Q.e.d.

Ciencias duras en palabras blandas

Mayo 2009
Año 1 | N°2

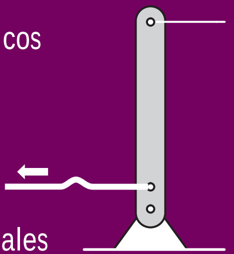
όπερ έδει δείξαι

Física y medicina

Propiedades invariantes

In principium erat verbum...

- Problemas matemáticos
- Curiosidades físicas
- Taller y laboratorio
- Historia
- Demostraciones visuales



Editorial

Se va la segunda!

Con esta segunda entrega de Q.e.d., nuestra revista pasa a integrar el privilegiado tres por ciento de las revistas que perduran más de un número. (ver editorial del Nro 1 de Q.e.d)

Lo debemos en gran parte a los lectores y lectoras que recibieron con entusiasmo nuestra propuesta, y que acercaron, con generosidad, críticas y elogios.

Uno de esos lectores, muy joven por cierto, me dijo que si bien no había leído con detenimiento todos los artículos, quedó atrapado por varios de los desafíos propuestos.

Hace ya muchos años, era yo tan joven como este lector, miraba por televisión al famoso mago David Copper eld. En un momento del show, el ilusionista invitó a los espectadores a acercarse a la pantalla, donde aparecían unas cuantas monedas doradas que formaban un nueve. Copper eld aseguraba que iba a inducir a todos los televidentes a elegir la misma moneda. Yo estaba solo frente al televisor. Seguí con cuidado sus instrucciones, y como era de esperar, el mago adivinó la moneda que miles de espectadores estábamos señalando en la pantalla. Tenía frente a mí un desafío, y corrí a buscar un lápiz y un papel (compañeros inseparables de mi limitado cerebro). No entendía, y quería entender. Como aquel joven lector, estaba felizmente atrapado.

Esta fascinación por plantear y responder desafíos es uno de los motores de la producción y transmisión del conocimiento, y un gran ingrediente de la divulgación.

Dice György Pólya, el gran matemático húngaro, que la resolución de un problema o de una situación desa ante no es un asunto puramente intelectivo. La determinación, la tenacidad y las emociones juegan un papel fundamental. Esperamos que estos ingredientes estén presentes en este número. Nuestro desafío es que podamos encontrarnos nuevamente en el próximo.

Juan Carlos Pedraza

Staff

Q.e.d.
Ciencias duras en palabras blandas©

Revista trimestral de divulgación
Año I, número 2

Universidad de Buenos Aires
Ciclo Básico Común (CBC)
Departamento de Ciencias Exactas
Pabellón 3, Ciudad Universitaria,
Buenos Aires, Argentina

Directores:
Agustín Rela
Juan Carlos Pedraza

Editor:
Carlos Borches

Redacción:
Iliana Pisarro

Diseño:
Pablo Gabriel González

Consejo editorial:
Cecilia Di Risio
Eduardo Laplagne
Flora Gutiérrez
Patricia Fauring
Silvia Reich

Agradecemos la colaboración de
Diana Martínez Llaser
Fabián Blanco
Jorge Cornejo
Jorge Salvetti
Matías Cveczilberg
Oriana Salvetti

Impresa en La Copia

revistaqed@cbc.uba.ar
www.qed.cbc.uba.ar

+54 11 4789-6000, interno 6083
+54 11 4781-0706
© 2008 ISSN 950-29-&070-8.

Q.e.d.*, *Quod erat demonstrandum, *es una expresión latina que significa:*

lo que se quería demostrar

Tiene su origen en la frase griega όπερ έδει δείξαι (óper édei deíjai), que usaron muchos matemáticos, entre ellos Euclides y Arquímedes, para señalar que habían alcanzado la demostración que buscaban.

Artículos

Secciones

La física y las imágenes médicas

Jorge N. Cornejo
Facultad de Ingeniería (UBA)

La física es una fuente inagotable de conceptos, medios y recursos para la medicina. Eso se advierte con claridad en el diagnóstico por imágenes, y en el uso que los profesionales de la salud dan a la física para reducir al mínimo posible los efectos secundarios de esas técnicas.

EL DIAGNÓSTICO POR IMÁGENES

En general, todos nos sentimos asombrados ante el desarrollo de la medicina. Y si hay una rama de esa ciencia que ha avanzado enormemente en las últimas décadas, es la del diagnóstico.

El diagnóstico es el primer paso en todo procedimiento médico. Diagnosticar es responder la pregunta “¿Qué tiene?”, y hallar un método terapéutico es contestar “¿Cómo lo solucionamos?”. El diagnóstico y la terapia son los dos extremos del mismo procedimiento, pero la segunda es, lógicamente, imposible sin el primero.

Existen distintas formas de diagnosticar, desde el ojo clínico hasta los métodos de alta complejidad y más sofisticados. Una de esas formas, que desde el descubrimiento de los rayos X en 1895 no ha dejado de ampliarse y progresar, es el diagnóstico por imágenes; lo que en general se conoce como la imagenología.

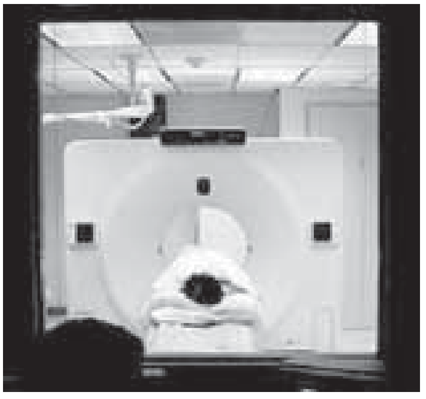
Por imagen médica se entiende el conjunto de técnicas y procesos usados para crear figuras del cuerpo humano, o de sus partes, con propósitos clínicos, o para la investigación médica; esto incluye el estudio de la anatomía y las funciones normales de órganos y tejidos. Dentro de las imágenes médicas incluimos el vasto conjunto de las radiológicas (radiografía, tomografía computada, fluoroscopia, etcétera), las imágenes de resonancia magnética nuclear (RMN), las de la medicina nuclear, la ecografía y muchas otras.

¿Qué tiene que ver la física con todo esto? Cuento una pequeña anécdota. Hace un tiempo una alumna de escuela secundaria, muy preocupada porque tenía que rendir Física en marzo, me dijo, con cierto enojo: ¿Por qué tengo que estudiar Física, si yo voy a seguir Medicina? Le pedí que esperase, y volví con una radiografía, una resonancia y una ecografía. Le dije: ¿Ves? Esto es física. La estudiante tenía referencias lejanas de esas técnicas, y pareció enterarse en el momento de algunos de sus detalles.

Efectivamente, la obtención de imágenes médicas es ciencia física.

Radiografía tomada por Wilhelm Röntgen en 1896.

LA UTILIDAD DE LAS DIFERENCIAS



Equipo de tomografía computada del Instituto del Corazón de Texas, Estados Unidos.

La construcción de imágenes médicas se basa en que las propiedades de órganos y tejidos presentan variaciones y diferencias, lo que permite generar el contraste de las imágenes. Por ejemplo, una radiografía es resultado de la absorción diferencial de los tejidos frente a la radiación X. El tejido óseo es radioopaco, absorbe mucha radiación, de forma tal que en las zonas correspondientes al hueso, la película radiográfica se irradia muy poco y prácticamente no se ennegrece. Los tejidos blandos, por el contrario, son radiolúcidos, interaccionan escasamente con la radiación y, por lo tanto, permiten que la película reciba una exposición elevada, y se ennegrezca. Por todo esto, una imagen radiográfica no es otra cosa que la sombra que el cuerpo proyecta frente al haz de rayos X.

La fluoroscopia, la tomografía computada, etcétera, son variantes y avances complejos de la radiografía convencional, en las que se modifican el dispositivo receptor de la imagen y la geometría del conjunto, entre otros parámetros. Aquí no sólo la física, sino también la matemática, cumplen un rol esencial: toda técnica digital implica en este caso resolver un número casi inimaginable de ecuaciones acopladas entre sí, problema que las computadoras han logrado solucionar reduciendo cada vez más el tiempo de cálculo.

Otras técnicas se fundan en distintas propiedades. La ecografía se basa en los cambios en la impedancia acústica[1], y a la resistencia que los tejidos presentan al paso del ultrasonido. El agua, por ejemplo, permite que los ultrasonidos se propaguen con facilidad. El aire, por el contrario, absorbe rápidamente la energía de las ondas ultrasónicas e impide su propagación. Este hecho, y la necesidad de evitar los cambios bruscos en la impedancia acústica, que implican una importante pérdida de energía por reflexión, constituyen los dos motivos por los que se coloca un gel entre el transductor que emite ultrasonidos y el cuerpo del paciente; una mínima burbuja de aire interferiría la propagación de las ondas. Los ecos se producen en las interfaces que separan medios con diferente impedancia acústica: por ejemplo, el líquido amniótico y el cuerpo del embrión.

La RMN es, desde un punto de vista físico, la más compleja de estas técnicas, que se basa en las propiedades magnéticas de los núcleos de hidrógeno. Las diferencias o contrastes que se utilizan en este caso son, entre otros, los tiempos de relajación de los núcleos; algo así como el tiempo que le demandaría a una brújula que hemos alejado de su posición habitual, regresar a su alineación con el campo magnético terrestre. Estos tiempos se relacionan con la composición química de la zona a estudiar, su temperatura, y demás, y proporcionan información tanto anatómica como bioquímica. La RMN, que en sus orígenes era un procedimiento de análisis químico, es una técnica multideterminada, en el sentido de que sus imágenes se pueden construir utilizando diferentes parámetros físicos de interés.

La medicina nuclear, por último, se basa en la diferente velocidad de captación de los isótopos radiactivos que poseen los distintos tejidos, o un mismo tejido en una condición sana o patológica. Sus imágenes son esencialmente de tipo fisiológico, funcional, en contraste con las imágenes radiográficas, de naturaleza principalmente anatómica.

Una de las ventajas de la ecografía es que no utiliza ondas electromagnéticas ionizantes.

1. La impedancia acústica de un medio es el producto de su densidad, por la velocidad a la que se propagan en él las ondas de sonido. La atenuación de un medio es el cociente entre el logaritmo de la pérdida relativa de energía, y la longitud que recorre la onda. (Por ejemplo, si se atenúa 10.000 veces al recorrer 1 cm, la atenuación vale 4 beles por centímetro, ó 40 dB/cm.)

2. Un ion es una partícula con carga eléctrica; por ejemplo, un átomo que ha perdido uno o más electrones.

3. Bushong, S.C., Manual de radiología para técnicos – Física, biología y protección radiológica, Elsevier Mosby, 2005.

IONIZANTES Y NO IONIZANTES

En todas estas técnicas es útil considerar una diferencia importante: aquellas que emplean radiaciones ionizantes, y las que no las usan. Además, en estas últimas debemos distinguir las que utilizan ondas electromagnéticas no ionizantes, de las que se valen de ondas mecánicas.

Son ionizantes [2] aquellas radiaciones que poseen energía suficiente para arrancar electrones de los átomos. Eso altera su equilibrio eléctrico, y da lugar a transformaciones químicas. Entre las radiaciones ionizantes se encuentran las electromagnéticas de frecuencia elevada (rayos gamma, rayos X, y una muy pequeña parte del espectro ultravioleta), y las radiaciones de partículas (rayos alfa y beta, entre otros). Estas radiaciones se utilizan en las radiografías, fluoroscopias y tomografías, y en los estudios de medicina nuclear.

La RMN utiliza, junto a un intenso campo magnético, ondas de radiofrecuencia, las que, por su baja energía, no son ionizantes. Los ultrasonidos, empleados en la ecografía, carecen de toda capacidad para producir ionización, dado que son ondas mecánicas (es decir, ondas que requieren un medio material para poder propagarse, en contraste con las ondas electromagnéticas, que se pueden propagar en el vacío).

Imagen del cerebro humano, obtenida con RMN, una técnica muy útil en el estudio de las partes blandas.

¿Por qué es importante esta clasificación? Porque, por ejemplo, el efecto cancerígeno de los rayos X es consecuencia de su poder ionizante. La generación de cáncer radioinducido es un proceso complejo y no del todo conocido, pero es seguro que comienza por ionización que se produce a nivel celular.[3]

La ecografía y la RMN, por lo menos en cuanto concierne a la generación de procesos tumorales, son, por lo tanto, inocuas. Las radiografías comunes implican dosis muy bajas de radiación y, en general, no entrañan riesgo para el paciente.

¿Qué ocurre con las otras técnicas? ¿La física tiene algo que decirnos sobre esto?

Sí, la física tiene algo que decirnos, a través de una disciplina conocida como dosimetría, la que se encarga de mensurar la cantidad de radiación absorbida por una persona, la emitida por un isótopo, etcétera. Hay distintas formas de medir las dosis, las que remiten a diferentes unidades, pero desde el punto de vista médico la más cómoda es la dosis efectiva característica, medida en sievert (Sv) [4]. Una placa común de tórax implica, para el paciente, una dosis de 0,02 veces la milésima parte de un sievert, es decir 0,02 mSv. Esto equivale a la radiación de fondo que todo ser humano recibe durante unos tres días, como consecuencia de las fuentes naturales.

Veamos la tabla siguiente [5].

ESTUDIO	DOSIS EFECTIVA CARACTERÍSTICA (MSV)	EQUIVALENCIA EN PLACAS DE TÓRAX	EQUIVALENCIA EN DOSIS DE RADIACIÓN NATURAL
RADIOGRAFÍA DE CRÁNEO	0,07	3,5	11 DÍAS
RADIOGRAFÍA DE CADERA	0,3	15	7 SEMANAS
RADIOGRAFÍA DE ABDOMEN	1	50	6 MESES
UROGRAMA EXCRETOR	2,5	125	14 MESES
COLON POR ENEMA	7	350	3,2 AÑOS
TOMOGRAFÍA COMPUTADA DE CABEZA, CON RAYOS X	2,3	115	1 AÑO
ESTUDIO DE ABDOMEN, CON RMN. [6]	0,0002	0	1 HORA
TOMOGRAFÍA COMPUTADA DE ABDOMEN, CON RAYOS X	10	500	4,5 AÑOS
CENTELLOGRAMA TIROIDEO	1	50	6 MESES
TOMOGRAFÍA POR EMISIÓN DE POSITRONES (CABEZA)	5	250	2,3 AÑOS

4. Un sievert es la dosis de radiación que disipa una energía de un joule en cada kilogramo de tejido vivo. Una kilocaloría es la energía que eleva en un grado la temperatura de un kilo de agua, y equivale a 4185 joules. (El daño térmico de la radiación ionizante es despreciable)

5. Sociedad Argentina de Radiología, Guía de recomendaciones para la correcta solicitud de pruebas de diagnóstico por imagen, Editado por SAR, 2008.

6. La resonancia magnética nuclear brinda imágenes internas del cuerpo, con la ayuda de cálculos de computadora; y por eso esta técnica es, también, una tomografía, muchas veces axial, y siempre computada. Pero en el ambiente de los especialistas, cuando se habla de la TAC, se suele sobreentender el empleo de rayos X.

Algunos de esos datos nos sorprenden. ¿Qué significan estas dosis, estas equivalencias? Significan que la física y la medicina se encuentran en un punto común: el ser humano. Las técnicas de imagenología médica son útiles y necesarias, y salvan vidas. Pero los médicos y los técnicos que las aplican deben conocer sus fundamentos físicos; los principios de las radiaciones y las dosis efectivas características de cada examen, y en qué momento el tipo o la cantidad de estudios prescriptos implican el ingreso en la zona de riesgo radiológico. En ese tema, ignorar la física sería lo mismo que ignorar al ser humano.

Un trabajo en equipo

En 1979, la Academia Sueca otorgó el Premio Nobel de Medicina al físico Allan Cormack y al ingeniero electrónico Godfrey Hounsfield por sus decisivas contribuciones en el desarrollo del tomógrafo. Todos hicieron referencias al gran ausente, el matemático Johann Radon, quien falleció en 1956 sin llegar a imaginar lo que sucedería con sus trabajos durante la era de la computación.

En 1917, Radon ofreció una disertación donde se combinaban los temas que había estado estudiando durante los últimos siete años. En 1910 se doctoró en la Universidad de Viena con un trabajo relacionado con el cálculo variacional, una herramienta que luego aplicó con éxito en el estudio de la geometría diferencial (1914) y ahora volcaba todo lo aprendido en un trabajo inspirado en los problemas relacionados con la teoría de la medida de Lebesgue.

En aquel trabajo de características teóricas apareció lo que luego se llamaría la transformada de Radon, piedra angular del proceso de construcción de la imagen de un cuerpo a partir de cierta información que disponemos de ese objeto.

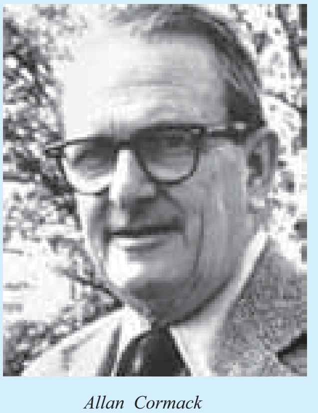
En 1963, Cormack, que había estudiado física e ingeniería en la Universidad de Capetown de su Sudáfrica natal, logra un método para obtener de un cuerpo la información necesaria para aplicarle luego las transformadas de Radon. Las computadoras ya estaban en condiciones de ocuparse de los cálculos y hacer el proceso en un tiempo razonable, pero faltaba algo más.

El tema le interesó a Godfrey Newbold Hounsfield, un ingeniero electrónico fascinado con los radares desde su participación en la fuerza aérea británica durante la Segunda Guerra Mundial. Toda su carrera profesional la había realizado en la empresa EMI, donde su primer trabajo fue en la construcción de un prototipo de radar. Hounsfield convenció a la empresa para que financiara el desarrollo de una máquina capaz de llevar a cabo eficazmente las mediciones de Cormack y las transformadas de Radon.

En 1972 el primer tomógrafo comenzaba a mostrar un mundo nuevo, como expresara el comité que entregó el Premio Nobel: “Las radiografías de la cabeza mostraban sólo los huesos del cráneo, pero el cerebro permanecía como un área gris, cubierto por la neblina. Súbitamente la neblina se ha disipado”.

C.B.

Johann Radon



Allan Cormack

Godfrey Hounsfield

Juegos con el celular

Pensando con el celular en la mano

Convertido en uno de los elementos centrales de la cultura contemporánea, el celular se incorporó a nuestras vidas no sólo como un teléfono móvil. Su tamaño más pequeño ha ganado en prestaciones y hoy nos sirve de cámara fotográ ca, reproductor de música, grabador de voz, libreta de apuntes, juego electrónico, agenda, calculadora y reloj, además de permitirnos hablar por teléfono, mandar mails, SMS y navegar en la red.

Cuando tomamos un colectivo o el subte, ese momento de soledad colectiva que compartimos durante un viaje es aprovechado para un encuentro privado con nuestro “celu”. Es una acción contagiosa, alcanza que una persona saque su aparatito del bolsillo para que el resto repitamos el ritual buscando en el bloquecito luminoso vaya a saber qué secretos.

Pero no es nuestra intención desatar sentimientos tecnofóbicos. Si viajamos apretados, no tenemos crédito ni para un mensaje y no da para escuchar música, proponemos usar el celular como soporte para pensar los siguientes problemas:

Langford en el celu

He aquí una versión del problema de Langford en compañía del celular. Mostremos en la pantalla del celular el número 112233 y ahora reordenémoslo de modo tal que entre dos unos haya un solo número, entre los dos dos haya dos números y entre los dos tres haya tres números. ¿Sale fácil no?

Ahora escribamos 11223344 en la pantalla y empecemos a mover los números para que respete una ley como en el caso anterior, en este caso entre los dos cuatros deben quedar cuatro números.

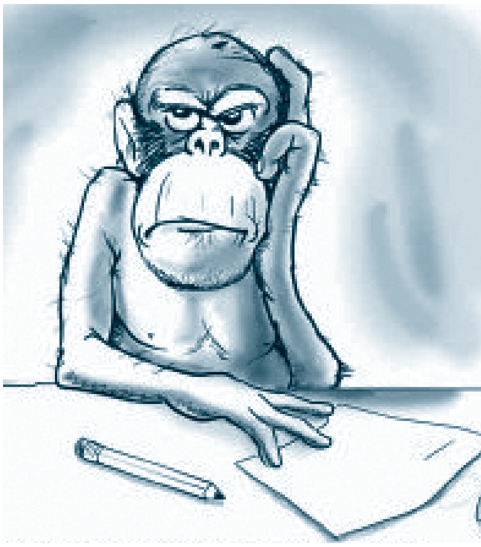
¿Vamos bien? Ahora es tiempo de partir de 1122334455 y luego de 112233445566 y analizar la unicidad de las soluciones encontradas (si es que se encuentran)

¿Qué número?

Escribamos un número de diez cifras. Los números de “mayor peso” nos dan el código de área, y aquí le vamos a pedir que el número de mayor peso exprese la cantidad total de ceros que tiene el número que buscamos. La cifra que está a la derecha debe indicar la cantidad total de unos, la siguiente la cantidad total de números 2 y así hasta llegar al número de menor peso que debe expresar la cantidad total de nueves que hay en el número que muestra la pantalla. Ahora marque, creo que con francés alcanzará para comunicarse.

El problema del estribo

Aqui el problema es pensar problemas que podamos resolver con el celular convertido en pizarra portátil. Esperamos nuevas propuestas, soluciones y sugerencias en revistaqed@cbc.uba.ar



El empleo del celular se limita aquí a servir de pizarrón de bolsillo que, a diferencia del lápiz y el papel que requieren las dos manos, se usa con una, y funciona en la oscuridad. Ésa es una inesperada ventaja evolutiva de nuestro pulgar. Hace millones de años, los primates que no tenían un pulgar en oposición no sólo recogían menos fruta y se privaban del uso de herramientas; tampoco podían enviar un SMS; quedaban aislados, y sucumbían.

Jorge Salvetti
Lingûista y
traductor

Lo que caracteriza a nuestro siglo XIX no es la victoria de la ciencia, sino la victoria del método científico sobre la ciencia.

F. Nietzsche, Nachgelassene Fragmente 1888-1889. (1)

La ciencia no obstante no es más que una ideación que la humanidad produjo en el curso de su historia, sería por lo tanto absurdo si el hombre decidiese dejarse definitivamente juzgar por una sola de esas ideaciones.

Husserl, Di Krisis der europäischen

Wissenschaften und die tranzendentale Phänomenologie (1934-1937). (2)

In principium erat verbum... (3)

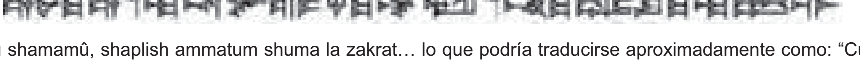
Resulta curiosa y paradojal, casi el síntoma de una extraña dolencia, la relación que la ciencia –sus sujetos–, sobre todo la más dura, parece mantener con la palabra. Toda la precisión y el rigor de los que se ufana, orgullosa, como de su más preciada posesión parecen desplomarse de la manera más estrepitosa, cuando lo que está en juego es el valor de los términos. Y este fenómeno, constatable en diversas manifestaciones, no sólo salta a la vista en las zonas más marginales o secundarias de su labor, sino también en los fundamentos más básicos de sus construcciones, en la denominación misma de sus esferas de actividad y en su terminología inaugural.

Ya Whitehead señaló la particular inteligencia que se requiere para poder observar lo obvio. Todos los grandes “progresos” de la ciencia siempre han tenido su origen, directa o indirectamente, en esa reinterpretación de las nociones más esenciales y en esa mirada virginal que ve las cosas, que tantos han visto sin ver, como por vez primera. Por eso no nos parece fútil plantear los siguientes interrogantes.

(1) Fragmentos póstumos (N. del E.)

(2) La crisis de la ciencia europea y de la fenomenología trascendental (N. del E.)

(3) De no haber temido pecar de extravagante, me habría gustado titular este breve artículo, no con la versión latina que San Jerónimo da de la frase inicial del Evangelio de Juan, y que alude, en uno de sus significados, al comienzo del génesis y al papel creador que la palabra desempeña en la cosmogonía judeocristiana, ni tampoco con la versión “original” griega de dicha frase, en la que aparecen los dos términos, tal vez, más importantes de la historia de la ciencia, como lo son las voces de arjé y logos, sino con el primer dístico de lo que puede considerarse uno de los precursores más directos del Génesis: el poema babilónico denominado por algunos estudiosos Poema Épico de la Creación. Este primer dístico, cuyas dos primeras palabras se emplean también como denominación de la obra, dice:



o sea, Enuma elish lâ nabû shamamû, shaplish ammatum shuma la zakrat… lo que podría traducirse aproximadamente como: “Cuando arriba los cielos no estaban nombrados, abajo la tierra no era llamada por nombre.” Y aquí lo curioso no es tanto, quizás, el hecho general de que la creación del cielo y la tierra, su existencia, parezca estar ligada de una manera aun más inmediata a la cualidad generativa de la palabra que en el Génesis, sino, más bien, el fenómeno particular de que se utilicen vocablos distintos para referirse al acto de otorgar existencia mediante la palabra al mundo superior y al inferior respectivamente. Si ha de juzgarse por el destino peculiar que estas raíces semíticas tuvieron en el hebreo, podría aventurarse que el primer vocablo (nabu) se relaciona con el poder profético y predictivo (pre-sciente) que se manifiesta en la palabra, con su aspecto más intuitivo e inconsciente, mientras que el segundo grupo (shuma zakrat) parecería remitir a la capacidad rememorativa o determinativa (post-sciente) que caracteriza también al lenguaje.

¿Qué puede significar, desde el punto de vista epistemológico, que la denominación misma de una ciencia carezca de todo rigor, que sirva, por decirlo así, como una suerte de “comodín” o cheque en blanco que va llenándose de diversos contenidos y nombrando, por ende, distintos objetos, a medida que dicha ciencia varía con el tiempo? O expresado en otros términos: ¿Qué puede indicar, “científicamente hablando”, que el nombre de una ciencia no signifique nada concreto, que resulte más o menos indefinible, nebuloso o cuestionable, evocando distintos objetos a lo largo de su historia? ¿Qué representa, desde una perspectiva epistemológica, que quienes cultivan y ejercen una ciencia ignoren casi todo lo que puede saberse del término que designa su hacer y sus conceptos fundamentales? ¿Que ignoren en muchísimos casos su significación originaria? ¿Qué tipo de conocimiento implica tal desconocimiento? ¿Qué clase de saber desprecia ese saber? ¿Qué significado puede tener esta peculiar αφασια en quienes están convencidos de dominar el conocimiento más excelso y riguroso que haya alcanzado el ser humano?

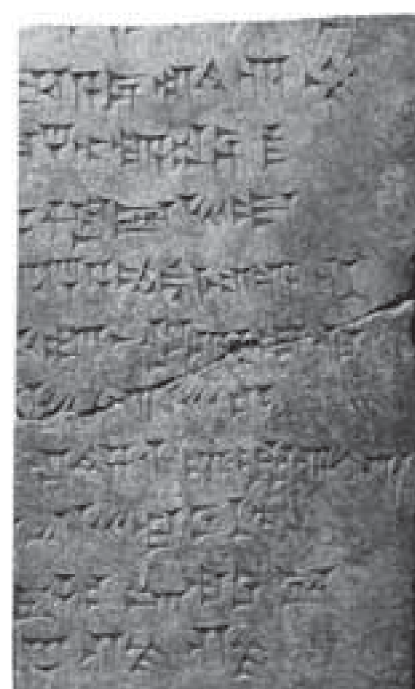
Caracteres en lengua acadia, usada por babilonios y asirios; los mismos en los que se grabó en arcilla fresca el mito del origen del mundo que menciona este artículo.

Creemos que es inherente a las ciencias duras cierto desprecio por la palabra y el género de conocimiento que esta implica. Este desprecio, que bien podría calificarse en su caso de necesario y que acompañó sigilosamente su gestación durante el Renacimiento y el Iluminismo europeo, estallaría en una ensordecedora y disonante fanfarria triunfal en los últimos dos siglos. Y este simple hecho, causa y efecto de su exacerbada valorización de un determinado lenguaje –el lenguaje matemático—, les ha garantizado un éxito muy particular.

Pero toda polarización tiende a generar frutos hipertrofiados y esta hipertrofia no puede superar ciertos límites sin acercarse peligrosamente al abismo de la monstruosidad, la esterilidad y la impotencia.

Por lo demás, esta desvalorización de los términos y del lenguaje mismo, del lenguaje como fuente primordial del conocimiento del hombre, no es un dato anecdótico o menor dentro de la cultura, obedece a causas muy precisas, que bien podrían denominarse históricas, y constituye el meollo alrededor del cual aún gira la posibilidad de disponer o no, de manera natural e inmediata, de un lenguaje y una visión totalizadora de la realidad, de un lenguaje que no sacrifique, en nombre de una concepción necesariamente parcial de universalidad y verdad, las cualidades de plasticidad, fluidez y sensibilidad que el lenguaje común y cotidiano comparte con el lenguaje subjetivo de las artes y el sueño.

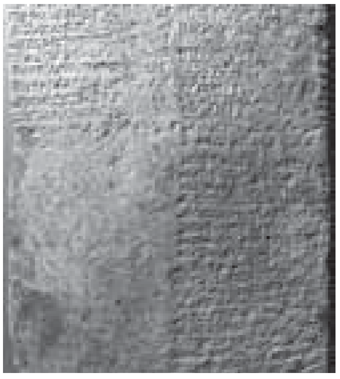
Estamos convencidos de que un lenguaje sólo puede ser universalmente verdadero, cuando lo es en cada singularidad, y el lenguaje matemático, por su misma genealogía, no puede satisfacer este requisito de universalidad por la singularidad; sólo es cierto singularmente en el punto en que lo singular se encuentra sometido a un universal de características tan manifiestamente singulares que bien podría catalogarse de monárquico.



Los caracteres en forma de cuña de la lengua acadia se componen de trazos verticales, horizontales e inclinados. Cada conjunto representa una sílaba.

Porque la universalidad y la precisión del lenguaje matemático sólo son ciertas, dadas una traumática abstracción y una letal reducción de la realidad, reducción que obedece, a nuestro juicio, a un importante factor económico y político, e incluso en gran parte fetichista, de nuestra psicología. Y puesto que esa universalidad y precisión se basan necesariamente en una reducción –reducción que repercute negativamente, sobre todo, en la esfera más inmediata de universalidad y verdad que posee el ser humano, en la esfera del lenguaje primigenio de su más palpable individualidad—, tanto una como la otra resultan no sólo filosófica sino también “científicamente” cuestionables como tales.

Actualmente la ciencia sabe que la naturaleza, independientemente de lo que este vocablo pueda designar, posee entre sus fuerzas operativas la de la indeterminación, la imprecisión y el “azar”, fuerzas que bien podríamos catalogar de estéticas, o quizá, ¿por qué no?, de caprichosas o subjetivas: Como si, de pronto, asomara allí una extraña criatura que intentase desesperadamente llamar la atención de quienes, buscando penetrar en sus misterios, no se percatan, quizá, de que, al hacerlo, le pisan un pie, le meten un dedo en el ojo, o le auscultan con un frío e insensible instrumento el recto. Fuerzas que parecieran resistirse a dialogar en el lenguaje matemático, a pesar de, o precisamente por estar encaradas de manera expresa desde esa unilateral perspectiva.



Una de las tablillas del Enuma elish, primeras palabras del poema babilónico que narra el origen del mundo.

La palabra es nuestro instrumento fundamental de conocimiento, pero es mucho más que eso: es la expresión de nuestro más profundo anhelo de saber y, por ende, de nuestra consustancial ignorancia. Pero, por sobre todo, de nuestra conciencia de poseer, desde el origen remoto del mito, una conexión sensible e íntima con una fuente de conocimiento tan inmediata y trascendental que toda nuestra arrogancia sería incapaz de concebir, mucho menos de manipular, sin dañarnos, de manera expoliadora.

Entendemos que despreciar la palabra, ignorar sus riquezas, su poder y su historia, es ignorar la génesis misma de la ciencia y su porvenir. Por eso nos parece especialmente útil dedicar este espacio crítico y, por así decir, literario, que tan generosamente nos brinda esta publicación, a un análisis hermenéutico y filológico de los términos fundamentales de la ciencia, comenzando en el próximo número con el concepto de physis-natura.

Cuando la revolución bajó del cielo

El enigma de Copérnico
Jean–Pierre Lumminet

Ediciones B. para el sello Zeta Bolsillo.

Esta biografía novelada es la primera de la serie "Los constructores del cielo" que promete seguir con las de Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton.

De esta manera el autor muestra su interés particular por los científicos de los siglos XVI y XVII, tal vez porque vivieron en una etapa esencial del desarrollo de las ciencias en general y de la astronomía en particular.

El Universo antiguo y medieval era considerado muy pequeño y con la Tierra como centro. Esta visión perfeccionada por la astronomía de Ptolomeo 1400 años antes fue apenas retocada durante la Edad Media para ajustarla a las exigencias teológicas.

Nicolás Copérnico desde su Polonia natal viene a "patear el tablero" proponiendo un sistema heliocéntrico en el cual el Sol ocupa el centro geométrico del Universo mientras que la Tierra gira a su alrededor y sobre sí misma.

La vida de Copérnico transcurre en el medio de acontecimientos trascendentes para la humanidad: el descubrimiento de América, la invención de la imprenta, la Reforma de Lutero que comienza a agrietar la unidad de la Iglesia y el creciente oscurantismo "oficial" que avanza sobre toda Europa y que obliga a que las ideas se transmitan en forma casi clandestina.

En este contexto, acusado por la Iglesia de hereje y por los reformistas de papista, el canónigo polaco que nunca llegó a obispo por razones políticas, fue construyendo su teoría, arrancando a la Tierra del centro del Universo y colocándola como uno más de los planetas que giran alrededor del Sol. Son contemporáneos de él e influyen sobre su vida directa o indirectamente, personajes como Leonardo da Vinci, Durero, Erasmo, Maquiavelo y Regiomontano entre otros tantos.

Luminet es astrofísico y nos introduce en forma amena y precisa en los modos de hacer y difundir la ciencia en el turbulento siglo XVI. Se puede percibir el rol que en este sentido, cumplen las Universidades con sus profesores más influyentes, la Iglesia y los intereses de los estados.
El lector podrá comprender por qué la tarea del científico era, en aquel entonces como en muchos otros de la historia, de alto riesgo. J.C.P.

Impedancia

Agustín Rela
CBC-UBA

Quizás alguna vez, aburridos de oír la música grabada, y mientras esperamos que nos atiendan por teléfono, jugamos a enviar ondas transversales y longitudinales a lo largo del cordón helicoidal, para ver cómo rebotan invertidas. Ese efecto ilustra el concepto de impedancia de un medio de propagación.

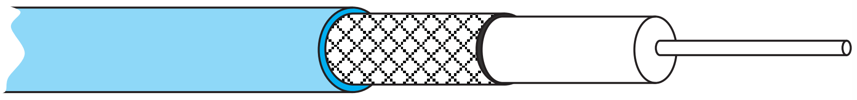
En el ambiente electrotécnico y electrónico, la palabra impedancia tiene varios significados. Uno de ellos corresponde a la extensión del concepto de resistencia eléctrica al caso de la corriente alterna.[1]

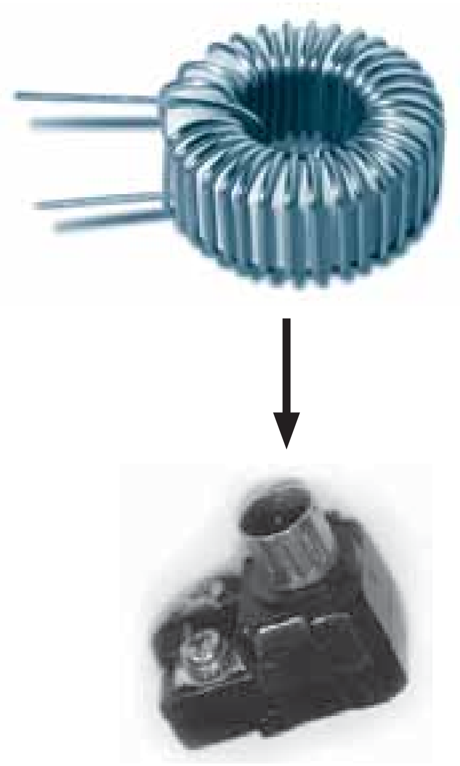
$$R = \frac{V}{I} \qquad\qquad Z = \frac{V}{I}$$

R, en ohms, es la resistencia; Z, también en ohms, la impedancia; V, en volts, la tensión, diferencia de potencial o voltaje; e I es la intensidad de la corriente, o amperaje, en amperes.

En ese significado, la impedancia se interpreta como la dificultad que ofrece un circuito a la circulación de la corriente, y coincide con el de impedancia hidráulica en la circulación de fluidos, por ejemplo agua en un caño, o sangre en una arteria.

Pero en el ámbito de la propagación de ondas, la palabra impedancia adquiere un significado muy diferente del anterior. Por ejemplo, un cable coaxial de veinte metros de largo, tiene una impedancia de 75 ohms a las ondas de TV; la misma que la de un cable del mismo tipo de sólo cinco metros de largo. La impedancia es, en este caso, una propiedad intensiva, o de punto, como la densidad y la temperatura, y no extensiva, o de conjunto, como la masa y el calor.





Adaptadores de impedancia para señal de TV. El transformador es muy pequeño y cabe dentro de la ficha.

El hecho de que las ondas se invierten cuando rebotan, se puede entender a partir del principio de superposición, que establece que cuando las ondas se propagan en un medio lineal [2], no se influyen entre sí; cada una marcha como si la otra no existiera, y el efecto local es la suma de los que producen cada una de las ondas por separado.

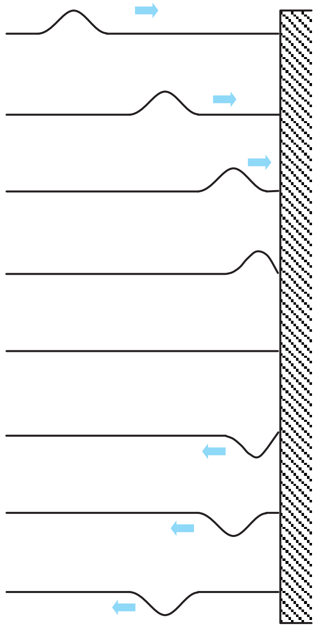
Supongamos una soga elástica tensa, por la que se propagan, en sentidos opuestos, dos pulsos de la misma forma, pero uno de ellos invertido con respecto al otro.

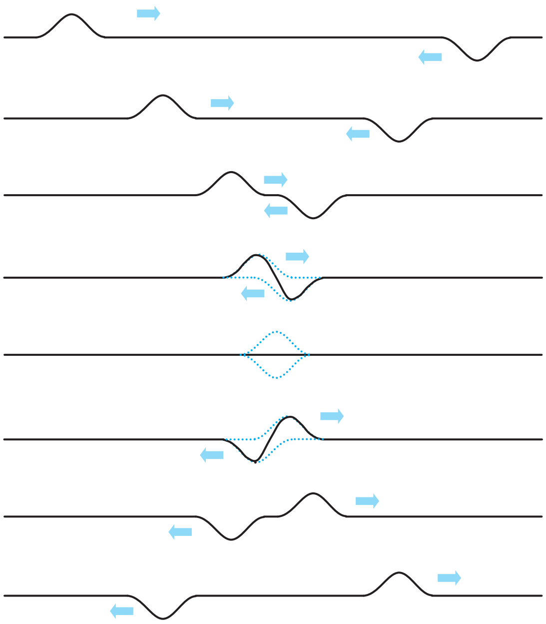
1. En el caso de la corriente alterna, la medida de la impedancia es un número complejo, con una parte real, la resistencia, y otra imaginaria, la reactancia. Ésta, a su vez, se compone de la reactancia inductiva, y la reactancia capacitiva.

2. El vacío es un medio lineal para la propagación de las ondas electromagnéticas. En cambio los medios elásticos sólo se comportan linealmente para perturbaciones pequeñas. En otra palabras, una ola influye sobre la propagación de otra ola. Leonardo da Vinci, en su *Tratado de la pintura*, se admiraba de cómo los anillos de ondas que se forman al arrojar dos piedras a un estanque, crecen y se cruzan como si uno ignorara al otro; pero también parece que, al contrario, chocaran y se reflejaran. Dilucidar si ocurre una u otra cosa era, para el artista italiano, un atractivo problema.

Por el principio de superposición, cada pulso viaja como si el otro no existiese, y cada punto de la soga adopta, en cada instante, la posición de apartamiento de la línea neutra que resulta de la suma algebraica [3] de los apartamientos individuales.

En el instante en que los dos pulsos se cruzan exactamente, la soga está recta, pero en la zona en la que se están sumando los pulsos, cada punto tiene una velocidad transversal, hacia abajo del lado izquierdo, y hacia arriba en el derecho, en este caso.

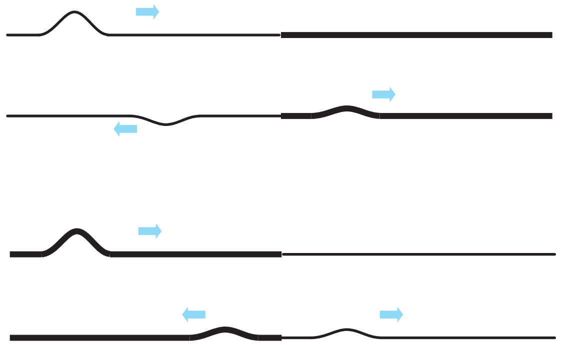




El punto central de la soga nunca se mueve. Por lo tanto, podría estar clavado a un punto jo, sin que cambie nada de lo dicho. En consecuencia, cuando un pulso se propaga por una soga con un extremo atado a un punto jo, el pulso se re eja invertido.

De modo semejante, aunque algo más complejo, se puede razonar que si el extremo de la soga está libre, el pulso regresa sin inversión.

Si atamos una soga delgada a otra más gruesa, y enviamos un pulso por la primera, el empalme se puede interpretar como una condición intermedia entre la de la soga entera y uniforme, y la soga atada a un punto jo. En consecuencia, parte del pulso que se envíe seguirá su viaje a través de la soga gruesa, y otra parte del pulso se re ejará al revés. Similarmente, un pulso que viaje por una soga gruesa, se re ejará sin inversión en el empalme con una soga más delgada.



3. Es decir, la suma de cada apartamiento con su respectivo signo.

Cuanto mayor sea la diferencia de grosores de las sogas, tanto mayor será la fracción de energía re ejada en el empalme.

Lo mismo ocurre con el sonido que viaja en el aire, cuando pasa al agua. La fracción de energía que sigue adelante es insigni cante con respecto a la incidente. Y eso es lo que pasa cuando oímos: el sonido pasa del canal auditivo del oído externo, aéreo, al caracol del oído interno, acuoso. Ambos medios tienen diferentes impedancias acústicas [4]. Sin embargo, y salvo dolencias, oímos bien. ¿Cómo lo conseguimos?

El secreto es la palanca que hacen los huesecillos del oído medio (el martillo, el yunque, el lenticular y el estribo), que convierten el movimiento amplio y la escasa fuerza del tímpano, en un movimiento de menor amplitud, pero de más fuerza sobre la ventana oval en la que comienza el caracol, o cóclea [5].

En el caso del pulso que se propaga a través de la unión de dos sogas, y si nos interesara que no se re eje energía, podemos intercalar una palanca.

Si los brazos son muy desiguales, habrá rebote sin inversión; si son muy semejantes, tendremos rebote con inversión; y con los brazos ajustados en las longitudes correctas, el pulso pasará por completo al otro lado, y no habrá re exión de energía, ni pulso regresivo al derecho, ni al revés.

La palanca actúa como un transformador de impedancia: aumenta la fuerza, y disminuye la amplitud de vibración.

Lo mismo se hace cuando se adapta un cable chato paralelo de antena de TV, cuya impedancia es de 300 ohms, a uno cilíndrico coaxial de 75 ohms. el adaptador tiene, en su interior, un anillo de ferrita con dos bobinados, uno de ellos con el doble de vueltas que el otro.

El segundo signi cado de impedancia, el relacionado con las ondas, tiene que ver con las características del medio, y no con la di cultad que ofrezca a la propagación.

Los megáfonos adaptan la impedancia del órgano vocal a la del espacio abierto, y mejoran, con eso, la transferencia de energía.
El antiguo teatro griego y romano, anterior a los micrófonos, usaba megáfonos, disimulados en las máscaras de los actores que interpretaban los personajes.
Persona, en latín, significa sonar mucho, es decir, megáfono.

4. La impedancia (véase La física y las imágenes médicas, en este número) vale $Z_A = \rho.v$, donde ρ es la densidad, en kg/m^3, y v la velocidad de propagación de las ondas, en m/s. Pero $v = \sqrt{(Y/\rho)}$, donde Y es el módulo de Young del material. Entonces $Z_A = \sqrt{(Y.\rho)}$. El módulo de Young, en pascales, o newton por metro cuadrado, se relaciona con la presión que hay que aplicar a una porción del medio, para que su volumen se reduzca a la mitad. Un newton es la fuerza que aplicada a un cuerpo de un kilogramo de masa, hace que su velocidad cambie en un metro por segundo, cada segundo que transcurre.

5. En algunos libros se dice que los huesecillos del oído actúan como un amplificador. Amplifican, sí, la fuerza, y la presión. Pero, naturalmente, y como todo elemento pasivo, no amplifican la energía, ni la potencia. En cuanto a la amplitud espacial de la vibración, los huesecillos la reducen.

Patricia Fauring
y Flora Gutiérrez
CBC - UBA

Invariantes

Para precisar qué entendemos por invariante, nada mejor que un ejemplo.

Recordemos que un poliedro es cualquier cuerpo geométrico limitado por caras planas poligonales. Hay una in nidad de formas posibles para un poliedro.

El matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1787) descubrió que para todos los poliedros que no tengan agujeros que vayan de un lado al otro, el número de vértices, V, el número de aristas, A, y el número de caras, C, satisfacen la relación

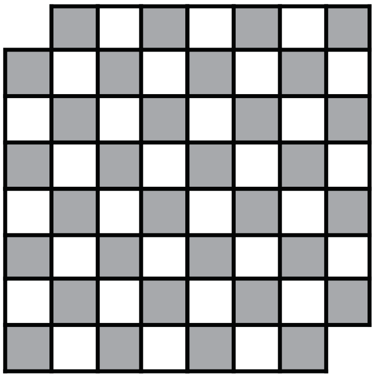
$$V - A + C = 2.$$

Esta fórmula es un arquetipo de invariante y es, además, un resultado matemático magní co.

Nuestro propósito es mucho más modesto: usar la noción de invariante para resolver algunos problemas y aprovechar estos problemas para comprender la noción de invariantes.

Los problemas

EL TABLERO CON DOS CASILLAS DE MENOS



La figura muestra un tablero de ajedrez al que se le eliminaron las dos casillas opuestas superior izquierda e inferior derecha. ¿Es posible cubrir este nuevo tablero con fichas de dominó sin que se superpongan ni se salgan del tablero? (Una ficha de dominó cubre exactamente dos casillas adyacentes del tablero)

Si la respuesta fuese a rmativa, bastaría con exhibir una manera de cubrir el tablero y el problema estaría resuelto. Pero la respuesta es no. Es imposible cubrir este tablero con dominós. Y para demostrarlo tenemos que hallar un argumento general que se aplique a todos los posibles cubrimientos.

Las casillas de nuestro tablero están pintadas de blanco y negro alternadamente pues se trata de un tablero de ajedrez. Las casillas eliminadas llevaban igual color, pues eran las dos blancas. El tablero tiene 32 casillas negras y 30 blancas.

Observamos que cada cha de dominó cubre exactamente una casilla blanca y otra negra. Por lo tanto, entre las casillas cubiertas por varias chas de dominó hay la misma cantidad de blancas que de negras. Como el número de casillas negras es distinto del número de casillas blancas, es imposible cubrir completamente el tablero con chas de dominó (una vez cubiertas todas las casillas blancas quedarán aún casillas negras sin cubrir). La solución está completa.

Hemos usado el siguiente invariante:

En todos los cubrimientos, entre las casillas cubiertas, la cantidad de casillas blancas es igual a la cantidad de casillas negras.

LAS DIEZ RANAS

En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana. Cada una de ellas puede, de un salto, colocarse en otro escalón, pero cuando lo hace, al mismo tiempo, otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja. ¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?

Si la respuesta fuese afirmativa, bastaría con exhibir una secuencia de saltos mediante los cuales todas las ranas se colocaran en un mismo escalón y el problema estaría resuelto. Pero la respuesta es no. Es imposible llevar todas las ranas a un mismo peldaño. Y para demostrarlo tenemos que hallar un argumento general que se aplique a todas las posibles secuencias de saltos.

Numeramos los escalones de 1 a 10, de abajo hacia arriba. Inicialmente, la suma de los números de los escalones ocupados por cada una de las diez ranas es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Cuando se realiza un movimiento, alguna rana salta x escalones hacia arriba y otra salta x escalones hacia abajo. Entonces el número del escalón de la rana que saltó hacia arriba aumenta en x y el número del escalón de la rana que saltó hacia abajo disminuye en x, luego la suma de los números de los escalones en los que están las diez ranas no se modifica, pues se cancelan la x que se suma con la que se resta.

Si fuese posible tener a todas las ranas en un mismo escalón, la suma de los números de los escalones en los que están las diez ranas sería 10 si quedaran en el primer escalón, pues se sumaría 10 veces 1, sería 20 si quedaran en el segundo escalón, 30 si quedaran en el tercero, y en general $10\boldsymbol{a}$, si quedaran en el escalón $\boldsymbol{a}$. O sea que la suma sería múltiplo de 10. Como 55 no es múltiplo de 10, la tarea pedida es imposible.

Hemos usado el siguiente invariante:

La suma de los números de los peldaños que ocupan cada una de las 10 ranas es constante a lo largo del movimiento.

LOS TRES SALTAMONTES

Tres saltamontes saltan en un plano. Cada saltamontes puede saltar por encima de otro, y quedar a la misma distancia de aquél que antes de dar el salto. Inicialmente los saltamontes ocupan posiciones en tres de los vértices de un cuadrado. ¿Es posible que durante el juego uno de ellos aparezca en el cuarto vértice del cuadrado?

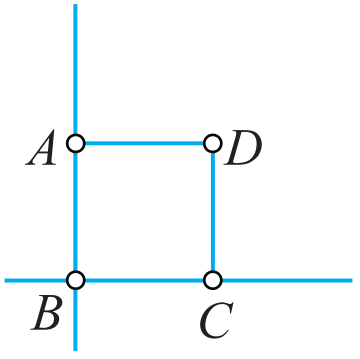
Una vez más, si la respuesta fuese afirmativa, bastaría con exhibir una secuencia de saltos mediante los cuales uno de los saltamontes se colocase en el cuarto vértice del cuadrado y el problema estaría resuelto. Pero la respuesta es no. Es imposible llevar a uno de los saltamontes al cuarto vértice del cuadrado. Y para demostrarlo tenemos que hallar un argumento general que se aplique a todas las posibles secuencias de saltos, que son infinitas.

Estampilla en homenaje a Euler donde puede observarse a un poliedro y abajo su famosa fórmula donde relaciona las caras, aristas y vértices de un poliedro.
En 1750, Euler, escribió en una carta a Goldbach: "Encuentro sorprendente que, hasta donde yo sé, este resultado general de geometría sólida no haya sido establecido aún" .
Algo de razón tenía Euler en lo que decía: Descartes en 1639 ya había hallado este resultado. El manuscrito de Descartes fue hallado y publicado recién en 1860.

Podemos elegir coordenadas en el plano de manera que las posiciones iniciales de los saltamontes sean $A=(0,1)$, $B=(0,0)$ $C=(1,0)$ y nuestro problema se reduce a demostrar que ningún saltamontes puede llegar a $D=(1,1)$.

Determinemos primero las coordenadas (a', b') de un saltamontes que salta desde el punto (a, b) por sobre un saltamontes de coordenadas (c, d). La condición de que un saltamontes salta por encima de otro y queda a la misma distancia de aquél que antes de dar el salto significa que el saltamontes que está quieto está en el punto medio de las posiciones inicial y final del saltamontes que salta sobre él. Es decir,

$$\frac{a+a'}{2}=c \qquad \text{y} \qquad \frac{b+b'}{2}=d \qquad \text{Luego } a' = 2c - a,\ b' = 2d - b.$$



Observamos que después de cada salto, cada saltamontes tiene coordenadas enteras. Además, en cada salto las paridades de ambas coordenadas no cambian. Esto es claro para los dos saltamontes que están quietos en un turno. Para el que se mueve, hay que notar que $-a$ tiene la misma paridad que a, y como $2c$ es par, $2c - a$ tiene la misma paridad que $-a$, o sea, la paridad de a. Los mismos argumentos se aplican a b y $2d - b$. Luego, los saltamontes que comienzan en $A=(0,1)$ y $C=(0,1)$ siempre tendrán una coordenada impar y la otra par, pues 0 es par y 1 es impar, mientras que el que comienza en $B=(0,0)$ sólo tiene coordenadas pares. Por lo tanto ninguno de ellos puede llegar al punto $D=(1,1)$, de coordenadas impares.

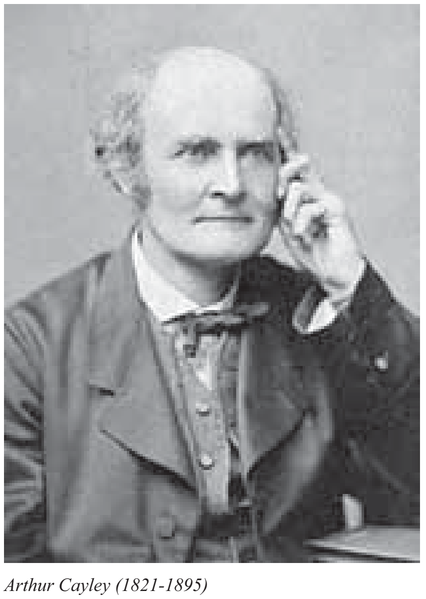
Hemos usado el siguiente invariante:

La paridad de las coordenadas de cada saltamontes es constante.

LOS 57 CAMALEONES

Un viajero llegó a una pequeña isla donde vivían 20 camaleones azules, 19 grises y 18 púrpuras. El viajero observó que cuando dos camaleones de diferente color se encontraban, inmediatamente cambiaban al tercer color (por ejemplo, si se encontraban un camaleón azul y uno gris, ambos se volvían púrpuras), y no cambiaban de color en ninguna otra situación. ¿Es posible que en algún momento todos los camaleones tengan el mismo color?

Si la respuesta fuese a rmativa, bastaría con exhibir una secuencia de encuentros mediante los cuales todos los camaleones tuvieran un mismo color y el problema estaría resuelto. Pero de nuevo la respuesta es no, es imposible lograr que los 57 camaleones sean de igual color. Y para demostrarlo tenemos que hallar un argumento general que se aplique a todas las posibles secuencias de encuentros.



Arthur Cayley (1821-1895)

En el comienzo (20, 19, 18) es la terna del número de camaleones azules, grises y púrpuras, respectivamente. En cada encuentro, se resta 1 en dos de las coordenadas y se suma 2 a la restante. Por ejemplo, si en algún momento la cantidad de camaleones azules, grises y púrpuras forman una terna (a, b, c) y se encuentran un camaleón azul y uno gris, la terna siguiente será $(a - 1, b - 1, c + 2)$. Miremos los restos en la división por 3; estos restos pueden valer 0, 1 o 2, y si recorremos ordenadamente los números enteros positivos, estos restos aparecen en ciclos de 3: 0, 1, 2, 0, 1, 2, … De modo que los números $a - 1$ y $b - 1$ tienen los mismos restos en la división por 3 que los números $a + 2$ y $b + 2$, respectivamente. Esto significa que los restos de dividir por 3 de los tres números que representan a los camaleones cambian de acuerdo con el patrón $0 \to 2$, $1 \to 0$ y $2 \to 1$. En particular si al comienzo los restos son los tres distintos siempre serán todos distintos. Esta es la situación en la terna (20, 19, 18) cuyos números tienen restos 2, 1 y 0, respectivamente, pues $20 = 3.6 + 2$, $19 = 3.6 + 1$ y $18 = 3.6$. Pero si los camaleones tuvieran todos el mismo color, tendríamos una terna con dos 0 y un 57, de modo que los restos serían iguales. Por lo tanto esta situación jamás puede lograrse.

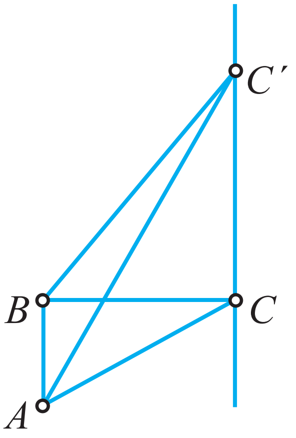
Hemos usado el siguiente invariante:

Los restos de dividir por 3 a las 3 coordenadas son siempre tres números distintos.

LAS TRES HORMIGAS

En el plano hay dibujado un rectángulo y tres hormigas están paradas en tres de sus vértices. Las hormigas se mueven por turnos. Cada hormiga, en su turno, camina a lo largo de la línea recta que es paralela a la recta determinada por las otras dos hormigas. ¿Es posible que al cabo de algunos turnos las hormigas se encuentren ubicadas en los puntos medios de tres lados del rectángulo?

Observemos que si las configuraciones de las tres hormigas antes y después de un turno son los triángulos ABC y ABC', respectivamente (es decir, la hormiga que se movió lo hizo de C a C', siguiendo una paralela a AB) entonces el área de ABC es igual al área de ABC'. Esto se debe a que los dos triángulos tienen la misma base, y el tercer vértice pertenece a una recta paralela a dicha base trazada por C. Por lo tanto, el área del triángulo que determinan las tres hormigas es constante.



Inicialmente, el área es $\dfrac{ab}{2}$, donde a y b son los lados del rectángulo, entonces por lo visto en el párrafo anterior, el área del triángulo que forman las hormigas es siempre $\dfrac{ab}{2}$. El área de un triángulo con vértices en los puntos medios del rectángulo es $\dfrac{ab}{4}$ (un cuarto del área del rectángulo).

En consecuencia, es imposible que las hormigas se encuentren en tres puntos medios de sendos lados del rectángulo.

Hemos usado el siguiente invariante:

El área del triángulo que determinan las tres hormigas es constante.

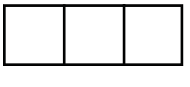
DEJAMOS TRES PROBLEMAS PROPUESTOS PARA QUIEN QUIERA DISFRUTARLOS

P1. Había tres números enteros positivos escritos en un pizarrón. Se borró uno de ellos y se lo reemplazó por la suma de los otros dos menos 1. Se repitió este procedimiento varias veces y finalmente los números escritos en el pizarrón son 17, 1983 y 1999. ¿Es posible que los números iniciales hayan sido 2, 2 y 2?

P2. En una mesa hay dos cajas con 17 y 16 bizcochos respectivamente. Juegan dos jugadores, y cada uno en su turno puede comer dos bizcochos de cualquiera de las cajas (pero los dos de la misma), o pasar un bizcocho de la primera caja a la segunda.

Pierde el jugador que no puede mover. ¿Qué jugador gana?

P3. En un tablero de 8 × 8 se elimina una casilla de una esquina. ¿Es posible cubrir el resto del tablero con triominós de esta forma



de manera que no se superpongan ni sobresalgan del tablero? (Las casillas del triominó son del mismo tamaño que las casillas del tablero.)

James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

"La teoría de invariantes surgió a la vida llevada por la fuerte mano de Cayley, pero constituyó finalmente una obra completa de arte, para admiración de las futuras generaciones de matemáticos, debido particularmente a los destellos de la inspiración con que la iluminó la inteligencia de Sylvester"
Percy MacMahon

El secreto de El Método

Carlos Borches
CBC - UBA

ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ

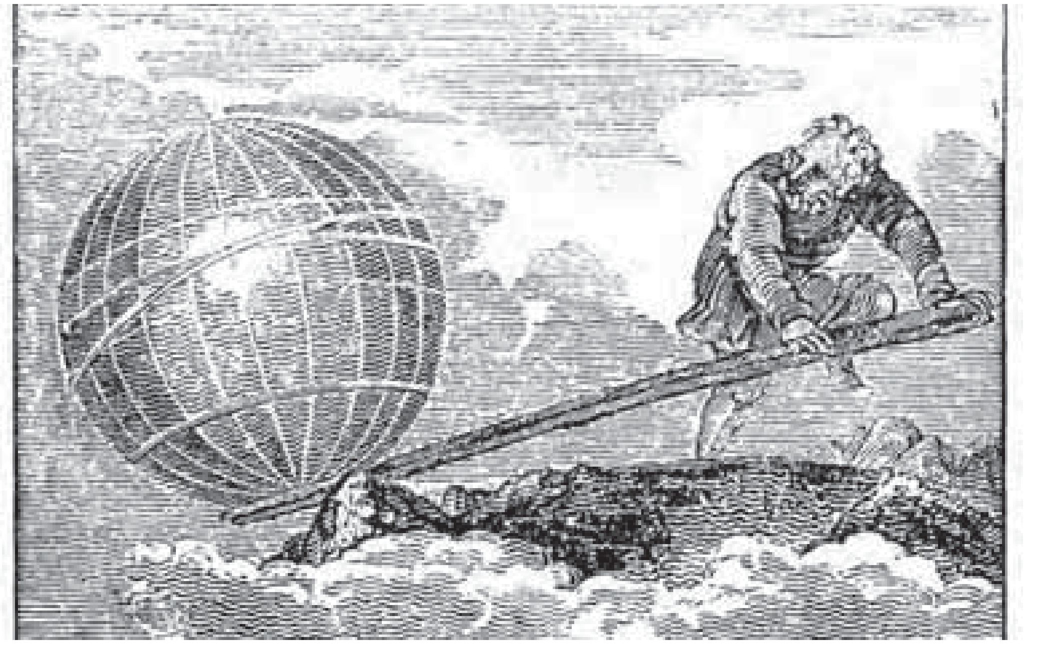
En el número anterior de Qed contamos los avatares de un libro perdido por siglos, testigo del derrumbe del mundo helénico, de la caída del Imperio Romano y víctima de las cruzadas; fugitivo en el imperio otomano y tabla de salvación de un anticuario judío durante la ocupación nazi de París.

Digno compañero del highlander Connor MacLeod, el libro se abrió paso en el tiempo portando las ideas de su autor. Estamos hablando de El Método escrito por Arquímedes y ya es hora de abordar su contenido.

Para entender las proporciones de la obra de Arquímedes remontémonos al pasado poco más de dos mil años. En el mundo helénico se establecen pilares de los que será la cultura occidental, pero detengámonos un momento en la física y la geometría.

La Física de Aristóteles ensaya una explicación cualitativa del mundo. Con combinaciones de cuatro elementos pretendía describir todas las sustancias en la Tierra y agregando un quinto elemento saltábamos al cielo. Era con las proporciones de esos elementos cómo Aristóteles explicaba las fuerzas y los "movimientos naturales" desarrollando una teoría que cosechó adeptos más allá del Renacimiento. En cuanto a la geometría, había superado la colección de datos empíricos para erigirse como la expresión más acabada del pensamiento humano. Los Elementos de Euclides expresan esa construcción sólida y contundente donde las a rmaciones se enhebraban con el hilo de la lógica.

Pero lejos de los centros culturales del helenismo, en una isla al sur de Roma, se encontraba Siracusa, la ciudad donde Arquímedes desnudaba y resolvía las limitaciones del pensamiento de su época.



"Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo", la famosa cita asociada a Arquímedes y la palanca, aparece recién en Synagoge o Colección matemática, escrita hacia el 340 por Pappus de Alejandría. El grabado de la ilustración fue publicado en Mechanics Magazine, Londres 1824.

Adelantándose varios siglos, Arquímedes trazó un puente con doble sentido de circulación entre la física y la matemática.

En un sentido, Arquímedes utilizó a la matemática como lenguaje de la física. Algo que hoy parece obvio constituía una revolución difícil de aceptar en el mundo griego. Con el lenguaje de la geometría, las fuerzas ya no eran objeto de a rmaciones cualitativas apoyadas en el sentido común sino que eran magnitudes medibles y comparables como los volúmenes o super cies.

En su escrito *Del equilibrio de los planos*, Arquímedes llega al concepto de centro de gravedad y a la ley de Palancas, y con notable ingenio calcula los centros de gravedad de diversos polígonos y del trapecio parabólico. Pero su trabajo no se agota con un nuevo conocimiento, sino que esto le permitió construir máquinas que asombraron a generaciones, como recuerda Silio Itáico "Fama tenía de haber contado las arenas de la tierra; él, que supo poner a ote una galera con el esfuerzo de una sola mujer; él, que hizo subir rocas amontonadas en contra de la pendiente del terreno" [1]

Durante siglos, los lectores más entusiastas de algunas obras de Arquímedes fueron constructores que buscaban emplear arcos parabólicos en sus obras. En el siglo XX, Gaudí eutilizó estas curvas hasta transformarlas en un sello característico de estilo. Abajo: Casa Batlló (Barcelona) diseñada por Gaudí. Izquierda: Oceanográfico de Valencia, en la Ciudad de las Artes y las Ciencias, diseñado por Félix Candela, recordado por sus atrevidas estructuras en forma de paraboloides hiperbólicos, donde cada una de las caras muestra un segmento de parábola.

Solo por esto Arquímedes merecería un lugar de privilegio en la galería de las mentes brillantes de la humanidad. Pero el siracusano fue más lejos, no sólo cruzaba el puente con herramientas matemáticas para resolver problemas físicos, sino que también usó la física para encarar problemas matemáticos.

La in uencia de las ideas platónicas, que condenaban todo aquello que se rozara con la práctica, sumada a la belleza y el rigor sintetizado por los Elementos conjugaron contra la capacidad de los geómetras para aventurarse más allá de lo permitido por el uso exclusivo de la deducción lógica.

Veamos un ejemplo. Desde tiempos babilónicos se conocía experimentalmente la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro, lo que hoy escribimos como $P=\pi.\ d$

Antes de que los griegos se metieran en el asunto, π era aproximadamente 3, tal como aparece en el detalle de la construcción del Mar de Bronce del templo de Salomón: "Hizo el Mar de metal fundido, de diez codos de borde a borde. Era enteramente redondo y de cinco codos de alto. Un cordón de treinta codos medía su contorno". [2]

1. Hay un trabajo llamado *Mecánica*, que algunos autores lo adjudican a Teofrasto (372-287, AdeC), donde aparecen antecedentes de las ideas de Arquímedes. Allí se expresa que "el peso que se mueve está con el peso que mueve en estado inverso" . La idea es tomada por Aristóteles en la *Física*: "cuanto más apartado del fulcro, más fácilmente vamos a levantar el peso". Aunque Teofrasto estuvo en el Liceo como discípulo de Aristóteles, los estudios históricos ubican a la *Mecánica* antes que la *Física.*

2. Libro Segundo de Crónicas, cap 4

Para los griegos esta aproximación era insoportable, pero superarla no era tarea fácil porque la razón entre el perímetro y el diámetro no era una razón entre números naturales. Dicho en términos más actuales: el número en cuestión (π), no es un número racional.

La solución vino de la mano de un discípulo de Platón, Eudoxo de Cnidus, quien estableció un principio, un método y una de nición para solucionar el problema de las razones entre magnitudes fueran éstas o no racionales. De allí en más, las relaciones entre magnitudes quedarían expresadas por medio de proporciones. Tal como lo recoge Euclides: "los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros", o en términos más modernos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Donde se evita escribir π, tal como quedaría en nuestras modernas expresiones

$$A = \pi . r^2 = \pi . \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

El método de exhaución ideado por Eudoxo fue mucho más que una forma elegante de eludir la presencia de irracionales, constituyó el primer antecedente de los futuros métodos in nitesimales. Permitió demostrar resultados, pero no conjeturarlos. [3]

¿Qué hizo Arquímedes con esta herencia? Por un lado, ideó un sistema que le permitía acercarse a π tanto como quiso, o como los métodos de cálculo de la época (mejorados por el propio Arquímedes) se lo permitieron.

Pero a la hora de calcular áreas (cuadraturas) o volúmenes (cubaturas) dejó a sus lectores boquiabiertos. Y no sólo a sus contemporáneos, sino también a los lectores que tendría más de mil años después: "Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada".

LOS SECRETOS DE ARQUÍMEDES

Los trabajos de Arquímedes también tenían un estilo singular. Como en los actuales "papers", Arquímedes supone que el lector conoce lo que ha sido creado antes, enuncia principios que necesitará evocar durante las demostraciones, algunos lemas previos y luego presenta los nuevos resultados que se dispone a demostrar, y lo hace, alcanzando un virtuoso manejo del método de exhaución. La novedad es central en los escritos de Arquímedes, y él lo explicitaba: " estas propiedades (...) no habían sido conocidas por quienes me han precedido en el estudio de la Geometría", apuntaba el geómetra

Lo que nunca quedaba explicitado eran los caminos creativos de Arquímedes que le permitían calcular áreas o volúmenes fuera del alcance de sus contemporáneos. Pero el secreto no estaba en el álgebra, como sospechaba Barrow, sino en la mecánica. Finalmente Arquímedes decidió revelarlo en *El Método*, el libro que luego se perdería por siglos.

Isaac Barrow (1630-1677) editó en 1675 Archiedis Opera, y asombrado por los resutados alcanzados por Arquímedes escribió: «Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada.»

"He creído oportuno exponerte por escrito y desarrollar en este mismo libro las particularidades de un método, por medio del cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Estoy convencido de que será útil también para demostrar los propios teoremas. Algunas cosas las descubrí primero por la mecánica y luego las demostré geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostra-

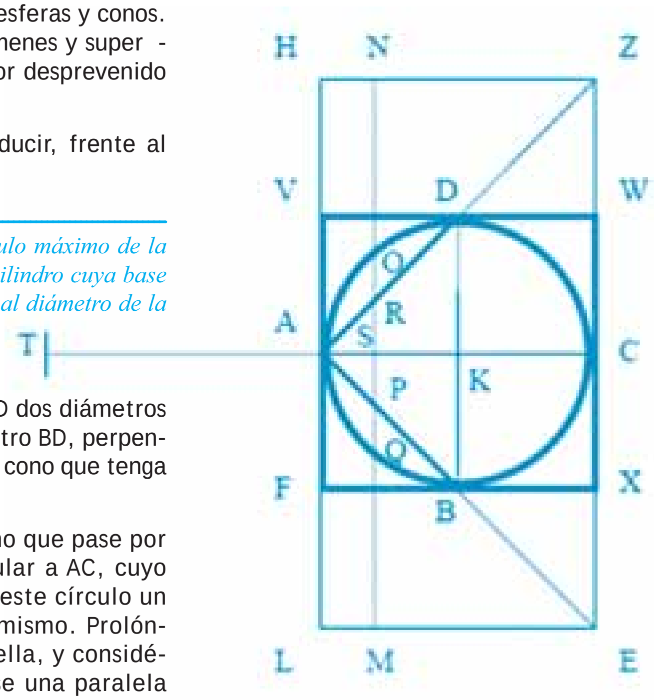
3. En el Libro V de los *Elementos* de Euclides se presenta la condición, siguiendo a Eudoxo, para que dos elementos tengan razón: "Existe razón entre dos cantidades cuando un múltiplo de la menor supere a la mayor"

ción” escribía Arquímedes a su colega alejandrino Eratóstenes, a quien estaba dirigido El Método.

Luego de esta introducción, Arquímedes presenta once lemas relacionados con los centros de gravedad de diversas guras planas y sólidas, algunas de las cuales fueron estudiadas por Arquímedes en *Sobre el Equilibrio de los Planos,* y explica un método mecánico para realizar la cuadratura del segmento parabólico y calcular la relación entre los volúmenes y áreas de esferas y conos. Siguen luego otras catorce proposiciones que relacionan volúmenes y super - cies de conos, elipsoides y paraboloides para quitarle al lector desprevenido las ganas de no considerar al método.

Terminemos esta aproximación a *El Método* dejándonos conducir, frente al papel y con lápiz en mano, por el propio Arquímedes:

> *“Toda esfera es cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera; a su vez el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, es igual a vez y media la esfera*



“Sea una esfera cuyo círculo máximo sea ABCD, siendo AC y BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo ABCD; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A.

“Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo ABCD en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera ABCD según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR.

“Puesto que el rectángulo determinado por CA y AS equivale al determinado por MS y SP, ya que AC es igual a SM y AS es igual a SP, y el determinado por CA y AS equivale al cuadrado de AQ,[4] es decir a los cuadrados de QS y SP, resulta que el rectángulo determinado por MS y SP equivale a los cuadrados de QS y SP.[5]

“Por ser la razón de CA a AS como la de MS a SP y ser CA igual a AT, la razón de AT a AS es como la razón de MS a SP, es decir como la razón del cuadrado de lado MS al rectángulo determinado por MS y SP. Y habiéndose demostrado que el rectángulo determinado por MS y SP equivale a los cuadrados de QS y SP, la razón de AT a AS será como la razón del cuadrado de MS a los cuadrados de QS y SP. Y por ser la razón del cuadrado de MN a los cuadrados de QO y PR como la razón del cuadrado de MS a los cuadrados de QS y SP y la razón del círculo sección del cilindro de diámetro MN a los círculos, secciones del cono y de la esfera, de diámetros PR y QO respectivamente, como la razón del cuadrado de MN a los cuadrados de PR y QO, resulta que la razón del círculo sección del cilindro a los círculos secciones del cono y la esfera, es como la de AT a AS.

4. Nótese que el triángulo ASQ es semejante al triángulo AQC pues ambos son rectángulos y tienen en común un ángulo. De esta manera los cocientes entre lados correspondientes son iguales, en particular, la razón entre AS y AQ es igual que la razón entre AQ y AC y esto se traduce diciendo que el área del rectángulo de lados AS AC es igual al área del cuadrado de lado AQ. Nosotros, más acostumbrados al lenguaje algebraico escribiríamos:

$$AS / AQ = AQ / AC \quad \text{luego} \quad AS \,.\, AC = AQ^2$$

5. Pitágoras! Mirando el triángulo AQS, El cuadrado de lado AQ es equivalente a la suma de los cuadrados de lados QS y AS, y recordemos que AS es de la misma extendión que SP

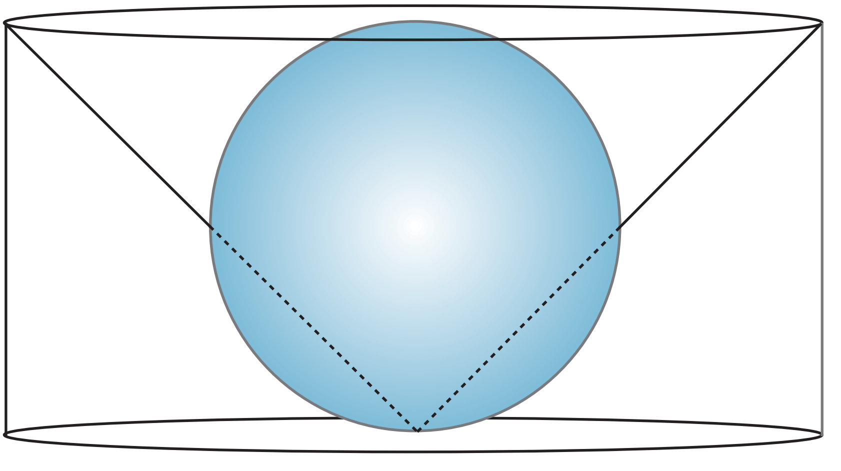
Luego, dado que la razón de AT a AS es como la razón del círculo que está en el cilindro, permaneciendo en su lugar, a los círculos cuyos diámetros son QO y PR, trasladados y colocados sobre el punto T, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T, estos círculos estarán en equilibrio respecto del punto A.

John Wallis (1616 - 1703), responsable de las ediciones de matemática antigua y medival editadas por Oxford, también se sintió impresionado por el camino creativo del siracusano: «Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación.».
Wallis, como todos los pensadores desde el Renacimiento hasta el siglo XX, desconocieron el contenido de El Método

"De la misma forma se puede ver que si se traza otra paralela a EZ en el paralelogramo LZ, y sobre la recta así trazada se levanta un plano perpendicular a la recta AC, el círculo determinado en el cilindro, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto A, con los dos círculos determinados, respectivamente, en la esfera y en el cono, trasladados y colocados de tal modo sobre la palanca en el punto T, que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea el punto T. Así pues llenados con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono, el cilindro, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera y el cono juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto T, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T.

"Así pues, dado que dichos sólidos están en equilibrio respecto del punto A, permaneciendo el cilindro en torno al centro de gravedad K, y la esfera y el cono trasladados, como se ha dicho, con el centro de gravedad en T, resultará que la razón del cilindro a la esfera y el cono juntos, será la misma que la razón de AT a AK , y como AT es doble de AK, el cilindro será doble de la esfera y el cono juntos, y siendo el cilindro triple del mismo cono, tres conos equivalen a dos de los mismos conos y dos esferas. Sustráiganse dos conos comunes y resultará que el cono cuya sección a través del eje es el triángulo AEZ, equivale a las dos esferas mencionadas. Ahora bien, el cono cuya sección a través del eje es el triángulo AEZ equivale a ocho conos cuya sección a través del eje es el triángulo ABD, porque EZ es doble de BD. Los ocho conos indicados equivalen, pues, a dos esferas. Por tanto la esfera cuyo círculo máximo es ABCD, es cuádruple del cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo de diámetro BD perpendicular a AC.

Trácense ahora en el paralelogramo LZ por los puntos B y D las rectas FBX, IDU, paralelas a AC; y considérese un cilindro cuyas bases sean los círculos de diámetros FI y XU, y cuyo eje sea AC. Entonces, por ser el cilindro, cuya sección a través del eje es el paralelogramo FU, doble del cilindro que tiene por sección a través del eje el paralelogramo FD 26, y siendo este último cilindro, según Los Elementos, triple del cono cuya sección a través del eje es el triángulo ABD, el cilindro es séxtuplo de este cono; y habiéndose demostrado que la esfera de círculo máximo ABCD es cuádruple de este cono, el cilindro es una vez y media la esfera, que era lo que había que demostrar " Qed



Un cilíndro, un cono y una esfera generados por la rotación alrededor del eje TC del rectángulo HZLE, (ver Pág 23) el triángulo AZE y la circunferencia

Pila eléctrica de limón

El ácido cítrico del fruto reacciona químicamente con dos metales distintos. La diferencia entre la energía necesaria para quitar un electrón de un átomo de cobre, y la que hace falta para hacer lo mismo con uno de hierro, da lugar a una diferencia de potencial, o tensión eléctrica.

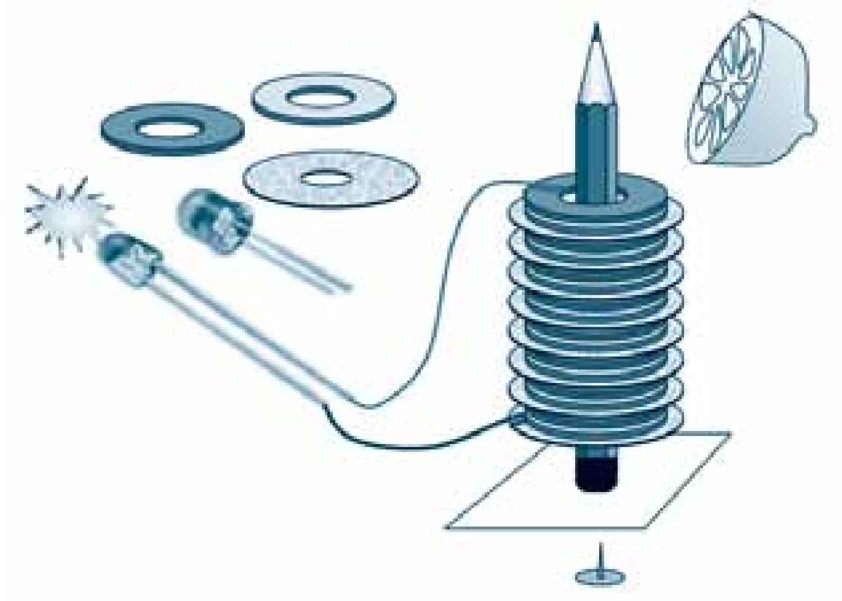
En esta época, en que se consiguen diodos emisores de luz de alto brillo[1], es más sencillo que antes construir y hacer funcionar una pila eléctrica de jugo de limón.

Para construir una, se pueden usar ocho arandelas de papel, ocho de hierro y ocho de cobre, compradas en una ferretería. Se puede usar también papel de aluminio y estropajo de bronce aplastado, o hacer espirales chatas de alambre de cobre y de hierro.

Los diodos luminosos más comunes tienen tres milímetros de diámetro; encienden mejor los blancos. El polo positivo aparece en el cobre, que se debe conectar a la pata más larga del led. Conviene armar todo en seco, apretar con suavidad para favorecer el contacto, y rociar el conjunto con jugo de limón, o con vinagre.

Suele llamar la atención que con esta pila improvisada se pueda hacer andar un reloj, o una radio, aunque no tenga potencia su ciente como para alimentar un foquito de lamento. Suministra cuatro o cinco voltios, con una corriente de dos o tres miliamperes. Con metales de gran área, se consiguen corrientes mayores.

Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745–1827) se inspiró, para su invento, en los experimentos que hacía Luigi Galvani (1737–1798) con ranas muertas y generadores eléctricos. Galvani creía que si los músculos se excitaban con la corriente eléctrica, debían ser capaces, también, de generarla.



Con su célebre pila, Alessandro Volta funde alambres, hace chispas y excita los músculos de una rana muerta ante el emperador de Francia, Napoleón Bonaparte, su esposa Josefina y miembros de la Corte. Sus trabajos tenían interés comercial y militar, y permitieron el invento del telégrafo unos años después.
El nombre pila proviene de que, para construirla, Volta apiló veinte o treinta discos de cobre con otros tantos de cinc, separados por fieltros embebidos en agua y ácidos.
El cuadro, de 1800, es de Giuseppe Bertini.

1 Se los consigue en el comercio con el nombre de leds de alto brillo; light emitting diodes.

Por Agustín Rela
CBC - UBA

Alinealidades

Aunque a muchos la regla de tres simple nos ha parecido alguna vez una ley del pensamiento, o del mundo material, no siempre se cumple; y en rigor son más frecuentes, en la naturaleza, las proporciones constantes, que las diferencias uniformes.

PAYADOR LOGARÍTMICO

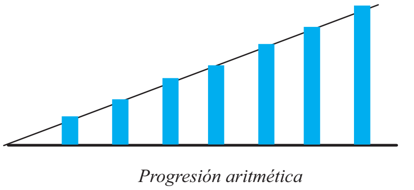
El periodista y caricaturista José María Cao (1862–1918) desafió una vez a Gabino Ezeiza (1858–1916), conocido como El payador de San Telmo, a que payase sobre el logaritmo: Ezeiza cruzó hasta la casa de un médico amigo para asesorarse, y volvió al rato dispuesto a improvisar con el nuevo conocimiento:

Gabino Ezeiza, 1858-1916

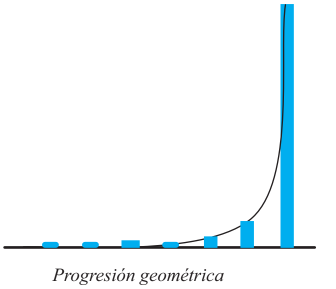
Señores, voy a explicar
la ciencia del logaritmo,
si acierto a cantar al ritmo
de mi modesto payar.
Pongamos, para empezar,
dos progresiones enfrente;
por diferencia y cociente
correspondiendo entre sí,
y ¡ahijuna![1] saldrá de aquí
un sistema sorprendente.
Si digo cero, uno, dos,
y tres, cuatro, cinco, seis,
esta progresión veréis
cómo concuerda con los términos de otra:
uno, dos cuatro, ocho, dieciséis.... [2]

Seguramente Cao, que conocía la inagotable capacidad de improvisación del payador, quiso proponerle un tema ignoto, extraño y atravesado, fuente de perplejidad, asombro y temor: ¡el logaritmo!

En su explicación Gabino compara una progresión aritmética, aquélla en la que la diferencia entre dos términos sucesivos es constante, por ejemplo, 3, 6, 9, 12, 16, ... con una geométrica, en la que lo constante es no la diferencia, sino el cociente entre dos términos sucesivos, por ejemplo 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... Los logaritmos de los términos de una progresión geométrica constituyen una progresión aritmética.



Progresión aritmética



Progresión geométrica

....

1. Casi todos saben que esa expresión proviene de ¡Ah! ¡Hijo de una...!

2. Ésos son los versos, quizás algo alterados, que recuerda Enrique Mario Mayochi de aquella payada en Tres Arroyos, que habría durado más de media hora. El alma docente de Gabino lo llevó a buscar ayuda cuando ignoraba el tema. Y es notable la cultura matemática del médico a quien consultó, cuyo nombre no recoge esa historia..

LINEAL, Y LÍNEA

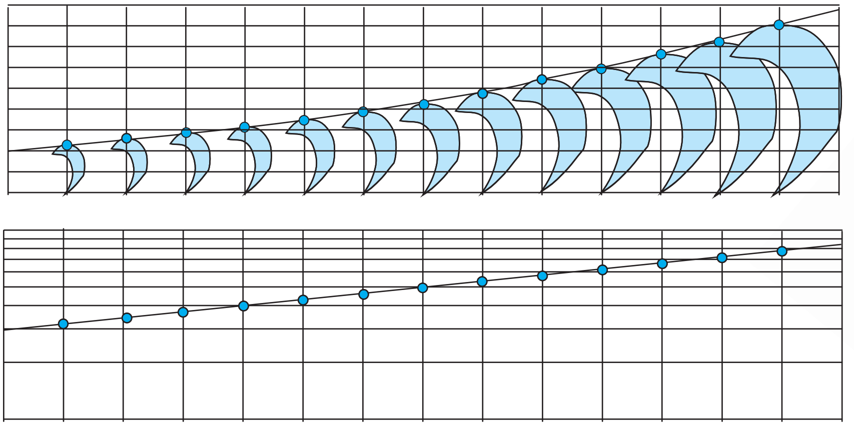
En física y matemática las progresiones aritméticas se llaman *lineales*, y eso trae cierta confusión, porque las geométricas también se pueden representar con una *línea*, aunque en este caso sea una línea curva. Lineal, en este contexto, significa concerniente o relativo a una línea *recta*. Las progresiones geométricas son difíciles de representar gráficamente, porque la escala queda muy chica para unos valores, y demasiado grande para otros.

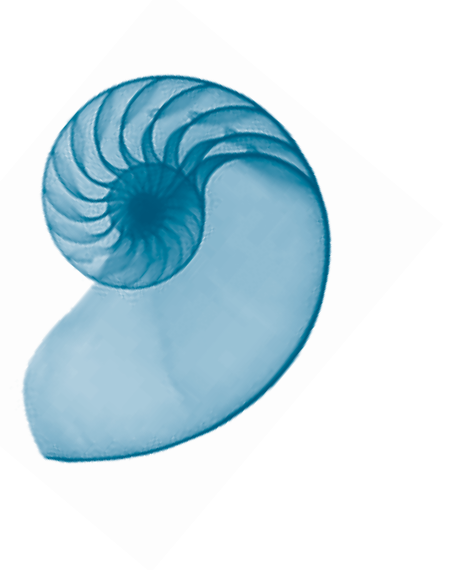
En un intervalo breve de variación, todo parece lineal; por ejemplo un capital depositado puede arrojar una utilidad de cien pesos por año. Pero en intervalos mayores, y a medida que ese capital crezca, lo que es constante es el porcentual de utilidad, por ejemplo el cinco por ciento anual. En este caso la progresión geométrica, para un capital inicial de mil pesos, es aproximadamente 1000, 1050, 1102, 1158, 1216, 1276,... donde cada término se obtiene con el producto del anterior por el factor 1,05. La diferencia va creciendo.

La espiral regular de la escalera de caracol genera, en la perspectiva de la foto, una espiral logarítmica. La relación, o cociente, entre las longitudes fotográficas de dos escalones sucesivos, es una constante. (Fotos: Oriana Salvetti)

MOLUSCO ALINEAL

En los organismos vivientes se observa con frecuencia la progresión geométrica. En cierta etapa de su vida el nautilo (un molusco de aguas profundas), cuanto mayor es su tamaño, con más velocidad crece, y eso queda registrado en su caparazón. A medida que el animal aumenta su tamaño, se retira del espacio que le queda chico, y construye uno mayor. Sus compartimientos crecen de manera alineal; pero una escala logarítmica permite que la representación sea una línea recta.





QUÉ ES EL LOGARITMO [3]

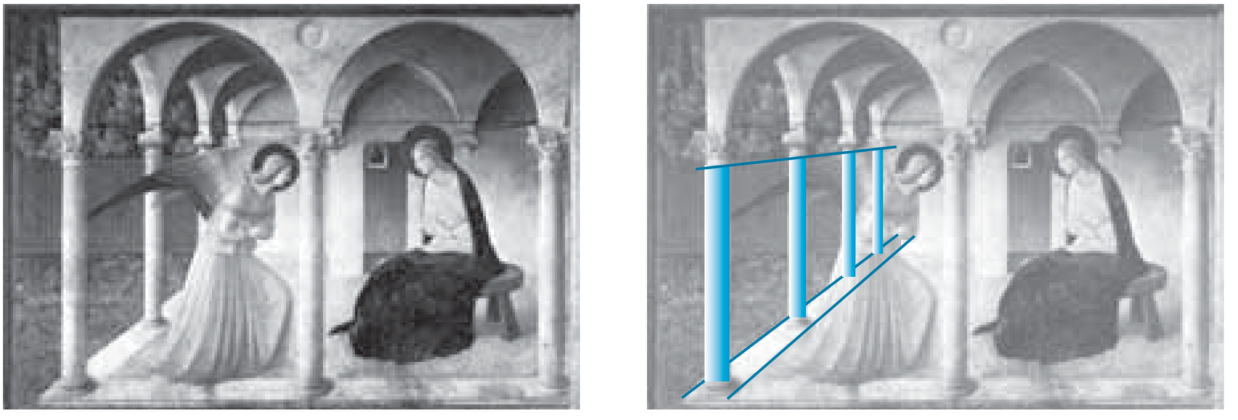
En términos simpli cados, pero intuitivos, el logaritmo decimal es la cantidad de ceros de un número redondo. Por ejemplo, el de 1.000.000 es 6; el de 100 es 2; el de 10 es 1; el de 1 es 0, y el de 0,0001 es –4. Con mayor generalidad, y para números que no sean redondos, el logaritmo es el exponente al que se eleva la base. Por ejemplo, 3 es el logaritmo de 8 en base 2, porque $2^3 = 8$. $(2 \times 2 \times 2 = 8)$

3. La sonora palabra logaritmo inspira temor, reverencia y espanto cuando se la oye por primera vez, o cuando se ignora su significado.

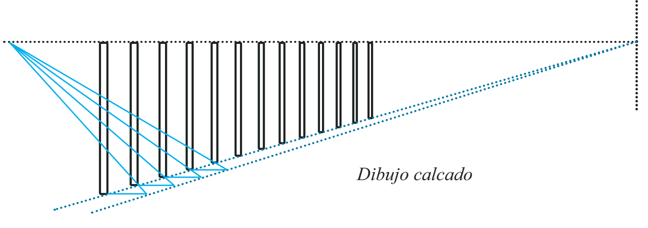
Perspectiva cónica

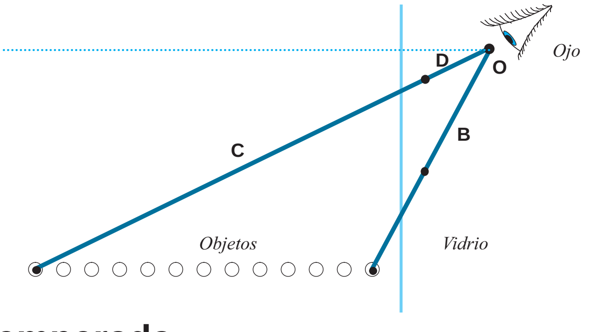
Cuando miramos una figura en perspectiva cónica o fotográfica (a diferencia de la paralela, y muchas otras perspectivas) el ojo hace los mismos movimientos angulares que cuando mira el objeto real.

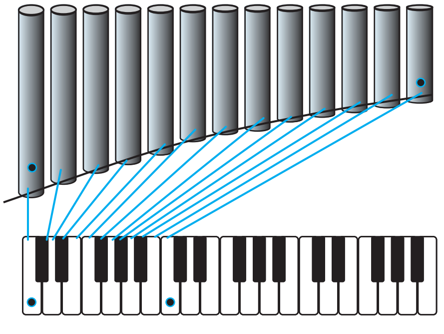
Curiosamente, esa representación aparece en una época muy definida de la historia del arte, y en una región también muy circunscripta; el Renacimiento italiano; casualmente al mismo tiempo –y en el mismo lugar– en que se fabrican por primera vez vidrios planos transparentes para las ventanas. Los vidrieros inflaban globos de vidrio, los hacían estallar, centrifugaban los restos adheridos a la boquilla, y apoyaban la lámina de vidrio todavía blando sobre una madera plana. Es posible que la gente haya calcado por primera vez un paisaje en el vidrio de una ventana, lo que movió a los pintores a introducir en su arte esa nueva forma de representación.



La Anunciación, de Guido di Pietro Da Mugello (Fra Angelico, 1400 –1455).
Su representación en perspectiva utiliza la progresión geométrica. El cociente de las longitudes de dos columnas sucesivas es siempre el mismo.







Instrumento musical hecho con tubos de las mismas longitudes que la de los dibujos en perspectiva. Una de las cañas extremas mide la mitad de lo que mide la otra; suena con el doble de frecuencia, y se dice que su nota es una octava más alta, porque en la escala musical que hoy más se usa, hay seis notas intermedias. Entre dos teclas consecutivas (blanca o negra, indistintamente), la relación de frecuencias vale la raíz duodécima de dos, o dos elevado a un duodécimo.

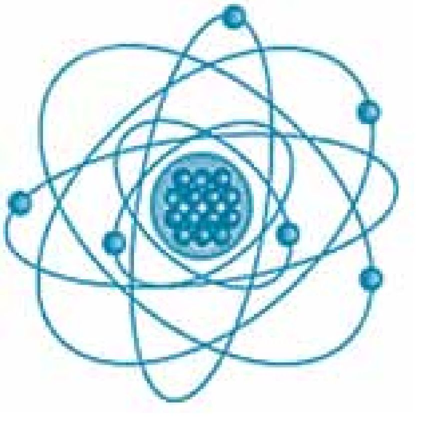
Escala bien temperada

Si disponemos trece objetos iguales en fila, y sin cambiar la posición el ojo los calcamos en perspectiva sobre un vidrio plano transparente, de modo que el dibujo del objeto más cercano duplique en tamaño el del más alejado, y luego cortamos trece tubos de las mismas medidas que las representaciones, con ellos podemos construir un siku, o zampoña andina, afinada en la escala bien temperada. [4]

4. Esa escala de doce notas se usaba en China hace cuatro mil años, pero se difundió en Europa en 1740 gracias a la composición El clave bien temperado, de Johann Sebastian Bach. La frecuencia del sonido decimotercio duplica la del primero, por eso se considera la misma nota musical. En la escala natural, las relaciones de frecuencias son las mismas que las que hay entre números enteros, como 3/2, 4/3, etcétera; no en cambio en la escala bien temperada, que es una aproximación a la escala natural.

Radiactividad y logaritmo

Cumpliendo con la promesa asumida en las Intimidades del cierre del último número de Q.e.d, continuemos -logaritmo en mano- sobre el terreno de la radiactividad y de la datación con el carbono 14 (C_{14}).



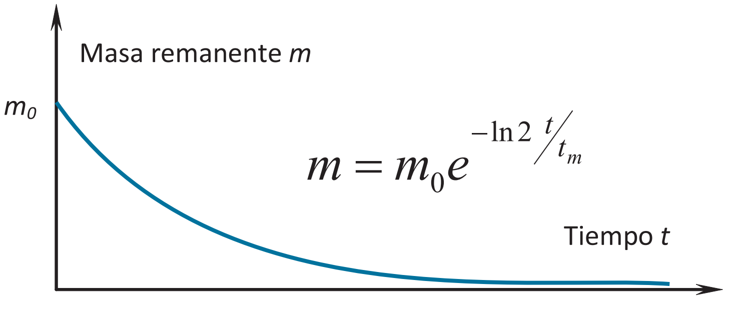
Hay átomos estables, como los cuatro isótopos[1] naturales del hierro, (54, 56, 57 y 58), y otros inestables, como el carbono 14 y el americio 241. Los inestables tienen una cierta probabilidad ja de desintegrarse, por lo que su número se reduce a la mitad cada lapso llamado la vida media de ese isótopo, t_m en la fórmula de la gura.

En escalas lineales, la representación en función del tiempo de la masa que va quedando de un material radiactivo que se desintegra, es una curva exponencial. Si la escala de la masa es logarítmica, el grá co es recto, y de más fácil lectura.

En esto se basa la técnica del carbono 14 para datar fósiles. En la alta atmósfera, el nitrógeno 14, que es el gas más abundante de la atmósfera, se convierte, por efecto de la radiación cósmica, en carbono 14 radiactivo, que forma dióxido de carbono con el oxígeno presente. Los vegetales lo toman en la fotosíntesis, y así tanto las plantas, como los animales que las comemos, somos un poco radiactivos.

Cuando un ser muere, deja de tomar materias radiactivas, y tiene el consuelo de que la radiactividad que tenía en vida se le va pasando. Entonces, si se mide la radiactividad de sus restos, se sabe cuándo murió.[2]

La masa remanente es directamente proporcional a la radiactividad. Por ejemplo, en un gramo de carbono 14 se desintegran 165.000 millones de átomos por segundo, y como la proporción de C_{14} a C_{12} es de una en dos billones, en un gramo de carbono de un organismo vivo se producen unas 16 desintegraciones por minuto. Cinco mil setecientos treinta años después de muerto, esa actividad se reduce a ocho cuentas por minuto.



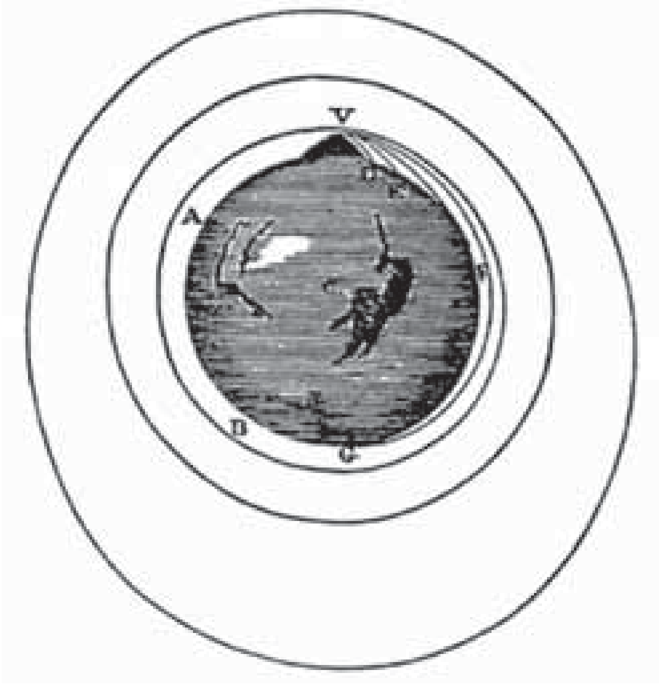
1 El hierro 54 tiene 28 neutrones y 26 protones en su núcleo, y 26 electrones alrededor. Los isótopos del mismo elemento químico difieren en el número de neutrones. Sus propiedades químicas son prácticamente idénticas; por eso les corresponde la misma casilla de la tabla periódica. Isótopo significa, en griego, en el mismo lugar.

2 Ese método tiene algunos errores, porque en la proporción de carbono 14 en la atmósfera cambia con las épocas.

“No nos une el amor, sino la gravedad”

Por Matias Cveczilberg

Puedo asegurar, lector, que entre nosotros dos, existe una ineludible e innegable atracción. No importa en qué punto del globo se encuentre (más aún, no importa en qué punto del universo se encuentre), usted se siente atraído por mí, por esta revista que está sosteniendo, y por la tinta con la que está escrita esta palabra... y esta...y esta.



Estar en órbita es una de las muchas formas en que puede caer un cuerpo, cuando se lo arroja horizontalmente con suficiente velocidad. (Idea y dibujo originales de Isaac Newton, publicados en 1684 en sus Principios matemáticos de filosofía natural.)

No hace falta que me conozca ni que me haya visto alguna vez, pues incluso si ese es el caso, la atracción a la que me refiero trasciende barreras y distancias. Hablo de la fuerza que lo mantiene pegado a la tierra, y de la que mantiene a ésta girando alrededor del Sol. Sí, me refiero a la gravedad.

Esta fuerza, de la que el gran Newton observó su “acción a distancia”, es una de las cuatro fuerzas que rigen al universo, y la responsable de mantener su cohesión. Sin embargo, es tan débil que para vencerla no hace falta más que intentar levantar un objeto del suelo. (Proeza más complicada -aunque no imposible- es lanzarlo fuera del planeta).

Pero... exactamente: ¿Cuán fuerte es?. Su fuerza, dedujo Newton, es proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. (Multiplicado por una constante de gravitación universal, a la que denominamos G, y cuyo valor se aproxima a 6,67 x 10^{-11}).

Esto atenta contra esa idea intuitiva (y demás está decir, errónea) que tiene mucha gente sobre la gravedad, a la que consideran un fenómeno exclusivamente terrestre, y más aún, superficial.

Entonces,¿A qué se debe que los astronautas floten en el espacio? ¿No es eso acaso “ingravidez”?

Si entendió lo anterior, notará que la ingravidez (tomando el sentido literal de la palabra) no existe más que en lugares muy alejados de todo objeto astronómico. Incluso considerando que la gravedad actúa de forma inversamente proporcional a la distancia, a la altura a la que se encuentran los astronautas (como referencia, la ISS orbita aproximadamente a 350 Km sobre la superficie terrestre) la variación de la gravedad respecto de la superficie es relativamente poca. Lo que está sucediendo allí es otra cosa y la palabra clave es “órbita”.

Para entender esto vamos a pensar en lo siguiente: Si uno tomase un objeto y lo arrojase con todas sus fuerzas, lo más probable es que cayese a pocos metros de distancia. Si en lugar de eso utilizase, digamos, un cañón, sucedería que el objeto caería ahora no sólo a una distancia mucho mayor (varios kilómetros con un cañón actual) sino que además entraría en juego otro factor: la curvatura terrestre. El objeto lanzado no sólo caerá varios kilómetros más lejos, sino que además comenzará a moverse de forma más perceptible en torno a la esfera terrestre.

Dicho esto no es difícil imaginar qué pasaría si uno pudiese llevar el ejemplo al límite: con una velocidad (y altura) suficiente, el objeto “no caería”, pues por cada cierta distancia recorrida en una dirección tangencial (esto es, paralela en un punto) a la superficie, la gravedad lo hará descender una cierta medida. Estos movimientos, claro, ocurren en simultáneo, y gracias a la “redondez” de la Tierra se puede pensar el hecho como si el objeto arrojado “se pasase” del borde, es decir, para el momento en que cae con respecto al plano sobre el que fue lanzado, ya no hay tierra debajo de él.

Cuando esto sucede, cuando un sistema se estabiliza de modo que un objeto movido únicamente por una velocidad inicial, y atraído por una fuerza que apunta hacia el centro de un planeta (o cualquier otro objeto masivo), se dice que ha entrado “en órbita”.

Ahora bien, esto dicho así no explica el por qué de la supuesta ingravidez a la que se ven expuestos los astronautas. Lo importante es entender que un objeto en órbita (por ejemplo satélites, cometas, planetas, la luna, y lo que nos interesa en este caso, la ISS) está, esencialmente, en caída libre. Y que entre ésta y la ingravidez no hay diferencia alguna (más allá de que una es posible y la otra no).

“El rincón más viejo del Universo”; en Futurama los cinturones de los hombres y los planetas van “subiendo” con la edad.

En otras palabras, los astronautas no dejan de tener peso en el espacio, sencillamente no existen fuerzas relevantes que los mantengan unidos a la nave, pues ambos se encuentran cayendo con igual aceleración.

Para visualizar esto, uno puede pensar el siguiente ejemplo: es probable que si se encontrase en un avión que está cayendo, tenga otras preocupaciones en mente que trasciendan al funcionamiento del universo, pero si se tiene una mente ávida de respuestas, y una sana curiosidad, es probable que note -si los gritos no lo distraen- como su pelo parece otar, y su cuerpo parece querer dejar el asiento.

Afortunadamente, existen formas más seguras de disfrutar de la “ingravidez” sin tener que ir al espacio o descomponer los motores del avión a medio vuelo.

Hay aviones especialmente diseñados que realizan maniobras durante las cuales se puede sentir la “falta de gravedad” por un breve lapso. *(Véase Ingravidez simulada, en Q.e.d. Nº 1, pág 22)*

En un capítulo de Futurama, a causa de un accidente los protagonistas comienzan a rejuvenecer a un tiempo acelerado. El Prof. Fansworth concluye que la única esperanza es ir a bañarse en las aguas de la mítica “Fuente de la vejez” que se encuentra en “el rincón más viejo del universo”. Llegando a destino, ven un planeta con su sistema de anillos inusualmente “alto”, y uno de los personajes comenta “miren el cinturón de asteroides de ese planeta, llegamos”. Para los autores, los cinturones de los hombres y de los planetas “suben” conforme se envejece. Los escritores se tomaron algunas libertades. Por un lado, nombran los anillos como “cinturón de asteroides” y por el otro muestran como posible que dichos anillos se encuentren elevados.

Brian, el perro intelectual, quiere convencer a Peter que está gordo, para ello arroja una manzana que comienza a orbitar alrededor de su voluminoso vientre

¿Por qué no es esto posible? Porque como ya se dijo, los objetos en órbita (de los cuales los anillos son un buen ejemplo) se encuentran en caída, atraídos por el efecto gravitatorio que produce el planeta. Sin embargo, la gravitación actúa atrayendo a los objetos entre sus centros de masa, que en el caso del planeta prácticamente coincide con su centro de simetría. Por lo tanto, independientemente del radio, espesor o masa de los anillos, uno siempre puede asegurar que éstos se encontrarán sobre un plano que pasa justo por el centro del planeta (asumiendo que la densidad del mismo sea homogénea).

En un capitulo de “Padre de familia” (Family Guy) luego de una desopilante visita al médico, Peter Grif n (protagonista de la serie) se “entera” para su extrañeza ... que está gordo.

Cuando le habla de esto a su mascota y amigo Brian (que por cierto, es un perro), éste le responde que no sólo está gordo, sino que su obesidad está generando un campo gravitatorio, y acto seguido le arroja una manzana (en una referencia muy newtoniana), un vaso, un libro, y para enfatizar la idea (y para alegría de Peter), también un televisor. Efectivamente, a medida que arroja esta variopinta selección de objetos, éstos comienzan a orbitar a su alrededor.

Por lo visto hasta ahora, queda claro que el movimiento orbital en este caso no es posible, pero sin embargo esta pequeña y creativa escena utiliza de

Según la leyenda, el joven Newton concibió la Ley de atracción universal cuando leía tranquilamente junto a un manzano y un fruto se desprendió de la rama del árbol impactando sobre su cabeza. La ilustración esta tomada de Story-lives of great scientist de F.J. Rowbotham

manera implícita un hecho mencionado al comienzo, y es que entre ¡todos! los objetos del universo existe una atracción (por más débil y despreciable que ésta sea).

Si nos remitimos a la escena, ¿Cuán fuerte es realmente el efecto que puede causar el buen Peter en una manzana?.

La atracción gravitatoria se calcula de la forma

$$F = G\frac{M.m}{d^2}$$

Remplacemos los datos y veamos qué obtenemos: asumamos que Peter pesa 150 Kg (seamos amables) y que el peso (aunque deberíamos decir masa) de una manzana ronda los 100 gramos; estimando la distancia entre sus centros en 50 cm. obtenemos que:

$$F(P,m) = 6{,}67.10^{-11}\ {}^{m^3}\!/_{s^2 kg}\ \frac{150\ kg\,0{,}1\ kg}{(0.5\ m)^2} = 4{,}002\ .\ 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

Este número, medido en Newton (unidad de Fuerza) es el equivalente a 3,9 10^{-8} Kgf (Kilogramo Fuerza), es decir, aproximadamente el peso de 40 motas de polvo.

Lo realmente interesante sobre esto, es que esta fuerza actúa en forma recíproca, es decir que la manzana se siente tan atraída hacia Peter, como Peter hacia la manzana. Esto que puede no parecer especialmente llamativo o interesante, cobra un nuevo sentido cuando se cambia la escala y nos revela el sorprendente hecho de que nosotros nos sentimos tan atraídos hacia la Tierra, como la Tierra lo está hacia nosotros.

Por una cuestión de magnitud, el efecto que nosotros producimos en la Tierra resulta absolutamente despreciable, sin embargo cuando se habla de grandes masas cuya diferencia es menor, el efecto -aunque mínimo- se hace notar lo su ciente como para por ejemplo, desplazar el centro de rotación de una estrella.

Actualmente, mediante el estudio de la luz de estrellas lejanas, los astrónomos pueden observar este “bamboleo estelar” e inferir de forma bastante precisa la presencia de exoplanetas (planetas extrasolares), y de hecho ya se cuentan entre los cientos los planetas descubiertos de esta manera.

Correo

Cartas de lectores y lectoras

Hemos recibido comentarios personales y telefónicos que a rman la conveniencia de continuar con esta publicación. Agradecemos el aliento de muchos lectores y lectoras que nos escribieron (uno de los cuales se convirtió en autor), entre ellos y ellas Patricia Folino, Olga Ambas, Adriana Calderaro, Mario Rovedo, Nehuén Diez (quien envió soluciones, y pidió palabras blandas sobre Heisenberg, Schrödinger y la física cuántica), Adán Garros, Arquímedes Piol, Ricardo Miró y Vivina Perla Salvetti. Agradecemos también el problema Cadena de Divisores (publicado en el nro 1 de Q.e.d.) que tomamos de la Competencia Mateclubes que organiza la Olimpíada Matemática Argentina (www.oma.org.ar)

Algo curioso, que notamos cuando recibimos comentarios favorables, es que en cuanto requerimos una mayor precisión, muchos no recuerdan detalles de los artículos, pero sí -*ecce gratum*- el enfoque de la información, y el clima de cultivo de las ciencias, las artes y la cultura. Mientras eso quede en pie, sigan olvidando precisiones; y hablen por favor, bien o mal, de Q.e.d.

La Redacción

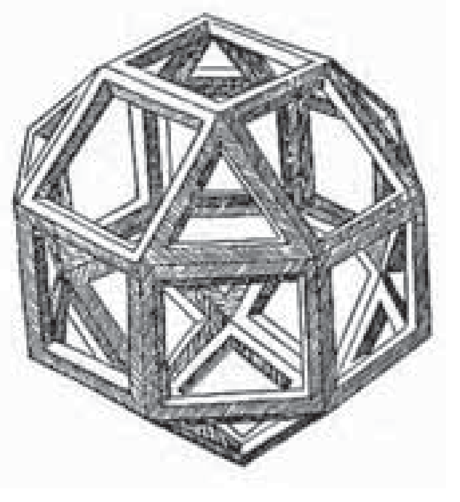
Ecce gratum significa, en latín, he aquí lo grato, o eso es lo bueno, de un poema de Cayo Valerio Catulo (-87; -54 aC), llevado a la música por Carl Orff (1895 - 1982), cuya obra habría alcanzado más merecida fama, si no hubiera sido por las simpatías nazis de ese compositor.

Intimidades de un cierre...

o todo tiene que ver con todo

I: Esta vez no me van a decir que la tapa tiene poco que ver con Q.e.d. Miren el hermoso poliedro medio lleno de agua que pende del techo. El cuadro tiene muchos elementos de geometría.

C: Justamente los Elementos de Euclides es el libro que está abierto. El fulano que está dando clase es el matemático renacentista Luca Pacioli, autor de la Divina Proporción.



A: Ese libro fue ilustrado por un célebre alumno de Pacioli: Leonardo Da Vinci. La primera ilustración que hizo Leonardo del cuboctaedro romboidal como el que está en el cuadro fue para este libro siguiendo sus indicaciones.

JC: La divina proporción y Leonardo serán temas de próximos números.

C: En un costado del cuadro aparece otro libro debajo de un dodecaedro que presumiblemente es un ejemplar del Summa, escrito por Pacioli y en el cual sienta los principios de la contabilidad. ¿Quién es el que está parado en el cuadro, que parece no prestar mucha atención a lo que explica el maestro?

I: El cuadro es del año 1500 y tiene varios misterios. Por un lado se le atribuye a Jacopo de´Barbari aunque algunos historiadores lo dudan. El que está parado al lado de Pacioli es, aparentemente, Guidobaldo, conde de Urbino, aunque hay otros autores que creen ver a un joven Durero, que también fue in uenciado por Pacioli.

Para el bello cubonosequedro éste ¿también vale la fórmula de Descartes y Euler, a la que hacen referencia Patricia y Flora en su artículo?

JC: Efectivamente, lo maravilloso de la fórmula es que vale para cualquier poliedro que se te ocurra; regular o irregular; cóncavo o convexo.

I: Contemos caras, aristas y vértices que es divertido y de paso me termino de convencer: yo veo 18 cuadrados y 8 triángulos. En total son 26 caras.

A: Las aristas se pueden contar de arriba para abajo en el dibujo de Leonardo. A ver, 4 del cuadrado de arriba, 5 veces 8, más 4 de cuadrado de abajo. En total hay 48 aristas.

C: Los vértices son 4 del cuadrado de arriba, 4 del de abajo y 16 de la parte central. Total: 24 vértices.

JC: Crucemos los dedos para que Euler y Descartes no estuvieran equivocados: 26 (caras) más 24 (vértices) da 50, menos 48 (aristas): ¡Dos! No podía fallar. Los invariantes en matemática son realmente poderosos, como en la magia...

I, C, A: ¿...?

JC: El truco al que hago referencia en la Editorial es también un ejemplo de invariante. ¿Tienen monedas, así les muestro?

C: ¿Monedas? Ese si que es un truco, pero sucio. Las que tengo no te las voy a dar. ¡Con lo que cuesta juntarlas para el colectivo!

I: ¿Qué tienen que ver los poliedros con las monedas de David Copper eld? Aquí tengo unas monedas antiguas para que no haya excusas. Espero que no desaparezcan...

SONETO A LOS POLIEDROS

Cinque corpi in natura son producti,
Da naturali semplici chiamati,
Perchè a ciascum composito adunati
Per ordine concorran fra lor tutti.
Immixti, netti e puri fur constructi;
Quattro elementi e ciel così nomati,
Quali Platone vol che figurati
L'esser dien a infiniti fructi.
Ma perchè el vacuo natura abhorre,
Aristotil, in quel de coelo et mundo,
Per se non figurati volse porre.
Però l'ingegno geometra profondo
Di Plato e d'Euclide piacque exporre
Cinqu'altri che in sfera volgan tundo,
Regolari, d'aspecto iocundo,
Commme vedi, de lati e basi pare
E un altro sexto mai se po formate.

Luca Pacioli

La Divina Proporción
Editorial Losada (Buenos Aires, 1946;50)

JC: Se colocan sobre la mesa entre 10 y 20 monedas (el número no es crucial en el truco) formando un nueve mágico como muestra la gura. Mientras el mago está de espaldas, alguien del público piensa un número cualquiera (mayor que la cantidad de monedas que forman la cola del nueve) y comienza a contar a partir del extremo nal de la cola. Cuenta hacia arriba y en torno del nueve en sentido opuesto a las agujas del reloj, hasta que llega al número que pensó. Entonces empieza a contar de nuevo desde 1, comenzando por la última moneda tocada, pero esta vez cuenta en torno al círculo en sentido horario (sin volver a la cola del nueve) hasta que alcanza al número elegido otra vez. Él y todo el público recuerdan la moneda en que terminó la cuenta. El mago se da vuelta e inmediatamente señala dicha moneda.

I: ¡Increíble! No importa el número que elija, la cuenta termina siempre en la misma moneda (señalada con una echa en la gura). ¿Cómo se explica?

JC: Lo dicho: un ejemplo claro de invariante matemático.

C: Usando un poco de álgebra elemental se puede demostrar por qué cae siempre en la misma moneda.

A: Parece brujería.

JC: Algo de eso hay. Parece que Luca Pacioli también escribió el primer manual dedicado a la enseñanza de la magia, De viribus quantitatis (Sobre el poder de los números). Contiene la primera referencia a trucos de naipes, así como una guía sobre cómo barajar, tragar fuego y hacer danzar las monedas. Los trucos en el texto mágico incluyen cómo escribir una oración en los pétalos de una rosa, lavar las manos en plomo fundido y hacer que un huevo camine a través de una mesa. Tiene algunos de los primeros ejemplos de rompecabezas numéricos. Tal vez el objetivo era desenmascarar a los pícaros que la usaban para engañar a los incautos. También es el primer trabajo que remarca que Da Vinci, su alumno, era zurdo, y la a ción de éste por la "magia cientí ca".

A: ¿Magia cientí ca? ¿Qué contradicción es ésa?

I: Es un oxímoron, una expresión que combina palabras que aisladas tienen signi cados opuestos (como dulce amargura); aunque parezca chocar con el rigor pretendido, como diría Jorge Salvetti.

JC: Ese artículo me preocupa. Temo que alguien exclame, al ver ese tema de la palabra en las ciencias, '¿Qué demonios es esto, y qué hace aquí?', y me retire el saludo.

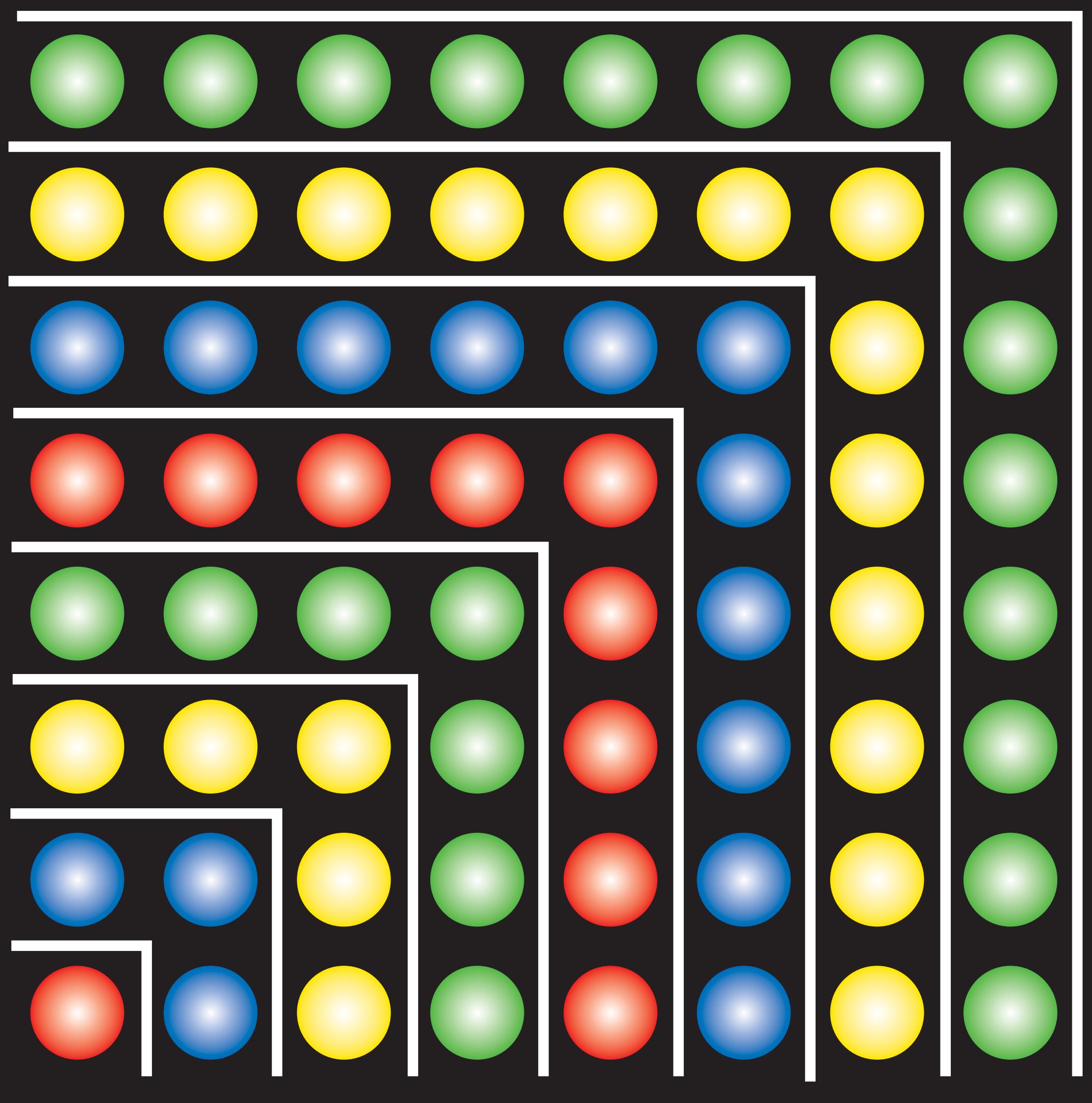
A: Me esperanzo en que se aprecie esa colaboración, porque la cuestión del lenguaje está cobrando presencia en las ciencias físicas. Stephen Hawking, autor de la idea de un tiempo complejo, cuya parte imaginaria es la que predomina en la actualidad, y la real en los orígenes del universo, deplora no tener a mano verbos que se puedan conjugar en dos direcciones perpendiculares del ujo temporal. El sólo hecho de decir 'hubo' un big-bang es, para el físico británico (el más grande cosmólogo que haya existido) una gruesa e insalvable incongruencia gramatical y semántica.

P: Ya estoy viendo aparecer una nueva sección en Q.e.d.... ¡Me van a volver loco con el diseño!

I: Entonces, el cuadro de Luca Pacioli, queda.

¡Q.ue.d.a!

Suma de Impares



$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$