18 M
sup

FUNCIONES REALES II

PROGRAMA - 1er. cuatrimestre 1971

1.- Complementos sobre espacios de Banach

Conjuntos raros y magros; espacios de Baire. Teoremas de Baire; clases de Baire.
Teorema de acotación uniforme. Teorema de la resonancia. Teorema de Banach-Steinhaus. Contraejemplos. Teorema de Banach de la imagen inversa.

2.- Espacios de Hilbert

Axiomas de un espacio prehilbertiano; desigualdad de Schwarz; ley del paralelogramo; continuidad del producto escalar. Espacios de Hilbert.
Ortogonalidad; propiedades básicas; método de Schmidt. Teorema de la proyección de Riesz. Suplementario ortogonal de un subespacio. Dual de un Hilbert.

3.- Familias sumables en espacios normados

Familias sumables y familias absolutamente sumables; sus relaciones y propiedades. Criterio de Cauchy. Series en un normado; convergencias absoluta y conmutativa.

4.- Familias de Fourier

Familia de Fourier de una función respecto de un sistema ortonormal; desigualdad de Bessel-Parseval. Propiedad de mejor aproximación. Bases Hilbertianas; condiciones de equivalencia. Caracterización de los espacios de Hilbert por el cardinal de los sistemas ortonormales totales. Existencia de sistemas maximales no totales.

5.- Sistemas ortonormales en espacios funcionales

Sistemas trogenometrico ortonormal: serie de Fourier de una función de L^2; extensión a L^1. Series trigonométricas; teorema de Lebesgue sobre convergencia puntual. Unicidad en L^1 de la serie de Fourier. Totalidad del sistema trigonométrico en L^p y en $C(-\pi,\pi)$; consecuencias para $p = 2$. Aplicación al problema de las isoperimetro. Forma exponencial de la serie de Fourier.

6.- Polinomios ortogonales

Definición de polinomios ortogonales; propiedades generales. Totalidad del sistema de las potencias.
Ejemplos clásicos de l polinomios ortogonales.
Estudio de los polinomios de Legendre; fórmula de Rodrigues; normalización; ecuación de Legendre fórmula de recurrencia; función generatriz. Nociones sobre polinomios de Hermite y de Laguerre.

7.- Integrales de Stieltjes

Integral de Stieltjes-Riemann sobre un intervalo de una función compleja respecto a otra con valores en un Banach; condiciones de existencia: Propiedades de la integral. Propiedades para el caso en que las dos funciones son reales. Segundo teorema de la media. Teorema de Riesz sobre el espacio dual de $C[a,b]$.

8.- Convergencia puntual de las series de Fourier

Planteo del problema de la convergencia puntual. Decrecimiento de los coeficientes. Lema de Riemann-Lebesgue. Núcleo e integral de Dirichlet; teorema local de Riemann. Criterio de la Dini; casos particulares. Criterio de Dirichlet-Jordan. Integración de la serie de Fourier de una función de L^1. Sumación Cesaro de series; teorema de Fejer; teorema de Fejer-Lebesgue. Nociones someras sobre la sumación abel.

9.- Formas y operadores de un espacio de Hilbert

Formas sesquilineales y cuadráticas. Lema de Lax-Milgram. FOrma sesquilineal asociada a un operador; cotas de un operador. Convergencia fuerte de operadores. Operador Adjunto. Espectro de un operador; caso de los operadores hermíticos; espectro aproximado.

10.- Operadores compactos

Definición y propiedades básicas de las aplicaciones compactas;

relación con las de imagen de dimensión finita; relaciones con la convergencia débil. Operadores integrales. Propiedades del espectro de un operador compacto; representación espectral; caracterización de los operadores compactos. Teorema de la alternativa de Fredholm. Suma directa de una familia de espacios de hilbert.

11.- Operadores hermíticos acotados

Operadores positivos. Proyectores; caracterización y propiedades. Familias espectrales. Teorema de la representación espectral. Teorema de unicidad. Funciones continuas de un operador. Relaciones entre el espectro HH y la familia espectral.

Prof. Dr. Manuel Balanzat