Prof.Dr.Ing.Juan I. Blaquier
Exp.6235/53

1953

M – 20

PROGRAMA DE INTRODUCCION A LA MATEMATICA SUPERIOR "B"

Y FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA

I.- T) Fundamentos de la Aritmética: El concepto de número natural y sus ampliaciones sucesivas. Teorías axiomáticas y Método genético. Principio de permanencia de las leyes formales. Isomorfismo aritmético. Aritmética transfinita. Concepto de potencia de un conjunto infinito. Conjuntos numerables: definición, propiedades y ejemplos más importantes. Potencias del conjunto de los números algebraicos. Potencia del continuo. Definición y ejemplos. El conjunto de todas las funciones no es numerable ni tiene la potencia del continuo.

P) Establecida la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números complejos de componentes naturales (o el de los números racionales) y el de los números naturales mediante el proceso diagonal, resolver los dos problemas siguientes:

a) Dado el número $(j;k)$ (o el $\frac{j}{k}$), hallar el número natural n que le corresponde;
b) Dado el número natural n, hallar el número $(j;k)$ (o el $\frac{j}{k}$), del cual es correspondiente.

Probar, estableciendo las pertinentes correspondencias biunívocas, que los siguientes conjuntos tienen la potencia del continuo: el de los números reales positivos, el de los números reales negativos, el de todos los números reales, el de los irracionales comprendidos entre 0 y 1, el de los irracionales positivos, el de los irracionales negativos, el de todos los irracionales. Interpretación geométrica y gráfica de las transformaciones utilizadas. Correspondencia continua de Klein entre el conjunto de todos los números reales y el de los reales comprendidos entre 0 y 1.

II.- T) Criterios de igualdad, desigualdad y no comparabilidad de dos números cardinales infinitos. la no acotación de estos números. Su demostración mediante el conjunto de los subconjuntos de un conjunto infinito. Axioma de Zermelo. Teorema de Cantor-Bernstein. Potencia del conjunto de los puntos de un cuadrado. Potencia del conjunto de todas las funciones continuas de una variable . Operaciones con números cardinales finitos e infinitos.

P) Demostrar que si $\underline{a}$ es la potencia de los conjuntos numerables, $\underline{c}$ la del continuo y $\underline{n}$ es un número natural, se verifica que:

$$a + n = a, \quad a + a = a, \quad c + n = c, \quad c + a = c, \quad c + c = c, \quad a^a = c.$$

III.- T) Conjuntos ordenados. Semejanza de conjuntos. Tipos de orden. Operaciones con números transfinitos (adición y multiplicación). Conjuntos bien ordenados. Números ordinales transfinitos. Principio de inducción transfinita.

P) Correspondencia entre los puntos de un segmento y los del cuadrado que tiene por lado ese segmento. Criterio de König. Correspondencia completa (incluyendo los lados del cuadrado.

/././.

Probar, estableciendo las pertinentes correspondencias biunívocas, que los siguientes conjuntos tienen la potencia del continuo:

a) el de los puntos de un plano métrico euclidiano,
b) el de los puntos de una franja de contornos paralelos,
c) el de los puntos de un círculo,
d) el de los puntos de un cubo,
e) el de los puntos del espacio métrico euclidiano.

Probar, mediante la aplicación del Teorema de Cantor-Bernstein, que el conjunto de los puntos de un recinto plano o especial métrico euclidiano tiene la potencia del continuo.

IV.- T) Espacios métricos. El espacio enedimensional euclidiano es métrico (en el sentido de Fréchet). Diámetros. Acotación. Compacidad. Teorema de Borel-Lebesgue para los espacios métricos compactos en si.

P) Fundamentación axiomática de las ciencias deductivas. Objetivación de las geometrías no euclidianas. Independencia del 5º postulado de Euclides. La nueva axiomática. Compatibilidad, independencia y categoricidad de los axiomas de un sistema. Sistemas equivalentes. Validez de las demostraciones para cualquier interpretación de los antes primitivos. Ejercicios monográficos de aplicación.

V.- T) Continuidad de las funciones en los espacios métricos. Continuidad uniforme en esos espacios. Funciones semicontinuas. Sus propiedades fundamentales. Teorema de Weierstrass para las funciones semicontinuas en espacios métricos compactos en si.

P) Sistema aritmético de Peano. Demostración de la compatibilidad, independencia absoluta y categoricidad de los axiomas de Peano. Demostración de las propiedades de la adición y de la multiplicación deducidad de esos axiomas y de las respectivas definiciones de suma y producto. Método de recurrencia.

VI.- T) Conjuntos completos en sentido absoluto y con respecto a otro conjunto. Sumas y productos. Condición necesaria y suficiente de la continuidad superior (o inferior). Conjuntos de puntos de nivel (en particular los ceros) de una función continua.

P) Sustituciones de n elementos. Grupos de sustituciones. Subgrupos de un grupo dado. Demostrar que todo grupo admite por lo menos dos subgrupos: el grupo mismo y el constituido por la identidad. Grupos de transformaciones. Ejemplo. Concepto abstracto de grupo: su definición axiomática. Interpretaciones. Modelos finitos e infinitos.

VII.- T) Conexión. Conjuntos conexos. Ejemplos. Teorema de Bolzano-Weirestrass relativo a las funciones continuas definidas en conjuntos conexos. Condición necesaria y suficiente para que un conjunto de puntos interiores de E_n sea conexo.

P) Lógica matemática: Relación de pertenencia de un elemento a su clase. Relaciones de inclusión, intersección y disyunción entre clases, y sus comple-

/./.