20
M

FUNCIONES REALES I

Programa 1er. cuatrimestre de 1973

1.- **Conjuntos**. Operaciones con conjuntos; conjuntos ordenados y bien ordenados. Números ordinales y cardinales. Teorema de Buena ordenación. Comparabilidad de ordinales y cardinales. Teorema de Cantor-Bernestein.

2.- **Recta Real y Espacios Euclideos**. Estructura lineal y métrica: propiedades generales.

3.- **Espacios Métricos**. Definición y propiedades generales. Conjuntos especiales en espacios métricos: abiertos, cerrados, perfectos, compactos. Clausura, interior, conjunto derivado. Conjuntos G_g y F_o. Borelianos. Formas especiales de estos conceptos en R^n.

4.- **Categorías**. Conjuntos magros, de 1a y 2a. categoría. Teorema de Baire. Aplicaciones.

5.- **Funciones Reales en Espacios Métricos**. Funciones continuas y y semicontinuas. Lema de Urisohn. Conjunto de continuidadde una función real arbitraria. Convergencia puntual y convergencia uniforme. Convergencia puntual monótona: teorema de Dini. Funciones lipschitzianas.

6.- **Volumen Elemental**.-Longitud, area y volumen elementales. Nociones clásicas su discusión. Cálculo de areas a la manera de Euclides y Arquímedes. Necesidad de formalización.

7.- **Medida en R^n**. Rectángulos en R^n y s- volumen. wedida exterior de Lebesgue, Subaditividad de la medida exterior de Lebesgue. Conjuntos medibles Lebesgue. Propiedades de la familia de los conjuntos medibles Lebesgue. Medida de Lebesgue: propiedades. Existencia de no-medibles.

8.- **Medida Topológica en R^n**.+Medibilidad de rectángulos,abiertos, cerrados, borelianos. Aproximación de medibles por abiertos y cerrados (regularidad). Estructura de medibles en términos de conjuntos G_g y F_o y -de medida nula. Medida y categoría.

9.- Aplicaciones y Medida. Preservación de mediabilidad; propiedad N de Lusin, funciones lipschitzianas. Imagen de la medida de Lebesgue por transformaciones lineales. Homeomorfismos que no preservan mediabilidad.

10.- Funciones ~~medibles~~ medibles en R^n. Definición y propiedades de las funciones medibles Borel y medibles Lebesgue. Relación entre amba
Relación con continuidad. Convergencia en casi todo punto, en med
da (=probabilidad), y aproximadamente uniforme. Relaciones entre
distintos tipos de convergencia. Aproximación de funciones medibles. por simples o continuas. Teorema de Lusin.

11.- Integración. Integral de Riemann. Integral de Cebesgue. Caracterización de las funciones integrables Riemann mediante medida de Lebesgue y continuidad. Funciones integrables sumables. Teoremas de convergencia integrables: Bepp Levi (convergencia monótona), Fatou y Lebesgue (convergencia mayorada).

12.- Medidas Abstractas. Sigma de conjuntos. Medidas y medidas exteriores abstractas. Mediabilidad e intetgración de funciones reales con respecto a una medida abstracta. Medidas σ-finitas. Extensión al caso de medidas abstractas de los teoremas de convergencia de integrales, Ejemplos.

13.- Producto de Medidas. Producto de sigma algebras. Definición de medida producto de medidas σ-finitas.Teoremas de Fubini y Fubini-Tonelli. Aplicaciones: volumen de una bola en R^n, convolución.

14.- Espacios Funcionales. Desiguladades de Cauchy-Schwartz, Holder y Minkowski. Espacios $L^p(\ )$. Norma y distancia en $L^p(\ )$ (1 p). Completidad de los espacios $L^p(\ )$. Espacios $L^2(\ )$ Teorema de la proyección sobre convexos cerrados. Reprsentación de funcionales.lineales acotadas en $L^2(\ )$ (teorema de Riesz).

15.- Comparación de Medidas. Continuidad absoluta de una medida respecto de otra. Medidas triangulares (ortogonales). Teorema de descomposición de Lebesgue. Teorema de Radon-Nikodym.

Prof. Dr. Horacio Porta.