Mat. 11

PROGRAMA FUNCIONES REALES I - 2° CUATRIMESTRE 1966

1. Números reales. Definición a partir de los números racionales. Propiedades algebraicas y de orden. Completitud.
2. Conjuntos. Unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica. Anillos, anillos con unidad, álgebras, sigma y delta-anillos, álgebras borelianas. Anillo, sigma-anillo, delta-anillo, ... etc. generado por una familia de conjuntos. Semianillos; anillo generado por un semianillo.
3. Funciones. Funciones biunívocas, sobre. Potencia de conjuntos. Propiedades. Números cardinales, relación de orden entre ellos. El conjunto de todos los números cardinales es totalmente ordenado. Conjuntos numerables y no numerables, ejemplos. Operaciones con números cardinales.
4. Orden. Conjuntos ordenados, orden total, parcial, buen orden. Ejemplos. Postulado de buena ordenación, lema de Zorn, axioma de elección. Equivalencias; demostración de que principio de buena ordenación y el Lema de Zorn implican el axioma de elección.
5. Topología del espacio euclídeo E^n. Distancia. Abiertos, cerrados, clausura. Teorema de Lindelöf; todo cubrimiento por abiertos de un conjunto cualquiera tiene un subcubrimiento numerable. Compacidad: definición por sucesiones y cubrimientos. Equivalencia de ambas definiciones y caracterización de conjuntos compactos en E^n. Completitud de E^n. Nociones de espacios métricos; abiertos cerrados, completitud, compacidad. Funciones continuas en compactos; acotación demostración de que alcanzan su máximo y mínimo.
6. Medida de Lebesgue en E^n. Medida en rectángulos, en uniones finitas de rectángulos. Medida exterior, propiedades. Conjuntos medibles, extensión de la medida. Los conjuntos medibles Lebesgue forman una sigma-álgebra S y la medida de Lebesgue es sigma-aditiva sobre ella. Conjuntos borelianos: los conjuntos borelianos forman una sigma-álgebra contenida en S. Todo conjunto medible Lebesgue puede escribirse $e = f \cup d$, f boreliano, $d \in S$ y de medida nula. Ejemplo de conjunto no medible Lebesgue.
7. Medidas en general. Medidas en semianillos, medidas aditivas y sigma-aditivas. Ejemplo de medida aditiva pero no sigma-aditiva. Extensión de Jordan de una medida aditiva. Los conjuntos medibles Jordan forman un anillo (pero no en general un sigma-anillo, ejemplos) y la medida extendida es aditiva en él. Extensión de Lebesgue de una medida sigma-aditiva, conjuntos medibles. Espacios de medida. Medidas en la recta; su relación con funciones crecientes.
8. Funciones medibles. Definición y propiedades elementales. Sucesiones de funciones medibles; convergencia en casi todo punto, convergencia en medida. Relaciones entre los dos tipos de convergencia. Convergencia uniforme; teorema de Egoroff. Funciones simples; aproximación de funciones medibles por simples. Funciones medibles en E^n. Aproximación de funciones medibles en un cubo Q E^n por funciones continuas; una función def. en Q es medible si y sólo si es aproximable en casi todo punto por una sucesión de funciones continuas.
9. Integral de Lebesgue en un espacio de medida (X, S, μ), (X) . La integral para funciones simples. Funciones integrables, definición de la integral. Propiedades elementales. Desigualdad de Chebichev. Paso al límite bajo el signo de integral. Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue, teorema de Beppo Levi, teorema de Fatou. Relación entre integral de Lebesgue e integral de Riemann en un cubo Q E^n.

///

///

10. Producto cartesiano de dos espacios de medida (X_1, S_1, μ_1), (X_2, S_2, μ_2). Producto de semianillos: si G_1, G_2 son semianillos entonces $G_1 \times G_2$ es un semianillo. Medida producto $\mu_1 \times \mu_2$; definición en el semianillo producto. Si ~~esxxtambiénxsigmaxaditiva~~ μ_1 y μ_2 son sigma-aditivas entonces $\mu_1 \times \mu_2$ es también sigma-aditiva. Extensión de . Producto de n espacios de medida. Teorema de las secciones; si A es un conjunto medible en $X_1 \times X_2$ (A) puede calcularse "por integrales parciales". Interpretación geométrica de la integral de Lebesgue como "área bajo una curva". Aplicación: Teorema de Fubini.

Dr.H.O.Fattorini.