1959

M - ②

PROGRAMA DE FUNCIONES REALES I

Profesor Ingeniero Doctor Juan Blaquier

(Curso dictado en el primer cuatrimestre de 1958)

I. NUMEROS, VARIABLES Y FUNCIONES.

El concepto de número natural y sus sucesivas ampliaciones. Números enteros, racionales y reales. Distintos modos de definir los números reales (Dedekind, Bertrand Russell, Capelli, Arzela). Isomorfismos aritméticos. Cotas y extremos de conjuntos numéricos. Variables reales. Funciones reales. Los números + ∞ y - ∞

II. CONCEPTO DE POTENCIA DE UN CONJUNTO INFINITO:

Conjuntos numerables. Potencia del continuo. Números algebraicos y trascendentes. El conjunto de todas las funciones reales no es numerable ni tiene la potencia del continuo. Igualdad, desigualdad y no comparabilidad de los números cardinales trasfinitos. La no acotabilidad de estos números. El axioma de Zermelo. Teorema de Cantor-Bernstein. Potencia del conjunto de todas las funciones continúas de variable real. Operaciones con números cardinales finitos o trasfinitos. Concepto de orden. Conjuntos ordenados. Tipos ordinales trasfinitos. Conjuntos bien ordenados. Principio de inducción trasfinita. Números ordinales trasfinitos.

III. ESPACIOS MÉTRICOS.

Definición. Nociones topológicas. El espacio enedimensional - euclidiano es métrico en el sentido de Fréchet. Diámetros. Acotación de conjuntos de puntos. Conjuntos compactos y compactos en sí. Ejemplo de conjuntos acotados del espacio euclidiano. Teorema de Balzano. Puntos de condensación. Teorema de Lindelöf. Teorema de Borel-Lebesgue (o Heine) para conjuntos métricos compactos en sí.

IV. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES EN LOS ESPACIOS MÉTRICOS.

Definición y propiedades. Teorema del máximo y mínimo absoluto. Funciones semicontinuas. Sus propiedades fundamentales. Teorema de Weierstrass para las funciones semicontinuas en espacios métricos compactos en sí. Continuidad uniforme. Rectificación de arcos regulares. Funciones de variación acotada. Arcos rectificables. Teoremas de Jorda.

///.

V. CONJUNTOS COMPLETOS.

Definiciones. Conjuntos completos respecto de otro. Sumas y productos de conjuntos completos en un mismo conjunto. Condición necesaria y suficiente para la semicontinuidad superior o inferior de una función. Conjunto de puntos de nivel y en particular ceros de una función continua.

VI. CONEXIÓN.

Conjuntos conexos. Ejemplos. Teorema de Bolzano-Weierstrass relativo a las funciones continuas definidas en conjuntos conexos. Condición necesaria y suficiente para la conexión de los conjuntos abiertos de En. Funciones monótonas en un intervalo, su continuidad.

VII. LIMITES DE OSCILACION.

Teorema generalizado de Weierstrass para funciones reales cualesquiera definidas en conjuntos compactos. Teorema de Cauchyhadamard Números derivados de Dini.

VIII. MEDIDA DE CONJUNTOS.

El concepto de extensión de Jordan-Peano. Conjuntos medibles en sentido Jordan-Peano. Integrales superior e inferior de Darboux. Integral (simple o múltiple) en sentido de Riemann. Teorema de Darboux. Integral de Riemann. Condiciones de integrabilidad. Desigualdad de Schwarz. Sumación parcial. Idea de la integral de Stieltjes.

IX. MEDIDA DE BOREL-LEBESGUE.

Medida de conjuntos de intervalos. Recubrimientos. Estructura de conjuntos abiertos. Conjuntos completos. Conjuntos medibles. Aditividad completa. Conjuntos medibles. (B). Funciones de Baire. Función característica de un conjunto.

X. FUNCIONES MEDIBLES.

Funciones medibles (B) o (L). Ejemplos. La integral de Lebesgue.

BIBLIOGRAFÍA

The Theory of Functions of Real Variable. por E.W.Hobson, ed. Warren Press, Wáshington, 1950.

Cuestioni Riguardanti le Matematiche Elementari, recogidas por

./././F. Enríquez, ed. Zanichelli, Bologna 1928.

Introducción a la Matemática Superior, por A. Sagastume Berra, ed. C. Físicomatemática. La Plata 1946.

Nombres Transfinis por W. Sierpinski, ed. Gauthier-Villars. Paris 1950.

Theory of Real Functions por J. E. Littlewood, ed. Dover, New York, 1954.

Integrales de Lebesgue por C. de la Vallé Poussin, ed. Gauthier-Villars, Paris 1934 (y la la. ed. de 1916).

Reelle Funktionen por H. Hahn, ed. Akademische Verlagsgeschellscheft Leipzig, 1932.

Abstract Set Theory por A. A. Freenkel, ed. North-Holland Publishing Company, Amsterdan 1953.

Mathematical Methods of Statistics, por H. Cramer, ed. Princeton University Press, 1946.

Theory of Functions of a Real Variable, por I. P. Natanson. (Traducido del ruso por L. F. Boron, con la colaboración y anotaciones de Hewitt. Edit. F. Ungar Publishing Co. New York, 1955.

Volume and Integral, por Werner W. Rogosinski. Ed. Oliver and Boyd 1952.