Buenos Aires, 1 de Agosto de 2017

Informe año sabático

Verónica Becher

Período: Agosto 2016 a Julio 2017

He trabajado de acuerdo al plan de investigación presentado, sobre los llamados *números normales* con un enfoque computacional.

Resumen de labor

Breve introducción al problema de investigación

La condición más básica del azar para números reales se llama normalidad. Son muchas las preguntas que continúan abiertas desde el momento en que Émile Borel definió los números normales, hace más de 100 años. En particular, no se sabe si las constantes matemáticas usuales, como π o la base del logaritmo natural *e*, o la raíz cuadrada de 2, son normales en alguna base. Se cree que sí. Continúa abierta la famosa conjetura de Borel (1950) que dice que todos los números algebraicos irracionales son absolutamente normales.

El problema de dar ejemplos de números normales está esencialmente abierto: todos los ejemplos dados hasta ahora son construcciones ad-hoc que no están definidas mediante propiedades geométricas, ni algebraicas, ni Diofánticas. La gran dificultad es comprender qué propiedades de la teoría de números se relacionan con qué propiedades combinatorias o computacionales de la expansión de los números reales, y viceversa.

La normalidad ha sido estudiada desde la teoría de la probabilidades, la teoría de números, la combinatoria de palabras y, en menor medida, desde una perspectiva computacional.

Durante el sabático me he realizado los siguientes trabajos:

Normalidad para representación por bases enteras y por fracciones continuas. Dimos una construcción de un número real que es normal en todas las bases enteras y también su expansión en fracción continua es normal. El cálculo de los primeros n dígitos de su expansión de fracción continua se realiza en el orden de n^4 operaciones matemáticas. La construcción trabaja definiendo sucesivos refinamientos de subintervalos apropiados para lograr, en el límite, normalidad simple a todas las bases enteras y normalidad de la fracción continua. La dificultad principal es controlar la longitud de estos subintervalos. Para lograrlo, adaptamos y combinamos teoremas métricos conocidos sobre fracciones continuas y sobre expansiones en bases enteras.

Hemos publicado:

Verónica Becher y Sergio A. Yuhjtman. On absolutely normal and continued fraction normal numbers en prensa en *International Mathematics Research Notices* 2017.

Discrepancia de Normalidad y Complejidad Computacional. La discrepancia de normalidad de un número real para una base dada indica cuán rápidamente la expansión de un número real converge a la propiedad de normalidad. Se expresa como una función de la posición de la expansión fraccionaria del número. Gal y Gal (1964) demostraron que para casi todos los números reales la discrepancia de normalidad en cada base es del orden raiz cuadrada de $((\log \log n)/n)$. Mordechay Levin (1979) construyó números absolutamente normales con discrepancia del orden $(\log n)^3/n$. Esta discrepancia es sorprendentemente chica considerando que Schmidt demostró que las discrepancias son necesariamente mayores o iguales a $(\log n)/n$, ver libro de Bugeaud (2012). Nos preguntamos: Para números reales computables, ¿Su velocidad de convergencia a normalidad en distintas bases es independiente de su complejidad computacional?

Dimos una construcción de un número real x tal que para cada base entera b mayor o igual que 2, la discrepancia de los primeros N términos de la secuencia $(b^n x \bmod 1)_{n \geq 0}$ tiene orden asitótico $O(N^{(-1/2)})$. Esta discrepancia está por debajo del orden de discrepancia que tienen casi todos los número reales. Antes de este trabajo no se conocía la existencia de números absolutamente normales con una discrepancia de un orden asintótico tan pequeño.

Hemos publicado:

C. Aistleitner, V. Becher, A.-M. Scheerer y T. Slaman. "On the construction of absolutely normal numbers", aparecerá en *Acta Arithmetica*. 2017.

Un resultado sobre exponentes de irracionalidad y medidas de Hausdorff. Generalizamos el teorema clásico de Jarnik y Besicovitch sobre los exponentes de irracionalidad de los números reales y la dimensión de Hausdorff y mostramos que las dos nociones son independientes. Para cualquier número real a mayor o igual a 2 y cualquier número real b real no negativo menor o igual que $2/a$, mostramos que hay un conjunto de Cantor con dimensión de Hausdorff igual a b tal que, con respecto a su medida uniforme, casi todos los números reales tienen exponente de irracionalidad a. Dimos un resultado análogo relacionando el exponente de la irracionalidad y la dimensión Hausdorff efectiva de números reales individuales.

Hemos publicado:

V. Becher, J. Reimann y T. Slaman. "Irrationality Exponent, Hausdorff Dimension and Effectivization", to appear in Monatshefte für Mathematik, 2017.

Normalidad, Combinatoria de Palabras y Autómatas finitos. Presentamos una variante de las palabras de Bruijn que llamamos *collares perfectos*. Fijemos alfabeto finito. Recordemos que una palabra es una secuencia finita de símbolos en el alfabeto y una palabra circular, o collar, es la clase de equivalencia de una palabra bajo rotaciones. Para enteros positivos k y n, llamamos un collar (k, n)-perfecto si cada palabra de longitud k ocurre exactamente n veces en posiciones que son diferentes modulo n para cualquier convención en el punto de partida. Llamamos a un collar perfecto si es (k, k)-perfecto para algunos k. Probamos que cada secuencia aritmética con diferencia coprima con el tamaño del alfabeto induce un collar perfecto. En particular, la concatenación de todas las palabras de la misma longitud en orden lexicográfico produce un collar perfecto. Para todo k y n, damos una fórmula cerrada para el número de (k, n)-collares perfectos. Finalmente, probamos que cada secuencia periódica infinita cuyo período coincide cn algun collar (k, n) -perfecto, para algun n pasa todas las pruebas estadísticas de tamaño hasta k, pero no todas las pruebas más grandes.

Hemos publicado:

N. Alvarez, V. Becher, P. Ferrari and S. Yuhjtman. "Perfect necklaces", *Advances of Applied Mathematics* 80:48--61, 2016.

Independencia de secuencia infinitas. En este trabajo dimos una noción de independencia basada en autómatas de estados finitos: dos palabras infinitas son independientes si ninguna ayuda a comprimir a la otro utilizando transductores de estado finito con una entrada auxiliar, que computan funciones uno-a-uno. Probamos que, como se esperaba, el conjunto de pares de palabras infinitas independientes tiene medida de Lebesgue 1. Mostramos que la intercalación (en inglés *join*) de dos palabras normales independientes es normal. Sin embargo, la independencia de dos palabras normales no está garantizada si sólo exigimos que su intercalación sea normal. Para probar esto construimos una palabra normal $x_1 x_2 x_3 \ldots$ donde $x_{2n}=x_n$ for every n. Hemos publicado:

V. Becher, O. Carton y P.A. Heiber. "Finite-state independence", 2017, to appear in *Theory of Computing Systems, 2017.*

Caracterizamos la independencia de estado finito de las palabras normales de tres maneras diferentes, utilizando tres tipos diferentes de autómatas finitos que se ejecutan en palabras infinitas (autómatas de Büchi): autómatas finitos con dos cintas de entrada, selectores y intercaladores (en inglés *shufflers)*. Dimos un algoritmo para construir un par de palabras normales independientes. Desafortunadamente, el algoritmo tiene una complejidad computacional doblemente exponencial.

N. Alvarez, V. Becher y O. Carton. "Finite-state independence and normal sequences", en evaluación 2017.

Normalidad y Ciencias de la computación. Este capítulo que escribimos junto con Olivier Carton es una introducción a la teoría de números normales. Presentamos cinco diferentes formulaciones equivalentes de normalidad y probamos su equivalencia con todo detalle. Cuatro de las definiciones son combinatorias y una es en términos de autómatas finitos, análogos a la caracterización de la aleatoriedad de Martin-Lööf en términos de máquinas de Turing. Todos los ejemplos conocidos de números normales se han obtenido por construcciones. Se muestran tres construcciones de números que son normales a una base dar y dos construcciones de números que son normales a todas las bases enteras. También probamos el teorema de Agafonov que establece que un número es normal a una base dada exactamente cuando su expansión en esa base es tal que cada subsecuencia seleccionada por un autómata finito es también normal.

V. Becher and O. Carton, Chapter "Normal numbers and Computer Science" In "*Sequences, Groups, and Number Theory*", Valérie Berthé and Michel Rigó editors. Trends in Mathematics Series, Birkhauser/Springer. Draft Julio, 2017.

Estancias de investigación

1. Institut de Recherche en Informatique Fondamentale (IRIF) CNRS-Université Paris Diderot durante el mes de Octubre 2016
2. Erwin Schrödinger International Institute for Mathematics and Physics (ESI), Universität Wien durante los meses de noviembre y diciembre 2017
3. Institut de recherche mathématique avancée (IRMA), Université Strasbourg durante el mes de junio 2016.

Conferencias dictadas

1. Oradora invitada en Fourteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis , Daejeon, Republic of Korea, Julio 24 - 27, 2017.
2. Charla invitada "Normality together with other properties", en Number theory seminar Nancy-Metz, Institut Élie-Cartan de Lorraine, June 1, 2017. slides
3. Charla invitada sobre "Construction of normal numbers", Workshop Normal Numbers: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects. Erwin Schrödinger International Institute for Mathematics and Physics (ESI) , 14-18 November, 2016.
4. Charla "Finite-state independence and normal sequences" LIA INFINIS Workshop 4 November 2016, Paris.
5. Conferencia invitada "Randomness!", 28th European Summer School in Logic, Language and Information, Bolzano-Bozen, 23 August, 2016.

Participación en encuentros científicos

1. Conference on "Prime Numbers and Automatic Sequences : Determinism and Randomness", Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Marseille, France, May 22 - 26, 2017.

Organización de encuentros científicos

17th Latin American Symposium on Mathematical Logic (SLALM 2017), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, June 26 - 30, 2017.

Publicaciones en el período 1 de Agosto 2016 a 31 de julio 2018

1. V. Becher and S. Yuhjtman. "On absolutely normal and continued fraction normal numbers", enviado y aceptado 2017, en prensa en ***International Mathematics Research Notices.***
2. C. Aistleitner, V. Becher, A.-M. Scheerer and T. Slaman. "On the construction of absolutely normal numbers", enviado y aceptado 2017, en prensa en *Acta Arithmetica*.
3. N. Alvarez, V. Becher and O. Carton. "Finite-state independence and normal sequences", enviada 2017.
4. V. Becher, O. Carton and P.A. Heiber. "Finite-state independence", enviado 2016 y aceptado en 2017 *Theory of Computing Systems.*
5. V. Becher, J. Reimann and T. Slaman. "Irrationality Exponent, Hausdorff Dimension and Effectivization", en prensa en *Monatshefte für Mathematik*, enviado 2016, aceptado 2017.
6. N. Alvarez and V. Becher. "M. Levin's construction of absolutely normal numbers with very low discrepancy", *Mathematics of Computation* 86(308): 2927-2946, enviado 2015, aceptado 2016 publicado 2017.
7. N. Alvarez, V. Becher, P. Ferrari and S. Yuhjtman. "Perfect necklaces", *Advances of Applied Mathematics* 80:48--61, enviado y aceptado 2016.
8. V. Becher and O. Carton, Chapter "Normal numbers and Computer Science" In "*Sequences, Groups, and Number Theory*", Valérie Berthé and Michel Rigó editors. Trends in Mathematics Series, Birkhauser/Springer. Draft Julio, 2017.

EXACTAS UBA

Ref.: Exp. (FCEN) Nº 490.361 Vinc. 001

Ciudad de Buenos Aires, 11 SEP 2017

VISTO lo dispuesto en el artículo 50º del Estatuto Universitario que instituye el Año Sabático para profesores regulares de la Universidad,

CONSIDERANDO:

Que por Resolución CD Nº 0210/16 se solicitó al Consejo Superior se autorice a la Dra. Verónica Andrea Becher, Profesora Regular Asociada con dedicación exclusiva del Departamento de Computación a hacer uso del Año Sabático,

Que por Resolución CS Nº 4677/16 se aprobó dicha solicitud otorgando licencia entre el 1 de agosto de 2016 y hasta el 31 de julio de 2017,

Que en cumplimiento con el Art. 12º de la Resolución CS Nº 4518/93, la Dra. Verónica Andrea Becher presentó su informe de actividades,

Que es necesario cumplir con lo establecido por los Art. 13º y 14º de la citada resolución,

Lo aconsejado por la Comisión de Enseñanza, Programas y Planes de Estudio,

Lo actuado por este cuerpo en la sesión realizada en el día de la fecha,

En uso de las atribuciones que le confiere el art. 113º del Estatuto Universitario,

EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES RESUELVE:

Artículo 1º: Aprobar el informe correspondiente a las actividades desempeñadas por la Dra. Verónica Andrea Becher durante su Año Sabático.

Artículo 2º: : Enviar un ejemplar del informe a la Biblioteca de esta Facultad.

Artículo 3º: Regístrese, notifíquese a quienes corresponda, elévese al Consejo Superior y cumplido, archívese.

RESOLUCIÓN CD Nº 2133
13 votos afirmativos (unanimidad)

Dr. JORGE ZILBER
SECRETARIO ACADEMICO ADJUNTO

Dr. JUAN CARLOS REBOREDA
DECANO