



*1821 Universidad de Buenos Aires*

## **Resolución Consejo Directivo**

**Número:** RESCD-2024-1603-E-UBA-DCT#FCEN

CIUDAD DE BUENOS AIRES

Lunes 30 de Septiembre de 2024

**Referencia:** EX-2023-07735628- -UBA-DMESA#FCEN - POSTGRADO - Sesión  
23/09/2024

---

### **VISTO:**

La nota presentada por la Dirección del Departamento de Matemática, mediante la cual eleva la información del curso de posgrado Espacios Simétricos (DOC8800870) para el año 2024,

### **CONSIDERANDO:**

lo actuado por la Comisión de Doctorado,

lo actuado por este Cuerpo en la sesión realizada el día 23 de septiembre de 2024,

en uso de las atribuciones que le confiere el Artículo 113° del Estatuto Universitario,

**EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD**

**DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

**RESUELVE:**

**ARTÍCULO 1º:** Aprobar el dictado del curso de posgrado Espacios Simétricos (DOC8800870) de 64 horas de duración, que será dictado por el Prof. Adj. Gabriel Larotonda.

**ARTÍCULO 2º:** Aprobar el programa del curso de posgrado Espacios Simétricos (DOC8800870) que como anexo forma parte de la presente Resolución, para su dictado en el segundo cuatrimestre de 2024.

**ARTÍCULO 3º:** Aprobar un puntaje máximo de tres (3) puntos para la Carrera del Doctorado.

**ARTÍCULO 4º:** Establecer un arancel de CATEGORÍA NULA, estableciendo que dicho arancel estará sujeto a los descuentos y exenciones estipulados mediante la Resolución CD N.º 1072/19. Disponer que los fondos recaudados ingresen en la cuenta presupuestaria habilitada para tal fin, y sean utilizados de acuerdo a la Resolución 072/03

**ARTÍCULO 5º:** Disponer que, de no mediar modificaciones en el programa, la carga horaria y el arancel, el presente Curso de Posgrado tendrá una vigencia de cinco (5) años a partir de la fecha de la presente Resolución.

**ARTÍCULO 6º:** Comuníquese a todos los Departamentos Docentes, a la Dirección de Estudiantes y Graduados, a la Biblioteca de la FCEyN y a la Secretaría de Posgrado con copia del programa incluida. Cumplido, pase MATEMATICA#FCEN y resérvese.

## ANEXO

### PROGRAMA

#### **Objetivos**

El objetivo de la asignatura es dar una presentación moderna, del estudio de las geometría de las variedades diferenciables que son espacios homogéneos por la acción de un grupo de Lie (llamados espacios simétricos). Parte integral de la presentación es que el alumno domine la teoría y los ejemplos en los siguiente temas:

- a) conexiones en variedades (según Cartan): campos de Jacobi, Killing, automorfismos de la conexión
- b) espacios simétricos: presentación según Loos usando simetrías y otras presentaciones. Ejemplos relevantes.
- c) espacios simétricos de Cartan: grupos de Lie y subgrupos de Lie-Cartan, automorfismos involutivos y el cociente como espacio simétrico de Loos
- d) espacios de métrica interior: variedades de Finsler que son a la vez espacios simétricos, propiedades de las geodésicas y la métrica. Nociones elementales de curvatura y topología.

#### **Programa**

Estudiaremos en esta materia la geometría Riemanniana -y su prima hermana, geometría Finsleriana- de los espacios simétricos (que poseen abundancia de simetrías geodésicas) centrada en: grupos de Lie, grupos de matrices, de operadores, grupos de difeomorfismos de variedades compactas. También veremos ejemplos clásicos de los espacios homogéneos de estos grupos (como por ejemplo, las grassmannianas). Veremos las diferencias entre los casos clásicos (finito dimensionales) y los no clásicos (infinito dimensionales, métricas de Finsler, etc.).

1. Variedades diferenciables, grupos de Lie: nociones elementales de grupos de Lie  $G$  como

variedades diferenciables y del grupo tangente  $TG$  con sus operaciones. Entornos de la

identidad como generadores de la estructura diferenciable.

2. Grupos lineales y subgrupos: en dimensión finita e infinita, grupos de operadores lineales en

espacios vectoriales, teoremas que garantizan que ciertos subgrupos son en efecto subgrupos de Lie. Subgrupos especiales de operadores: isometrías, grupo ortogonal, grupo unitario,

grupo simpléctico.

3. Algebras de Lie, correspondencia, Teoremas de Lie: el álgebra de Lie de un grupo de Lie y la representación adjunta. Los teoremas de Lie y de Ado para grupos de dimensión finita. Ejemplos excepcionales en dimensión infinita. Espacios homogéneos de grupos de Lie,  $M = G/K$ . Espacios homogéneos reductivos, triples de Lie. Ejemplos: grassmannianas en contextos finito e infinito dimensional, grassmanniana restringida como operadores de multiplicación, aplicaciones a los grupo de lazo LG.

4. Geodésicas, función exponencial: existencia de función exponencial a partir del teorema de la función inversa, la carta exponencial de un grupo de Lie. Carta exponencial de un espacio homogéneo reductivo  $M=G/K$ , geodésicas.

5. Métricas: métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie clásicos y grupos de funciones. Ejemplos centrales  $GL(H)$  con  $H$  hilbert separable y las métricas Riemannianas y de Finsler que inducen las normas unitariamente invariantes. Ejemplos de métricas en espacios homogéneos reductivos y en espacios homogéneos con propiedades métricas. Las órbitas coadjuntas de un operador acotado. Espacios simétricos y sus generalizaciones no riemannianas.

6. Principios variacionales: caso general y ecuaciones de Euler para grupos de Lie. El Teorema

de Euler-Arnold y sus aplicaciones al grupo de difeomorfismos.

7. Transporte paralelo: nociones elementales de paralelismo, geodésicas y casos concretos para

las métricas estudiadas en la unidad anterior.

8. Espacios de métrica interior: las variedades riemannianas o de finsler como espacios de métrica interior según Gromov. Espacios localmente compactos, curvas geodésicas métricas. Ejemplos.

9. Teoremas de Cohn-Vossen, Hopf-Rinow: las versiones métricas y diferenciable de los teoremas

de Hopf-Rinow, cálculo de la segunda variación. Completitud geodésica versus métrica.

10. Curvatura, Busemann, Alexandrov: nociones de curvatura que se sostienen filosóficamente

sobre la noción riemanniana de curvatura seccional. Invariantes topológicos, triángulos de

comparación.

11. Teorema de Cartan-Hadamard: versiones métrica y diferenciable, consecuencias topológicas.

Revestimientos y geodésicas. Ejemplos en espacios simétricos de operadores.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1] D. Beltita: Smooth homogeneous structures in operator theory. Chapman et Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 137. Chapman et Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[2] H. Busemann: Spaces with non-positive curvature. Acta Math. 80 (1948) 259-310.

[3] P. de la Harpe: Classical Banach-Lie Algebras and Banach-Lie Groups of Operators in Hilbert Space. Lecture Notes in Mathematics 285, Springer, Berlin, 1972.

[4] M. Gromov: Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Based on the 1981 French original. With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by S. M. Bates. Reprint of the 2001 English edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser.

Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[5] S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[6] S. Helgason: Geometric analysis on symmetric spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 39. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[7] J. Jost: Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects. Lectures in Mathematics ETH Zurich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

- [8] S. Lang: Differential and Riemannian manifolds. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] G. Larotonda: Estructuras geométricas para las variedades de Banach. Colección Ciencia Innovación y Tecnología, Editorial de la Universidad Nacional de General Sarmiento, 2012.
- [10] G. Larotonda: The metric geometry of infinite dimensional Lie groups and their homogeneous spaces. Forum Math. 31 (2019), no. 6, 1567-1605.
- [11] G. Larotonda, J. Luna: On the structure group of an infinite dimensional JB-algebra. J. Algebra 622 (2023), 366-403.
- [12] K.H. Neeb: A Cartan-Hadamard Theorem for Banach-Finsler manifolds. Geom. Dedicata 95 (2002) 115-156.
- [13] H. Upmeyer: Banach manifolds and Jordan  $C^*$ -algebras. North-Holland Mathematics Studies, 104. Notas de Matematica [Mathematical Notes], 96. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
- [14] D. R. Wilkins: Infinite-dimensional homogeneous manifolds. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 94 (1994), no. 1, 105-118.

Digitally signed by MARTI Marcelo Adrian  
Date: 2024.09.30 09:35:11 ART  
Location: Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Marcelo Marti  
Secretario  
Secretaría de Posgrado  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Digitally signed by DURAN Guillermo Alfredo  
Date: 2024.09.30 09:47:36 ART  
Location: Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Guillermo Alfredo Duran  
Decano  
Decanato  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales