

PROGRAMA DE FUNCIONES REALES I

1º cuatrimestre 1964  
Dr. Collar  
Mat. 14



- 1.- Propiedades de continuidad del número real. Definición y propiedades de límite de sucesiones y series. Caracterización del límite superior e inferior y del límite superior e inferior.
- 2.- Principio de encaje, clases contiguas, lema de Heine-Borel. Teorema de Cauchy-Bolzano. Definición de  $\mathbb{R}^n$  y distancia en  $\mathbb{R}^n$  (desigualdad de Cauchy), extensión de los teoremas de Heine-Borel y Cauchy-Bolzano a  $\mathbb{R}^n$ .
- 3.- Nociones topológicas de la recta y  $\mathbb{R}^n$ : clausura, interior, frontera, propiedades. Abiertos y cerrados., propiedades. Derivado de un conjunto. Puntos aislados. Conjuntos perfectos.
- 4.- Teorema de Borel-Lebesgue, compacidad, forma de Riesz, teorema de Cantor. Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos y sucesiones. Punto límite. Teorema de Baire. Propiedad de separabilidad, todo abierto es suma de intervalos, propiedad de Lindeloff. El ternario de Cantor, sus propiedades.
- Operaciones con conjuntos, relación con las operaciones con funciones características. Potencia de conjuntos. Nociones (conceptos) de conjuntos bien ordenados, lema de Zorn y teorema de Zermelo, inducción transfinita, definición por inducción transfinita, noción de número cardinal y ordinal y los alephs. Propiedades de conjuntos numerables, potencia del continuo, de intervalos en  $\mathbb{R}^n$ . Potencia del conjunto de Cantor.
- 6.- Medida exterior de Lebesgue, propiedad  $\sigma$ -subaditiva. Noción de anillo, álgebra,  $\sigma$ -anillo y propiedades. Definición y propiedades de conjuntos medibles y de la medida de Lebesgue, teorema de aproximación. Conjuntos Borel, clases Borel-Hausdorff-Young. Conjuntos despreciables, todo medible es igual a un boreliano + un despreciable, despreciable = subconjunto de despreciable Borel. Medible =  $G_\delta - N$ . B es medible si y sólo si existe un abierto G que contiene a B (cerrado F contenido en B) con  $\mu(G-B) < \epsilon$  .,  $\mu(B-F) < \epsilon$  . Cápsula exterior medible. Propiedad de Caratheodory. Medida de Stieltjes, función de distribución, medidas puramente discontinuas.
- 7.- Límite funcional, límite superior, inferior,  $f(x+0)$ ,  $f(x-0)$ , diversas definiciones equivalentes de continuidad. Discontinuidad de funciones monótonas., funciones discontinuas (nociones).  
Funciones medibles Lebesgue y Borel. Funciones simples y elementales, toda función medible es límite de elementales, caso de funciones positivas y acotadas. Función Borel y Baire, relación con los medibles Lebesgue. Teorema de Egorov.
- 8.- Integral de funciones elementales. Integral de funciones medibles positivas, definición de integral para funciones de signo cualquiera. Integral sobre un conjunto. Propiedades básicas: linealidad, absoluta integrabilidad, f es integrable si y sólo si  $|f| \leq |g|$ , g-integrable, teorema del valor medio, propiedad aditiva, definición por sumas de Darboux y Lebesgue, teorema de aproximación, teorema de absoluta continuidad de la integral indefinida. Aditividad completa, teoremas de Beppo-Levi, Fatou, Lebesgue, caso de dominio de medida finita (criterios de Weierstrass y Vitali). Teorema de Jordan y teorema de Radón-Nikodín. Teorema de Fubini.
- 9.- Nociones de espacios métricos, completación, relación entre conjuntos compactos y totalmente acotados. Funciones definidas en espacios o conjuntos compactos. Acotación y continuidad uniforme, teorema de Stone-Weierstrass. Teorema de Arzela-Azcoli.