

Kat. 7

ANALISIS III (Para Matemáticas)

2º cuatrim. 1967

Dr. César Trejo

1. Números complejos. Operaciones fundamentales. Raíces. Caracterización de \mathbb{R} como cuerpo ordenado completo. Caracterización de \mathbb{C} . Conjugación. Valor absoluto; propiedades: desigualdades triangular y de Cauchy. Representación geométrica. Suma y multiplicación; raíces, fórmula de De Moivre. Representación esférica, distancia cordal.-
2. Funciones analíticas. Funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Límites y continuidad. Derivada. Analiticidad. Condiciones de Cauchy-Riemann. Relación con las funciones armónicas. Polinomios; ceros; teorema de Lucas. Funciones racionales en el plano extendido. Ceros y polos. Orden de una función racional; casos de la transformación lineal. Parte singular en infinito; descomposición en fracciones simples.
3. Teoría elemental de las series de potencias. Sucesiones de números reales y complejos; límites y límites de oscilación. Series; convergencia, convergencia absoluta y uniforme; criterios. Series de potencias, círculo de convergencia, fórmula de Hadamard. Serie derivada; analiticidad y desarrollo de Taylor.
4. Funciones exponencial y trigonométricas. Función exponencial; teorema de adición y consecuencias. Funciones trigonométricas; periodicidad; el número e .
5. Cuestiones topológicas. Operaciones con conjuntos. Espacios métricos, conceptos topológicos fundamentales. Conexión, conexos de \mathbb{R} y conexos abiertos del plano. Componentes conexos. Espacios métricos completos. Compacidad, relación con la acotación total. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Funciones continuas; imágenes de compactos y de conexos. Homeomorfismos. Continuidad uniforme. Espacios topológicos en general.-
6. Transformaciones conformes: Arcos; propiedades; curvas cerradas. Analiticidad en una región. Ejemplos. Aplicaciones conformes.-
7. Transformaciones lineales. Grupos $P(1, \mathbb{C})$ y $SL(2, \mathbb{C})$; notación matricial; casos especiales. Propiedades de la razón doble; conservación de los círculos.-
8. La integral de Riemann-Stieltjes. Condiciones de integrabilidad; casos especiales.-
9. La integración en el campo complejo. La integral sobre arcos rectificables y sobre arcos diferenciables. La invariancia respecto de cambios de parámetro. Otras propiedades. Integración respecto de la longitud de arco. Integrales de diferenciales exactas; aplicación a la derivada de una función analítica.-
10. Teorema de Cauchy. Caso de un rectángulo, demostración de Goursat. Primeras generalizaciones.-

//

//

-2-

11. Fórmula integral de Cauchy. Índice de un punto respecto de una curva cerrada; propiedades. Fórmula de Cauchy. Expresión de las derivadas. Funciones representadas por integrales. Teorema de Morera, de de Liouville y fundamental del álgebra.-
12. Propiedades legales. Singularidades evitables. Teorema de Taylor; expresión integral del término complementario. Acotaciones. Ceros. Singularidades evitables, polos, funciones meromorfas. Singularidades esenciales. Teorema de Cassoratti-Weierstrass.-
Estudio de la aplicación local; conservación de abiertos; carácter topológico. El principio de módulo máximo.-
13. Teorema de Cauchy en regiones simplemente conexas. Ciclos y cadenas, operaciones. Conexión simple, caracterización mediante el número índice. Diferenciales exactas en regiones simplemente conexas. Teorema de Cauchy.-
14. Forma general del teorema de Cauchy. Homología mediante el número índice. Integrales de diferenciales localmente exactas. Forma general del teorema de Cauchy. Regiones múltiplemente conexas. Base de homología; módulos de periodicidad de una diferencial.-
15. Residuos. Residuo en una singularidad aislada. Teorema de los residuos. El residuo de la derivada logarítmica. Teorema de Rouché. Cálculo de integrales definidas mediante residuos.-
16. Funciones armónicas. Propiedades fundamentales. La diferencial conjugada. Teorema del valor medio y principio de máximo para funciones armónicas.-
17. Desarrollos en serie. Teorema de Weierstrass sobre sucesiones de funciones analíticas. Series de funciones analíticas. Teorema de Hurwitz.-
18. Desarrollos en series de potencias. Serie de Taylor. Funciones elementales. Operaciones primeros coeficientes. Desarrollo de Laurent.-
19. Desarrollo en serie de fracciones simples. Teorema de Mittag-Leffler. Aplicación a $2/\operatorname{sen}^2 s$ y a $\operatorname{cotg} z$.-
20. Productos infinitos. Convergencia; serie asociada. Convergencia absoluta y uniforme de productos infinitos. Expresión de una función entera, con ceros dados. Teorema de Weierstrass; factores de convergencia. Expresión de una función meromorfa. Producto canónico; género. Género de una función entera. Desarrollo de $\operatorname{sen} s$.-