

# ANALISIS FUNCIONAL Y TEORIA ERGODICA

2º cuatrimestre de 1976



## Capítulo I

Fórmula del cambio de variables para integrales de Lebesgue en  $R^n$ . Elemento de área de una superficie: su invariancia bajo representación y bajo isometrías del espacio. Coordenadas polares y fórmula de integración radial. Aplicaciones. Fórmula de integración por partes para integrales de Lebesgue-Stieljes. Segundo teorema del valor medio. Desigualdades básicas: desigualdades de Hölder y de Minkowski. Desigualdad integral de Minkowski. Espacios  $L^p$ . Funciones de distribución y expresión de la norma. Condiciones de derivabilidad de integrales paramétricas. Módulo de continuidad en  $L^p$ .

## Capítulo II

Convolución de funciones y desigualdades de Young. Condiciones de continuidad y de diferenciabilidad de la convolución. Núcleos singulares positivos. Ejemplos. Aproximación uniforme y en norma. Núcleo de Schwartz y densidad de  $C_0^\infty$  en  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

## Capítulo III

Funciones convexas. Continuidad y diferenciabilidad salvo un conjunto numerable. Condiciones necesarias y suficientes para la convexidad de una función. Desigualdad de Jessen. Espacios de Orlicz  $L_\phi$  y clases de Zygmund  $L(\log L)$ .

## Capítulo IV

Diferenciación de integrales en  $R^n$ . Lema de cubrimiento de Wiener y desigualdad maximal de Hardy-Littlewood. Puntos de Lebesgue y teorema de diferenciación de la integral sobre esferas, sobre cubos y sobre intervalos no deformados más allá de cierto límite. Operador maximal de Hardy-Littlewood. Ejemplo de función integrable sobre  $(0, 1)$  cuya función maximal no es integrable sobre dicho intervalo. Desigualdades de tipo fuerte para  $p > 1$ . Condición necesaria y suficiente para que la función maximal resulte localmente integrable: lema de cubrimiento de Calderón y teorema de Stein sobre  $L(\log L)$ .

Diferenciación fuerte de integrales. Desigualdades de tipo débil y teorema de Jessen-Marcinkiewicz y Zygmund.

Lema de cubrimiento de Riviére y diferenciación de la integral sobre dominios dependientes de un parámetro.

## Capítulo V

Transformación de Fourier en  $R^n$ . Propiedades de la transformada y teorema de Riemann-Lebesgue. Transformada de la convolución. Fórmulas de translación y transformación lineal del argumento. Derivada de una función en el sentido de la norma  $L^1$ . Transformación de Fourier de la derivada y derivación de la transformada. Transformación de Fourier de funciones radiales y funciones de Bessel. Fórmula de multiplicación. Fórmula de inversión: medias Abel y núcleo de Poisson; medias Gauss y núcleo de Weirstrass; medias Cesaro y núcleo de Fejér. Sumabilidad en norma y en casi todo punto. Transformada de Fourier en  $L^2$  y el teorema de Plancherel. Interpolación de operadores y el teorema de Hausdorff-Young. Caso de una variable: Núcleo de Dirichlet y la fórmula de inversión de Jordan. Integrales de Fourier-Stieljes. Funciones de tipo positivo y el teorema de Bochner-Khinchine. Funciones características y el teorema de Cramer-Levy. Aplicación: el teorema central del límite del Cálculo de Probabilidades.

*M.B.*  
DR. MANUEL BALAZAT  
DIRECTOR  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

## Capítulo VI

Funcionales lineales continuas. El teorema de Hahn-Banach y algunos de sus corolarios. Teoremas de representación de funcionales en diversos espacios. ~~funciones de medida~~. Convergencia débil. Compacidad débil.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

de la bola unitaria de un espacio de Banach reflexivo: Teorema de Eberlein-Smulyan. Convergencia débil y convergencia en norma: el teorema de Radón y el teorema de selección de Banach y Baire.

### Capítulo VII

Teoría Ergódica. El teorema de Liouville de la mecánica clásica. Transformaciones que preservan la medida. Grupos y semigrupos de tales transformaciones. Teorema ergódico maximal y desigualdad de Wiener. Desigualdades de tipo fuerte para  $p > 1$ . Teorema ergódico puntual y teorema ergódico medio. Operadores markovianos. Teorema ergódico de Riesz-Lorch. Desigualdad maximal y teorema ergódico de Hopf-Dunford-Schwartz. Representación espectral de un grupo de operadores unitarios en el espacio de Hilbert y teorema ergódico medio para tales grupos. El teorema ergódico de Chacón-Ornstein.

### Bibliografía

#### Textos :

- 1) BILLINGSLEY, P., Ergodic Theory and Information , Wiley, 1965
- 2) GARSIA A. , Topics in almost everywhere convergence, Markham Pub. Co. Chicago, 1970.
- 3) GUZMAN, Miguel de , Differentiation of Integrals in  $R^n$  , Springer Verlag, Lecture Notes N° 481.
- 4) HALMOS, P. Lectures on Ergodic Theory, The Mathematical Society of Japan , 1965 (Publicado por Chelsea)
- 5) KANTOROVICH- AKILOV, Análisis Funcional en espacios normados, Fizmatguiz, 1959 (existe traducción al inglés)
- 6) RIESZ-NAGY, Functional Analysis, Ungar Pub. Co. 1955.
- 7) TAYLOR, A. Introduction to Functional Analysis, Wiley, 1958.
- 8) WEISS, G. Análisis Armónico en varias variables y teoría de los espacios  $H^p$  , Fascículo 9 de la colección "Cursos y Seminarios de Matemática" Universidad de Buenos Aires, 1960.

#### Artículos

- 1) CALDERON, A. P. Ergodic Theory and Translation Invariant Operators, Proc. N.A.S. Vol. 59, 1968, pp. 349-353.
- 2) CHACON,R.V. & ORNSTEIN, D.S. A General Ergodic Theorem, Ill. Jour. of Math. Vol. 4, N° 2, June 1960
- 3) DUNFORD, N. SCHWARTZ, J. Convergence Almost Everywhere of Operator Averages, Jour. of Rat. Mech. and Anal. Vol 5, N° 1, 1956, pp. 129-178.
- 4) FAVA, N.,Weak Type Inequalities for Product Operators , Studia Mathematica, T. XLII , 1972, pp. 271-288.
- 5) JESSEN, B. , MARCINKIEWICZ, J. and ZYGMUND, A. Note on the differentiability of multiple integrals, Fundamenta Mathematicae - (25) , 1935, pp. 217-234.
- 6) RIESZ, F. Sur la theorie ergodique, Comm. Math. Helvetici 17, 221-239.
- 7) STEIN, E. Note on the class  $\mathcal{B}(\log L)$ , Studia Mathematica, T. XXXII , (1969) pp. 305-310.
- 8) WIENER, N. The Ergodic Theorem, Duke Math. J. 5 (1939) pp. 1-18.

*M*  
DR. MANUEL BALANZAT  
DIRECTOR

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

*H. Arevalo*  
N. A. FdVd