

2º cuatrimestre 1977

Dr. Manuel Balanzat

Prof. Tit. dad. exclusiva.

Programa

1.- Espacios de Banach

Espacios normados y espacios de Banach; normas equivalentes; continuidad de operaciones vectoriales; ejemplos de espacios normados.

Aplicaciones lineales y continuas; propiedades básicas y ejemplos.

Espacios dual; hiperplanos. Teorema de Hahn-Banach: forma geométrica, forma geométrica y de separación. Espacio bidual; espacios reflexivos.

Teoremas de acotación uniforme, de la resonancia y de Banach-Steinhaus; contraejemplos. Teorema de la aplicación abierta y teorema del gráfico cerrado.

2.- Espacios de Hilbert.

Formas hermíticas; espacios prehilbertianos; desigualdad de Schwarz; ley del paralelogramo; continuidad del producto escalar; ejemplos; espacios de Hilbert. Ortogonalidad; ejemplos ortogonalización de Schmidt. Polinomios ortogonales; teorema de las raíces. Teorema de la proyección de Riesz; espacios suplementarios ortogonales; dual de un espacio de Hilbert; reflexividad de los espacios de Hilbert; reflexividad de los espacios de Hilbert. Teorema de Lax-Milgram. Convergencia débil; propiedades; compacidad débil de las bolas en un espacio de Hilbert.

3.- Familias sumables y familias de Fourier

Familias sumables en un normado; propiedades; sumabilidad absoluta.

Propiedades de las familias sumables de números reales; contraejemplo en el caso de normados. Asociatividad. Familias de Cauchy; propiedades.

Series en un normado: convergencia ordinaria, absoluta y conmutativa; relaciones entre convergencia y sumabilidad.

Familias de Fourier en un espacio prehilbertiano; desigualdad de Bessel-Parseval; teorema de mejor aproximación. Bases hilbertianas, familias maximales, familias totales e igualdad de Bessel-Parseval.

Caracterización de espacios de Hilbert por el cardinal de la base.

Caracterización topológica en el caso de base finita o numerable.

Ejemplos de familia maximal y no total. Sumas directas de espacios de Hilbert.

4.- Derivación en \mathbb{R}

Primitivas e integrales indefinidos en análisis clásico. Números derivados. Funciones con derivadas más infinito en un conjunto de medida nula continuas y crecientes. Funciones crecientes continuas no constantes y con derivada nula en casi todo punto. Lema de Riesz; teorema de Lebesgue sobre derivación de una función creciente. Funciones de variación acotada. Derivada de la suma de una serie de funciones crecientes. Puntos de densidad. Derivada de una integral indefinida. Funciones absolutamente continuas: su identidad con las integrales indefinidas. Fórmula de Barrow. Descomposición de una función creciente en suma de una función de saltos, una absolutamente continua y una singular. Integral indefinida de una función finita e integrable que es derivada de otra en todo punto. Integración por partes. Integración por sustitución.

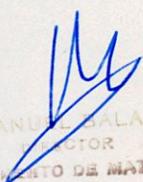
5.- Integral de Stieltjes

Integral de Riemann-Stieltjes de una función con respecto a otra con valores en un Banach; propiedades básicas; condiciones de existencia. Caso en que la segunda función toma valores reales; propiedades básicas; integración por partes; reducción a una integral de Lebesgue cuando la segunda función es absolutamente continua; generalización. Segundo teorema de la media. Cambio de variable. Integrales impropias. Medidas de Stieltjes en un intervalo engendrado por una función creciente; medidas discretas, singular y absolutamente continua; extensión a medidas en \mathbb{R} , integral de Lebesgue-Stieltjes respecto de una medida de Stieltjes. Relación con la integral de Riemann-Stieltjes.

6.- Series Trigonométricas de Fourier.

Serie trigonométrica y serie de Fourier de una función de L^1 . Condiciones para que la suma de una serie trigonométrica sea la serie de Fourier de su suma. Unicidad en L^1 de la serie de Fourier. Serie de Fourier de una función de L^2 , propiedades. Teorema de Mercer. Convergencia de la serie de Fourier de una función absolutamente continua con derivada en L^2 . Totalidad del sistema trigonométrico en $C(-n, n)$ en L^p . Existencia de series trigonométricas cuyos coeficientes tienden a cero y que no son series de Fourier. Desigualdad isoperimétrica. Series de seno o coseno; forma exponencial de una serie trigonométrica.

Polinomios ortogonales: propiedades. Totalidad de sistemas de polinomios ortogonales. Principales polinomios ortogonales. Convergencia puntual de las series de Fourier: desarrollo histórico. Existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en un punto. Decrecimiento de los coeficientes de Fourier: diversos casos, lema de Riemann-Lebesgue. Núcleo e integral de Dirichlet; teorema local de Riemann. Criterio de Dini: casos particulares. Criterio de Lipschitz. Criterio de Hölder. Criterio de Dirichlet-Jordan. Enunciados de algunos criterios. Integración de series de Fourier. Sumación Cesaro de Series. Sumas y núcleo de Fejer. Teoremas de Fejer y Fejer-Lebesgue; teorema de aproximación de Weierstrass. Sumación Abel de series de Fourier y núcleo de Poisson. Nociones someras sobre convergencia puntual de series de Fourier-Legendre.


DR. MANUEL BALANZAT
DIRECTOR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA