

M (2)

PROGRAMA
FUNCIONES REALES I

1^a Cuatrimestre 1962
Dr. Rafael Panzone

- 1- Nociones sobre teoría de conjunto. Unión y intersección, diferencia, complementación, diferencia simétrica, inclusión. Relaciones entre estas operaciones. Expresión de las mismas por medio de funciones características. Límites, Límite superior e inferior de una sucesión de conjuntos. Anillos, sigma anillos, álgebras y sigma álgebras de conjunto. Clases monótonas. Clases monótonas generadas por anillos.
- 2- Definición de los números reales a partir de los racionales. Cortaduras en conjuntos ordenados, saltos y lagunas. Completitud de los números reales. Supremos e ínfimos. Límite superior e inferior. Límites. Teorema de Cauchy-Bolzano. Clases contiguas. Encaje de intervalos. Teorema de Cantor. Definición de Weierstrass de los números reales.
- 3- Conjuntos infinitos. Conjuntos numerables. Propiedades. Números cardinales. Operaciones con los mismos. Teorema de Bernstein. Potencia del continuo.
- 4- Topología de la recta y de los espacios n-dimensionales. Interior de un conjunto. Punto de adherencia. Clausura. Conjuntos abiertos y cerrados. Bases y sub-bases de abiertos. Entornos. Bases de entornos. Topología relativa. Conjunto derivado. Conjuntos perfectos. Conjuntos densos y nunca densos. Conjuntos de primera y segunda categoría. Teorema de Baire. Conjunto de Cantor.
- 5- Espacios métricos. Distancia. Completación de espacios métricos. Conjuntos compacto y relativamente compactos. Epsilon redes. Teoremas de Bolzano-Weierstrass, Borel-Lebesgue y F. Riesz. Teorema de Cantor sobre sucesiones decrecientes de cerrados. Relaciones entre estos teoremas.
- 6- Funciones. Imágenes y contraimágenes de conjunto. Teorema sobre uniones, intersecciones, diferencias e inclusiones de imágenes y contra-imágenes. Funciones continuas. Funciones continuas de dominio compacto. Existencia de máximo y mínimo. Compacidad de la imagen de un conjunto compacto. Continuidad uniforme. Equicontinuidad. Espacio de funciones continuas. Teorema de Ascoli-Arzelá. Álgebras y reticulados de funciones. Teorema de Stone-Weierstrass.
- 7- Medidas sigma finitas sobre un anillo o semi anillo. Medida exterior. Conjuntos medibles, propiedades. Medidas de Radon (sigma finitas). Sucesiones de conjuntos medibles. Funciones medibles, propiedades, sucesiones de funciones medibles. Teorema de Egoroff. Convergencia puntual casi uniforme y en medida. Relaciones entre ellas. Compacidad en medida de las funciones medibles. Existencia de conjuntos no medibles.
- 8- Completación de medidas sigma finitas. Teorema de aproximación. Teorema de extensión de medidas. Medidas con signo. Descomposición de Hahn y Jordan. Producto cartesiano. Producto cartesiano en espacios medibles. Medida producto. Secciones de conjuntos y funciones medibles.
- 9- Funciones simples. Funciones integrables, propiedades fundamentales. Propiedades de la integral. Diversas definiciones equivalentes de función integral. Pasaje al límite bajo el signo integral: Teoremas de Beppo Levi, Lebesgue y Fatou. Continuidad absoluta de la integral. Caracterización de las sucesiones fundamentales en L^1 (Vitali). Teorema de Fubini-Tonelli. Teorema de la descomposición de Lebesgue.
- 10- Cubrimientos de Vitali. Teorema de Vitali. Funciones monótonas, descompo-

sición en función salto y función monótona continua. Derivabilidad pp de funciones monótonas. Funciones de variación acotada; propiedades. Integral de Stieltjes y Hadamard. Primer y segundo teorema de Weierstrass.

11- Espacios L^p . Desigualdades de Hölder y Minkowsky. Completitud de los espacios L^p . Espacio L^2 . Sistemas ortonormales. Teorema de Riesz-Fischer. Espacios l^p .

Dr. Rafael Panzone