21

# FUNCIONES REALES I

(Profesorado)

PROGRAMA 1er. cuatrimestre 1972.

## I.- COMPLEMENTOS DE TEORIA DE CONJUNTOS

Equivalencias en un conjunto: conjunto cociente por una relación de equivalencia; sistemas de representantes: ejemplos. Equivalencias compatibles con las operaciones en un conjunto dotado de estructura algebráica: estructura algebráica del conjunto cociente.

Conjuntos numerables; propiedades básicas. Numerabilidad del conjunto de los números algebráicos. Conjuntos con la potencia del contínuo.

Nociones someras sobre números transfinitos. Relación de órden entre números transfinitos; teorema de Cantor-Bernstein.

## II.- ESPACIOS METRICOS

Orígen del concepto de espacio métrico: axiomas de la distancia. Ejemplos de espacios métricos: espacios $R^n$ y $C^n$; espacios discretos; distancias sobre grupos abelianos, espacios normados, espacio de sucesiones. Espacios ultramétricos, propiedades. Espacios pseudométricos, espacio métrico de las clases de equivalencia.

Bolas y esferas en un espacio métrico;entornos. Conjuntos acotados. Conjuntos abiertos y cerrados. Interior, exterior, adherencia y frontera de un conjunto; propiedades básicas.

Sucesiones convergentes en un espacio métrico: propiedades. Caracterización en algunos espacios métricos de sucesiones convergentes. Caracterización por sucesiones de la adherencia y de los conjuntos cerrados.

Sucesiones de Cauchy. Espacios completos y espacios de Banach. Espacios de aplicaciones acotadas con valores en un Banach. Propiedades de los espacios y conjuntos completos. Teorema de intersección de Cantor.

Conjuntos densos. Espacios separables; propiedades y ejemplos.

Aplicaciones contínuas entre dos espacios métricos. Espacios métricos homeomorfos, espacios métricos normables. Aplicaciones uniformemente contínuas; aplicaciones lipschitzianas; espacios uniformemente equivalentes. Teorema del punto fijo de Banach.
Conjuntos raros y conjuntos magros; propiedades y ejemplos. Espacios de Baire. Teorema de Baire (todo métrico completo es de Baire).

III.- <u>ESPACIOS TOPOLOGICOS</u>

Definición de una topología por abiertos; ejemplos. Entornos; definición de una topología por entornos; ejemplos. Sistemas fundamentales de entornos. Conjuntos cerrados. Interior, exterior, adherencia y frontera de un conjunto; puntos de acumulación. Relaciones de orden entre topologías sobre un conjunto. Topología engendrada por una familia de subconjuntos; base de una topología.
Topología producto con un número finito de factores; ejemplos y propiedades; definición para un producto cualquiera. Topología in ducida.
Aplicaciones contínuas entre espacios topológicos; homeomorfismos. Nuevas definiciones de las topologías producto e inducidas.
Axiomas de numerabilidad; espacios topológicos separables y espacios de Lindelof.
Espacios separados, axiomas $T_0$, $T_1$ y $T_2$. Límites de sucesiones; valores de adherencias de una sucesión.
Espacios compactos; propiedades de Borel-Lebesgue y de Bolzano-Weiertrass. Espacios métricos compactos, espacios totalmente acotados. Conjuntos. Imágen contínua de un conjunto compacto. Enunciado del teorema de Tichonoff. Continuidad uniforme de las aplicaciones contínuas definidas en un conjunto compacto.
Espacios conexos. Conjuntos conexos. Propiedad de Darboux. Componentes conexas.

## IV.- ESPACIOS DE BANACH

Continuidad de las operaciones algebráicas en un espacio normado. Subespacios de un normado, subespacios cerrados. Sistemas totales; caso de espacios separables.
Aplicaciones lineales y contínuas; ejemplos. Espacio normado $L^c(X,Y)$; convergencia; caso en que Y es un Banach. Hiperplanos y formas lineales; espacio dual de un normado.
Teoremas de acotación uniforme, teorema de Banach-Steinhaus.
Convergencia de series en un espacio normado; series de Cauchy. Convergencia absoluta y convergencia conmutativa, relaciones mútuas y con la convergencia ordinaria.

## V.- ESPACIOS DE HILBERT Y SERIES DE FOURIER

Axiomas de definición de un espacio prehilbertiano; desigualdad de Schwarz, estructura de espacio normado, espacios de Hilbert. Continuidad del producto escalar.
Ortogonalidad. Teorema de Pitágoras. Sistemas ortogonales y ortonormales. Método de ortogonalización de Schmidt.
Serie de Fourier de un vector respecto a un sistemas ortonormal finito o numerable. Desigualdad de Bessel-Parseval. Teorema de mejor aproximación. COnvergencia conmutativa de las series de Fourier. Sistemas totales, sistemas maximales, bases hilbertianas e igualdad de Bessel-Parseval. Isomorfismo con $l^2$ de los espacios de Hilbert con una base hilbertiana numerable.
Espacios de funciones contínuas y generalmente contínuas; sistemas ortonormales trigonométrico y exponencial. Polinomios ortogonales; teorema de las raíces. fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre. Desarrollos en serie de Fourier-Legendre.
Series trigonométricas; forma exponencial; serie de Fourier de una función integrable de período $2\pi$
Propiedades de las series de Fourier de las funciones generalmente contínuas. Lema de Riemann-Lebesgue.

Relaciones entre las convergencias puntual, uniforme y en media cuadrática. Problema de la convergencia puntual de las series de Fourier. Integral de Dirichlet. Teorema de localización de Riemann. Criterio de Dini; convergencia cuando existen derivadas laterales. Enunciado del criterio de convergencia de Dirichlet-Jordan. COnvergencia de la serie de Fourier de una función derivable. Series de período 2p. Series de senos o de cosenos.

Manuel Balanzat

Prof. Dr. Manuel Balanzat