Dr. Gregorio Klimovsky.   1958
17-9-11-

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA "FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA" CORRESPONDIENTE AL AÑO LECTIVO DE 1958. CUARTO AÑO DE LA CARRERA DE DOCTORADO EN MATEMATICAS.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

oooooOoooo

I: EL PROBLEMA DE LA FUNDAMENTACION DE LA GEOMETRIA.

El problema de la fundamentación de la ciencia. Las dos cuestiones fundamentales de la espistemología. Importancia de la Geometría como ejemplo de ciencia rigurosa. La geometría empírica de los egipcios y de los babilónicos. El concepto aristotélico de ciencia. Enunciados. Verdad. Deducción. Conceptos (términos) primitivos. Definiciones. Axiomas o principios. Teoremas. Caracterización de la lógica y de la metodología aristotélica. La geometría de Euclides como ejemplo de la idea aristotélica de ciencia. Definiciones (primitivas), "axiomas" y "postulados" en Euclides. Algunos defectos en la obra euclídea. Significado de los "Fundamentos de la geometría", de Hilbert. El método axiomático, entendido materialmente. El problema de justificar los principios. La opinión de Kant.

II: EL METODO AXIOMATICO (FORMAL) EN GEOMETRIA.

El postulado V de Euclides. Su papel en la historia de la geometría. Aparición de la geometría no euclídea. La obra de Gauss, Lobatcheffsky y Bolyai. La no-contradicción de la geometría no-euclídea. Traducciones del lenguaje no-euclídeo a lenguaje euclídeo: el modelo de Klein. Distinción entre sistema axiomático y modelo (buena interpretación del sistema). Cómo se edifica un sistema axiomático. Cómo se interpreta un sistema formal. Como se formaliza una estructura. Variedad de interpretaciónes, variedad de formalizaciones. El papel de la lógica en los modelos: convenciones ensambladas. El concepto de ciencia, visto sintácticamente. El concepto de ciencia visto semánticamente. El problema de la fundamentación de la matemática formal

/////

o axiomática se reduce a un problema de lógica.

III: PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS AXIOMATICOS.

Uso de la noción de conjunto en la lógica subyacente usada en los sistemas axiomáticos usuales. Idem de la noción de par ordenado. Uso de las nociones derivadas de la teoría de conjuntos : relaciones, operaciones, funciones, etc. Ejemplos de sistemas axiomáticos no geométricos. El sistema formal de la teoría de los grupos. Sus modelos. Idea de álgebra abstracta. Propiedades sintácticas de los sistemas axiomáticos: consistencia, saturación, categoricidad, suficiencia. Propiedades semánticas: integridad, completitud. Cómo son los teoremas en un modelo. El problema de la consistencia de la geometría no-euclídea; su reducción al de la consistencia de la euclídea. El método de probar consistencia por medio de modelos; su alcance, El problema de fundamentar la consistencia de la geometría euclídea. El espacio físico, es un modelo para la geometría euclídea?.

IV: LA LLAMADA ARITMETIZACION DE LA MATEMATICA.

La geometría analítica como modelo de la geometría euclídea. El problema fundamentar el número real. La llamada "aritmetiza" ción" de la matemática : reducción del problema de la consistencia de la geometría y de la fundamentación de la aritmética general (número real) a tres nociones primitivas : número natural" , "par ordenado" y "conjunto". Definiciones por abstracción en sentido antigüo. Relaciones y clases de equivalencias Operaciones y relaciones compatibles con una relación de equivalencia. Cocientes por una relación de equivalencia. Fundamentación

/////

/////

del número entero a partir del natural. Fundamentación del número racional a partir del entero. Fundamentación del número real a partir del racional, por el método de las cordaduras de Dedekind.

V: LA FUNDAMENTACION DEL NUMERO NATURAL.

La tesis de Kronecker sobre los números naturales. La posición de los intuicionistas (Poincaré) y de los neo-intuicionistas.La posición axiomática de Peano (su analogía con el método euclídeo).El sistema de Peano.Conceptos primitivos.Axiomas. Definiciones recursivas. Suma. Menor. Producto.Potenciación.Objeciones de Russell contra el método de Peano.Modelos no normales de los axiomas de Peano. El problema de encontrar el modelo normal. Su reducción a la teoría de conjuntos. La idea de correspondencia bionívoca. Números cardinales. Definición de "cero". Definición de "siguiente". Clases inductivas. Definición de "número natural". Demostración de que se cumplen los axiomas de Peano. Reducción del problema de la fundamentación de la matemática no formal (y de la consistencia de la matemática formal) a la teoría de conjuntos.

VI: LA TEORIA GENERAL DE CONJUNTOS.

Nociones lógicas elementales. Nociones primitivas: "conjunto" y "pertenencia". Axiomas (entendidos a la manera euclídea). La noción de "par ordenado" y su reducción a la noción de conjunto.Ejemplos generales de conjuntos. Modos de definición de conjuntos. Relaciones. Sucesiones. Definición por inducción de sucesiones. Definición de m-tuplas. Relaciones m-ádicas. Funciones. Operaciones. Funciones características. Correspondencia (biunívocas). Relaciones y operaciones entre conjuntos:Productos cartesianos.Clases de equivalencia.Definiciones por abstracción en sentido moderno.

/////

VII : NUMEROS CARDINALES

La noción de número cardinal. Sus posibles definiciones. Definición de Frege-Russell. Comparabilidad de los números cardinales. El teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein. El problema de la tricotomía. Números cardinales naturales, finitos e infinitos. Operaciones entre los números cardinales. Dificultades para definir operaciones generalizadas. Conjuntos numerables. Ejemplos. Subconjuntos numerables de los conjuntos infinitos. El número "aleph cero"; propiedades y operaciones. Números algebráicos. Familias disjuntas de segmentos lineales. Familia de segmentos a extremos racionales. Puntos de coordenadas racionales. Descomposición de conjuntos infinitos.

VIII: VARIEDAD DE NUMEROS CARDINALES

Es "alph cero" el único cardinal? El teorema "diagonal" de Cantor. El "cardinal" c" (el contínuo). Conjuntos de potencia del contínuo: segmentos, semirrectas, recta, cuadrados, plano, funciones contínuas, sucesiones de números reales. Sucesiones de números naturales. Sucesiones de ceros y unos. Funciones características sobre el conj. de los números naturales; la familia de los subconjuntos del conj. de los Nos. nat. Operaciones con "C". El número "F"; método de obtenerlo por un procedimiento análogo al diagonal de Cantor. Generalización: el teorema de Cantor sobre la potencia (número cardinal de la familia de partes. El número 2a, conocido a. Número cardinal de la unión de una familia numerable creciente de conjuntos cuyo cardinal también crece. Obtención de una infinidad no numerable de números cardinales.

/////

/////

IX : TIPOS DE ORDEN

Conjuntos totalmente ordenados. La noción de isomorfismo. Definiciones de "tipo de orden". Cortaduras de un conjunto totalmente ordenado. Conjuntos densos y contínuos. Conjunto denso en otro. Caracterización del tipo "w". Caracterización del tipo "W*" y de "w*6 w". Caracterización del tipo "eta". Teorema de Dedekind sobre la completación de un conjunto denso. Caracterización del tipo "lambda". Contínuos no isomorfos al "lambda". El problema de Suslin. Operaciones con los tipos de orden. Dificultades con las operaciones generalizadas.

X : BUENA ORDENACION Y NUMEROS ORDINALES

Conjuntos bien ordenados. Principios de inducción trasfinita. Funciones crecientes e isomorfismos. Segmentos. Números ordinales,. Las operaciones entre ordinales. La función "aleph "alfa". Números iniciales. Las funciones crecientes y contínuas, puntos fijos. El problema de la buena ordenación.

XI : EL AXIOMA DE ELECCION, SUS EQUIVALENTES Y APLICACIONES.

El principio de elección (o de multiplicación). El principio general de elección. El principio de buena ordenación. La tricotomía. Los tres teoremas de Zorn. Aplicación a las operaciones generalizadas. El teorema de Köning. Descomposiciones numerables de un conjunto de potencia del contínuo. Límites de sucesiones numerables de ordinales de la segunda clase de Cantor. Aplic. matemáticas.

/////

/////

XII : TEOREMA DE STONE-GODEL

Reticulados. Reticulados de Boole. Filtros y Ultrafiltros. Existencia de ultrafiltros. Isomorfismo de las Algebras de Boole con álgebras de conjuntos. Teorema de Gödel-Malcev. Teorema de completidad de Gödel. Relaciones entre estos teoremas. El teorema de Lowenheim-Skolem.

XIII : EL PROBLEMA DE FUNDAMENTAR LA TEORIA DE CONJUNTOS

El problema de la fundamentación lógica de la teoría de conjuntos. La tésis logística. Las antinomias conjuntistas. El problema de evitarlas. El método axiomático para la teoría de conjuntos. Inconvenientes. El problema de la consistencia. La paradoja de Skolem. La incompletidad de la aritmética: teorema de Gödel 1931. Estado actual de la fundamentación de la matemática.

Greogorio Klimovsky