'67 - 1/5

M
17

# FUNCIONES REALES II

Dr. M. Balanzat — 1º Cuatrimestre de 1967

I.- ESPACIOS METRICOS: Espacios métricos: definición y ejemplos; espacios normados; espacios ultramétricos. Espacios pseudométricos.

Conceptos topológicos en un espacio métrico. Aplicaciones continuas. Isometrías y homeomorfismos; distancias equivalentes; espacios métricos vectoriales no normables.

Límites. Sucesiones convergentes. Espacios completos. Teorema de completamiento. Teorema de Banach del punto fijo y aplicaciones al análisis.

Espacios de Baire y teoremas de categoría; teoremas de acotación uniforme; teorema de Banach-Steinhaus.

Espacios compactos; número de Lebesgue. Espacios localmente compactos. Teorema de Arzela-Ascoli. Espacios y conjuntos conexos. Prolongación de una aplicación continua definida en un subespacio denso. Teoremas de Tietze y de Uryhohn.

II.- ESPACIOS DE BANACH Y DE HILBERT: Propiedades de enlace de estructuras en un espacio normado. Completamiento de un espacio normado.

Espacios de convergencia uniforme. Espacios $l^p$ y $L^p$. Espacio $V[a,b]$. Subespacios, conjuntos totales. Espacios de dimensión finita. Teorema de Riesz.

Series en un espacio normado. Series absolutamente convergentes; propiedad conmutativa.

Espacios prehilbertianos; desigualdad de Schwartz; norma. Espacios de Hilbert; Completamiento de un espacio prehilbertiano. Espacios $l^2$ de dimensión transfinita dada. Espacios $L^2\{[a,b], p(x)\}$.

Ortogonalidad. Teorema de Pitágoras. Método de ortogonalización de Schmidt. Polinomios ortogonales: definición, ejemplos y propiedades.

III.- SERIES DE FOURIER: Serie de Fourier respecto a un sistema ortonormal. Desigualdad de Bessel-Parseval. Teorema de mejor aproximación. Bases ortonormales y sistemas completos; propiedades equivalentes.

Caracterización de espacios de Hilbert: de dimensión finita; de dimensión numerable; de dimensión arbitraria.

Series trigonométricas; serie de Fourier de una función en $L^1_{2\pi}$; completitidad del sistema trigonométrico. Propiedades de las series de Fourier en $L^2$. Teorema de Rieman-Lebesgue. Convergencia puntual de las series de Fourier. Sumación de series de Fourier.

IV.- ESPACIOS DE APLICACIONES LINEALES: Aplicaciones lineales y continuas entre dos espacios normados. Espacio $\mathcal{L}^c(X,Y)$; es un Banach cuando lo es Y. Teorema de la aplicación inversa de Banach.

Espacios suplementarios topológicos; suplementarios ortogonales en un espacio prehilbertiano.

Formas lineales e hiperplanos en un espacio normado. Espacio dual de un espacio de Hilbert. Espacio bidual y espacio reflexivo; ejemplos. Teorema de Hahn-Banach.

V.- CALCULO DIFERENCIAL EN ESPACIOS NORMADOS: Diferencial en un punto; aplicaciones tangentes; ejemplos. Diferencial de un producto y de una aplicación compuesta. Condiciones de máximo o mínimo.

Teorema de los incrementos finitos. Sucesiones de funciones diferenciables. Diferencial en espacios productos; diferenciales parciales.

Problema de las funciones inversas y de las funciones implícitas. Teorema de existencia de la función implícita. Teorema de diferenciabilidad de la función implícita. Teorema de las funciones inversas. Casos particulares de los problemas anteriores.

Formas diferenciales de grado uno en un espacio de Banach; diferenciales exactas. Integrales curvilíneas en espacios de Banach. Relaciones entre las aplicaciones diferenciables y las integrales curvilíneas. Cambio de variable en una integral curvilínea; reducción de integrales curvilíneas a integrales sobre R. Formas diferenciales que son diferenciables; problema de las diferenciales exactas.

Aplicaciones del cálculo diferencial en espacios de Banach al cálculo de variaciones.