

21 M

FUNCIONES REALES I

Profesorado

Programa

1er. cuatrimestre 1973

1.- COMPLEMENTOS DE TEORIA DE CONJUNTOS

Equivalencias en un conjunto; conjunto cociente por una relación de equivalencia; sistemas de representantes; ejemplos. Equivalencias compatibles con las operaciones en un conjunto dotado de estructura algebraica; estructura algebraica del conjunto cociente. Conjuntos numerables; propiedades básicas. Numerabilidad del conjunto de los números algebraicos. Conjuntos con la potencia del continuo.

Nociones someras sobre números transfinitos. Relación de orden entre números transfinitos; teorema de Cantor-Bernstein.

2.- ESPACIOS METRICOS

Origen del concepto de espacio métrico; axiomas de la distancia. Ejemplos de espacios métricos; espacios  $R^n$  y  $C^n$ ; espacios discretos; distancias sobre grupos abelianos, espacios normados, espacio de sucesiones. Espacios ultramétricos, propiedades. Espacios pseudométricos, espacio métrico de las clases de equivalencia. Bolas y esferas en un espacio métrico; entornos. Conjuntos acotados; Conjuntos abiertos y cerrados. Interior, exterior, adherencia y frontera de un conjunto; propiedades básicas.

Sucesiones convergentes en un espacio métrico; propiedades. Caracterización en algunos espacios métricos de sucesiones convergentes. Caracterización por sucesiones de la adherencia y de los conjuntos cerrados.

Sucesiones de Cauchy. Espacios completos y espacios de Banach. Espacios de aplicaciones acotadas con valores en un Banach. Teorema de intersección de Cantor.

Conjuntos densos. Espacios separables; propiedades y ejemplos. Aplicaciones continuas entre dos espacios métricos. Espacios métricos homeomorfos, espacios métricos normables. Aplicaciones uniformemente continuas; aplicaciones lipschitzianas; espacio uniformemente equivalentes. Teorema del punto fijo de Banach.

Conjuntos raros y conjuntos magros; propiedades y ejemplos. Espacios de Baire. Teorema de Baire (todo métrico completo es de Baires).



### 3.- ESPACIOS TOPOLOGICOS

Definición de una topología por abiertos; ejemplos. Entornos; definición de una topología por entornos; ejemplos. Sistemas fundamentales de entornos. Conjuntos cerrados. Interior, exterior, adherencia y frontera de un conjunto; puntos de acumulación. Relaciones de orden entre topologías sobre un conjunto. Topología engendrada por una familia de subconjuntos; base de una topología.

Topología producto con un número finito de factores; ejemplos y propiedades; definición para un producto cualquier. Topología inducida.

Aplicaciones continuas entre espacios topológicos; homeomorfismos. Nuevas definiciones de las topologías producto e inducidas.

Axiomas de numerabilidad; espacios topológicos separables y espacios de Lindelof.

Espacios separados, axiomas  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$ . Límites de sucesiones; valores de adherencias de una sucesión.

Espacios compactos; propiedades de Borel-Lebesgue y de Bolzano-Weierstrass. Espacios métricos compactos, espacios totalmente acotados. Conjuntos. Imagen continua de un conjunto compacto. Enunciado del Teorema de Tichnoff. Continuidad uniforme de las aplicaciones continuas definidas en un conjunto compacto.

Espacios conexos. Conjuntos conexos. Propiedades de Darboux Componentes conexas.

### 4.- ESPACIOS DE BANACH

Continuidad de las operaciones algebraicas en un espacio normado. Subespacios de un normado, subespacios cerrados. Sistemas totales; caso de espacios separables.

Aplicaciones lineales y continuas; ejemplos. Espacio normado  $L^C(X,Y)$ ; convergencia; caso en que  $Y$  es un Banach. Hiperplanos y formas lineales; espacio dual de un normado.

Teoremas de acotación uniforme, teorema de Banach-Steinhaus. Convergencia de series en un espacio normado; series de Cauchy. Convergencia absoluta y convergencia conmutativa, relaciones mútuas y con la convergencia ordinaria.

### 5.- ESPACIOS DE HILBERT Y SERIES DE FOURIER

Axiomas de definición de un espacio prehilbertiano; desigualdad de Schwarz, estructura de espacio normado, espacio de Hilbert. Continuidad del producto escalar.