R. Stoneham. A general arithmetic construction of transcendental non-liouville normal numbers from rational fractions. *Acta Arithmetica*, 16:239–254, 1970.

[21] R. Stoneham. On a new class of multiplicative pseudo-random number generators. *BIT Numerical Mathematics*, 10(4):481–500, Dec 1970.

[22] R. Stoneham. On (j, ε)-normality in the rational fractions. *Acta Arithmetica*, 16:221–238, 1970.

[23] R. Stoneham. On absolute (j, ε)-normality in the rational fractions with applications to normal numbers. *Acta Arithmetica*, 22:277–286, 1973.

[24] R. Stoneham. On the uniform ε-distribution of residues within the periods of rational fractions with applications to normal numbers. *Acta Arithmetica*, 22:371–389, 1973.

[25] E. Ugalde. An alternative construction of normal numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 12:165–177, 2000.