'67- 2/9 M: 16

FUNCIONES REALES I (Dr.Fausto Toranzos)
(2º cuatrim. 1967)

PROGRAMA

1) Espacios métricos. Abiertos, cerrados. Clausura, interior y frontera. Funciones continuas, homeomorfismos, isometrías y congruencias. Métricas equivalentes. Espacios separables.

2) Espacios completos. Principio de encajes. Teorema de Cantor-Hausdorff. Teorema de punto fijo de Banach. Conjuntos compactos, equivalencias. Teorema de Borel-Lebesgue. Imagen continua de un compacto. Conjuntos conexos. Componentes conexas. Teorema de Bolzano.

3) Espacios normados, espacios de Banach. Operadores lineales acotados. Equivalencia de acotación y continuidad. Espacio B(X,Y). Dual de un espacio normado. Conjuntos convexos. Hiperplanos. Relación entre hiperplanos cerrados y funcionales lineales continuas. Teorema de Hahn-Banach. Espacios normados localmente compactos, teorema de Riesz.

4) Medida. Conjuntos elementales en $\mathbb{R}^n$. Medida interior y exterior, conjuntos medibles. Regularidad de la medida. Conjuntos no medibles. Medidas en semianillos. Extensión de Lebesgue. Sigma-álgebra de los conjuntos medibles. Funciones medibles. Propiedades importantes. Varios tipos de convergencia. Teorema de Egorov. Teorema de Luzin.

5) Integración de Lebesgue. Funciones simples. Integral de una función medible. Propiedades. Pasc al límite bajo el signo de integral. Teorema de Lebesgue de la sucesión mayorada. Teorema de Beppo Levi. Teorema de Fatou. Medida producto. Teorema de Fubini.

6) Funciones monótonas. Continuidad y derivación de funciones monótonas. ~~[illegible]~~ Función salto. Números derivados. Funciones de variación acotada. Una función es de variación acotada si y sólo si es diferencia de dos crecientes. Una función de v. a. es continua salvo en un conjunto numerable y es derivable en casi todo punto.

7) Espacios de Hilbert. Producto escalar. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Espacio L^2, su completitud. Condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea de Hilbert. Un convexo cerrado en H es de Chebishev. Complemento ortogonal. Si M es un subespacio cerrado $H = M \oplus M^{\perp}$. Proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt. Teorema de Riesz-Fisher. Isomorfismo de L^2 y l^2.