M. 1958

M-8

FUNCIONES REALES II

1. Repaso de nociones fundamentales: a) Operaciones con conjuntos; b) potencia; c) Punto de acumulación; d) Conjuntos cerrados; e) funciones semicontinuas.

2. Estructura de abiertos; conjuntos G_δ; Conjuntox ternario de Canter. Conjuntos derivados.

3. Compacidad. Relaciones entre los teoremas de Canter, Berel Lebesgue y Riesz.

4. Nociones de aritmética transfinita: números ordinales, clases de Canter, nociones sobre el lema de Zern. Axioma de Zermelo y los alephs.

5. Medida en la recta. Medida exterior; conjuntos medibles, propiedades fundamentales de la medida; relación entre medibles Berel y Lebesgue; aproximación por conjuntos elementales; conjuntos nulos; clases Hausdorff Young. Lema de cubrimiento.

6. Funciones medibles. Propiedades básicas; aproximación por elementales; convergencia en medida; teoremas de Lebesgue, Egeroff, Lusin y Riesz.

7. Integral de Lebesgue. Propiedades básicas; teoremas de pase al límite de Levi, Fateu, Lebesgue, Vitali; Relación entre integral de Lebesgue y Riemann.

8. Integral de Stieltjes. Funciones a variación acotada; descomposición de Jordan y de Frechet; funciones de distribución; propiedades de la integral de Stieltjes. Integración por partes y valor medio.

9.-Integral de Lebesgue-Stieltjes. propiedades fundamentales; estructura de los conjuntos medibles; teoremas de Helly; teorema de Arzelá.

10. Nociones de espacios de Lebesgue. Espacio L^2; desigualdad de Schwarz; completidad; sistemas ortogonales; desigualdades de Holder, Minkowsky, espacios L^p; completidad; aproximación por funciones elementales y continuidad en media-p.

11. Descomposición de Lebesgue y derivación. Caracterización de funciones absolutamente continuas y singulares; derivabilidad de funciones monótonas y de la intgral indefinida; integrabilidad de la derivada; definición descriptiva de la integral de Lebesgue; funciones derivables en todo punto

12. Integral en el plano; teorema de Fubini y de Tonelli; producto de convolución; teorema de Young.

13. Clases de Baire: teorema de categoría; caracterización de la la. clase.

14. Funciones de conjunto; descomposición de Hahn; teorema de Lebesgue-Ni-

kodym; teorama de Riezz de la integral de funciones de L^p.

15. <u>Nociones de funcionales lineales</u>: teorema de representación de Riesz.

ORIENTACION BIBLIOGRAFICA

A) En este curso seguiremos especialmente el libro de NATANSON, Teoría de Funciones Reales (traducción alemana o inglesa) y el de VALLE POUSSIN, Integrale de Lebesgue (última edición). Pueden usarse también:

1) Sgastume Berra, Introducción a la Mat. Superior.
2) Graves, The theory of Functions of real variables, (N. York, 1956).
3) Jeffery, Theory of Func. of a real variable (University of Toronto).
4) Titchmarsh, theory of functions. Oxford, (capitules I,X,XI, XII y parte del XIII).

Para un primar estudio recomendamos especialmente los libros sobre Funciones Reales de REY PASTOR, así como los apuntos mimiegrafiados del mismo autor. A los que lean el ruso se les recomienda muy especialmente el notable libro de Alexandroff-Kolmogoroff, Introducción a la teoría de Funciones reales.

Una iniciación a la teoría de la integral lo da el libro de Burkill sobre la integral de Lebesgue.

B) Para un estudio profundo de la teoría clásica de Funciones Reales:

1) Caratheodory, Vorlesungen uber reelle Functionen.
2) Hausdorff, Mengenlehre, 3a. edición, N.York, Dover, 1944(este libro famoso trata a fondo la llamada teoría descriptiva: conjuntos, funciones médibles, clases de Baire etc.., pero no contiene la teoría de la integral)
3) Hobson, The theory of Functions of a Real Variable (de carácter enciclópedico).
4) Hahn, Reelle Functionen (reeditado ~~xxx~~ en forma modificada y completada por Rosenthal-Hahn; ver Rosenthal, Set Functions).

Para exposiciones más modernas:

5) Riesz-Nagy; Functional Analysis (1a. parte; es uno de los mejores libros existentes en la literatura).
6) Aumann, Reele Function (de cáracter abstracto, muy completo).

C) El estudio de la teoría de la integral puede proseguirse así

1) Halmos, Measure Theory.

2) Kestelman, Modern Theories of Integratien.

3) Rudin, Principles of Analysis.

4) Munroe, Introduction to Measure theory.

5) Lebesgue, Lecons sur l'integration (última edición).

6) Cotlar, apuntes mimeografiados (colección Seminarios y Cursos de la Facultad).

Para un estudio superior de la teoría de la integral:

7) Saks, Theory of the Integral, 1937 (considerado por muchos el mejor libro sobre integral).

8) Bourbaki, fascícule sobre integración (muy moderno y abstracto).

D) Queda fuera de los límites del presente curso la teoría de espacios funcionales. Su estudio puede hacerse en:

1) Kolmogoroff-Femin, Functional Analysis, editado por Graylock Press (obra muy completa, notablemente didáctica que comienza desde los principios)

2) Riesz-Nagy, citada más arriba (una de las obras más notables).

3) Lyustèrnik-Sobolieff, Elementos de Análisis Funcional (traducción alemana) (muy didáctica).

4) Loomis, Introductions to Harmonic Analysis.

5) Varsavsky, Algebras Topológicas. Para una iniciación al tema, también los apuntes de Cotlar citados más arriba.

- - - - - - - - - - -