

19M

Programa de Funciones Reales I
2º Cuatrimestre de 1969

- 1.- Espacios Métricos . Distancia , bola , conjunto acotado . Abierto y cerrado , interior y clausura, frontera. Funciones continuas , homeomorfismos, métricas equivalentes . Conjunto denso , espacio separable , base de abiertos Subespacio métrico .
- 2.- Completitud, compacidad , conexión. Sucesiones de Cauchy , espacio completo. Principio de encajes . Existencia y unicidad de la completación . Teorema del punto fijo de Banach . Espacio compacto , totalmente acotado , conjunto relativamente compacto . Equivalencias de compacto . Teorema de Borel-Lebesgue . Imagen continua de un compacto. Conexos , componente conexa . Imagen continua de un conexo . Teorema de Bolzano .
- 3.- Espacios normados. Teorema de Hahn-Banach. Espacio normado . Aplicaciones lineales continuas y acotadas , equivalencia . Espacio $B(X,Y)$, espacio dual. Hiperplanos , relación entre funcionales lineales continuas e hiperplanos cerrados . Extensión de funcionales lineales continuas , separación de puntos . Inyección de un espacio normado en su doble dual . Teorema de Riesz de caracterización de espacios normados de dimensión finita .
- 4.- Espacios de Hilbert. Producto escalar , desigualdad de Schwartz . Teorema de Jordan-von Neumann . Ortogonalidad . Conjuntos de Chebishev . Un convexo cerrado es de Chebishev. Isomorfismo entre un espacio de Hilbert y su dual . Conjuntos ortonormales , proceso de Gramm-Schmidt . Coeficientes de Fourier. Aproximación óptima . Desigualdad de Bessel, igualdad de Parseval . Teorema de Riesz-Fisher . Un espacio de Hilbert separable es isomorfo a l_2 . Dos espacios de Hilbert separables son isomorfos .
- 5.- Medida. Anillos , álgebras , σ -anillos y σ -álgebras de conjuntos . Funciones de conjunto , medidas . Descomposición de una función de conjunto como diferencia de dos medidas . Proceso de Caratheodory , Medida exterior . Conjuntos medibles . Medida de Lebesgue en \mathbb{R} , regularidad respecto a abiertos y compactos . Ejemplo de conjunto no medible . Medida de Lebesgue-Stieltjes. Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .
- 6.- Integración . Funciones medibles . Integral superior . Funciones integrables Propiedades elementales de la integral . Teorema de Beppo Levi . Teorema de Fatou . Teorema de convergencia dominada . Expresión de la medida plana a partir de las medidas lineales de las secciones . Principio de Cavalieri. Teorema de Fubini . Espacios L^p . L^p es un espacio normado . L^2 es un espacio de Hilbert . Serie de Fourier de f en L^2 . Convergencia c.t.p. , en medida y en norma .
- 7.- Derivación . Teorema del cubrimiento de Vitali . Una función monótona es suma de su función salto y una función monótona continua . Números derivados . Una función monótona es continua salvo un conjunto numerable y derivable c.t.p. Ejemplo de una función creciente y continua para cuya derivada no vale la regla de Barrow , Funciones de variación acotada . Una función de variación acotada es diferencia de dos funciones crecientes .

F.A.Toranzos .