PROGRAMA DE LAAASIGNATURA: "FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA"

Doctorado en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bs. As., curso de 1956.

PARTE I: Fundamentos de la Geometría

BOLILLA I:
Orígenes históricos del problema. Los dos problemas básicos de la fundamentación de la matemática. La geometría egipcio-babilónica. Thales. Pitágoras. El concepto de ciencia deductiva en Aristóteles. El ejemplo de los "Elementos" de Euclides. El papel de la lógica en las ciencias deductivas. El problema de fundamentar el punto de partida: los axiomas. La teoría kantiana sobre los fundamentos de la geometría. Los juicios sintéticos "a priori", según Kant. Valoración actual de la posición aristotélica y de la kantiana.

BOLILLA II:
La geometría no-euclídea. El postulado V de Euclides. Proposiciones a las que equivale. Tentativas de demostración directa: Proclo. Precursores. -- Gauss. La obra de Lobatchefsky y de J. Bolyai. Igual legitimidad lógica de las geometrías euclidea y no-euclidea. Problemas planteados por la aparición de la nueva geometría. Distinción entre geometría formal y geometría interpretada (física). Diferentes interpretaciones de un sistema formal. Ejemplos euclídeas de geometría no-euclídea. Diversas formalizaciones de una misma estructura real. El papel de las definiciones convencionales. La estructura del espacio real. Parte objetiva y parte no objetiva en una geometría física. Crítica a Kant: lógica y experiencia en geometría

BOLILLA III:
Axiomática y Geometría: La geometría formal como lenguaje vacío. Su utilidad en relación con posibles interpretaciones. Modelos. El problema de la no-contradicción. No contradicción de la geometría no-euclídea respecto de la euclídea, y vice-versa. La geometría analítica, y las diversas formas del sistema formal euclídeo. Analogía con el caso de la geometría descriptiva. El problema de la no-contradicción de las geometrías reducido al de la no-contradicción de la aritmética de los Nos. reales. Reducciones ulteriores. Aritmetización de la geometría, y de la matemática. Reducción al problema de fundamentar el No. natural. La matemática actual y el método axiomático. Papel histórico de la obra de Hilbert. Investigación lógica de los sistemas axiomáticos: el problema de la deducción y el de la no contradicción. La lógica en geometría aplicada: las convenciones "ensambladas".

PARTE II: Fundamentos de la Aritmética

BOLILLA IV:
El número natural. Paralelo histórico entre la filosofía de la geometría y la filosofía de la aritmética. La posición de los egipcios-babilónicos. Pitágoras. Euclides. Kant. Kronecker y la aritmetización de la matemática La axiomática de Peano: las dos formas de entenderla (a la manera euclídea y como definición implícita). Diferentes modelos de los postulados de Peano. Necesidad de una aritmética no formal. La teoría Frege-Russell. Número cardinal definido a partir de "conjunto". Definición de "cero", "siguiente", y"número natural". Transformación de las definiciones recursivas en nominales. Demostración de los postulados de Peano en esta interpretación Utilidad del método de Peano: economía de trabajo. Reducción de la aritme-
ceptos fundamentales

//.

tica a la lógica. El papel de la lógica en matemática: reducción de los conceptos fundamentales, teoría de la deducción. Necesidad de una fundamentación de la lógica, desde el punto de vista de la fundamentación matemática.

PARTE III: Lógica Elemental

BOLILLA V:

Lógica proposicional. Lógica y Lenguaje. Noción general de verdad lógica, y de deducción lógica. Sistemas semánticos y sistemas sintácticos. Primera aproximación a la lógica, desde el punto de vista semántico. - Verdad y Falsedad; condiciones de verdad y significación. Identidad de significado. Designación y significado: símbolos incompletos. Conexiones, enunciados simples y complejos. Conexiones extensionales. Conjunción, negación, disyunción, condicional y bicondicional. Tablas de verdad, para todo enunciado complejo. Tautología. Contradicción. Consistencia. Implicación. Equivalencia lógica, e igualdad de significado. - Reducción de todas las conexiones a tres, dos o una fundamentales. Implicación e inferencia lógicas. Algunas tautologías e inferencias. Las definiciones, en semántica.

BOLILLA VI:

Cuantificación y conjuntos virtuales. Variables, y su rango. Funciones sentenciales, y enunciados. Cuantificación. Empleo en matemática. Restricción del rango: cuantificadores restringidos. Relación entre el -- concepto de "Conjunto" y el de "función sentencial". Primera aproximación: teoría virtual de conjuntos. Su reducción a la teoría de la cuantificación. Los símbolos de conjuntos, y su papel como símbolos incompletos. Operaciones y relaciones entre conjuntos, en teoría virtual. - Método de demostración de las propiedades de las operaciones y relaciones conjuntísticas. Operaciones "booleanas": álgebra de conjuntos. Las operaciones fundamentales.

PARTE IV: Teoría de conjuntos

BOLILLA VII:

Teoría real de conjuntos: Distinción entre una teoría virtual y una -- real de conjuntos. Necesidad matemática de una teoría real. Funciones sentenciales primitivas de una teoría real. Teorías de conjuntos puras Presuposiciones ontológicas de una teoría real: principio de abstracción de conjuntos, y principio de extensionalidad. Definición de identidad: diferentes métodos. Descripciones, según Russell y según Quine. Cuantificadores numéricos. Operaciones sobre familias cualesquiera de conjuntos. Intersección, Unión, Partes, Clase unitaria, Par no ordenado. Las operaciones booleanas en teoría real. Relaciones: Teoría virtual. Relaciones, y funciones sentenciales a dos o más variables. Teoría real de relaciones, considerándolas como distintas a las clases. Nociones sobre el principio de abstracción y de extensionalidad en una teoría tal.

BOLILLA VIII:

Teoría conjuntista de las relaciones. La noción de par ordenado (y de tupla ordenanda) como primitiva. Primera reducción a una teoría conjuntista. Como demostrar el principio de abstracción y el de extensionalidad, para relaciones. Reducción de la noción de par ordenado (y de n-tupla ordenada) a la de conjunto: método de Wiener-Kuratowsky. Teoría conjuntista de las relaciones: formulación y estructura. Dominio. Codominio, campo. Restricción. Propiedades y operaciones entre relaciones. El producto relativo. Relación conversa de una relación. Relaciones plurinivocas, uni-plurivocas, biunivocas. Relaciones de equivalencias, de - cuasi-orden, de orden parcial. Ejemplos. Componentes conexas de una relación.

BOLILLA IX:

Funciones. Clases de Equivalencia. Estructuras. El concepto intuitivo de "función". Relaciones y funciones. Imágenes. Funciones multivalentes. Función inversa. Las operaciones y relaciones entre conjuntos del dominio y del codominio; sus imágenes según la función y la función inversa. Funciones de varias variables. Operaciones. El producto cartesiano o directo de conjuntos. Potenciación conjuntística. Representaciones gráficas. Proyecciones. Definición de relaciones y operaciones en el producto cartesiano. Relaciones de equivalencia y clases de equivalencia. Compatibilidad respecto de operaciones y funciones. Definición por abstracción. Aplicaciones a la extensión del concepto de número, a partir del No. natural. La fundamentación del número entero, del número racional, del número real, del número complejo. Noción de estructura, y de "escala de estructura" (según Bourbaki).

BOLILLA X.

Sistemas axiomáticos. Sistemas axiomáticos, según la teoría de conjuntos. Modelo de un sistema. Consistencia. Completidad. Integridad. Categoricidad, Saturación. Suficiencia. Independencia. Algunos ejemplos. La aritmética de Peano. Axiomática geométrica. Algebra abstracta. Grupos. Anillos. Anillos de integridad. Cuerpos. Orden simple. Orden parcial y cuasi orden. Reticulados. Reticulados distributivos. Algebras de Boole. Topologías. Axiomatización de una teoría, y de la matemática. La lógica y la axiomática. Problemas planteados por la axiomática.

BOLILLA XI.

Aritmética transfinita. Números cardinales finitos y transfinitos. Operaciones, igualdades y desigualdades. Tipos de Orden. El tipo de orden de los números naturales, enteros, racionales y reales. El problema de Souslin. Conjuntos bien ordenados. Números ordinales. Operaciones, y desigualdades. Clases de ordinales; las "alef" de Cantor. El axioma de elección y sus aplicaciones. El axioma de Zermelo. Axioma de buena-ordenación. Tricotomía. El teorema de Zorn, en sus varias formas. Equivalencias, consecuencias.

PARTE V: Lógica matemática

BOLILLA XII

Algebra de Boole. El álgebra de Boole como sistema deductivo. Axiomas, Teoremas. El teorema de las formas canónicas. Filtros e Ideales. Interpretación lógica de estas álgebras y sus filtros. El teorema de existencia de ultrafiltros. El problema de la representación conjuntista de las álgebras de Boole. Caso finito. Caso infinitivo, usando el teorema de Zorn. Caso infinito, atómico, completo, distributivo general.

BOLILLA XIII:

Cálculos lógicos. Importancia y utilidad de estos cálculos. Cálculo sentencial. Axiomas, reglas de inferencia, metateoremas, teorema de Post. Cálculo funcional de orden uno. Formas prenexas. Modelos, Sistemas axiomáticos, vistos sintácticamente. El teorema de completicidad de Gödel. El teorema de Lwenheim-Skolem. Consecuencias. Importancia filosófica de estos teoremas. Nociones sobre cálculos funcionales de orden superior. Ejemplos de cálculos en los que no se cumple el teorema de completidad.

BOLILLA XIV.

Antinomias lógicas, lógicas superiores, problemas metalógicos y matamatemáticos. Antinomias de Burali-Forti, de Cantor, de Russell, de Richar de Berry, de Grelling, etc., etc. Problemas que plantean, y sus posible soluciones. Soluciones logísticas: teoría de los tipos, lógicas superio res, "set-theory". Soluciones matemáticas: la metamatemática de Hilbert y el problema de la no contradicción de la aritmética. Nociones sobre e teorema de Gödel de 1931, y sus consecuencias. Otras soluciones: el int cionismo de Brouwer. El intuicionismo de Heyting. Nociones sobre una ló gica intuicionista. Lógicas polivalentes. Lógicas modales. Paradoja de Skolem.

GREGORIO KLIMOVSKY