



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

# Secuencias maravillosas anidadas

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Franco Frizzo

Directora: Verónica Becher

Buenos Aires, 28 de diciembre de 2020

## SECUENCIAS MARAVILLOSAS ANIDADAS

Consideremos un alfabeto de  $b$  símbolos; las *secuencias maravillosas* de orden  $(n, m)$  son secuencias de símbolos tomados de este alfabeto tales que, al ser miradas circularmente, todas las secuencias de longitud  $n$  aparecen exactamente  $m$  veces. Las *secuencias maravillosas anidadas* de orden  $(n, m)$  son secuencias maravillosas que son a su vez la concatenación de  $b$  secuencias maravillosas anidadas de orden  $(n - 1, m)$ , salvo que  $n = 1$ .

Se sabe que siempre que  $n$  es menor o igual que  $m$  existen las secuencias maravillosas anidadas que cumplen que todas las secuencias de longitud  $n$  ocurren en *distintas posiciones* módulo  $m$ . ¿Es necesaria esta condición? Dicho de otro modo, ¿aparecen *nuevas* secuencias maravillosas anidadas de orden  $(n, m)$  si se elimina la restricción de que las ocurrencias sean en distintas posiciones módulo  $m$ ?

En esta tesis demostramos que para toda pareja  $n, m$  con  $m$  exponencial con respecto a  $n$  la respuesta es afirmativa, y presentamos un método de construcción. Además, demostramos que si  $n$  es mayor que  $2m$  no existen tales secuencias. Conjeturamos que, para todo  $n$  menor o igual que  $m + 1$ , las secuencias existen y presentamos algunos ejemplos. Por último, demostramos que utilizando secuencias maravillosas anidadas se puede construir números normales —en el sentido de Borel— que convergen a la normalidad con la máxima velocidad conocida hasta ahora.

**Palabras clave:** combinatoria de palabras, secuencias maravillosas anidadas, secuencias de De Bruijn, números normales, baja discrepancia.

## NESTED MARVELLOUS SEQUENCES

Consider an alphabet of  $b$  symbols; a *marvellous sequence* of order  $(n, m)$  is a sequence of symbols from this alphabet such that, when looked at in a circular fashion, every possible word of length  $n$  appears exactly  $m$  times. *Nested marvellous sequences* of order  $(n, m)$  are marvellous sequences that are also the concatenation of  $b$  nested marvellous sequences of order  $(n - 1, m)$ , unless  $n = 1$ .

It is known that, whenever  $n$  is less than or equal to  $m$ , there are marvellous sequences for which every occurrence of a word of length  $n$  is in a different position modulo  $m$ . Is this condition necessary? In other words, are there any *new* nested marvellous sequences of order  $(n, m)$  that only arise if the restriction that the occurrences are in different positions modulo  $m$  is lifted?

In this thesis we prove that for every pair  $n, m$  with  $m$  exponential in  $n$  the answer is affirmative, and present a constructive method. Also, we show that if  $n$  is greater than  $2m$  there are no such sequences. We conjecture that sequences exist for every  $n$  less than or equal to  $m + 1$ , and we give several examples. Finally, we prove that nested marvellous sequences can be used to construct normal numbers—in the Borel sense—that converge to normality at the fastest rate hitherto known.

**Keywords:** combinatorics on words, nested marvellous sequences, De Bruijn sequences, normal numbers, low discrepancy.

## AGRADECIMIENTOS

Gracias a mi familia, y especialmente a mis viejos, por el amor incondicional, por el apoyo, por la oportunidad de estudiar, y por la libertad de permitirme estudiar lo que me gusta.

Gracias a mis amigos y a mis amigas, por ser mi sostén y ayudarme a encontrar siempre motivos para seguir adelante, por hacer mi vida más feliz y por cada cosa que hemos aprendido juntos.

Gracias a mis compañeros y compañeras de estudio y de trabajos prácticos, por tanta sobredosis de café, por la adrenalina de las entregas al borde de los *deadlines*, por todas las alegrías y decepciones compartidas. Gracias a mis compañeros de cursada, por los mates en las aulas, en los labos, en la Noriega, en la hemeroteca o en las mesitas del DM, y por las birras en el bar de deportes después de los parciales, tuviéramos o no algo para celebrar.

Gracias a Franco por infinitas cosas, entre ellas, por haberme ayudado a darme cuenta de cuánto me gustaba esta carrera.

Gracias a Exactas, al DC y a toda su gente, por recibirme con las puertas abiertas y enseñarme todo lo que tenían para enseñar. Gracias a mi país y a su Universidad pública por hacerlo posible.

Gracias a mis docentes, a quienes tuve frente a mí en el aula, a quienes tuve a mi lado como colegas, y a quienes ocuparon alternativamente ambos lugares, por su inmensa dedicación y generosidad. Gracias a mis alumnos y alumnas, por darme la posibilidad de dar de nuevo una parte de lo que recibí.

Gracias a quienes emprendieron conmigo proyectos e ideas, a la gente con la que formé parte de la Com-Com, y a todos y todas los que ayudaron a que la facultad se convirtiera por tantos años en mi segundo hogar.

Gracias a Flavia y a Sergio por brindar su tiempo para ser jurados de esta tesis. Y gracias, infinitas gracias, a Vero, por la ayuda maravillosa que supo prestarme para llegar a buen puerto.

Nada me apasiona más en la vida que aprender; gracias por haberme permitido aprender algo de todos y todas ustedes. Este trabajo marca para mí el final de un camino inolvidable, y no hubiera sido capaz de llegar hasta acá sin su compañía.

## CONTENIDOS

1. Introducción . . . . .	1
2. Secuencias maravillosas anidadas . . . . .	3
2.1. Collares y secuencias de De Bruijn . . . . .	3
2.2. El teorema BEST . . . . .	5
2.3. Secuencias maravillosas . . . . .	6
2.4. Secuencias maravillosas anidadas . . . . .	9
3. Una familia maravillosa . . . . .	11
4. Conjeturas sobre la existencia de secuencias maravillosas anidadas . . . . .	15
4.1. Conjetura 1: Valores para los que no existen secuencias . . . . .	17
4.2. Conjetura 2: Valores para los que existen secuencias . . . . .	18
5. Una aplicación: secuencias maravillosas anidadas y normalidad . . . . .	21

## 1. INTRODUCCIÓN

Consideremos un alfabeto finito, y sea  $b$  la cantidad de símbolos de este alfabeto. Los collares —o palabras circulares— de De Bruijn de orden  $n$  son aquellos en las que todas las palabras de longitud  $n$  aparecen exactamente una vez. Los collares de De Bruijn de orden  $n$  tienen longitud  $b^n$ . Nicolaas Govert de Bruijn [6] dio esta definición al mismo tiempo que los caracterizó como circuitos eulerianos en los llamados grafos de De Bruijn, y contó cuántos hay.

Recientemente Alvarez, Becher, Ferrari y Yuhjtman [2] presentaron una generalización de los collares de De Bruijn, que se llaman *collares perfectos*. Una collar es *perfecto* de orden  $(n, m)$  si todas las palabras de longitud  $n$  ocurren exactamente  $m$  veces, y todas ellas en distintas posiciones módulo  $m$ . Los collares perfectos de orden  $(n, m)$  tienen longitud  $mb^n$ . En [2] los collares perfectos están caracterizados como circuitos eulerianos en los llamados grafos astutos, dándose una fórmula para la cantidad de collares perfectos de orden  $(n, m)$ .

Becher y Carton [4] definieron las *secuencias perfectas anidadas*; las mismas son palabras lineales —no circulares— que, miradas circularmente, son collares perfectos de orden  $(n, m)$  y, además, cuando  $n > 1$ , son la concatenación de  $b$  secuencias perfectas anidadas de orden  $(n - 1, m)$ . En [4] las secuencias perfectas anidadas son caracterizadas como el resultado de una transformación lineal que puede obtenerse a partir del triángulo de Pascal. Este trabajo también cuenta la cantidad de secuencias perfectas anidadas  $(n, m)$  sobre un alfabeto binario siempre que  $m$  es potencia de 2.

Becher y Carton propusieron definir las *secuencias maravillosas anidadas* de orden  $(n, m)$  soltando la restricción de que las  $m$  ocurrencias debieran ocurrir en posiciones distintas módulo  $m$ , dejando abierta la pregunta de si existen o no las secuencias maravillosas anidadas que no son perfectas anidadas.

Emprendimos este trabajo con el propósito de responder la pregunta formulada por Becher y Carton de si existen secuencias maravillosas anidadas que no son perfectas anidadas. En caso de responder positivamente, nos propusimos dar métodos de construcción que permitieran obtener secuencias de estas características, con el objetivo de contar la cantidad de secuencias maravillosas anidadas de orden  $(n, m)$  y, en caso de que esto no fuera posible, de poder brindar ejemplos que garantizaran su existencia.

Llegamos a una respuesta rotundamente afirmativa siempre que  $m$  sea divisible por  $b^{n-1}$ . Para estos casos, definimos una subfamilia de las secuencias maravillosas anidadas que llamamos *autosimilares*. Cabe señalar aquí que, dada su definición recursiva, toda secuencia maravillosa anidada de orden  $(n, m)$  es la concatenación de muchas secuencias maravillosas anidadas de orden  $(1, m)$ . Una secuencia *autosimilar* es aquella en la que todas estas secuencias de orden mínimo —a las que llamamos *átomos*— son iguales. Bajo las condiciones recién mencionadas, demostramos que las secuencias maravillosas anidadas autosimilares existen, que ninguna de ellas es perfecta anidada, y presentamos una fórmula cerrada para su cantidad.

Podemos notar aquí que, para entrar dentro del caso recién presentado, el valor de  $n$  debe ser relativamente pequeño comparado con el de  $m$ ; en particular,  $m \geq b^{n-1}$ , por lo que  $n$  debe ser a lo sumo del orden del logaritmo de  $m$  en base  $b$ .

En el otro extremo, se encuentran las duplas  $(n, m)$  para las que  $n$  es grande en

---

comparación con  $m$ . Si  $n$  es mayor que  $2m$ , demostramos que no es posible encontrar secuencias maravillosas anidadas; más aún, conjeturamos que las mismas dejan de existir tan pronto como  $n$  supera a  $m + 1$ .

Para los valores de  $n$  y  $m$  que quedan en medio de estos casos, conjeturamos que las secuencias maravillosas anidadas existen. El abordaje de estos casos lo realizamos mediante un análisis computacional, fijando un alfabeto binario. Si bien el tamaño de las secuencias crece muy rápidamente al incrementar  $n$ , dificultando el estudio de valores grandes de los parámetros, los casos que sí es posible estudiar nos permiten extraer conclusiones interesantes. En particular, podemos dar ejemplos de secuencias maravillosas anidadas que no son perfectas anidadas para varios valores de  $n$  y  $m$ , y conjeturar que la cantidad de las primeras es considerablemente superior a la de las últimas.

Un interés de las secuencias maravillosas anidadas es que se pueden usar para construir números normales —en el sentido de Borel— que tienen la propiedad de converger a la normalidad muy rápidamente. En este trabajo presentamos una construcción cuya velocidad de convergencia es la misma que la del número de Levin [9, Theorem 2], la máxima conocida por el momento.

El resto de este documento se estructura de la siguiente manera. El Capítulo 2 hace una introducción más rigurosa de las definiciones involucradas en este trabajo, la notación empleada, y los resultados previos que resultan relevantes. En el Capítulo 3 se presentan las secuencias autosimilares y se demuestra su existencia para los valores de  $n$  y  $m$  antes mencionados, presentando una fórmula para su cantidad. El Capítulo 4 brinda un análisis de la existencia de secuencias maravillosas anidadas para distintas combinaciones de  $n$  y  $m$ , integrando los resultados del capítulo anterior con los datos obtenidos a partir del estudio computacional de las mismas. El Capítulo 5 está dedicado a la construcción de números normales de convergencia rápida a partir de secuencias maravillosas anidadas.

## 2. SECUENCIAS MARAVILLOSAS ANIDADAS

Para comenzar, presentamos algunas definiciones sobre secuencias que son esenciales para comprender este trabajo, como así también algunos detalles de la notación que utilizamos a lo largo del mismo.

Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto fijo de  $b$  símbolos, con  $b \geq 2$ . En los ejemplos que brindamos a lo largo de este trabajo consideramos el alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , a menos que se indique lo contrario. Llamamos *palabra* o *cadena* a una secuencia finita de caracteres tomados de este alfabeto. Para referirnos a las posiciones que ocupan los caracteres dentro de una palabra, las numeramos comenzando en 1.

Definimos la función de rotación  $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$  como una transformación biyectiva que quita el último carácter de una palabra y lo coloca al principio. Es decir,

$$\sigma(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n) = \alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}.$$

La aplicación sucesiva de la función de rotación divide a las palabras en clases de equivalencia, que llamamos *collares*. Un collar es, entonces, el conjunto de todas las rotaciones posibles de una palabra, y lo notamos usando corchetes:

$$[w] = \{\sigma^n(w) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Por ejemplo,

$$[11100] = \{11100, 01110, 00111, 10011, 11001\};$$

$$[00000] = \{00000\}.$$

Un collar puede pensarse como una “palabra circular”, donde no importa cuál de los caracteres es el primero. A cada una de las palabras que forman parte de un collar la llamamos un *corte* del mismo.

El *período* de una palabra  $w$  es el menor  $n > 0$  tal que  $\sigma^n(w) = w$ . Por ejemplo, la cadena 11001100 tiene período 4, mientras que 11001101 tiene período 8. Notar que el período de una cadena necesariamente divide a su longitud. Además, es igual a la cantidad de cortes distintos que posee el collar al que pertenece la palabra.

Una *subcadena* es una secuencia de caracteres consecutivos dentro de una palabra. En ocasiones, decimos que una palabra *aparece* en otra palabra para referirnos a que es una subcadena. Por ejemplo, 101 y 1001 aparecen en (o son subcadenas de) la palabra 01010011. Decimos que una palabra *aparece circularmente* en otra si aparece en alguna palabra del collar correspondiente. Por ejemplo, 110 no aparece en la palabra anterior, pero sí aparece circularmente. En este caso, también podemos decir directamente que la palabra aparece en el collar; en el ejemplo anterior, diríamos que 110 aparece en  $[01010011]$ .

Para referirnos a la concatenación de dos palabras  $w_1$  y  $w_2$  escribimos sencillamente  $w_1 w_2$ ; para la concatenación de  $n$  copias de una misma palabra  $w$ , usamos la notación  $w^n$ .

### 2.1. Collares y secuencias de De Bruijn

En [6], Nicolaas G. de Bruijn realizó un detallado estudio de una clase de collares que han pasado a ser conocidos con su nombre.

**Definición 1** (Collar de De Bruijn). Un *collar de De Bruijn* de orden  $n$  (o collar  $n$ -de De Bruijn) es un collar de longitud  $b^n$  en el que cada una de las posibles palabras de longitud  $n$  aparece exactamente una vez.

*Ejemplos.*

- El collar [11000101] es un collar de De Bruijn de orden 3.
- El collar [0101100111101000] es un collar de De Bruijn de orden 4.

De Bruijn presenta una bonita caracterización de estos collares como circuitos en una familia de digrafos que ha dado en conocerse como digrafos de De Bruijn. El digrafo de De Bruijn de orden  $n$  tiene como vértices todas las posibles palabras de longitud  $n$ ; existe una arista entre dos palabras si los últimos  $n - 1$  caracteres de la primera coinciden con los primeros  $n - 1$  caracteres de la segunda. Utilizamos la notación  $G_n$  para referirnos al digrafo de De Bruijn de orden  $n$ .

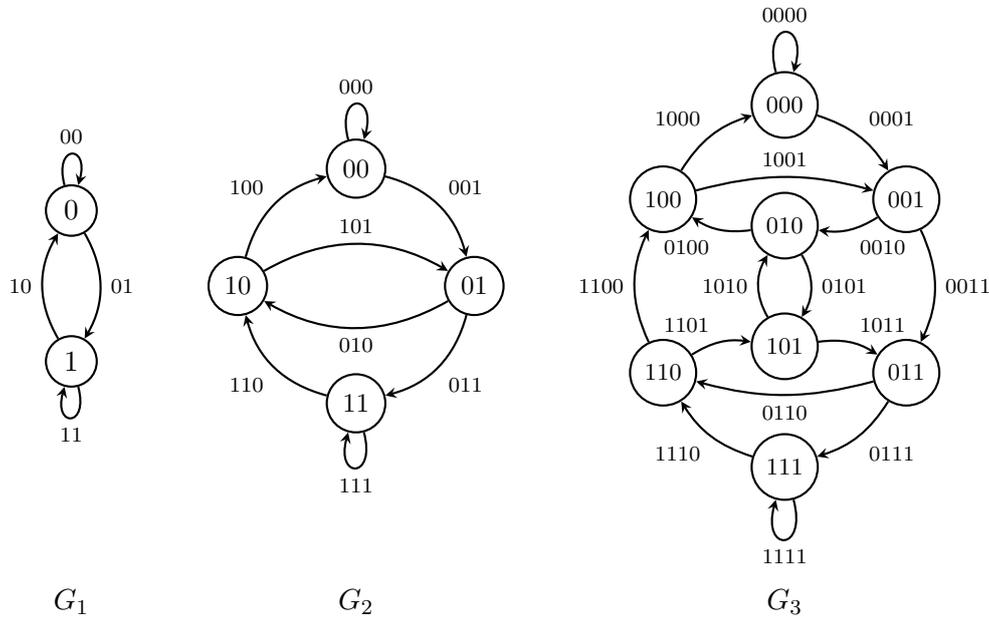


Fig. 2.1: Digrafos de De Bruijn de orden 1, 2 y 3 para  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ .

Cada collar de De Bruijn de orden  $n$  se corresponde unívocamente con un circuito hamiltoniano en el digrafo  $G_n$ , es decir, un camino cerrado que visita cada vértice exactamente una vez. El collar se conforma concatenando en orden el primer carácter de cada uno de los vértices visitados por el circuito.

Una propiedad muy interesante de la familia de digrafos de De Bruijn es que cada  $G_n$  es el grafo de línea de  $G_{n-1}$ ; es decir,  $G_n$  puede construirse tomando como vértices el conjunto de aristas de  $G_{n-1}$  y colocando una arista entre cada par de vértices si las aristas correspondientes en  $G_{n-1}$  son adyacentes. Esto quiere decir que los circuitos hamiltonianos en  $G_n$  se corresponden con circuitos eulerianos en  $G_{n-1}$ , esto es, caminos cerrados que utilizan cada arista exactamente una vez.

De Bruijn utiliza esta naturaleza recursiva de la familia de digrafos  $G_n$  para demostrar una fórmula cerrada para la cantidad de collares de De Bruijn de orden  $n$  existentes, que en

el caso de un alfabeto binario es exactamente  $\frac{2^{2^n-1}}{2^n}$ . Este resultado fue luego generalizado en [1] para alfabetos de tamaño arbitrario, donde la cantidad de collares es  $\frac{(b!)^{b^n-1}}{b^n}$ .

Cabe señalar que, debido a sus características, la forma más natural de presentar la definición de los collares de De Bruijn es justamente en términos de collares, o palabras circulares. No obstante —y esta situación se repite para otras definiciones similares que aparecen más adelante en este trabajo—, en ocasiones interesa tener en cuenta cada corte particular de un collar como un elemento distinto. Por eso, en adelante, utilizaremos el término *secuencia de De Bruijn* para referirnos a un corte de un collar de De Bruijn<sup>1</sup>.

¿Cuántas secuencias de De Bruijn de orden  $n$  existen para cada  $n$ ? Se puede notar que el período de una secuencia  $n$ -de De Bruijn es necesariamente igual a su longitud,  $b^n$ ; de lo contrario, la palabra de longitud  $n$  con la que comienza volvería a aparecer más adelante. Luego, cada collar  $n$ -de De Bruijn tiene  $b^n$  cortes distintos, con lo cual la cantidad de secuencias  $n$ -de De Bruijn es exactamente  $(b!)^{b^n-1}$ .

## 2.2. El teorema BEST

El teorema BEST es un resultado en teoría de grafos que permite determinar la cantidad de circuitos eulerianos en un multidigrafo<sup>2</sup>. Recibe su nombre por las iniciales de sus descubridores, De Bruijn, Van Aardenne-Ehrenfest, Smith y Tutte.

**Teorema** (BEST, [1], [10]). *Sea  $G$  un multidigrafo euleriano con vértices  $v_1, \dots, v_n$ . La cantidad de circuitos eulerianos en  $G$  está dada por*

$$ec(G) = t_k \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!,$$

donde  $d_i$  es el grado de salida de  $v_i$  y  $t_k$  es la cantidad de árboles generadores de  $G$  orientados hacia un vértice  $v_k$  arbitrario.

Para obtener la cantidad de árboles generadores en un multidigrafo euleriano, puede usarse a su vez el teorema de Kirchoff (también conocido como teorema Matrix-Tree), que permite calcularla a partir de su *matriz laplaciana*, definida como

$$L(G) = \left\{ \begin{array}{cc} d_i - d_{ii} & \text{si } i = j \\ -d_{ij} & \text{si } i \neq j \end{array} \right\}_{i,j=1,\dots,n},$$

donde  $d_i$  es el grado de salida de  $v_i$  y  $d_{ij}$  es la cantidad de aristas que van de  $i$  a  $j$ .

**Teorema** (Kirchoff, [7], [10]). *Sea  $G$  un multidigrafo con vértices  $v_1, \dots, v_n$ . La cantidad  $t_i$  de árboles generadores orientados hacia un vértice  $v_i$  es el  $i$ -ésimo cofactor de la matriz  $L(G)$ , es decir,*

$$t_i = \det(L_i(G)),$$

siendo  $L_i(G)$  la matriz que se obtiene al omitir la fila y la columna  $i$ -ésimas de  $L(G)$ .

<sup>1</sup> Queremos hacer énfasis en este punto, ya que el término *secuencia de De Bruijn* es utilizado de forma ambigua en la literatura. Para algunos autores, una secuencia de De Bruijn de orden  $n$  es una secuencia de longitud  $b^n + n - 1$ , donde cada palabra posible de longitud  $n$  aparece exactamente una vez, sin considerar apariciones circulares. Notar, sin embargo, que las secuencias de De Bruijn así entendidas están en correspondencia uno a uno con las que definimos aquí, con la única diferencia de que en ellas los primeros  $n - 1$  caracteres aparecen repetidos al final.

<sup>2</sup> Consideramos que las aristas de un multidigrafo tienen identidad propia, es decir, que las aristas que conectan los mismos vértices son distinguibles entre sí.

En multidigrafos eulerianos, el vértice que se elija resulta irrelevante, ya que la cantidad de árboles generadores hacia cualquiera de ellos es invariante; en otras palabras, todos los cofactores de  $L(G)$  son iguales. En el caso concreto del digrafo de De Bruijn de orden  $n$ , tenemos que [1] para cualquier  $k = 1, \dots, 2^n$ ,

$$t_k = \frac{b^{b^n}}{b^{n+1}},$$

lo cual, junto al hecho de que posee exactamente  $b^n$  vértices y el grado de salida de todos ellos es exactamente  $b$ , permite utilizar el teorema BEST para contabilizar la cantidad de circuitos eulerianos:

$$\begin{aligned} \text{ec}(G_n) &= t_k \prod_{i=1}^{b^n} (d_i - 1)! \\ &= \frac{b^{b^n}}{b^{n+1}} ((b-1)!)^{b^n} \\ &= \frac{(b!)^{b^n}}{b^{n+1}}. \end{aligned}$$

Notar que esta fórmula se corresponde exactamente con la dada en la sección anterior para la cantidad de collares de De Bruijn de orden  $n+1$ .

### 2.3. Secuencias maravillosas

A continuación presentamos una generalización de las secuencias de De Bruijn, que denominaremos *secuencias maravillosas*.

**Definición 2** (Secuencia maravillosa). Sea un alfabeto de  $b$  símbolos. Un *collar*  $(n, m)$ -*maravilloso* es un collar de longitud  $mb^n$  en el que cada una de las posibles palabras de longitud  $n$  aparece exactamente  $m$  veces.

Una *secuencia*  $(n, m)$ -*maravillosa* es un corte de un collar  $(n, m)$ -maravilloso.

*Ejemplos.*

- Las siguientes secuencias son  $(2, 4)$  y  $(3, 3)$ -maravillosas, respectivamente:

$$1110000111010010; \quad 000111110110110100100100.$$

- Todas las secuencias de De Bruijn de orden  $n$  son ejemplos de secuencias  $(n, 1)$ -maravillosas.

Una pregunta inmediata que surge de esta definición es cómo puede extenderse a los collares maravillosos la caracterización como circuitos eulerianos presentada para los collares de De Bruijn, y si es posible utilizar este enfoque para determinar la cantidad de secuencias maravillosas existentes para cada valor de  $n$  y  $m$ , lo cual resulta de especial interés más adelante en este trabajo.

Un enfoque posible consiste en definir una familia de *multidigrafos de De Bruijn*. Llamamos multidigrafo de De Bruijn de orden  $n$  y grado  $m$  al multidigrafo  $G_n^m$  que se obtiene a partir del digrafo de De Bruijn de orden  $n$  si se replica  $m$  veces cada arista. Con esta definición, es inmediato comprobar que todo circuito euleriano en  $G_n^m$  (o hamiltoniano

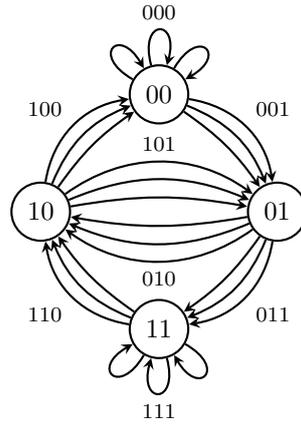


Fig. 2.2: Multidigrafo de De Bruijn de orden 2 y grado 3 para  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ .

en  $G_{n+1}^m$ ) determina de manera unívoca un collar  $(n+1, m)$ -maravilloso. Recordemos que cada arista de  $G_n$  puede asociarse con una palabra distinta de longitud  $n+1$ ; como en  $G_n^m$  existen  $m$  copias de cada arista, una secuencia obtenida a partir de un circuito euleriano contendrá cada una de estas palabras exactamente  $m$  veces.

No obstante, esto no vale a la inversa, ya que si  $m > 1$ , todo collar  $(n+1, m)$ -maravilloso se corresponde con más de un ciclo euleriano en  $G_n^m$ . Esto se debe a que las  $m$  apariciones de una palabra de longitud  $n+1$  en un collar son indistinguibles, por lo que las  $m$  aristas respectivas pueden ser permutadas, obteniendo un nuevo ciclo euleriano que se corresponde con el mismo collar. Concretamente, como existen  $m!$  maneras de permutar cada conjunto de  $m$  aristas, se tiene un total de  $(m!)^{b^{n+1}}$  maneras distintas de representar un collar  $(n+1, m)$ -maravilloso con un circuito euleriano.

Si se tiene este hecho en consideración, es posible aplicar el teorema BEST para contabilizar la cantidad de circuitos eulerianos en los multidigrafos de De Bruijn y así obtener una fórmula cerrada para la cantidad de collares maravillosos. Sin embargo, si lo que se desea contar son las secuencias maravillosas —en lugar de los collares—, surge una nueva dificultad, ya que a diferencia de los collares de De Bruijn, el período de un collar maravilloso no es invariante, es decir, la cantidad de secuencias distintas que pueden obtenerse realizando cortes a un collar maravilloso es diferente para cada collar.

Si bien existen formas de incorporar este nuevo elemento en los cálculos, por simplicidad, decidimos buscar un enfoque alternativo que permitiera caracterizar directamente las secuencias maravillosas, utilizando la noción de *circuito  $\pi$ -euleriano* presentada por Farrell y Levine en [7].

**Definición 3** (Circuito  $\pi$ -euleriano, [7]). Sea  $G$  un digrafo con vértices  $v_1, \dots, v_n$ , y sea  $\pi \in \mathbb{N}^n$  un vector con valores estrictamente positivos. Un circuito  $\pi$ -euleriano en  $G$  es un circuito donde cada arista  $(v_i, v_j)$  se utiliza exactamente  $\pi_j$  veces.

Esta noción generaliza la de circuito euleriano, ya que estos son circuitos  $\pi$ -eulerianos con  $\pi = (1, \dots, 1)$ . Partiendo de aquí, los autores presentan la siguiente generalización del teorema BEST.

**Teorema** (BEST generalizado, [7]). Sea  $G$  un multidigrafo fuertemente conexo con vértices  $v_1, \dots, v_n$ , y sea  $\pi \in \mathbb{N}^n$ . Existen circuitos  $\pi$ -eulerianos en  $G$  si y solo si

$$L(G) \cdot \pi = \vec{0},$$

en cuyo caso la cantidad de estos circuitos que comienzan con una arista  $e$  determinada es

$$\text{ec}_\pi(G, e) = t_e \prod_{i=1}^n \frac{(d_i \pi_i - 1)!}{(\pi_i!)^{d_i - 1} (\pi_i - 1)!},$$

donde  $d_i$  es el grado de salida de  $v_i$ , y  $t_e$  es la cantidad de árboles generadores de  $G$  orientados hacia la cola de  $e$ .

El interés de esta generalización para nuestro problema particular radica en que una secuencia  $(n + 1, m)$ -maravillosa puede identificarse de forma unívoca con un circuito  $\pi$ -euleriano en  $G_n$  tomando  $\pi = (m, \dots, m)$  y fijando cuál será su arista inicial. Esto nos permite enunciar y demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 1.** Sean  $n, m > 0$ . La cantidad de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas es exactamente

$$\left( \frac{(bm)!}{(m!)^b} \right)^{b^{n-1}}.$$

*Demostración.* Consideramos primero el caso en que  $n > 1$ . En este caso, como se mencionó anteriormente, fijando  $\pi = (m, \dots, m)$ , basta con determinar la cantidad de circuitos  $\pi$ -eulerianos en  $G_{n-1}$  para cada una de las posibles elecciones de arista inicial. Sabemos que existen circuitos  $\pi$ -eulerianos en  $G_{n-1}$ , ya que se trata de un digrafo euleriano, por lo que basta con tomar un circuito euleriano y repetirlo  $m$  veces para obtener un ejemplo. Es decir que, en virtud del teorema BEST generalizado, la cantidad de secuencias maravillosas será igual a

$$\sum_e \text{ec}_\pi(G_{n-1}, e) = \sum_e t_e \prod_{i=1}^{b^{n-1}} \frac{(d_i \pi_i - 1)!}{(\pi_i!)^{d_i - 1} (\pi_i - 1)!},$$

donde la suma se realiza sobre todas las aristas del digrafo  $G_{n-1}$ .

Se sabe que la cantidad de aristas de  $G_{n-1}$  es  $b^n$ ; por otro lado, como ya se mencionó anteriormente, la cantidad de árboles generadores orientados hacia cualquiera de los vértices de  $G_{n-1}$  es  $\frac{b^{b^{n-1}}}{b^n}$ , de donde se sigue que  $\sum_e t_e = b^{b^{n-1}}$ . Reemplazando en la expresión anterior, se obtiene

$$b^{b^{n-1}} \prod_{i=1}^{b^{n-1}} \frac{(d_i \pi_i - 1)!}{(\pi_i!)^{d_i - 1} (\pi_i - 1)!}.$$

Dado que  $G_{n-1}$  es un digrafo regular cuyos vértices tienen todos grado de salida  $b$ , y dado que  $\pi_i = m$  para todo  $i = 1, \dots, b^{n-1}$ , la expresión anterior equivale a

$$\begin{aligned} b^{b^{n-1}} \left( \frac{(bm - 1)!}{(m!)^{b-1} (m - 1)!} \right)^{b^{n-1}} &= \left( \frac{b(bm - 1)!}{(m!)^{b-1} (m - 1)!} \right)^{b^{n-1}} \\ &= \left( \frac{bm(bm - 1)!}{(m!)^{b-1} m(m - 1)!} \right)^{b^{n-1}} \\ &= \left( \frac{(bm)!}{(m!)^b} \right)^{b^{n-1}}. \end{aligned}$$

Resta demostrar el caso en que  $n = 1$ . Para esto, basta observar que una secuencia  $(1, m)$ -maravillosa es una secuencia de longitud  $bm$  en donde cada uno de los  $b$  símbolos del alfabeto aparece exactamente  $m$  veces. Por lo tanto, para construir una de estas secuencias,

en primer lugar es necesario seleccionar cuáles  $m$  de entre las  $bm$  posiciones corresponderán al primer símbolo; luego, cuáles  $m$  de entre las  $(b-1)m$  posiciones restantes corresponderán al segundo símbolo; en tercer lugar, cuáles  $m$  de entre las  $(b-2)m$  posiciones restantes corresponderán al tercer símbolo, y así sucesivamente. Es decir, la cantidad de formas distintas de construir una secuencia  $(1, m)$ -maravillosa puede expresarse como el siguiente producto de números combinatorios:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{b-1} \binom{(b-i)m}{m} &= \prod_{i=0}^{b-1} \frac{((b-i)m)!}{m!((b-i-1)m)!} \\ &= \frac{(bm)!}{m!((b-1)m)!} \cdot \frac{((b-1)m)!}{m!((b-2)m)!} \cdot \frac{((b-2)m)!}{m!((b-3)m)!} \cdots \frac{m!}{m!0!} \\ &= \frac{(bm)!}{(m!)^b}, \end{aligned}$$

lo cual es consistente con la fórmula presentada.  $\square$

## 2.4. Secuencias maravillosas anidadas

Las secuencias maravillosas que acabamos de presentar son primas cercanas de las *secuencias perfectas*. Una secuencia  $(n, m)$ -perfecta es una secuencia de longitud  $mb^n$  en la que cada posible palabra de longitud  $n$  aparece circularmente exactamente  $m$  veces, al igual que en las secuencias maravillosas, pero con la restricción adicional de que cada una de estas apariciones se produce en una posición distinta módulo  $m$ . Por ejemplo, la siguiente es una secuencia  $(2, 4)$ -perfecta:

0000111001011011.

Puede verse una presentación de estas secuencias en [2], junto a una caracterización de las mismas en términos de una modificación de los digrafos de De Bruijn, los denominados grafos astutos, y una fórmula para su cantidad.

En [4], Becher y Carton definen las *secuencias perfectas anidadas*. Una secuencia  $(n, m)$ -perfecta anidada es una secuencia perfecta de orden  $(n, m)$  que además, si  $n > 1$ , es la concatenación de  $b$  secuencias perfectas anidadas de orden  $(n-1, m)$ . Por ejemplo, la secuencia recién mostrada no es  $(2, 4)$ -perfecta anidada, ya que sus dos mitades no son secuencias  $(1, 4)$ -perfectas; notar que en 00001110, la palabra 0 aparece cinco veces, mientras que la palabra 1 aparece solo tres veces. Sin embargo, al rotarla una posición, se obtiene el siguiente ejemplo de secuencia  $(2, 4)$ -perfecta anidada:

10000111 00101101.

Los autores de [4] brindan un método matricial que permite generar todas estas secuencias basado en el triángulo de Pascal, siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones, en particular que  $b$  sea un número primo,  $m$  una potencia de 2 y  $n \leq m$ . También brindan una fórmula cerrada para la cantidad de secuencias  $(n, m)$ -perfectas anidadas en estos casos.

Todo esto motiva una definición análoga, pero considerando secuencias maravillosas en lugar de perfectas: las *secuencias maravillosas anidadas*, el principal objeto de estudio de este trabajo.

**Definición 4.** Sea un alfabeto de  $b$  símbolos. Una *secuencia  $(n, m)$ -maravillosa anidada* es una secuencia de longitud  $mb^n$  para la que se cumple simultáneamente que

- (a) es una secuencia  $(n, m)$ -maravillosa; y
- (b) si  $n > 1$ , es la concatenación de  $b$  secuencias  $(n - 1, m)$ -maravillosas anidadas.

Alternativamente, una secuencia es  $(n, m)$ -maravillosa anidada si, para todo  $n'$  tal que  $1 \leq n' \leq n$ , toda subsecuencia de longitud  $mb^{n'}$  que comienza en una posición congruente a 1 módulo  $mb^{n'}$  es  $(n', m)$ -maravillosa.

*Ejemplos.* Las siguientes secuencias son  $(3, 3)$ ,  $(2, 4)$  y  $(1, 5)$ -maravillosas anidadas, respectivamente:

000111 011001 000111 101010;  
 00010111 10100110;  
 0011101010.

Una observación que podemos hacer a partir de esta definición es que, si miramos el más profundo de sus niveles de anidación, cada secuencia  $(n, m)$ -maravillosa anidada está conformada por la concatenación de  $b^{n-1}$  secuencias  $(1, m)$ -maravillosas anidadas, cada una de ellas de longitud  $bm$ . En otras palabras, si fijamos un valor de  $m$ , todas las secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas —para cualquier valor de  $n$ — están formadas por los mismos “ladrillos” básicos, las secuencias  $(1, m)$ -maravillosas anidadas. Para estas secuencias utilizamos en adelante el nombre de  $m$ -átomos. Dado que cuando  $n = 1$  las definiciones de secuencia maravillosa y maravillosa anidada conciden, los  $m$ -átomos son exactamente las secuencias  $(1, m)$ -maravillosas; esto implica (según la Proposición 1) que la cantidad de  $m$ -átomos es exactamente  $\frac{(bm)!}{(m!)^b}$ .

A modo ilustrativo, estos son los 20 átomos de orden 3 que existen para  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ :

1. 000111	2. 001011	3. 001101	4. 001110	5. 010011
6. 010101	7. 010110	8. 011001	9. 011010	10. 011100
11. 100011	12. 100101	13. 100110	14. 101001	15. 101010
16. 101100	17. 110001	18. 110010	19. 110100	20. 111000

El ejemplo de secuencia  $(3, 3)$ -maravillosa anidada presentado más arriba puede pensarse, entonces, como la concatenación de los átomos 1, 8, 1 y 15, en ese orden.

De las definiciones presentadas se desprende fácilmente que todas las secuencias perfectas anidadas son maravillosas anidadas. Por lo tanto, la existencia de secuencias maravillosas anidadas de orden  $(n, m)$  está fuera de cuestión siempre que existen secuencias  $(n, m)$ -perfectas anidadas. Ahora bien, en estos casos, ¿existen secuencias maravillosas anidadas *que no sean* perfectas anidadas? Esta es la pregunta central que buscamos responder en lo que resta de este trabajo.

### 3. UNA FAMILIA MARAVILLOSA

Esta sección tiene por objetivo brindar una demostración del siguiente teorema de existencia, presentando un método constructivo para una familia particular de secuencias maravillosas anidadas. Al igual que en la sección anterior,  $b$  hace referencia a la cantidad de símbolos del alfabeto, y los ejemplos presentados son para el alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ .

**Teorema 1.** *Si  $b^{n-1}$  divide a  $m$ , existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que no son perfectas anidadas.*

El primer paso para demostrar este teorema es presentar la familia de secuencias para la que daremos un método constructivo; se trata de las que llamamos *secuencias autosimilares*.

**Definición 5.** Una secuencia  $x$  es  $(n, m)$ -autosimilar si consiste en  $b^{n-1}$  repeticiones de una misma secuencia de longitud  $bm$ .

*Ejemplos.* La secuencia

$$01110110 \ 01110110 \ 01110110 \ 01110110$$

es  $(3, 4)$ -autosimilar. La secuencia

$$110000101011 \ 110000101011$$

es  $(2, 6)$ -autosimilar; además, es  $(2, 6)$ -maravillosa anidada.

Nos interesa estudiar las secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que, además, son autosimilares. Podemos notar que las mismas consisten precisamente en la concatenación de  $b^{n-1}$  copias de un mismo  $m$ -átomo.

La proposición que enunciamos a continuación nos permite caracterizar a las secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas autosimilares a partir de una propiedad verificable de los átomos que les dan origen. Gracias a este resultado, podemos determinar para qué valores de  $(n, m)$  existen este tipo de secuencias, cuál es su cantidad, y presentar un método para su construcción.

**Proposición 2.** *Sea  $x = \omega^{b^{n-1}}$  una secuencia  $(n, m)$ -autosimilar. La secuencia  $x$  es  $(n, m)$ -maravillosa anidada si y solo si  $b^{n-1}$  divide a  $m$  y  $\omega$  es una secuencia  $(n, \frac{m}{b^{n-1}})$ -maravillosa.*

*Ejemplos.*

- El 4-átomo 01011100 es  $(1, 4)$ ,  $(2, 2)$  y  $(3, 1)$ -maravilloso. Por lo tanto, las siguientes tres secuencias son  $(1, 4)$ ,  $(2, 4)$  y  $(3, 4)$ -maravillosas anidadas, respectivamente:

$$01011100; \quad 01011100 \ 01011100; \quad 01011100 \ 01011100 \ 01011100 \ 01011100.$$

- El 4-átomo 10001101 es  $(1, 4)$  y  $(2, 2)$ -maravilloso, pero no  $(3, 1)$ -maravilloso. Por lo tanto, las siguientes dos secuencias son  $(3, 1)$  y  $(3, 2)$ -maravillosas anidadas, respectivamente:

$$10001101; \quad 10001101 \ 10001101,$$

pero la secuencia

10001101 10001101 10001101 10001101

no es  $(3, 4)$ -maravillosa anidada.

El siguiente lema se presenta a modo de resultado intermedio para demostrar la Proposición 2.

**Lema 3.** *Sea  $x$  una secuencia  $(n, m)$ -maravillosa. Para todo  $k$  tal que  $0 \leq k < n$ , la secuencia  $x$  es  $(n - k, b^k m)$ -maravillosa.*

*Ejemplo.* La secuencia  $(3, 4)$ -maravillosa

00001111 00101011 00101101 11100010,

es también  $(2, 8)$  y  $(1, 16)$ -maravillosa.

*Demostración.* Consideremos una palabra  $w$  cualquiera de longitud  $n - k$ . Para extender  $w$  a una palabra de longitud  $n$  debe agregársele un sufijo de longitud  $k$ , por lo que existen  $b^k$  formas distintas de hacerlo. Todas estas palabras que resultan de extender  $w$  aparecen exactamente  $m$  veces en  $x$ , ya que esta es una secuencia  $(n, m)$ -maravillosa. Luego,  $w$  aparece exactamente  $b^k m$  veces en  $x$ ,  $m$  veces como prefijo de una palabra de longitud  $n$  distinto. Por lo tanto,  $x$  es una secuencia  $(n - k, b^k m)$ -maravillosa.  $\square$

Habiendo probado este resultado, estamos en condiciones de presentar una demostración para la Proposición 2.

*Demostración de la Proposición 2.* Si partimos del supuesto de que  $b^{n-1}$  no divide a  $m$ , o bien que  $\omega$  no es una secuencia  $(n, \frac{m}{b^{n-1}})$ -maravillosa, podemos concluir que existe una palabra  $w$  de longitud  $n$  que aparece circularmente en  $\omega$  una cantidad de veces diferente de  $\frac{m}{b^{n-1}}$ . Por lo tanto, la cantidad de veces que  $w$  aparece circularmente en  $x = \omega^{b^{n-1}}$  es diferente de  $m$ . Es decir, en este caso,  $x$  no puede ser una secuencia  $(n, m)$ -maravillosa anidada.

Para demostrar la implicación opuesta, supongamos que  $b^{n-1}$  divide a  $m$  y  $\omega$  es una secuencia  $(n, \frac{m}{b^{n-1}})$ -maravillosa. Demostraremos que para todo  $n'$  tal que  $1 \leq n' \leq n$ , la secuencia  $\omega^{b^{n'-1}}$  es  $(n', m)$ -maravillosa anidada. En el caso particular  $n' = n$ , esto equivale a decir que  $x$  es una secuencia  $(n, m)$ -maravillosa anidada.

En el caso  $n' = 1$ , el resultado se sigue del Lema 3 que, tomando  $k = n - 1$ , nos permite afirmar que  $\omega$  es una secuencia  $(1, m)$ -maravillosa.

Si  $n'$  es tal que  $1 < n' \leq n$ , supongamos probado el resultado para  $n' - 1$ . Esto quiere decir que, siendo  $y = \omega^{b^{n'-2}}$ ,  $y$  es una secuencia  $(n' - 1, m)$ -maravillosa anidada. Para probar que  $\omega^{b^{n'-1}} = y^b$  es  $(n', m)$ -maravillosa anidada, solo resta ver que es  $(n', m)$ -maravillosa, ya que es la concatenación de  $b$  secuencias  $(n' - 1, m)$ -maravillosas anidadas.

Empleando otra vez el Lema 3, esta vez para  $k = n - n'$ , tenemos que  $\omega$  es una secuencia  $(n', \frac{m}{b^{n'-1}})$ -maravillosa. Esto significa que la cantidad de apariciones de cada palabra de longitud  $n'$  en  $\omega$ , mirada circularmente, es  $\frac{m}{b^{n'-1}}$ ; y por consiguiente, es  $m$  en  $\omega^{b^{n'-1}}$ , por lo que esta última secuencia es  $(n', m)$ -maravillosa anidada.  $\square$

Dado que conocemos la cantidad de secuencias maravillosas que existen para cualesquiera valores de  $n$  y  $m$ , podemos enunciar el siguiente corolario.

**Corolario 4.** Sean  $n, m > 0$ . Si  $b^{n-1}$  divide a  $m$ , sea  $k = \frac{m}{b^{n-1}}$ ; existen  $\left(\frac{(bk)!}{(k!)^b}\right)^{b^{n-1}}$  secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que son autosimilares. De lo contrario, no existe ninguna tal secuencia.

*Demostración.* Se sigue de forma inmediata de la caracterización dada por la Proposición 2 y la fórmula para la cantidad de secuencias maravillosas presentada en la Proposición 1.  $\square$

Las Tablas 3.1 y 3.2 muestran las cantidades de secuencias maravillosas anidadas autosimilares para los primeros valores de  $n$  y  $m$ , considerando alfabetos de 2 y de 3 símbolos, respectivamente.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	6	20	70	252	924	3.432	12.870	48.620
2	0	4	0	36	0	400	0	4.900	0
3	0	0	0	16	0	0	0	1.296	0
4	0	0	0	0	0	0	0	256	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 3.1: Cantidad de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas autosimilares considerando un alfabeto de 2 símbolos.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	90	1.680	34.650	756.756	17.153.136	399.072.960	$9,5 \times 10^9$	$2,3 \times 10^{11}$
2	0	0	216	0	0	729.000	0	0	$4,7 \times 10^9$
3	0	0	0	0	0	0	0	0	10.077.696
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 3.2: Cantidad de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas autosimilares considerando un alfabeto de 3 símbolos.

Puede notarse que, debido a la condición de que  $b^{n-1}$  divida a  $m$  necesaria para la existencia de este tipo de secuencias, el menor  $m$  para el cual la cantidad de secuencias no es 0, dado un  $n$  fijo, es  $m = b^{n-1}$ . Este caso es especialmente interesante ya que los átomos que se utilizarán son secuencias  $(n, 1)$ -maravillosas, es decir, secuencias  $n$ -de De Bruijn, para cuya generación se han estudiado ya diversos métodos.

Sabemos ya bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas autosimilares. El sencillo resultado siguiente nos permite asegurar también que estas secuencias no son secuencias perfectas.

**Proposición 5.** Una secuencia  $(n, m)$ -autosimilar con  $n > 1$  no puede ser  $(n, m)$ -perfecta.

*Demostración.* Dado que la secuencia se construye repitiendo al menos dos veces una misma secuencia de longitud  $bm$ , la palabra de longitud  $n$  que aparece en la posición 1 de la secuencia aparece nuevamente en la posición  $bm + 1$ . Esto contradice la definición de secuencia perfecta, ya que cada aparición de dicha palabra debería comenzar en una posición distinta módulo  $m$ .  $\square$

---

La demostración del Teorema 1 para  $n > 1$  se sigue ahora de manera inmediata a partir del Corolario 4 y de la Proposición 5.

Para  $n = 1$ , basta con exhibir un ejemplo. Sea  $w = 01 \dots (b - 1)$ . La secuencia  $w^m$  es  $(1, m)$ -maravillosa anidada, ya que cada una de las  $b$  palabras de longitud 1 aparece exactamente  $m$  veces. Sin embargo, cada palabra aparece todas las veces en posiciones con la misma congruencia módulo  $m$ . Por lo tanto  $w^m$  no es una secuencia perfecta.

#### 4. CONJETURAS SOBRE LA EXISTENCIA DE SECUENCIAS MARAVILLOSAS ANIDADAS

¿Cuáles son los valores de  $n$  y  $m$  para los cuáles existen secuencias maravillosas anidadas? ¿Cuál es la cantidad de tales secuencias, en los casos en que sí existen? ¿Cuántas de ellas, además, no son perfectas anidadas? En esta sección presentamos las respuestas a las que pudimos arribar en el curso de este trabajo, como así también algunas conjeturas acerca de los casos para los que no contamos con certezas. En adelante, a menos que se indique lo contrario, consideraremos que  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . La Tabla 4.1 presenta un resumen visual de los resultados.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	A	A/R	A	A/R	A	A	A	A/R	A	A	A	A	A	A	A	A/R
2		A/R		A/R		A		A/R		A		A		A		A
3				A/R				A/R				A				A
4				R				A/R								A
5								R								A
6								R								
7								R								
8								R								
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																

<b>Secuencias <math>(n, m)</math>-maravillosas anidadas</b>	
■	Cantidad expresada como fórmula cerrada
■	Cantidad determinada experimentalmente
■	Ejemplos no perfectos hallados
R	Ejemplos no perfectos hallados rotando secuencias perfectas
A	Método de secuencias autosimilares
□	Se conjetura que existen secuencias
■	Se conjetura que no existen secuencias
■	No existencia determinada experimentalmente
■	No existencia demostrada

Tab. 4.1: Síntesis de los resultados de este trabajo.

Para determinados valores de  $n$  y  $m$ , es posible extraer algunas conclusiones a partir de lo ya presentado hasta ahora. En particular:

- En el caso  $n = 1$ , las secuencias  $(1, m)$ -maravillosas anidadas se corresponden exactamente con las secuencias  $(1, m)$ -maravillosas. Gracias a la Proposición 1, sabemos

que estas existen y que su cantidad es exactamente  $\frac{(2m)!}{(m!)^2}$ . De las mismas, solo  $2^m$  son perfectas anidadas, según la fórmula dada en [4].

- En los casos en que  $m$  es un múltiplo de  $2^{n-1}$ , el Teorema 1 y su demostración basada en el método de construcción por secuencias autosimilares nos permiten afirmar que existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que no son  $(n, m)$ -perfectas anidadas. Lo expuesto hasta el momento no es suficiente para determinar si existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que no sean perfectas anidadas y no se puedan generar a través de este método. Cabe notar que este caso corresponde a valores de  $n$  relativamente pequeños con respecto a  $m$  ya que, en el mejor de los casos,  $m = 2^{n-1}$ , con lo que la relación entre ambos parámetros es a lo sumo de orden logarítmico.

Para poder abordar el análisis de los restantes valores posibles de  $n$  y  $m$  realizamos una exploración computacional, intentando generar exhaustivamente todas las secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas. La técnica que utilizamos es del tipo *generate and test* y consiste en:

1. Fijar un valor para el parámetro  $m$ .
2. Generar todas las secuencias  $(1, m)$ -maravillosas ( $m$ -átomos) de forma combinatoria.
3. Iterar sobre los valores de  $n = 2, 3, \dots$ , considerando como espacio de búsqueda todas las posibles concatenaciones de dos secuencias  $(n-1, m)$ -maravillosas anidadas (generadas en la iteración anterior) y eliminando aquellas que no sean  $(n, m)$ -maravillosas.

Si bien este enfoque iterativo permite acotar el espacio de búsqueda, el mismo crece rápidamente a medida que aumentan los valores de  $n$  y  $m$ , por lo que solo fue posible obtener resultados en los casos más pequeños. En la Tabla 4.2 presentamos estos resultados.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	6	20	70	252	924	3.432	12.870
2	2	16	156	1.720	20.420	254.744	3.292.632	43.705.512
3	0	16	1.344	237.504	26.647.952	-	-	-
4	0	0	1.568	-	-	-	-	-
5	0	0	0	-	-	-	-	-

Tab. 4.2: Cantidad total de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas binarias para los valores para los fue posible generarlas de forma exhaustiva.

Partiendo del análisis de estos datos —llevado a cabo de la manera que describimos a continuación— aventuramos las siguientes conjeturas, para las que no contamos con una demostración completa:

- **Conjetura 1.** Para todo  $(n, m)$  con  $n > m + 1$  no existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas.
- **Conjetura 2.** Para todo  $(n, m)$  con  $n \leq m + 1$  existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas. Además, la cantidad de estas secuencias es considerablemente mayor que la cantidad de secuencias  $(n, m)$ -perfectas anidadas.

#### 4.1. Conjetura 1: Valores para los que no existen secuencias

La primera conjetura es motivada, en primer lugar, porque se cumple para todos los valores de  $m$  que pudieron ser estudiados exhaustivamente en forma computacional. En efecto, al observar las columnas correspondientes a  $m = 1, 2, 3$  puede constatarse la inexistencia de secuencias cuando el valor de  $n$  crece más allá de  $m + 1$ . Naturalmente, surge la pregunta de si esto se puede generalizar para valores de  $m$  más grandes.

Un análisis de la situación permite concluir que existe una incompatibilidad entre los distintos niveles de anidación de las secuencias. A medida que  $n$  crece con respecto a  $m$ , se fuerza la aparición de largas cadenas de ceros y de unos dentro de la misma. Sin embargo, la secuencia debe a su vez consistir en la concatenación de muchas pequeñas secuencias  $(1, m)$ -maravillosas ( $m$ -átomos), donde la cantidad de ceros y unos debe estar equilibrada. El resultado que presentamos a continuación formaliza este razonamiento.

**Teorema 2.** *Sea un alfabeto de  $b$  símbolos. No existen secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas para ningunos  $n, m$  tales que  $n > 2m$ .*

*Demostración.* Consideremos un valor fijo para  $m$ . En primer lugar, debemos notar que basta probar el resultado para  $n = 2m + 1$ , ya que cualquier secuencia  $(n', m)$ -maravillosa anidada con  $n'$  mayor que este  $n$  puede factorizarse como una concatenación de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas.

Razonando por el absurdo, sea  $n = 2m + 1$  y supongamos que existe una secuencia  $x$  que es  $(n, m)$ -maravillosa anidada. Por definición, la cadena  $0^{2m+1}$  debe aparecer  $m$  veces circularmente en  $x$ . Sea  $i$  la posición inicial en  $x$  de la primera aparición de dicha cadena módulo  $bm$ .

Recordemos que  $x$  consiste en una concatenación de  $m$ -átomos, cada uno de los cuales tiene longitud  $bm$ , y que la cantidad de ceros en un  $m$ -átomo es exactamente  $m$ . Esto quiere decir que los  $2m + 1$  ceros de la cadena mencionada necesariamente abarcarán más de un átomo, con los primeros  $2m - i + 1$  ceros ubicados dentro de un átomo y los  $i$  ceros restantes en el átomo siguiente.

$$\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{bm} \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{bm} \cdots \underbrace{\alpha \dots \alpha \overbrace{00 \dots 00}^{2m-i+1}}_{bm} \underbrace{\overbrace{00 \dots 00}^i \dots \alpha}_{bm} \cdots \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{bm}$$

Notar que si  $i \leq m$ , entonces  $2m - i + 1 > m$ , por lo que hay más de  $m$  ceros en el primer átomo; si, por el contrario,  $i > m$ , entonces hay más de  $m$  ceros en el segundo átomo. Ninguno de los dos casos es posible.  $\square$

No contamos con una demostración de la inexistencia de secuencias maravillosas anidadas para los pares  $(n, m)$  con  $m + 1 < n \leq 2m$ . Aún así, al observar los casos  $m = 1, 2, 3$  vemos que fijando  $m$  e incrementando  $n$ , la cantidad de secuencias halladas aumenta de forma sostenida hasta que  $n = m$ ; en el caso  $n = m + 1$  el incremento en la cantidad es nulo o menor. Esto sugiere que las incompatibilidades entre los niveles extremos de anidación de las secuencias comienzan a manifestarse antes de llegar a  $n = 2m$ . No obstante, es claro que esta conclusión podría estar sesgada debido a que los valores de  $m$  que fue posible estudiar de manera completa son muy pequeños.

## 4.2. Conjetura 2: Valores para los que existen secuencias

En respaldo de nuestra segunda conjetura, podemos exhibir una serie de ejemplos que constatan la existencia de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas para algunos de los valores de los parámetros. Los mismos fueron obtenidos a partir de dos métodos distintos.

- **Rotaciones de secuencias perfectas anidadas.** Es posible obtener ejemplos de secuencias  $(n, m)$ -maravillosas anidadas que no son perfectas anidadas partiendo de una secuencia  $(n, m)$ -perfecta anidada y rotando una de sus mitades. Esta operación preserva la propiedad de que ambas mitades de la secuencia sean  $(n - 1, m)$ -maravillosas anidadas, y en muchos casos se logra preservar la cantidad de apariciones de todos los patrones de longitud  $n$ , dejando de cumplirse que todas sean en distintas posiciones módulo  $m$ .

Mediante este método pudimos generar ejemplos para  $m = 2, 4, 8$  y  $n = 1, \dots, m$  (recordemos que el método para generar secuencias perfectas anidadas presentado en [4] solo está definido para valores de  $m$  que sean potencias de 2). Consideramos que este método tiene buenas perspectivas de funcionar también para  $m = 16, 32$ , etc.

Los siguientes ejemplos se consiguen rotando la mitad derecha de las secuencias exactamente una posición. En ambos casos la primera secuencia es perfecta anidada, mientras que la segunda es maravillosa anidada pero no perfecta anidada.

–  $m = 2, n = 2$ :

$$\begin{array}{c} 1001 \underline{0011} \\ \downarrow \\ 1001 \underline{1001} \end{array}$$

–  $m = 4, n = 4$ :

$$\begin{array}{c} 10100101 \ 00001111 \ 01101001 \ 11000011 \ \underline{00101110 \ 11000011 \ 11110000 \ 101001011} \\ \downarrow \\ 10100101 \ 00001111 \ 01101001 \ 11000011 \ \underline{1001011 \ 01100001 \ 11111000 \ 010100101} \end{array}$$

- **Generate and test submuestreando el espacio de búsqueda.** Consiste en adaptar el método de generación exhaustivo antes descripto, de manera que en cada iteración solo se utilicen algunas de las secuencias obtenidas para determinado valor de  $n$  en la generación de posibles secuencias de orden  $n + 1$ , descartando el resto. De esta forma ya no es posible determinar *cuántas* secuencias existen, pero sí obtener una buena cantidad de ejemplos, muchos de los cuales no son secuencias perfectas anidadas.

Con este método se consiguieron ejemplos para:

- $m = 4; n = 4, 5$ .
- $m = 5; n = 4, 5$ .
- $m = 6; n = 3, 4, 5$ .
- $m = 7; n = 3, 4, 5$ .

Estos ejemplos dan cuenta de la existencia de secuencias maravillosas anidadas que no son perfectas; pero no responden al interrogante de cuántas existen, y cómo se comparan las cantidades de unas y otras. No obstante, el segundo de los dos métodos presentados permite realizar una estimación que arroja algo de luz sobre esta pregunta. La observación central es que, si el espacio de búsqueda es submuestreado de forma aleatoria, la proporción de secuencias maravillosas anidadas halladas es similar a la existente en el espacio de búsqueda completo.

A modo de ejemplo, sabemos que la cantidad de secuencias (1, 8)-maravillosas anidadas es 12.870. El conjunto de pares de estas secuencias, que es el espacio de búsqueda completo para secuencias (2, 8)-maravillosas anidadas, tiene  $(12.870)^2 = 165.636.900$  secuencias. De ellas solo 43.705.512, un 26,39%, son (2, 8)-maravillosas anidadas. Ahora bien, restringiendo la cantidad de pares examinados a, por ejemplo, solo un millón seleccionados al azar, puede obtenerse una estimación muy razonable de esta proporción. Realizando diez corridas independientes, encontramos una media de 263.734 secuencias, un 26,37% de las secuencias inspeccionadas.

Gracias a este enfoque podemos hacernos una idea aproximada de la cantidad de secuencias maravillosas anidadas en casos en que la generación exhaustiva se vuelve computacionalmente prohibitiva. Continuando con el caso  $m = 8$ , en la Tabla 4.3 se exhibe la cantidad de secuencias halladas para distintos valores de  $n$  limitando el espacio de búsqueda de cada iteración a un máximo de 1.000.000.000 de secuencias.

$n$	Tamaño estimado del espacio de búsqueda	Pares examinados	Secuencias maravillosas anidadas halladas	Proporción	Cant. estimada de sec. marav. anidadas	Cant. de secuencias perfectas anidadas
1	-	-	12.870	-	12.870	256
2	165.636.900	165.636.900	43.705.512	26,39 %	43.705.512	512
3	$1,91 \times 10^{15}$	1.000.000.000	46.201.550	4,620 %	$8,83 \times 10^{13}$	1.024
4	$7,79 \times 10^{27}$	1.000.000.000	1.710.968	0,1711 %	$1,33 \times 10^{25}$	2.048
5	$1,78 \times 10^{50}$	1.000.000.000	2.072	0,00000207 %	$3,68 \times 10^{44}$	4.096
6	$1,35 \times 10^{89}$	4.293.184	0	0 %	-	8.192

Tab. 4.3: Resultados de estimar la cantidad de secuencias maravillosas anidadas para  $m = 8$  submuestreando el espacio de búsqueda.

Para cada valor de  $n$ , se asume que el tamaño del espacio de búsqueda completo sería el cuadrado de la cantidad de secuencias estimada para  $n - 1$ ; este valor aparece en la fila “Tamaño estimado del espacio de búsqueda”. Luego, se extrapola a este espacio completo la proporción de secuencias maravillosas anidadas hallada en el subconjunto que se tomó al submuestrear, obteniendo los valores de la fila “Cantidad estimada de secuencias maravillosas anidadas”<sup>1</sup>.

Es necesario destacar que estos resultados, de carácter meramente exploratorio, podrían presentar sesgos que es imposible eliminar sin un estudio más profundo. La limitación más importante es que en cada iteración el espacio de búsqueda utilizado está

<sup>1</sup> Huelga aquí decir que el no haber encontrado ninguna secuencia para  $n = 6$  no brinda ningún tipo de evidencia de que estas secuencias no existan. Si bien podría tomarse como un indicador que las mismas son relativamente raras, las enormes dimensiones del espacio de búsqueda y la pequeñísima porción del mismo que efectivamente fue explorada hacen posible que pueda existir un enorme número de ellas, aunque no nos hayamos topado con ninguna.

limitado a los pares de secuencias generadas en el paso anterior, con lo cual, a medida que se incrementa  $n$ , la forma en que se submuestra el espacio es cada vez menos uniforme. Aún así, el hecho de que para encontrar secuencias maravillosas anidadas sea suficiente con examinar una porción ínfima del espacio de búsqueda completo sugiere fuertemente que las mismas son muy abundantes.

En particular, todo indica que para valores relativamente pequeños de  $n$  con respecto a  $m$ , la cantidad de secuencias maravillosas anidadas es muy superior a la cantidad de secuencias perfectas anidadas. El gráfico de la Figura 4.1 permite comparar visualmente estas cantidades.

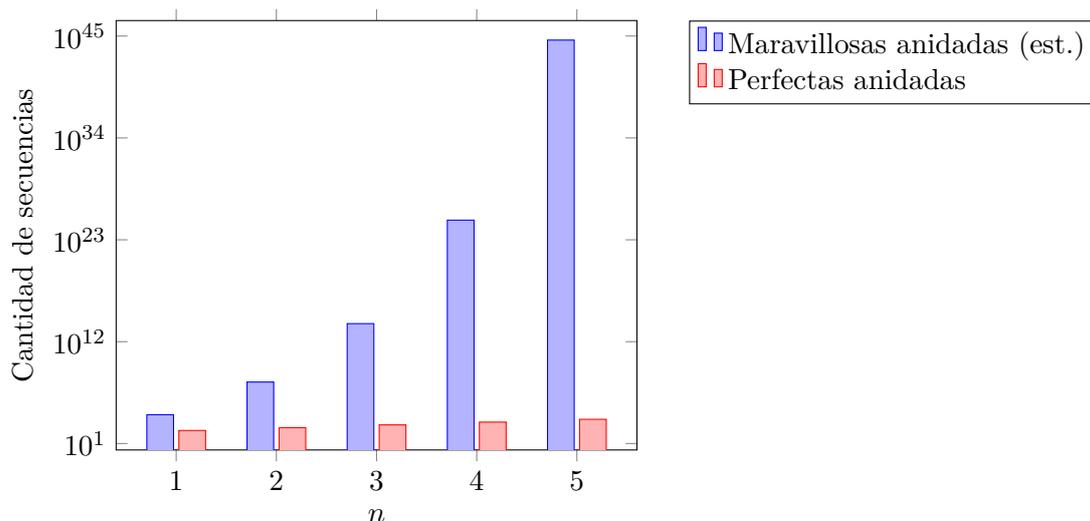


Fig. 4.1: Comparación entre la cantidad estimada de secuencias maravillosas anidadas y la cantidad de secuencias perfectas anidadas, para  $m = 8$  (escala logarítmica).

Aplicando esta misma metodología para otros valores de  $m$  ( $m = 4, 5, 6$ ), observamos un comportamiento similar, con la cantidad estimada de secuencias maravillosas anidadas aumentando muy rápidamente al incrementar  $n$ . En ningún caso pudimos llegar a valores de  $n$  mayores que  $m$ , menos aún estudiando una porción lo suficientemente grande del espacio de búsqueda como para verificar un posible declive en la cantidad de secuencias, lo cual hubiera sido de interés para corroborar la validez de la primera de nuestras conjeturas.

## 5. UNA APLICACIÓN: SECUENCIAS MARAVILLOSAS ANIDADAS Y NORMALIDAD

Consideremos una base entera  $b \geq 2$ . Un número real perteneciente al intervalo  $[0, 1)$  es *normal* en base  $b$  si, en su desarrollo en esta base, todos los posibles bloques de dígitos de igual longitud aparecen con la misma frecuencia asintótica; en otras palabras, si para todo entero  $i \geq 1$ , la frecuencia relativa de aparición de todos los bloques de dígitos de longitud  $i$  converge a  $b^{-i}$ . La noción de normalidad fue presentada por Émile Borel [5] en 1909, y ha sido ampliamente estudiada desde entonces. En [3] puede encontrarse una introducción al trabajo realizado en el área, haciendo énfasis en la perspectiva computacional.

Otra manera de definir la normalidad es a través del concepto de *distribución uniforme módulo 1*. En adelante, dado un número real  $x$ , usaremos la notación  $[x]$  para su parte entera y  $\{x\} = x - [x]$  para su parte fraccional. Sea  $(x_n)_{n \geq 0}$  una sucesión de números reales; definimos su *discrepancia* como

$$D_N((x_n)_{n \geq 0}) = \sup_{\gamma \in (0,1]} \left| \frac{\#\{0 \leq n < N \mid \{x_n\} < \gamma\}}{N} - \gamma \right|.$$

Decimos que  $(x_n)_{n \geq 0}$  está *uniformemente distribuida módulo 1* si  $D_N((x_n)_{n \geq 0}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ; intuitivamente, esto significa que las partes fraccionales de sus términos están “bien repartidas” a lo largo del intervalo  $[0, 1)$ . Puede consultarse un resumen del trabajo realizado en la teoría de la distribución uniforme módulo 1 en [8].

Se sabe que un número real  $x \in [0, 1)$  es normal en base  $b$  si y solo si la sucesión de sus mantisas,  $\{xb^n\}_{n \geq 0}$ , está uniformemente distribuida módulo 1. La discrepancia de esta sucesión permite cuantificar la velocidad con la cual un número converge a la normalidad.

Aunque se sabe que casi todos los números reales —en el sentido de la medida de Lebesgue— son normales, por el momento todos los ejemplos que se conocen están dados por construcción. En [9], Mordechay Levin introduce dos métodos para construir números normales. Una de estas construcciones [9, Theorem 2] está basada en el triángulo de Pascal, y permite construir un número normal cuya discrepancia, del orden<sup>1</sup> de  $O(\log^2(N)/N)$ , es la mínima conocida por el momento.

Esta construcción es generalizada por Becher y Carton en [4], brindando un método que permite construir números normales de discrepancia mínima concatenando secuencias perfectas anidadas. Concretamente, logran demostrar que si  $\alpha \in [0, 1)$  es tal que su expansión en base  $b$  es de la forma  $,w_0w_1w_2\dots$ , con cada  $w_k$  una secuencia  $(2^k, 2^k)$ -perfecta anidada, entonces  $\alpha$  es normal en base  $b$ , siendo su discrepancia del mismo orden que la del número de Levin.

El resultado que presentamos a continuación —a cuya demostración está dedicado el resto de esta sección— generaliza aún más la construcción de Becher y Carton, mostrando que es posible reemplazar las secuencias perfectas anidadas por secuencias maravillosas anidadas.

---

<sup>1</sup> Utilizamos la notación  $O(f)$ , conocida como notación de Landau o notación “o grande”, para hacer referencia a las funciones acotadas superiormente por la función  $f$ , multiplicada a lo sumo por una constante. Por su parte, la notación  $o(f)$ , conocida como notación “o pequeña”, hace referencia a las funciones acotadas por  $f$  en forma *estricta*, es decir, las funciones  $g$  para las que  $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ .

**Teorema 3.** Sean  $b, q \geq 2$  números enteros y  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función creciente. Sea  $\alpha \in [0, 1)$  un número real tal que su escritura en base  $b$  es de la forma

$$,w_0w_1w_2\dots$$

donde cada bloque  $w_k$  es una secuencia  $(q^k, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada.

Si  $\varphi$  es tal que  $\varphi(\log(N)) = o(N)$ , entonces  $\alpha$  es normal en base  $b$ , y además,

$$D_N(\{\alpha b^n\})_{n \geq 0} = O\left(\frac{\varphi(\log(N)) \log(N)}{N}\right).$$

Notar que aquí la función  $\varphi$  indica la relación entre los parámetros  $n$  y  $m$  de las secuencias maravillosas anidadas. Si la relación es lineal, como en la construcción dada por Becher y Carton, se obtiene la discrepancia óptima de  $O(\log^2(N)/N)$ . Si se toma  $m$  cuadrático con respecto a  $n$ , se obtiene para la discrepancia la cota más gruesa de  $O(\log^3(N)/N)$ . En general, si se toma  $\varphi = O(N^c)$  para cualquier  $c \geq 1$ ,  $\alpha$  es normal en base  $b$  y su discrepancia es del orden de  $O(\log^{c+1}(N)/N)$ .

Antes de comenzar con la demostración, presentamos algunas definiciones que nos serán útiles más adelante. En primer lugar, para cada  $k = 0, 1, \dots$ , definimos  $s_k$  como la posición dentro del desarrollo de  $\alpha$  donde comienza el bloque  $w_k$ . Podemos notar que cada  $w_k$ , por ser una secuencia  $(q^k, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada, tiene tamaño  $\varphi(q^k)b^{q^k}$ . Esto implica que  $s_k = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(q^i)b^{q^i}$ .

Definimos también la función contadora

$$A(\gamma, S, N, (x_n)_{n \geq 0}) = \#\{S \leq n < S + N \mid \{x_n\} < \gamma\},$$

que determina cuántos de los términos de la sucesión  $(x_n)_{n \geq 0}$  con índices comprendidos entre  $S$  y  $S + N$  son menores que  $\gamma$ , donde  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $S \geq 0$  y  $N \geq 1$ . Para alivianar la notación, en ocasiones escribimos

$$A(\gamma, N, (x_n)_{n \geq 0}) = A(\gamma, 0, N, (x_n)_{n \geq 0}).$$

Cabe señalar que la discrepancia de una sucesión puede escribirse en función de  $A$ , ya que  $D_N((x_n)_{n \geq 0}) = \sup_{\gamma \in (0, 1]} |N^{-1}A(\gamma, N, (x_n)_{n \geq 0}) - \gamma|$ .

Nuestra demostración sigue, en líneas muy generales, la misma estructura de la que Levin brinda para su construcción. Comenzamos por presentar tres lemas que, mediante una cadena de estimaciones, permiten ir acotando parcialmente la discrepancia del número  $\alpha$ , y se corresponden de manera aproximada con [9, Lemma 5], [9, Corollary 1] y [9, Corollary 2], respectivamente. La demostración del Teorema 3 queda completa al final de la sección.

**Lema 6.** Sea  $k$  un entero no negativo y sea  $i$  tal que  $1 \leq i \leq q^k$ . Definimos

$$\alpha_{ki}(n) = \frac{[\{\alpha b^{s_k+n}\}b^i]}{b^i},$$

el número real cuya expansión en base  $b$  consiste en  $i$  dígitos de la expansión de  $\alpha$  en base  $b$  a partir de la posición  $s_k + n$ , seguidos de ceros.

Para todo  $S$  tal que  $0 \leq S < b^{q^k-i}$  y  $f = 0, \dots, b^i$  tenemos que

$$A\left(\frac{f}{b^i}, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, (\alpha_{ki}(n))_{n \geq 0}\right) = \varphi(q^k)f + (i-1)\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1.$$

*Demostración.* Por construcción, a partir de la posición  $s_k$  la expansión en base  $b$  de  $\alpha$  contiene una secuencia  $(q^k, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada, es decir, una concatenación de  $b^{q^k-i}$  secuencias  $(i, \varphi(q^k))$ -maravillosas anidadas. Cada una de estas secuencias tiene longitud  $\varphi(q^k)b^i$  y comienza en una posición congruente a  $s_k$  módulo  $\varphi(q^k)b^i$ .

Si observamos el lado izquierdo de la expresión a demostrar, notamos que se están considerando  $\varphi(q^k)b^i$  mantisas de  $\alpha$ , comenzando en la posición  $s_k + S\varphi(q^k)b^i$  (y truncadas a sus primeros  $i$  dígitos). Esto quiere decir que las posiciones de inicio de todas estas mantisas caen dentro de una misma secuencia  $(i, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada.

Consideremos, para cada palabra  $\beta_1 \dots \beta_i$  de longitud  $i$ , el número real entre 0 y 1 cuya expansión en base  $b$  consiste en dicha palabra seguida de ceros, es decir,  $\sum_{j=1}^i \beta_j b^{-j}$ . Notar que este número es de la forma  $\frac{\tilde{f}}{b^i}$ , con  $\tilde{f} = \sum_{j=1}^i \beta_j b^{i-j}$  distinto para cada palabra. Como en nuestra secuencia  $(i, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada, por definición, cada posible palabra de longitud  $i$  aparece  $\varphi(q^k)$  veces, la cantidad de posiciones de esta secuencia tales que la palabra que allí comienza tiene asociado un número menor que  $\frac{\tilde{f}}{b^i}$  es exactamente  $\varphi(q^k)f$ .

Para todas las posiciones de la secuencia excepto las últimas  $i-1$ , el número real asociado a la palabra que comienza en esa posición coincide exactamente con la mantisa a considerar. Esto significa que  $\varphi(q^k)f$  es una buena aproximación de la cantidad de mantisas menores que  $\frac{\tilde{f}}{b^i}$ . Las últimas  $i-1$  posiciones pueden diferir ya que, en el caso de la secuencia maravillosa anidada, se completan circularmente con el comienzo de la secuencia, lo cual explica el término del error.  $\square$

**Lema 7.** *Sea  $k$  un entero no negativo y sea  $i$  tal que  $1 \leq i \leq q^k$ . Para todo  $S$  tal que  $0 \leq S < b^{q^k-i}$  y  $\gamma \in (0, 1]$  tenemos que*

$$A\left(\gamma, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) = \gamma\varphi(q^k)b^i + (2\varphi(q^k) + i - 1)\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1.$$

*Demostración.* Consideremos la notación  $\alpha_{ki}(n)$  del Lema 6. Sea  $f = [\gamma b^i]$ , de modo que  $f = \gamma b^i - \varepsilon_1$ , con  $\varepsilon_1 \in [0, 1)$ . Notar que

$$\begin{aligned} A\left(\frac{f-1}{b^i}, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, (\alpha_{ki}(n))_{n \geq 0}\right) \\ \leq A\left(\gamma, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) \\ \leq A\left(\frac{f+1}{b^i}, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, (\alpha_{ki}(n))_{n \geq 0}\right). \end{aligned}$$

Reemplazando, según el Lema 6, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(q^k)f - \varphi(q^k) + (i-1)\varepsilon_2 \\ \leq A\left(\gamma, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) \\ \leq \varphi(q^k)f + \varphi(q^k) + (i-1)\varepsilon_2, \quad |\varepsilon_2| \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A\left(\gamma, S\varphi(q^k)b^i, \varphi(q^k)b^i, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) &= \varphi(q^k)f + \varphi(q^k)\varepsilon_3 + (i-1)\varepsilon_2, \quad |\varepsilon_3| \leq 1 \\ &= \varphi(q^k)(\gamma b^i - \varepsilon_1) + \varphi(q^k)\varepsilon_3 + (i-1)\varepsilon_2 \\ &= \gamma\varphi(q^k)b^i + \varphi(q^k)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + (i-1)\varepsilon_2 \\ &= \gamma\varphi(q^k)b^i + (2\varphi(q^k) + i - 1)\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 8.** Sea  $k$  un entero no negativo,  $\gamma \in (0, 1]$ , y  $1 \leq N \leq \varphi(q^k)b^{q^k}$ . Tenemos que

$$(a) \quad A(\gamma, s_k, N, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) = \gamma N + O\left(\varphi(q^k)q^k + q^{2k}\right).$$

$$(b) \quad A\left(\gamma, s_k, \varphi(q^k)b^{q^k}, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}\right) = \gamma \varphi(q^k)b^{q^k} + O\left(\varphi(q^k) + q^k\right).$$

*Demostración.* Para probar el primer resultado, comenzamos por observar las posiciones iniciales de las mantisas a considerar; todas ellas están comprendidas entre las posiciones  $s_k$  y  $s_{k+1}$  del desarrollo en base  $b$  de  $\alpha$ , por lo que pertenecen a una misma secuencia  $(q^k, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada.

Sea  $N' = \left\lfloor \frac{N}{\varphi(q^k)b} \right\rfloor$ , y  $N'' < \varphi(q^k)b$  de forma tal que

$$N = N'\varphi(q^k)b + N''.$$

Sea  $(N')_b = \nu_{q^k-2}\nu_{q^k-3}\dots\nu_0$  la escritura de  $N'$  en base  $b$ . Para cada  $i = 0, \dots, q^k - 1$ , sea

$$N_i = \sum_{j=q^k-i-1}^{q^k-2} \nu_j b^j = (\nu_{q^k-2} \dots \nu_{q^k-i} \underbrace{0 \dots 0}_{q^k-2-i})_b$$

el resultado de reemplazar por ceros los dígitos de la escritura de  $N'$  en base  $b$  a partir del  $i + 1$ -ésimo. Notar que  $0 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_{q^k-1} = N'$ .

Esto nos permite agrupar las  $N$  mantisas a considerar en bloques consecutivos, siguiendo los niveles de anidación de la secuencia maravillosa anidada:

- Los primeros  $q^k - 1$  bloques van desde la posición  $N_{i-1}\varphi(q^k)b$  a la  $N_i\varphi(q^k)b$ , para  $i = 1, \dots, q^k - 1$ . Cada uno de ellos se corresponde exactamente con  $\nu_{q^k-i-1}$  secuencias  $(q^k - i, \varphi(q^k))$ -maravillosas anidadas consecutivas.
- El último bloque va desde la posición  $N'\varphi(q^k)b$  hasta la posición  $N$ . Comprende las últimas  $N''$  mantisas, que no son suficientes para conformar una secuencia  $(1, \varphi(q^k))$ -maravillosa anidada.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos reescribir

$$\begin{aligned} & A(\gamma, s_k, N, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) \\ &= \sum_{i=1}^{q^k-1} A\left(\gamma, s_k + N_{i-1}\varphi(q^k)b, \nu_{q^k-i-1}\varphi(q^k)b^{q^k-i}, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}\right) \\ &\quad + A\left(\gamma, s_k + N'\varphi(q^k)b, N'', \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q^k-1} A\left(\gamma, N_{i-1}\varphi(q^k)b, \nu_{q^k-i-1}\varphi(q^k)b^{q^k-i}, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) + N''\varepsilon'', \quad \varepsilon'' \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Sea  $S_i = \frac{N_{i-1}}{b^{q^k-i-1}}$  para cada  $i = 1, \dots, q^k - 1$ . Reemplazando en la expresión anterior, y reagrupando luego las mantisas nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{q^k-1} A\left(\gamma, S_i\varphi(q^k)b^{q^k-i}, \nu_{q^k-i-1}\varphi(q^k)b^{q^k-i}, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) + N''\varepsilon'' \\ &= \sum_{i=1}^{q^k-1} \sum_{j=0}^{\nu_{q^k-i-1}-1} A\left(\gamma, (S_i + j)\varphi(q^k)b^{q^k-i}, \varphi(q^k)b^{q^k-i}, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0}\right) + N''\varepsilon''. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el Lema 7 en cada término, con  $i = q^k - i$  y  $S = S_i + j$ :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{q^k-1} \nu_{q^k-i-1}^{-1} \left( \gamma \varphi(q^k) b^{q^k-i} + (2\varphi(q^k) + q^k - i - 1) \varepsilon_i \right) + N'' \varepsilon'', & |\varepsilon_i| \leq 1 \\
&= \gamma \varphi(q^k) \sum_{i=1}^{q^k-1} \nu_{q^k-i-1} b^{q^k-i} + \sum_{i=1}^{q^k-1} (2\varphi(q^k) + q^k - i - 1) b \varepsilon'_i + N'' \varepsilon'', & |\varepsilon'_i| \leq 1 \\
&= \gamma \varphi(q^k) b N' + \frac{1}{2} \left( 4\varphi(q^k)(q^k - 1) + q^{2k} - q^k \right) b \varepsilon' + N'' \varepsilon'', & |\varepsilon'| \leq 1 \\
&= \gamma N + \frac{1}{2} \left( 4\varphi(q^k)(q^k - 1) + q^{2k} - q^k \right) b \varepsilon' + N'' (\varepsilon'' - \gamma) \\
&= \gamma N + \frac{1}{2} \left( 4\varphi(q^k)(q^k - 1) + q^{2k} - q^k \right) b \varepsilon' + \varphi(q^k) b \varepsilon''' & |\varepsilon'''| \leq 1 \\
&= \gamma N + \frac{1}{2} \left( 4\varphi(q^k) q^k + q^{2k} - q^k \right) b \varepsilon, & |\varepsilon| \leq 1. \\
&= \gamma N + O \left( \varphi(q^k) q^k + q^{2k} \right).
\end{aligned}$$

Para probar el segundo resultado, basta notar que

$$\begin{aligned}
A \left( \gamma, s_k, \varphi(q^k) b^{q^k}, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0} \right) &= A \left( \gamma, 0, \varphi(q^k) b^{q^k}, \{\alpha b^{s_k+n}\}_{n \geq 0} \right) \\
&= \gamma \varphi(q^k) b^{q^k} + (2\varphi(q^k) + q^k - 1) \varepsilon, & |\varepsilon| \leq 1 \\
&= \gamma \varphi(q^k) b^{q^k} + O \left( \varphi(q^k) + q^k \right).
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad, se aplicó el Lema 7 tomando  $i = q^k$  y  $S = 0$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 3.* Para todo  $N$ , existe un entero  $K$  tal que  $N \in [s_K, s_{K+1})$ , de forma tal que  $N = s_K + R$  con  $0 \leq R < \varphi(q^K) b^{q^K}$ . Notar que  $N \geq s_K \geq \varphi(q^{K-1}) b^{q^{K-1}}$ , por lo que  $q^K \leq q \log_b(N)$ . Agrupando las primeras  $N$  mantisas de  $\alpha$  según el bloque al que corresponden, y aplicando luego el Lema 8, tenemos que

$$\begin{aligned}
A(\gamma, N, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) &= \sum_{k=0}^{K-1} A(\gamma, s_k, \varphi(q^k) b^{q^k}, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) + A(\gamma, s_K, R, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} \left( \gamma \varphi(q^k) b^{q^k} + O \left( \varphi(q^k) + q^k \right) \right) + \gamma R + O \left( \varphi(q^K) q^K + q^{2K} \right) \\
&= \gamma N + O \left( \varphi(\log(N)) \log(N) + \log^2(N) \right).
\end{aligned}$$

Dado que  $D_N(\{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) = \sup_{\gamma \in (0,1]} |N^{-1} A(\gamma, N, \{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) - \gamma|$ , resulta que

$$D_N(\{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) = O \left( \frac{\varphi(\log(N)) \log(N) + \log^2(N)}{N} \right).$$

Concretamente, si  $\varphi(\log(N)) = o(N)$ , tenemos que  $D_N(\{\alpha b^n\}_{n \geq 0}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ , con lo cual  $\alpha$  es un número normal en base  $b$ .  $\square$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Tatyana P. van Aardenne-Ehrenfest y Nicolaas G. de Bruijn. «Circuits and trees in oriented linear graphs». En: *Simon Stevin : Wis- en Natuurkundig Tijdschrift* 28 (1951), págs. 203-217.
- [2] Nicolás Alvarez, Verónica Becher, Pablo A. Ferrari y Sergio A. Yuhjtman. «Perfect necklaces». En: *Advances in Applied Mathematics* 80 (2016), págs. 48-61.
- [3] Verónica Becher y Olivier Carton. «Normal numbers and Computer Science». En: *Sequences, Groups, and Number Theory*. Ed. por Valérie Berthé y Michel Rigo. Trends in Mathematics Series, Birkhauser/Springer, 2018.
- [4] Verónica Becher y Olivier Carton. «Normal numbers and nested perfect necklaces». En: *Journal of Complexity* 54 (2019).
- [5] Émile Borel. «Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques». En: *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27.1 (dic. de 1909), págs. 247-271.
- [6] Nicolaas G. de Bruijn. «A combinatorial problem». En: *Proc. Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen* 49 (1946), págs. 758-764.
- [7] Matthew Farrell y Lionel Levine. «Multi-Eulerian tours of directed graphs». En: *The Electronic Journal of Combinatorics* 23.2 (abr. de 2016).
- [8] Lauwerens Kuipers y Harald Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. New York: Dover Publications, Inc., 2006.
- [9] Mordechay B. Levin. «On the discrepancy estimate of normal numbers». En: *Acta Arithmetica* 88.2 (1999), págs. 99-111.
- [10] William T. Tutte. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1984.