

PROGRAMA DE FUNCIONES REALES I  
2º cuatrimestre 1965

Dr. Mischa Cotlar

- I. Conjuntos y Funciones características.
- a) Algebra de conjuntos: Definiciones. Identidades fundamentales. Operaciones Propiedades de la diferencia simétrica. Reducción a sumandos disjuntos.
  - b) Funciones características: Funciones. Operaciones con funciones características. Límites de funciones y conjuntos.
  - c) Conjuntos equivalentes. Numerabilidad: Indices. Sucesión. Subsucesión. Axioma de elección. Potencia. Conjuntos numerables. Potencia del continuo.
  - d) Aplicaciones de conjuntos. Comparación de potencias: Aplicaciones entre conjuntos. Composición de aplicaciones. Imagen inversa. Relaciones. Comparación de potencias: Teorema de Cantor Bernstein. Corolario. Teorema de Cantor.
- II. Número real.
- a) Concepto de continuidad según Dedekind: Introducción. Conjuntos abstractos. Conjuntos ordenados. Densidad máxima. Contradictorias. Continuidad y completitud: teorema.
  - b) Números reales. Límites y extremos: Definición de número real. Teorema de continuidad de Dedekind. Números impropios. Límites. Series. Caracterización de los extremos. Límites de oscilación.
  - c) Principio de encaje: Clases contiguas. Principio de encaje de Cantor. Aproximación por decimales. Convergencia de conjuntos. Diámetro de un conjunto. Principio de encaje para conjuntos cualesquiera. Teorema de Cauchy-Bolzano. Aplicación a series. La completación de Cantor.
- III. Espacios Métricos y Euclídeos.
- a) Ejemplos de espacios métricos: Definición de métrica discreta. Métricas equivalentes. Métrica euclídea. Métrica uniforme. Espacio  $C([a, b])$  de las funciones continuas con la métrica del sup. Semimétricas. Convergencia. Espacio de funciones reales y acotadas con métrica del sup.
  - b) Espacios métricos completos. Definición y ejemplos. Sucesiones fundamentales. Principio de encaje y completitud. Sucesiones equivalentes. Conjuntos densos. Definición de isometría. Completación. Teorema de Cantor-Hausdorff. Teorema de Baire. Definición de categoría. Principio del punto fijo.
  - c) Topología de espacios métricos. Puntos interiores y adherentes. Clausura, interior. Abiertos, cerrados. Propiedades básicas. Punto de acumulación. Derivado de un conjunto. Propiedades. Punto aislado. Fronteras. Conjunto denso en sí. C. perfecto.
- IV. Compactos.
- Conjuntos a intersección finita. Conjuntos totalmente acotados. Teorema de Riesz-Hausdorff. Corolarios. Principio de Cantor. Teorema de Borel. Lebesgue Definición de conjunto compacto. Propiedad de Bolzano-Weierstrass. Condiciones de compacidad: Teoremas. Definición de conjunto condicionalmente compacto. Aplicaciones de Heine Borel-Cantor. Sucesiones y conjuntos en  $E^n$ . Punto de aglomeración. Aplicación a  $E^1$ .

///

V. Conexión y Separabilidad:

- a) Definición de conjunto conexo. Teoremas. Abiertos en  $E^1$ . Acotados y cerrados en  $E^1$ . Ternario de Cantor: definición, es perfecto y nunca denso; tiene la potencia del continuo. Condición para que un conjunto cerrado y acotado sea perfecto. Cerrados en  $E^n$ .
- b) Condiciones de numerabilidad. Definición de espacio separable. Propiedad de Lindelöf. Puntos de condensación. Corolario de Weierstrass. Teorema de Cantor-Bendixon.

VI. Propiedades de funciones continuas. Definición de función continua en un punto. Definición de aplicación continua. Funciones continuas definidas sobre conjuntos abiertos y cerrados. Funciones continuas definidas en compactos. Teorema de Weierstrass. Teorema de Dini. Teorema de Ascoli-Arzelá. Teorema de Stone-Weierstrass. Primer teorema de Helly.

VII. Medida.

Nociones de semianillo, anillo, G-anillo, álgebra, G-álgebra, anillo y T-anillo generados.

Teoría de la medida exterior. Distancia asociada a cada medida exterior. Conjunto completo respecto de una medida exterior. ~~Conjunto completo respecto de una medida~~ T-anillo condicional respecto de medida exterior.

Lema: Sea  $\mathcal{C} = \{ A \} \subset \mu$  y sea  $\bar{\mathcal{C}}$  su clausura en  $\mu \Rightarrow$  a)  $\bar{\mathcal{C}}$  completo respecto de  $\mu$ . b) Si  $\mathcal{C}$  es un anillo  $\Rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  es también anillo y más aún un T-anillo condicional respecto de  $\mu$ . c) Si  $\mathcal{C}$  es T-anillo, lo es también  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Definición de  $\mu$  aditiva, T-aditiva, Propiedad.

Medidas elementales. Medida exterior asociada a una medida elemental. Condiciones para que una medida elemental sea continua.

Definición de medida. Propiedades: teorema.

Teorema fundamental de extensión. Medida generada por la medida elemental continua.

Definición de conjunto despreciable. Definiciones de conjuntos medibles.

Medida exterior de Lebesgue. Conjuntos medibles de Lebesgue y de Borel. Teoremas sobre conjuntos medibles Lebesgue. Condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea medible Lebesgue. Todo conjunto B de Borel es medible Lebesgue. Condición necesaria y suficiente para que N sea despreciable. Ejemplo de Vitali de conjunto no medible Lebesgue.

VIII. Funciones Medibles.

Definición. Operaciones aritméticas y de paso al límite sobre funciones medibles. Lema fundamental de función medible  $f \geq 0$ . Funciones elementales y simples. Propiedades básicas. Definiciones de función medible Borel, de funciones equivalentes. Teorema sobre función medible Lebesgue. Definición de función medible Baire. Teorema de Egoroff.

IX. Integral. a) Definición de la integral de Lebesgue:

Suma de Darboux-Lebesgue de  $f \geq 0$ . Definición de integral de una  $f \geq 0$ . Caso de funciones elementales. Diferentes definiciones de integral. Lema de sucesiones monótonas. Sumas de Lebesgue. Desigualdad de Thebichev.

b) Propiedades de la integral de Lebesgue: Teorema de Beppo-Levi. 1er. teorema de aproximación. Si  $f(x)$  es integrable sobre A  $\Rightarrow f(x)$  es finita en casi todos los puntos de A. Linealidad de la integral. Teorema de la absoluta integrabilidad y mayoración. Teorema del valor medio. Teorema de la absoluta continuidad de la integral indefinida.

///...

c) Teoremas sobre paso al límite bajo el signo de integral.

Teorema de Beppo-Levi. para series. Teorema de Fatou. Teorema de la T-aditividad  
Teorema de Lebesgue de integración de sucesiones mayoradas. Teorema de Weiers-  
trass. Medida de Dirac. Integral de función continua respecto a la medida de  
Dirac. Medida correspondiente a una función de distribución en la  
recta y medida de Stieltjes.