Mat. 1997
(35)

NUEVO MODELO DE PROGRAMA A REGIR A PARTIR
DEL 1ER. CUATRIMESTRE DE 1994

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

1. DEPARTAMENTO/INSTITUTO DE *MATEMATICA*

2. CARRERA de: a) Licenciatura en

   Orientación

   b) Doctorado y/o Post-grado en *Doctorado*

   c) Profesorado en

   d) Cursos Técnicos en Meteorología

   e) Cursos de Idiomas

3. 1er. Cuatrimestre/2do. Cuatrimestre *2do. Cuat.* Año *1997*

4. N° DE CODIGO DE CARRERA *53*

5. MATERIA *OPTIMIZACION DISCRETA, EL PROBLEMA DE WARING Y EL METODO DE HARDY LITTLEWOOD*

6. N° DE CODIGO

7. PUNTAJE PROPUESTO (en caso de tratarse de materias optativas para la Licenciatura o de Doctorado y/o Post-Grado) *3 ptos.*

8. PLAN DE ESTUDIOS Año *1982*

9. CARACTER DE LA MATERIA (Obligatoria u optativa) *Optativo*

10. DURACION (anual, cuatrimestral, bimestral u otra) *Cuatrimestral*

11. HORAS DE CLASES SEMANALES

a) Teóricas *5* hs.	d) Seminarios hs.
b) Problemas hs.	e) Teórico-Problemas hs.
c) Laboratorio hs.	f) Teórico-Práctico hs.

g) Totales horas *5*

M. C. López Cuio
DRA. MARIA C. LOPEZ
SECRETARIA ACADEMICA
DPTO. DE MATEMATICA

12. CARGA HORARIA TOTAL ***5 horas***

FORMA DE EVALUACION ***Examen final***

13. ASIGNATURAS CORRELATIVAS ***No tiene***

14. PROGRAMA ANALITICO (Adjuntarlo)

15. BIBLIOGRAFIA (indicar título del libro, autor, editorial y año de publicación; adjuntar luego del programa)

Fecha ***2do. Cuat. 1997***

Firma del Profesor

Aclaración de firma ***Dr. Joos HEINTZ***

Firma del Director

Sello aclaratorio DRA. MARIA C. LOPEZ
SECRETARIA ACADEMICA
DPTO. DE MATEMATICA

Nota: Para la validez de la información presentada se solicita que todas las páginas estén inicialadas y firmadas al final por el Sr. Director del Departamento/Instituto/Carrera o Responsable debidamente selladas y fechadas.

Otra: Se recuerda que los objetivos y los contenidos mínimos están incluidos en el Plan de Estudios respectivo y sólo son modificables por Resolución del Consejo Superior de la Universidad de Buenos Aires.

Optimización discreta, el problema de Waring y el método de Hardy - Littlewood

Edward Waring afirmó en el año 1770 (sin prueba alguna, por supuesto) que "todo número (natural) puede ser representado como suma de cuatro cuadrados, nueve cubos, diecinueve bicuadrados, etc". Ese curso esta principalmente dedicado al significado de la expresion "etc" (la cuestion si diecinueve bicuadrados alcanzan sique estando abierta).

El problema (conjetura) de Waring es el siguente enunciado: "para todo exponente $d \geq 2$ existe un entero s tal que todo número natural N puede ser representado de la forma

$$N = x_1^d + \cdots + x_s^d \text{ con } x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Hilbert demostró en el año 1909 la certeza de dicho enunciado. Hardy y Littlewood (basándose en un método probalístico de Hermann Weyl) probaron en el año 1920 una versión cuantitativa de la conjetura de Waring afirmando que para $s \geq d2^{d-1} + 1$ para N suficientemente grande la ecuación (1) tiene asintóticamente $N^{\frac{s}{d}-1}$ soluciones en $\mathbb{N}^s$.

El curso está centrado en el método desarrollado por Hardy y Littlewood para demostrar la afirmación arriba mencionada y no en el problema de Waring propriamente dicho (el problema en si mismo representa meramente una curiosidad matemática, como la conjetura de Fermat y otras afirmaciones que sirven a los matemáticos para matar el tiempo).

Un analisis pormenorizado del método ("del círculo") de Hardy y Littlewood da el siguiente enunciado (debido a Wolfgang Schmidt en base de algunas ideas de Harold Davenport):

sea $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_s]$ una forma de grado $d \geq 2$ con $s >> d$. Si la variedad real definida por F tiene dimension (máxima y típica) $s-1$ y si la complejidad de evaluar F con un circuito aritmetico en $\mathbb{Q}$ $(X_1, \ldots, X_s)$ es "alta" (del orden $d^{d+\Omega(\frac{d}{\log d})}$) entonces el cubo $[0, P]^s \cap \mathbb{Z}^s$ contiene un número de soluciones de la ecuación $F = 0$ del mismo orden que $\mathcal{J}(F)\mathcal{S}(F)P^{s-d}$, siendo $\mathcal{J}(F) > 0$ y $\mathcal{S}(F) > 0$.

Los invariantes $\mathcal{J}(F)$ y $\mathcal{S}(F)$ fueron introducidos por Hardy y Littlewood y se llaman *integral* y *serie singular* de polinomio F respectivamente. El invariante $\mathcal{J}(F)$ codifica las propriedades combinatorias de la forma F y se caracteríza analíticamente (en el caso del problema de Waring el integral singular se espresa en terminos de la función Gamma) mientras el invariante $\mathcal{S}(F)$ codifica las propriedades aritmeticas p-ádicas de F. En otras palabras los invariantes $\mathcal{J}(F)$ y $\mathcal{S}(F)$

M. C. López

DRA. MARIA C. LOPEZ
SECRETARIA ACADEMICA
DPTO. DE MATEMATICA

expresan un "principio de Hasse" donde $\mathcal{J}(F)$ corresponde a la valuación arquimediana y $\mathcal{S}(F)$ a las valuaciones no arquimedianas.

El interes para la optimización discreta de ese desarrollo del método del círculo de Hardy y Littlewood no requiere explicación. Son justamente los polinomios de bajo grado d con muchas variables ($s >> d$) que son tema de la optimización no lineal discreta.

El curso finalizará (en la medida que hay tiempo) con dos perspectivas de tipo "aplicación practica" de la geometría diofántica:

i) se demostrará que las expresiones eliminantes que occurren en una gran variedad de aplicaciones del cálculo simbólico a sistemas de ecuaciones algebro-diferenciales de la automatica, de química de bajas concentraciones, de robótica etc son sorprendentemente uniracionales y tienen por lo tanto muchas soluciones racionales. Se estableceran medidas cuantitativas para medir la cantidad de soluciones racionales y se tratará de sacar conclusiones sobre la complejidad de representación de dichas expresiones en estructuras de datos apropriadas.

ii) Se demostrará que en cierto sentido la programación mixta (discreta-continua) con restricciones polinomiales cuasiconvexas tiene complejidad polinomial. Se discutiran las limitaciones de tal enunciado.

El curso tendra en su mayor parte un nivel absolutamente elemental. No se requieren conocimientos de matemática que superen el primer año de formación en la carrera de computación. Sin embargo el curso será *muy* exigente con respecto a la asistencia, el esfuerzo y la disciplina de trabajo para quienes quieren seguirlo. Conociemientos superiores de matematica no facilitaran para nada su seguimiento.

A parte de sus aspectos informáticos ya mencionados el curso servira tambien como una introducción *motivada* a la teoría analítica de numeros y a la geometría diofántica.

Literatura: [8], [6], [9], [4], [2], [3], [7], [1], [5]

References

[1] B. Bank, M. Giusti, J. Heintz, R. Mandel, and G. Mbakop. Polar Varieties and Efficient Real Equation Solving: The Hypersurface Case. preprint, 1997.

[2] B. Bank, J. Heintz, T. Krick, R. Mandel, and P. Solernó. Computability and Complexity of Polynomial Optimization Problems. In W. Krabs and J. Zowe, eds., *Modern Methods of Optimization*, pp. 1–23. Springer, 1990.

[3] B. Bank, J. Heintz, T. Krick, R. Mandel, and P. Solernó. Une Borne Optimale Pour La Programmation Entiére Quasi-Convexe. *Bull. Soc. math. France*, **vol. 121**:pp. 299–314, 1993.

[4] N. Chandrasekharan. *Introduction to analytic number theory*. Springer, 1968.

[5] M. Giusti, K. Hägele, J. Heintz, J. E. Morais, J. L. Montaña, and L. M. Pardo. Lower Bounds for Diophantine Approximation. In *Proceedings of MEGA'96*. North-Holland, 1996.

[6] Oliver Hardy and Stan Littlewood. On partitio numerorum I. *Göttinger Nachrichten*, pp. 33–54, 1920.

[7] T. Krick and L. M. Pardo. A Computational Method for Diophantine Approximation. In L. González-Vega and T. Recio, eds., *Algorithms in Algebraic Geometry and Applications. Proceedings of MEGA'94*, vol. 143 of *Progress in Mathematics*, pp. 193–254. Birkhäuser Verlag, 1996.

[8] W. Schmidt. *Analytische Methoden für diophantische Gleichungen*. Birkhäuser, 1984.

[9] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. *Math. Ann.*, **vol. 77**:pp. 313–352, 1916.

2do. Cuatrimestre 1997

Firma del Profesor:

Aclaración: Dr. Joos HEINTZ

DRA. MARIA C. LOPEZ
SECRETARIA ACADEMICA
DPTO. DE MATEMATICA